© 2025 IEEE。本文为已发表于 IEEE可视化与计算机图形学汇刊 的作者版本。该记录的最终版本可见：
xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx/

具有电阻距离的图绘制应力模型

Yosuke Onoue

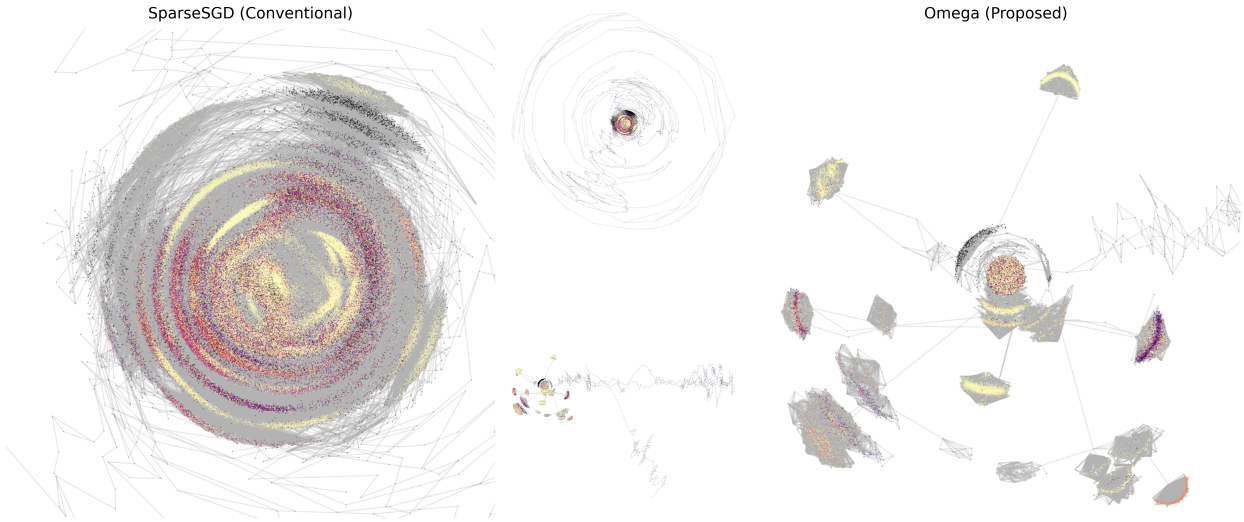

图1：由 SparseSGD（传统方法）和 Omega（提出的方法）生成的 web-Stanford图 的布局对比（$|V| = 255,265$，$|E| = 1,941,926$）。节点根据其核数进行着色。传统的 SparseSGD 方法会生成密集且难以阅读的“毛线团”，遮挡图的结构。相比之下，我们提出的 Omega 算法成功理清了图的结构，展现出清晰的结构组件，并将高核数节点（中心）与外围结构分离。放大视图突出了 Omega 如何保留在 SparseSGD 布局中丢失的细粒度局部结构。

摘要——本文挑战了基于应力的图绘制中使用图论最短距离的惯例。我们提出一种基于电阻距离的新范式，该距离源自图拉普拉斯矩阵的谱，能够更好地捕捉全局图结构。这种方法克服了传统方法在理论和计算上的局限，因为电阻距离可以自然地等距嵌入欧几里得空间。实验表明，该方法提升了邻域保持和簇保真度。我们提出了 Omega，一种线性时间图绘制算法，它将快速电阻距离嵌入与用于随机梯度下降（SGD）的随机节点对采样相结合。借助电阻距离嵌入的高效预计算，这种全面的随机采样策略略比以往算法采用的基于枢轴的采样更加有效、稳健，并能持续获得更低且更稳定的应力值。该算法在加权图和无权图上的复杂度均为 $O(|E|)$。我们的工作建立了谱图论与基于应力的布局之间的联系，为网络可视化提供了一种实用且可扩展的解决方案。

In引术语——应力模型、电阻距离、力导向布局、图绘制、网络可视化

1 引言

力导向算法是网络可视化的基石，能够生成美观且具有结构意义的布局 [36]。应力模型旨在排列节点，使几何距离与理想的图论最短距离相匹配 [20]。几十年来，社群一直将图论最短距离作为标准。

这种约定带来了理论和计算上的挑战。图论最短距离可能无法在欧几里得空间中实现等距嵌入 [22]，，这意味着任何布局都存在固有应力。计算所有点对之间的最短路径代价高昂，尤其是在处理大型图或加权图时。理想距离的选择会深刻影响布局质量，这凸显了针对特定视觉任务 [30]选择更合适度量的必要性。

我们提出以低秩电阻距离取代图论最短距离，作为应力模型的理想度量。电阻距离源自图拉普拉斯矩阵的伪逆 [19]，具有显著优势。它可以等距嵌入欧几里得空间，从而消除固有应力，并与应力优化相兼容。这一谱基础使电阻距离能够比基于路径的度量更有效地捕捉全局图结构，例如簇和瓶颈。最短路径布局擅长沿路径布局，而电阻距离布局则能提升邻域保真度和簇保真度。我们的实验表明，与传统方法相比，这些度量指标均有明显改善。

为充分发挥这些优势，我们提出了 Omega：一种基于 SparseSGD 框架 [40] 构建的新型线性时间图绘制算法。Omega 是我们为这一完整布局方法所取的名称，该方法整合了三个关键组成部分：(1) 用于计算低秩电阻距离嵌入的 RDMDS，(2) 一种新颖且全面的随机节点对采样策略，以及 (3) SparseSGD 优化。电阻距离的低秩结构使得能够高效地预先计算嵌入，这构成了我们算法的基础

• *Yosuke Onoue* 任职于日本大学。电子邮箱：*onoue.yousuke@nihon-u.ac.jp* 收稿日期：*201x* 年 *xx* 月 *xx* 日；录用日期：*201x* 年 *xx* 月 *xx* 日。出版日期：*201x* 年 *xx* 月 *xx* 日；当前版本日期：*201x* 年 *xx* 月 *xx* 日。如需获取本文的重印本，请发送电子邮件至：*reprints@ieee.org*。数字对象标识符：*xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx*

arXiv:2512.21901v1 [cs.GR] 26 Dec 2025

并使随机抽样方法成为可能。这种采样策略是关键的算法创新，使 Omega 有别于传统的基于枢轴点的方法；与先前 SparseSGD 实现中采用的基于枢轴点的策略相比，它始终能取得更低的应力值。由此得到的算法能够生成质量更高的可视化结果，并具有良好的渐近复杂度，尤其适用于加权图。

本工作的主要贡献如下：

- 提出一种新的应力模型范式，以低秩电阻距离作为理想距离。与传统模型相比，该模型生成的布局具有更好的邻域保持能力和簇保真度。
- 提出 Omega，一种新颖的线性时间图绘制算法，将电阻距离计算与用于 SparseSGD 的随机抽样策略相结合。我们证明，这种抽样方法比基于枢轴点的方法更有效、更稳健；而高效的按需电阻距离计算使这一优势成为可能。
- 证明 Omega 对加权图和无权图的复杂度均为 $O(|E|)$，相较于现有的可扩展基于应力的方法具有理论上的性能优势。

本文其余部分安排如下：第 2 节回顾图绘制、应力模型和电阻距离应用方面的相关工作。第3 节介绍电阻距离的数学基础，并给出我们的应力模型构造。第 4 节介绍 RDMDS，这是一种用于在欧几里得空间中获取低秩电阻距离嵌入的线性时间算法。第 5 节详细介绍 Omega 算法，包括线性时间特征值计算，以及结合电阻距离的 SparseSGD 框架。第 6 节介绍计算实验，并比较保真度指标、绘图结果、抽样策略和计算性能。第 7 节展示绘图示例集，并讨论其定性特征。第 8 节讨论我们的方法在理论上的影响和实际益处。最后，第 9 节总结全文，并展望未来研究方向。

2 相关工作

我们的工作建立在三个主要研究领域的基础上：基于应力的图绘制、谱图论，以及电阻距离在图算法中的应用。

2.1 图绘制中应力模型的演进

Kamada 和 Kawai [17]率先将“应力”引入图绘制，将布局表述为一个能量最小化问题，使几何距离与图论最短距离相匹配。Gansner、Koren 和 North [15] 借助应力主化取得了突破。可扩展的方法包括多层技术 [14,26], 、低秩近似 [18], 和稀疏模型。Ortmann 等人 [32] 提出了稀疏应力模型，在节点对的一个稀疏子集上进行优化。Zheng 等人 [40] 将这一方法改造为随机梯度下降，并提出 SparseSGD，通过基于枢轴的采样处理百万节点图。Brandes 和 Pich [2] 提出了用于经典多维尺度分析的 PivotMDS。

扩展方向包括受约束布局 [8,9,38] 和非欧几里得空间 [4,27,28,39]。然而，这些研究主要使用图论最短距离。理想距离的选择鲜有讨论 [30]。我们提出以电阻距离作为一种具有理论依据的替代方案。

2.2 图谱理论与电阻距离

电阻距离最初由 Klein 和 Randic 提出 [19], ，它是通过类比电路定义的一种度量，表示两个节点之间的有效电阻。它在形式上适用于任意一对顶点，并已应用于从化学到机器学习等多个领域 [19]。其理论基础是谱图论 [5], ，该理论通过拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量研究图的性质。拉普拉斯矩阵的特征向量是定义电阻距离的核心，也广泛用于谱聚类，以发现社群结构 [37]。Koren [21] 也探索了直接使用拉普拉斯矩阵特征向量进行谱图绘制的方法，确立了图的谱性质与其视觉表示之间的基本联系。

从图信号处理（图信号处理）的角度来看， [31], 我们的方法可视为一种低通滤波。通过根据图谱的低频分量（即与最小非零特征值对应的特征向量）构建理想距离，我们的模型能够有效滤除高频噪声，并保留图平滑的全局结构，这对于生成清晰且有意义的布局至关重要。

2.3 可扩展图绘制中的电阻距离

近年来，研究者利用电阻距离的强大特性，开发出可扩展的力导向图绘制算法。Eades 等人 [11] 将有效电阻用于谱图稀疏化，以加速布局计算。在此基础上，Meidiana、Hong、Eades 等人 [23–25] 开展了大量工作，致力于开发次线性时间力计算算法。他们提出的 SubLinearForce 算法 [23] 采用基于有效电阻的采样，近似传统力导向模型中的斥力，实现了出色的可扩展性。值得注意的是，他们的工作还提出了一种次线性时间应力最小化方法 [24], ，通过有效电阻对重要节点对进行采样，以便使用基于 SGD 的优化来优化经典应力模型。

我们的工作受到这项研究的启发，但在根本上有所不同。以往研究成功地将电阻距离用于采样，或用于近似模型中的作用力，但这些模型最终仍依赖图论距离；而我们提出了更为根本的转变：在应力模型中，我们以电阻距离取代图论最短距离，将其本身作为理想距离度量（式 1）。这是一个关键区别。我们的创新不在于将电阻距离用于图绘制算法，而在于提出并优化一种新的应力模型，其中电阻距离定义了真实值。

这一概念上的转变带来了关键的算法优势。由于我们的理想距离来自预先计算的低秩嵌入（RDMDS），因此可以在常数时间内计算任意一对节点之间的理想距离。这使我们的算法摆脱了基于枢轴的采样的限制；传统 SparseSGD 因为即时进行最短路径计算的成本很高，不得不采用这种折衷方案。相反，Omega 可以采用全面的随机节点对采样策略。正如我们在实验中所展示的，这种更加均匀的采样能够更有效、更稳健地最小化应力目标函数，无论底层使用何种距离度量。因此，我们的贡献是二者的协同结合：一种有理论依据的新应力模型，以及由该模型促成的更有效采样策略。

3 基于电阻距离的应力模型

本节详细介绍我们提出的应力模型的数学基础。我们首先回顾图的标准定义和一般应力模型框架。随后，我们引入电阻距离，阐释其理论基础，并基于这一度量构建我们新颖的应力模型。

令$G = (V, E)$表示一个无向连通图，其具有$n = |V|$个顶点，边集为E。对于加权图，函数$w: E \to \mathbb{R}^+$为每条边赋予一个正权重。邻接矩阵$\mathbf{A}$和对角度矩阵$\mathbf{D}$按标准方式定义。图拉普拉斯矩阵定义为$\mathbf{L} = \mathbf{D} - \mathbf{A}$。连通图的拉普拉斯矩阵$\mathbf{L}$是半正定的，且恰有一个零特征值，$\lambda_1 = 0$ [37] $0 = \lambda_1 < \lambda_2 \leq$。其特$\cdots \leq \lambda_n$征值记为，相应的特征向量记为$\mathbf{u}$， ，$\mathbf{u}_1 \cdots \mathbf{u}_n$。

应力模型寻找一个d维布局$\mathbf{X} = [\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n]^T \in \mathbb{R}^{n \times d}$，使其最小化：

$$\text{stress}(\mathbf{X}) = \sum_{i<j} w_{ij} \left(\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2 - \delta_{ij} \right)^2, \tag{1}$$

其中，$\|\mathbf{p}_i - \mathbf{p}_j\|_2$是布局中的欧几里得距离，$\delta_{ij}$是理想距离，而$w_{ij}$是对应权重。

© 2025 IEEE。本文为作者已发表于 IEEE可视化与计算机图形学汇刊的论文版本。本记录的最终版本可在以下地址获取：
xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx/

我们也采用一种常见的加权方案，即$w_{ij} = \delta_{ij}^{-2}$ [15, 17, 40]。这使得保留相邻节点之间的距离具有更高的重要性。优化问题随之变为寻找布局$\mathbf{X}^*$，使应力函数最小。

最终布局质量在很大程度上取决于理想距离的选择 δ_{ij}。与图论最短距离相比，电阻距离具有更优的性质。顶点 v_i 和v_j 之间的电阻距离r_{ij}，形式上定义为拉普拉斯矩阵的Moore-Penrose伪逆$\mathbf{L}^+$：

$$r_{ij} = (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j)^T \mathbf{L}^+ (\mathbf{e}_i - \mathbf{e}_j), \tag{2}$$

其中$\mathbf{e}_i$ 是第i</style}个标准基向量。

通过与电路的类比，最容易理解这一定义 [19]。如果将图视为一个每条边都由单位电阻构成的电网络，那么r_{ij}就是节点v_i和v_j之间的有效电阻。如果在v_i处注入单位电流，并在v_j处抽取电流，那么在v_i和v_j之间测得的电压差便是它。这种物理直觉十分有力。通过许多短路径相连（低电阻连接）的节点，其电阻距离较小；仅通过少数长路径或瓶颈（高电阻连接）相连的节点，其电阻距离则较大。Moore-Penrose伪逆$\mathbf{L}^+$ 自然源于这一类比。它在零均值电势约束下，为基尔霍夫电流定律提供唯一的电压解，从而有效地将电路接地 [37]。

伪逆可以通过$\mathbf{L}$的谱分解表示：

$$\mathbf{L}^+ = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\lambda_k} \mathbf{u}_k \mathbf{u}_k^T. \tag{3}$$

由此可得一个基于拉普拉斯矩阵的特征值和特征向量的电阻距离公式：

$$r_{ij} = \sum_{k=2}^{n} \frac{(u_{k,i} - u_{k,j})^2}{\lambda_k}, \tag{4}$$

其中$u_{k,i}$ 是特征向量$\mathbf{u}_k$的第i个分量。

提高计算效率的一个关键思路是采用低秩近似。对于给定的秩$d \ll n$，我们将低秩电阻距离定义为仅对前d 个非零特征值求和：

$$\tilde{r}_{ij}^{(d)} = \sum_{k=2}^{d+1} \frac{(u_{k,i} - u_{k,j})^2}{\lambda_k}. \tag{5}$$

这种近似能够捕捉图的主导谱成分，它们对应于图的全局结构。图 2 直观地展示了秩 d 变化对最终布局的影响。

关键的是，这种低秩电阻距离可以等距嵌入到d维欧几里得空间中。为每个顶点v_i 定义一组嵌入坐标$\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$，如下所示：

$$\mathbf{X}_{i,:} = \left(\frac{u_{2,i}}{\sqrt{\lambda_2}}, \frac{u_{3,i}}{\sqrt{\lambda_3}}, \ldots, \frac{u_{d+1,i}}{\sqrt{\lambda_{d+1}}} \right)^T, \tag{6}$$

任意两点 $\|\mathbf{X}_{i,:} - \mathbf{X}_{j,:}\|_2$之间的欧几里得距离恰好等于低秩电阻距离的平方根，$\sqrt{\tilde{r}^{(d)}_{ij}}$：

$$\|\mathbf{X}_{i,:} - \mathbf{X}_{j,:}\|_2 = \sqrt{\tilde{r}_{ij}^{(d)}}. \tag{7}$$

这种等距嵌入性质是我们方法的基础。这意味着，在一个d维空间中存在一种几何构型，其欧几里得距离与电阻距离的平方根完全匹配。相较于图论中的最短距离，这是一个关键的理论优势，因为最短距离通常无法在不产生失真的情况下完成嵌入，因而具有固有的应力。需要注意的是，这个d维嵌入$\mathbf{X}$ 仅用于计算理想距离；最终布局是一个独立的二维实体$\mathbf{Y}$，经过优化以近似这些理想距离。

因此，我们采用一般应力函数（公式 1）来构建应力模型，理想距离 δ_{ij} 基于低秩电阻距离的平方根。自同构节点可能会带来一个问题：它们的嵌入坐标相同，因此理想距离为零。为避免这一情况，我们设置最小距离 ε_d，并将理想距离定义为：

$$\delta_{ij} = \max\left(\sqrt{\tilde{r}_{ij}^{(d)}}, \varepsilon_d \right). \tag{8}$$

与传统模型相比，这种方法具有多项优势，包括自然且无失真的低维嵌入、能够捕捉全局结构的平滑距离函数，以及通过谱方法实现的高效计算。

图 2 中的结果展示了秩 d 的变化所产生的实际影响。对于较小的秩，例如 d = 5,10、和 50，布局能够有效捕捉图的全局结构，使社区发现所识别的各个社群清晰分离。秩过低时（例如 $d = 2$），大量局部信息会丢失，导致布局中的细节结构不够明显。相反，当秩足够大时（$d = 100,500,1000$），布局几乎囊括了图的全部结构信息。然而，这可能导致外围分支趋向于向内卷曲。这一现象是因为电阻距离会缩小外围节点与更靠近核心的节点之间的距离差异，这是高维欧几里得嵌入性质的直接结果。这种权衡表明，选择恰当的较小秩 d 对于生成最能体现图整体结构、且不引入嵌入过程伪影的布局至关重要。

4 RDMDS：电阻距离多维尺度分析

为了将应力模型付诸实践，我们需要一种高效的方法来计算低秩电阻距离嵌入。本节介绍 RDMDS（电阻距离多维尺度分析）。RDMDS 是专为此目的设计的线性时间算法。它通过求出图拉普拉斯矩阵 $\mathbf{L}$ 的 d 个最小非零特征值及其对应的特征向量，为每个顶点计算坐标$\mathbf{x}_i$ 。关键的是，在目标维度 d 为较小常数的前提下，该算法的时间复杂度为 $O(|E|)$。

RDMDS 的核心是正交反幂法 [16]。虽然已有高性能特征值求解器可供使用，但我们仍提供了一个独立实现，以优先保证可移植性，并针对本研究场景提供轻量级解。该迭代算法非常适合求解图拉普拉斯矩阵等大型稀疏对称矩阵的最小特征值。要找到单个特征向量，标准反幂法会迭代求解如下形式的线性方程组：$(\mathbf{L} + \sigma\mathbf{I})\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)}$。其中，$\sigma > 0$ 是一个较小的位移量，它能使矩阵可逆，同时不会显著改变特征向量。为了求出多个正交特征向量，我们采用基于 Gram-Schmidt 正交化 [35]的消去技术对该方法进行扩展。每计算出一个特征向量后，我们就将其从迭代向量中投影出去，以确保该方法收敛到一个新的正交特征向量。通过设定固定的最大迭代次数，我们保证这一过程的计算量有界。

反幂法的每一步都需要求解一个大型线性方程组。为提高收敛速度，我们使用预条件共轭梯度法（PCG）来完成这项任务。它非常适合求解涉及对称正定矩阵的方程组，例如我们的移位拉普拉斯矩阵。我们使用零填充不完全乔列斯基分解（IC(0)） [33]作为预条件器。对于稀疏矩阵 $\mathbf{A}$，预条件器 $\mathbf{K}$ 的计算时间为 $O(|E|)$，求解方程组 $\mathbf{Kz} = \mathbf{r}$ 同样需要 $O(|E|)$ 时间。PCG 方法利用拉普拉斯矩阵的稀疏性，以 $O(|E|)$ 的时间复杂度执行矩阵向量乘法。通过为 PCG 求解器设定固定的最大迭代次数，每个线性方程组都能在 $O(|E|)$ 时间内求解。

现在我们正式证明 RDMDS 的$O(|E|)$复杂度。需要注意的是，传统算法在计算精确

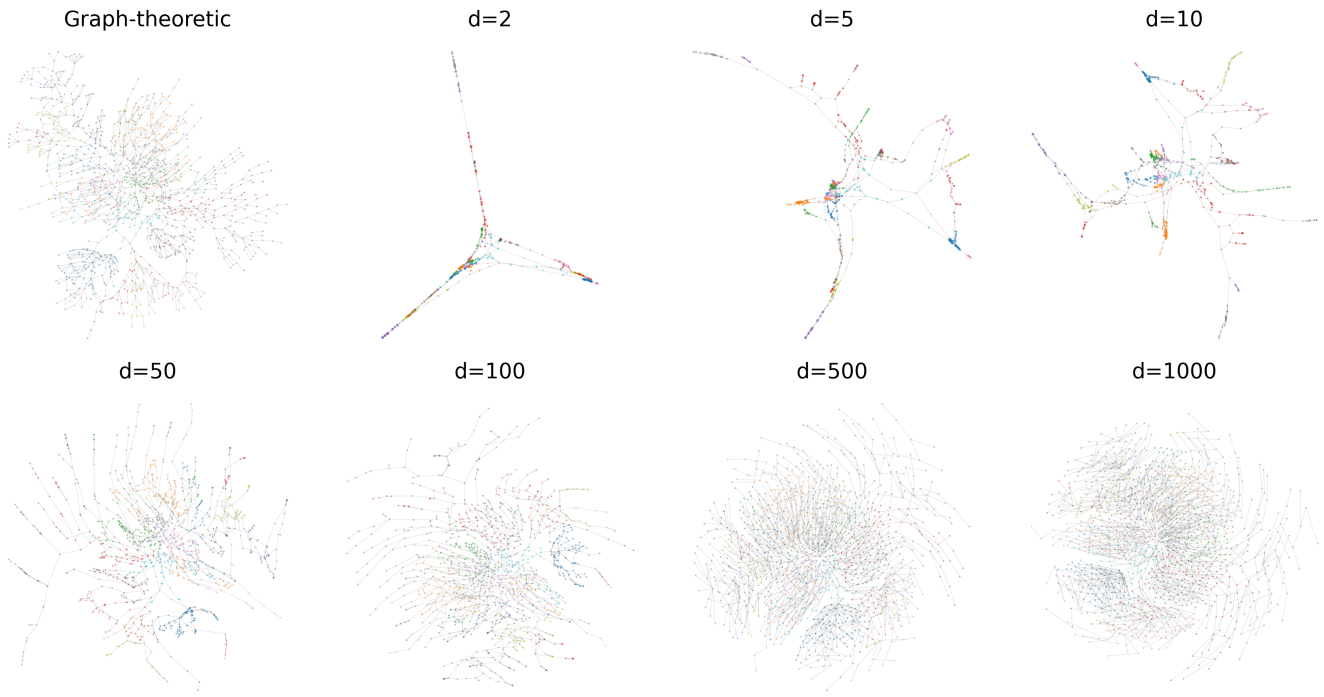

图 2：‘1138_bus‘ 图（$|V| = 1138$，$|E| = 1458$）在 SuiteSparse 矩阵集合中的布局视觉比较 [7]。每个面板展示了通过优化采用不同理想距离度量的应力模型所生成的最终二维布局。左上面板使用传统的图论最短距离。后续面板使用低秩电阻距离，其中用于计算理想距离的嵌入秩 d 有所变化。所有布局均通过应用 FullSGD（1000 次迭代），随后执行应力主化直至收敛生成，节点则按社群着色。这展示了该度量的表现力：较小的秩（$d = 5$, 10，50）通过捕捉全局结构，能够清晰地区分社群；而非常低的秩（$d = 2$）会丢失局部细节。足够大的秩（$d = 100$，500，1000）能够反映图的大部分信息，但可能导致外围分支向内卷曲，这是高维欧几里得嵌入造成的影响。

电阻距离时通常具有近线性时间复杂度 [34]。然而，将其用作应力模型中的理想距离时，并不需要很高的数值精度。RDMDS 算法利用这一特点，通过控制迭代次数来计算低秩近似，以电阻距离近似值而非精确值为代价，实现真正的线性时间$O(|E|)$复杂度。这种权衡非常适合图绘制应用，因为其目标是实现视觉清晰，而非数值精确。

算法的计算成本主要由特征值计算决定，而特征值计算包含多层嵌套迭代。我们分别分析各个组成部分：

1. **预条件器构造：** 对稀疏矩阵 $\mathbf{A}$ 进行 IC(0) 分解需要 $O(|E|)$ 时间，因为它只处理拉普拉斯矩阵中的非零项。

2. **PCG 迭代复杂度：** 每次 PCG 迭代包含：

   - 矩阵-向量乘法 $\mathbf{Ap}$：对于稀疏矩阵，复杂度为 $O(|E|)$
   - 预条件器求解 $\mathbf{Kz} = \mathbf{r}$：使用 IC(0) 时，复杂度为 $O(|E|)$
   - 向量运算（点积、加法）：$O(|V|) \subseteq O(|E|)$

   因此，每次 PCG 迭代的复杂度为 $O(|E|)$。

3. **线性系统求解：** 求解 $(\mathbf{L} + \sigma\mathbf{I})\mathbf{v}^{(k+1)} = \mathbf{v}^{(k)}$ 最多需要 M_{CG} 次 PCG 迭代，因此每次求解的复杂度为 $O(M_{\text{CG}} \cdot |E|)$。

4. **反幂迭代：** 每次反幂迭代执行一次线性系统求解，并针对 $k-1$ 个先前的特征向量进行格拉姆-施密特正交化。正交化的成本为 $O(k|V|) \subseteq O(d|V|) \subseteq O(|E|)$，其中在 d 为常数的连通图中，$|E| \geq |V| - 1$。结合线性系统求解后，每次迭代的成本为 $O(M_{\text{CG}} \cdot |E|)$。

5. **求取 d 个特征向量：** 对于 d 个特征向量中的每一个，我们最多执行 $M_{\text{eig}} \cdot M_{\text{eig}} \cdot M_{\text{CG}}$ 次反幂迭代，因此总复杂度为 $O(d \cdot M_{\text{MME}} \cdot |E|)$。

对于常数参数d、M_{eig}和M_{CG}，总体复杂度可简化为$O(|E|)$。这种线性时间性能对于我们整体方法的可扩展性至关重要。

RDMDS 算法与经典谱图绘制有着深刻的联系 [21]。当$d = 2$时，RDMDS 生成的嵌入等价于纵横比平衡的谱绘制所得到的布局。在谱绘制中，节点位置就是对应于最小非零特征值的特征向量。纵横比平衡变体会将这些特征向量按其对应特征值的平方根倒数进行缩放。这正是 RDMDS 所计算的结果。这表明，我们的模型在无权形式下是经典谱方法的推广，并在基于应力的布局与谱布局这两大范式之间建立了桥梁。

RDMDS 生成的嵌入坐标$\mathbf{x}_i$用途广泛。由于嵌入坐标之间的欧几里得距离对应于电阻距离的平方根，因此可以利用它们高效计算应力模型的理想距离：$\|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\|_2 = \sqrt{\tilde{r}^{(d)}_{ij}}$。这样就无需存储完整的距离矩阵。对于图绘制（$d = 2$），这些坐标可作为出色的初始布局。它们已经捕捉到了图的全局结构。对于更高的d，RDMDS 是一种有理论依据的降维技术，能够保留电阻距离关系。这些坐标不仅是无权电阻距离应力模型的最优解，也是我们接下来要介绍的加权优化的理想起点。

算法1 给出了完整的 RDMDS 流程。该算法以连通图 G 和目标维度 d为输入，并输出所有顶点的嵌入坐标 $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n \times d}$。

© 2025 IEEE。本文为已发表于 IEEE可视化与计算机图形学汇刊 的作者版本。本文记录的最终版本可在以下网址获取：
xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx/

算法1 RDMDS：电阻距离多维尺度分析

要求： 图$G=(V,E)$，包含$n=|V|$个顶点，目标维度d
确保： 嵌入坐标$\mathbf{X}\in\mathbb{R}^{n\times d}$

参数： 移位参数 σ、特征值容差 τ_{eig}、最大特征值迭代次数M_{eig}、共轭梯度容差 τ_{CG}、最大共轭梯度迭代次数 M_{CG}
计算图$\mathbf{L}$的拉普拉斯矩阵G
$\mathbf{A}\leftarrow\mathbf{L}+\sigma\mathbf{I}$ ▷ 平移以使其可逆
$\mathbf{K}\leftarrow$不完全乔列斯基分解$(\mathbf{A})$ ▷ PCG 的预条件器
$\mathbf{X}\leftarrow\mathbf{0}_{n\times d}$
对于$k=1$到d**执行** ▷计算d个最小特征向量
  $\mathbf{v}\leftarrow$随机向量
  对于$j=1$到$k-1$**执行** ▷格拉姆-施密特正交化
    $\mathbf{v}\leftarrow\mathbf{v}-(\mathbf{v}^T\mathbf{X}_{:,j})\mathbf{X}_{:,j}$
  结束循环
  $\mathbf{v}\leftarrow\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_2$
  对于iter$=1$到M_{eig}**执行** ▷ 反幂迭代
    $\mathbf{v}_{\text{old}}\leftarrow\mathbf{v}$
    $\mathbf{v}\leftarrow$PCG（$\mathbf{A}$，$\mathbf{v}$，$\mathbf{K}$ τ_{CG}，M_{CG}）
    对于$j=1$到$k-1$**执行** ▷ 消去步骤
      $\mathbf{v}\leftarrow\mathbf{v}-(\mathbf{v}^T\mathbf{X}_{:,j})\mathbf{X}_{:,j}$
    结束循环
    $\mathbf{v}\leftarrow\mathbf{v}/\|\mathbf{v}\|_2$
    如果 $|\mathbf{v}^T\mathbf{L}\mathbf{v}-\mathbf{v}_{\text{old}}^T\mathbf{L}\mathbf{v}_{\text{old}}|<\tau_{\text{eig}}$**则**
      跳出
    结束if
  结束 for
  $\lambda_k\leftarrow\mathbf{v}^T\mathbf{L}\mathbf{v}-\sigma$ ▷瑞利商
  $\mathbf{X}_{:,k}\leftarrow\mathbf{v}/\sqrt{\lambda_k}$
结束循环
返回 X

算法 2预条件共轭梯度（PCG）

要求： 矩阵 $\mathbf{A}$、右端项 $\mathbf{b}$、预条件器$\mathbf{K}$、容差 τ_{CG}，最大迭代次数 M_{CG}
确保： 解 $\mathbf{x}$ 满足 $\mathbf{A}\mathbf{x}=\mathbf{b}$

$\mathbf{x}\leftarrow\mathbf{0}$
$\mathbf{r}\leftarrow\mathbf{b}$
求解 $\mathbf{K}\mathbf{z}=\mathbf{r}$ 以得到 $\mathbf{z}$ ▷ 应用预条件器
$\mathbf{p}\leftarrow\mathbf{z}$
$\rho_{\text{old}}\leftarrow\mathbf{r}^T\mathbf{z}$
对 iter $=1$ 至 M_{CG} **执行** ▷ 迭代细化
  $\mathbf{q}\leftarrow\mathbf{A}\mathbf{p}$
  $\alpha\leftarrow\rho_{\text{old}}/(\mathbf{p}^T\mathbf{q})$
  $\mathbf{x}\leftarrow\mathbf{x}+\alpha\mathbf{p}$
  $\mathbf{r}\leftarrow\mathbf{r}-\alpha\mathbf{q}$
  求解 $\mathbf{K}\mathbf{z}=\mathbf{r}$，得到$\mathbf{z}$ ▷应用预条件器
  $\rho_{\text{new}}\leftarrow\mathbf{r}^T\mathbf{z}$
  如果 $\rho_{\text{new}}<\tau_{\text{CG}}^2$ **则** ▷检查收敛性
    跳出
  结束if
  $\beta\leftarrow\rho_{\text{new}}/\rho_{\text{old}}$
  $\mathbf{p}\leftarrow\mathbf{z}+\beta\mathbf{p}$ ▷更新搜索方向
  $\rho_{\text{old}}\leftarrow\rho_{\text{new}}$
结束 for
返回 x

该算法需要使用求解线性方程组的辅助过程，详见算法 2。

RDMDS 算法为计算电阻距离嵌入提供了稳健而高效的基础，从而能够开发可扩展算法，用于大规模图可视化与分析。

5 OMEGA 布局算法

本节介绍 Omega——一种新颖的线性时间图绘制算法。其名称源自表示电阻的符号（Ω），体现了该算法以电阻距离为基础。Omega 基于 SparseSGD 框架构建，并融入了多项关键创新，而这些创新得益于电阻距离的应用。

最重要的创新是摒弃了基于枢轴的采样，这种方法一直是可扩展应力模型的标准。传统的 SparseSGD 实现采用基于枢轴的采样，因为对任意节点对即时计算图论意义上的最短路径，开销过高。依赖少数枢轴可能会使优化产生偏差，导致布局效果不佳。Omega 克服了这一局限。通过预先计算 RDMDS 嵌入，我们可以在常数时间内计算任意节点对的理想电阻距离。这使得更全面、更有效的随机节点对采样策略成为可能，从而更好地实现应力最小化。

Omega 还具有一项关键的计算优势：复杂度均一。传统的 SparseSGD 在无权图上（使用广度优先搜索）比在加权图上（需要使用 Dijkstra 算法）更快。然而，Omega 在加权图和无权图上的复杂度均为 $O(|E|)$。这是因为其 RDMDS预计算不受边权重影响。此外，RDMDS 中的核心稀疏矩阵运算非常适合 GPU 加速，因此有望进一步提升性能。

Omega 算法遵循一个六步过程，将 RDMDS 嵌入与 SGD 优化相结合。

1. **计算嵌入 X：** 首先，我们使用 RDMDS 为所有顶点计算d维低秩电阻距离嵌入$\mathbf{X}$。这项一次性、$O(|E|)$ 的预计算是后续步骤的基础。

2. **初始化节点对集合：** 我们通过纳入图中的所有边，创建一个初始节点对集合 P。这确保了局部结构得到明确考虑。

3. **随机采样：** 对于每个顶点，我们随机采样h 个额外的节点对，并将其加入P。这是 Omega 区别于基于枢轴点的方法的关键步骤，可更均匀、全面地采样距离约束。

4. **计算理想距离δ_{ij}：** 对于P中的每一对（i，j），我们根据预先计算的嵌入计算理想距离 $\delta_{ij}=\|\mathbf{X}_{i,:}-\mathbf{X}_{j,:}\|_2$。得益于预先计算的嵌入，对每一对进行此操作都很快，且耗时恒定。

5. **初始化二维布局 Y：** 我们使用 RDMDS 嵌入$\mathbf{X}$ 的前两个维度，作为初始二维布局坐标$\mathbf{Y}$。这提供了一个极佳的起点，已能反映图的全局结构。

6. **随机梯度下降优化：** 最后，我们采用带有退火计划的迭代随机梯度下降过程来优化二维布局$\mathbf{Y}$。在每一步中，我们遍历P中经过随机打乱的节点对列表，更新节点位置，以最小化相对于理想距离 δ_{ij} 的应力函数。

对于常数采样参数 $O(|E|)$，Omega 的总体计算复杂度为 $O(|E|)$。RDMDS 预计算的复杂度为 $O(|E|)$。采样和距离计算步骤会创建并处理 $O(|E|+h|V|)=O(|E|)$ 个点对。最终的 SGD 优化会对这些点对进行固定次数的遍历。理论上可靠的距离度量与高效、可扩展的算法相结合，使 Omega 成为适用于大规模网络可视化的强大工具。

Omega 是我们图绘制软件包 Egraph[1] 的一部分。Egraph 提供多种主要的基于应力的图绘制算法的实现，包括应力主化和 SGD。Egraph 的核心使用 Rust 实现，可实现高速运行。它还提供 Python 和 JavaScript 接口，支持使用脚本语言灵活地进行网络可视化。

算法 3 展示了完整的 Omega 流程。该算法的输入包括一个连通图 G、电阻距离嵌入的目标维度 d 以及用于最终布局的目标维度

[1] https://github.com/likr/egraph-rs

算法3 Omega：电阻距离图绘制

输入： 图 $G=(V, E)$，嵌入维度 d，采样参数 h，最小理想距离 ε_d
输出： 二维布局坐标 $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{n\times 2}$

参数： 步长 η，收敛容差 τ
$\mathbf{X} \leftarrow$RDMDS(G, d) ▷计算电阻距离嵌入
$P \leftarrow \{(i,j) \mid (v_i, v_j) \in E\}$
对于 $i=1$ 到 n **执行** ▷随机节点对采样
  对于 $l=1$ 到 h **执行**
    $j \leftarrow$随机数$(1,n)$
    如果 $i \neq j$ 和 $(i,j) \notin P$ **则**
      $P \leftarrow P \cup \{(i,j)\}$
    结束如果
  结束循环
结束循环
对 $(i,j) \in P$ **执行** ▷计算理想距离和权重
  $\delta_{ij} \leftarrow$最大值$(\|\mathbf{X}_i - \mathbf{X}_j\|_2, \varepsilon_d)$
  $w^{ij} \leftarrow \delta_{ij}^{-2}$
结束循环
$\mathbf{Y} \leftarrow \mathbf{X}_{:,1:2}$ ▷初始化二维布局
对于 τ 退火计划**执行** ▷SGD 优化
  对于$(i, j) \in P$ 按随机顺序**执行**
    $\mu \leftarrow \min(1, w_{ij}\tau)$
    $\mathbf{r} \leftarrow \frac{\|\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j\| - \delta_{ij}}{2} \frac{\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j}{\|\mathbf{Y}_i - \mathbf{Y}_j\|}$
    $\mathbf{Y}_i \leftarrow \mathbf{Y}_i - \mu\mathbf{r}$
    $\mathbf{Y}_j \leftarrow \mathbf{Y}_j + \mu\mathbf{r}$
  结束循环
结束循环
返回 $\mathbf{Y}$

2、采样参数 h，以及随机梯度下降过程的各种优化参数。

该算法与第 4 节中的 RDMDS 流程无缝集成。它使用计算得到的嵌入坐标，既作为电阻距离值的来源，也作为初始布局位置。退火计划控制整个优化过程中的步长。算法从较大的更新步幅开始，以便进行全局重排，然后逐步缩小步幅，进行精细调整。每次迭代时随机打乱顶点对，确保优化过程能够探索应力函数的不同方面，从而实现更稳健的收敛。

Omega 是基于应力的图绘制算法的一项重大进展。它将电阻距离的理论优势与实际计算效率相结合。该算法的线性时间复杂度、在不同图类型上的一致表现以及改进的采样策略，使其特别适用于大规模图可视化应用。在这些应用中，质量和计算效率都是重要的考量因素。

6 计算实验

为验证我们提出的方法，我们开展了一系列计算实验，旨在评估基于电阻距离的应力模型和 Omega 算法的性能。本节介绍这些实验的结果，分为三个部分。首先，我们比较使用所提出的低秩电阻距离生成的布局与使用传统图论最短距离生成的布局在忠实度上的差异。其次，我们评估 Omega 的随机节点对采样策略相较于传统 SparseSGD 所用基于枢轴的采样的有效性。最后，我们分析 Omega 的计算性能和可扩展性。

所有实验均在一台配备 AMD Ryzen 5 5600X 六核处理器（3.70 GHz）和 64 GB 内存的计算机上进行。

6.1 保真度指标的比较

我们首先比较使用两种不同理想距离度量的标准应力模型所生成布局的质量：传统图论

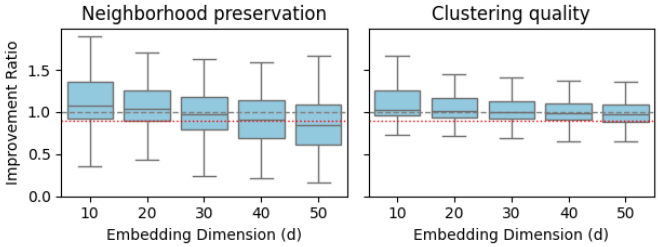

图 3：忠实度指标的比较。对于每个度量指标，我们展示了所提方法在不同嵌入维度（d 10 20 … 50 1 0 ,,,）下相对于基线的改进比，计算方式为（所提度量得分）/（基线度量得分）。对于这两个度量指标，比值大于 . 表示有所改进。

最短距离（基线）以及我们提出的适用于各种嵌入维度 d 的低秩电阻距离。为单独考察距离度量本身的影响，我们对两者采用一致的优化设置。具体而言，我们使用 FullSGD 进行 15 次迭代；FullSGD 会处理所有节点对，而非稀疏样本。这种实验设计与第 6.2节中对可扩展算法的比较目的不同：在这里，我们旨在比较不同距离度量在标准参数设置下的表现，评估其实际效果，而非理论最优性。FullSGD 会处理所有节点对（而非仅处理稀疏样本），从而确保比较反映出各距离度量本身的特性。15 次迭代是 FullSGD 优化中具有代表性的实际配置。对于电阻距离度量，我们强制设置最小理想距离为 $\varepsilon_d = 0.01$ 。实验使用了来自 SuiteSparse 矩阵集合 [7], 的 213 个图构成的综合数据集，并选取节点数在 100 到 1,000 之间的图；每个图的结果取 10 次试验的中位数。

我们采用两个主要度量指标来量化布局的忠实度，评估布局对图 [3, 10, 29] 内在结构的保持程度。

- **邻域保持：**对于每个节点 [10, 29]，我们计算原始图中的 k 近邻与生成布局中的 k 近邻之间的平均 Jaccard 系数。

- **聚类质量：**遵循先对输入图应用贪心模块度社区检测，以建立真实聚类。随后，我们在布局坐标上进行凝聚聚类，以获得数量相同的簇，并计算这两种聚类之间的 Fowlkes-Mallows 得分 [13] 。

图 3 展示了使用电阻距离相较于基线所带来的改进比。对于这两种度量指标，电阻距离均表现出更优的性能，其中位数比始终高于 1.0。这种出色表现并非经验上的偶然，而是谱图论所揭示的预期结果。忠实度指标旨在评估布局对图内在高维结构（例如邻域结构和社区结构）的保留程度。电阻距离从根本上由图拉普拉斯矩阵的谱定义；众所周知，该谱的低频分量（即与最小非零特征值对应的特征向量）恰好编码了这种全局结构。因此，基于这些分量构建的距离度量，从理论上就更有可能出色地保留这些指标所衡量的特性。

值得注意的是，即使在低维 $d = 10$ 下，该方法也表现出色。这表明，紧凑的低秩近似足以捕捉最关键的结构信息。随着 d 进一步增大，质量略有下降，这也表明高频谱分量可能带来的是噪声，而非有意义的结构细节，进一步证明了低秩方法的有效性。性能退化的风险也很低；即使在最差的

© 2025 IEEE。本文为作者版本，已发表于 IEEE可视化与计算机图形学汇刊。本记录的最终版本可在此处获取：
xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx/

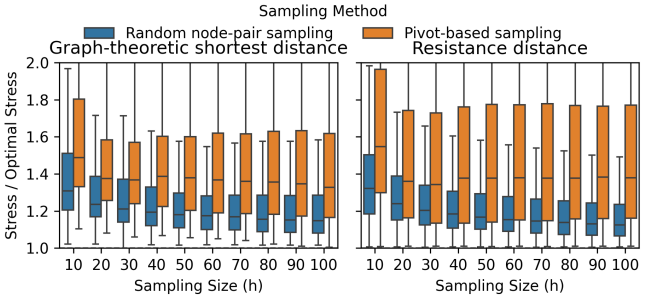

图 4：随机节点对采样（我们的 Omega 算法）与基于枢轴的采样的应力比对比。纵轴表示达到的应力与最优应力之比（值为 1.0 时为最优）。箱线图汇总了每种采样规模 h 下，整个图数据集的比值分布。（上）使用图论最短距离时，我们的方法（蓝色）始终优于基于枢轴的采样（橙色）。（下）使用电阻距离时，也清楚地体现了我们方法的优势。

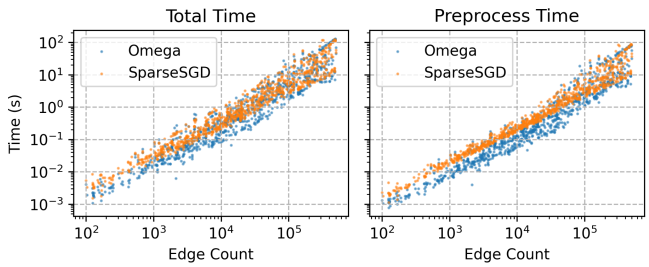

图 5：计算时间比较。上图和下图分别展示总时间和预处理时间。横轴为边数，纵轴为计算时间。两个坐标轴均采用对数刻度。为避免因点重叠造成感知偏差，绘制的点采用了透明效果。

表现情况下，改进比的第一四分位数仍然很高。这证实了显著且有理论依据的改进潜力远远超过轻微退化的风险。

6.2 抽样策略比较

为评估我们提出的随机节点对采样策略的有效性，我们将其与 SparseSGD 实现中常用的传统基于枢轴的采样进行了比较。本实验侧重于可扩展算法的性能，因此所有条件均采用运行 15 次迭代的 SparseSGD 作为优化引擎，这对于大型图而言是实际可行的设置。我们使用了第 6.1 节中介绍的同一全面数据集。对于每个图，我们分别使用图论距离和电阻距离作为底层度量，运行两种采样策略。每个顶点的样本数 h 从 10 变化到 100。为确保结果稳健，每种实验条件均使用不同的随机种子重复 10 次。使用电阻距离的随机采样策略时，我们将嵌入维度设为 $d = 10$，并将最小理想距离设为 $\varepsilon_d = 0.01$。性能以算法达到的最终应力值与给定距离度量的已知最优应力值之比衡量。作为基线最优应力值，我们先运行 1000 次迭代的 FullSGD，再运行应力主化直至收敛。由于从理论上难以获得应力模型的真实全局最优解，我们将这一充分收敛的结果作为参考最优解。借此，我们可以比较每种可扩展采样策略与理论最优值的接近程度。

图 4 详细比较了我们的随机节点对采样策略与传统的基于枢轴的方法所达到的最终应力比。结果明确表明，在所有测试条件下，我们的方法都更胜一筹。

对于两种距离度量，我们的随机采样（蓝色）对应的箱线图始终显著低于基于枢轴的采样（橙色）。这表明我们的方法所得到的应力值更接近理论最优值。值得注意的是，中位应力比（每个蓝色箱体内的线）始终显著较低，而且在许多情况下，我们方法的整个四分位距（箱体本身）都低于基于枢轴的方法的中位数。这凸显了我们方法稳定的性能优势。

此外，我们的方法在性能上的方差要低得多。蓝色箱体始终更紧凑，须线也更短，这表明我们的随机采样策略在测试套件中各种各样的图上都能产生更稳定、更可靠的结果。

本实验的一项重要发现是我们的随机抽样策略具有稳健性。虽然与电阻距离结合时，性能提升最为显著，但我们的方法在传统的图论最短距离度量上也展现出明显且稳定的优势。这表明，我们方法的核心益处——从有偏的基于枢轴的样本转向全面的随机样本——是一项根本性的改进，与所用的具体距离度量无关。高效地预先计算嵌入（例如用于电阻距离的 RDMDS）使这一更优的采样策略成为可能。这为随机梯度下降优化器提供了对全局应力景观更加均匀且无偏的观察，使其能够找到显著更好的解，并进一步印证了采样是优化成功的关键组成部分这一观点。

6.3 计算时间比较

最后，我们分析 Omega 的计算性能和可扩展性。实验使用 SuiteSparse 矩阵集合中的 947 个真实世界矩阵数据，通过将其转换为图并提取最大的连通分量进行测试。这些数据包含 100 至 1,000,000 条边，且非零元素少于 1,000,000 个。对于 SparseSGD 的最短路径搜索，采用 Dijkstra 算法。每次随机梯度下降的迭代次数设为 15，ε 设为 0.1，采样数 h 设为 50。对于 Omega，嵌入维度 d 设为 10，最小理想距离设为 $\varepsilon_d = 0.01$，反幂法的最大迭代次数设为 100，共轭梯度法的最大迭代次数设为 100。每种条件使用不同的随机数种子进行 10 次试验，并取计算时间的中位数。

图 5 展示了边数与计算时间之间的关系。从理论上讲，对于加权图，Omega 具有渐近优势，其 $O(|E|)$ 复杂度优于 SparseSGD 基于 Dijkstra 的实现所具有的 $O(|E| + |V| \log |V|)$ 复杂度。然而，实验结果表明，这一理论优势并不总能转化为实践中的更快运行速度。两种方法的大部分计算时间都花在预处理步骤上（距离计算和点对列表创建）。对于小型到中型图，Omega 的预处理通常更快；但对于较大的图（约为 $|E| > 10^5$），其运行时间可能更长。这主要是因为其复杂度中的常数因子更大，而这源于 RDMDS 中的共轭梯度求解器收敛所需的迭代次数。因此，尽管 Omega 在理论上具有更有利的扩展性，其实际性能与 SparseSGD 相当。RDMDS 的线性时间复杂度取决于 PCG 迭代次数为常数，但在实践中，对于规模更大或更复杂的图，这一迭代次数可能会增加，从而增大整体复杂度中的常数因子。未来改进预条件技术或采用 GPU 加速，有助于缓解这一问题，并更稳定地发挥其理论优势。

7 绘图示例

我们首先通过概览图（图1）开始定性比较，该图生动展示了 Omega 处理大型复杂图（如 SuiteSparse 矩阵集合中的“web-Stanford”）的能力 [7]。节点根据其核数进行着色 [1]。

表 1：用于绘图示例的图的统计数据。

图	$\|V\|$	$\|E\|$
web-Stanford	255,265	1,941,926
clustered	1,495	3,964
btree13	8,192	8,191
1138_bus	1,138	1,458
USpowerGrid	4,941	6,594
luxembourg_osm	114,599	119,666
jazz	198	2,742
离散小波变换 198_	72	236
dwt_758	758	2,618
肿瘤抗血管生成_5	460	2,207
la2010	204,447	490,317

传统 SparseSGD 方法生成的布局是一个密集且难以解读的“毛线团”，这是大型图中常见的失败模式：全局结构消失在边的纠缠之中。相比之下，Omega 的布局清晰且信息丰富。它成功地将图的核心与外围部分解开，展现出此前隐藏的不同结构组件。这直接得益于电阻距离的使用；与最短路径距离相比，电阻距离能够更有效地捕捉节点之间的全局关系。通过保留图中结构距离较远部分之间的分离，Omega 生成的布局不仅在美观性上更胜一筹，还能真正揭示网络的组织方式。放大后的视图进一步证实，这种全局清晰度并未以牺牲局部细节为代价；精细的结构得到了良好保留。

图 6 展示了 10 个具有代表性的图的布局图集，并对比了 Omega 和 SparseSGD 的输出。这些图的统计信息汇总于 表 1。‘clustered’ 图是一个随机划分图 [12]，由 NetworkX 生成，包含 15 个簇，每个簇有 100 个节点；簇内和簇间边的概率分别设为 0.05 和 0.0002。‘btree13’ 图是一棵 13 阶二项树。其余图取自 SuiteSparse 矩阵集合 [7]。除 ‘luxembourg_osm’ 和 ‘la2010’ 外，所有图的节点颜色均表示使用 Clauset 等人的方法检测出的社区 [6]。所有布局均通过 15 次随机梯度下降迭代生成，ε 为 0.1，采样参数 $h = 50$。对于 Omega 布局，我们还将嵌入维度设为 $d = 10$，并将最小理想距离设为 $\varepsilon_d = 0.01$。

在“clustered”、“btree13”、“1138_bus”和“USpowerGrid”图中，节点着色清楚地显示，Omega 生成的布局能够恰当地分隔各个簇。值得注意的是，对于“1138_bus”图，我们的近似 Omega 算法生成的布局与 图 2中使用 FullSGD 生成的高精度结果相当。“jazz”、“dwt_198”、“dwt_758”和“tumorAntiAn-giogenesis_5”图是忠实度指标比较中表现极端结果的代表性示例。

“jazz”图的聚类质量改进比率为 0.74。这可能是因为 Omega 的布局清楚地将稠密核心节点与外围节点分隔开来，导致该度量指标的算法可能无法准确识别簇。“dwt_198”图的聚类质量改进比率为 0.73。这归因于该图的均匀网格结构；低秩电阻距离可能未能充分反映局部网格结构。相反，类似的网格状图“dwt_758”的邻域保持改进比率最高，达到 2.83。在这种情况下，低秩电阻距离成功捕捉到了全局网格结构，从而显著提升了效果。

“tumorAntiAngiogenesis_5”图在聚类质量方面的改善最大（2.43），但邻域保持的退化也最为显著（0.24）。该图包含一个与大多数其他节点相连的中心节点，这导致 SparseSGD 布局出现“毛线团”问题。Omega 通过保持较短的簇内距离来解决这一问题，从而实现适当的簇分离。然而，其无法维持与中心节点的邻近性，被认为是邻域保持恶化的原因。

对于 ‘luxembourg_osm‘，SparseSGD 生成的布局向外膨胀。相比之下，Omega 将较长的类路径子图折叠成锯齿形，在维持各簇相对位置的同时抑制向外扩张。在 ‘la2010‘ 图中，Omega 不仅像在 ‘luxembourg_osm‘ 中那样抑制向外扩张，还成功绘制了局部节点簇，且没有产生失真。

8 讨论

我们的实验有力地证明，在基于应力的图绘制中使用电阻距离具有诸多优势。

一个重要结论是，应选择适合预期视觉分析任务的距离度量。基于图论最短距离的布局直观易懂，适合追踪路径和估算节点间的最短距离。然而，电阻距离能够揭示簇和瓶颈等全局结构。这类布局更适合用于理解网络的高层组织结构。我们并不声称电阻距离在所有情况下都优于图论最短距离，而是认为它在特定视觉分析任务中更有效。理想的选择取决于用户的目标。

忠实度指标上的性能提升，是电阻距离谱性质的直接结果，而非偶然的附带收益。一个关键发现是，我们的距离度量与所测量的特性高度吻合。邻域保持和聚类质量等忠实度指标，旨在评估布局对图的全局结构的呈现效果。全局结构以数学形式编码在图拉普拉斯矩阵的低频谱中。与最小非零特征值对应的特征向量已知在图上是平滑的，变化缓慢，因此能够将图划分为其主要组成簇 [37]。这正是谱聚类背后的原理。我们的方法利用了这一洞见。通过根据这些特征向量的低秩近似来定义理想距离，我们构建了一种应力模型，专门用于保留图中最重要的结构特征。因此，忠实度指标上的高分直接印证了这种理论上的吻合。由于距离本身由簇结构定义，布局自然会遵循该结构。这为我们的实证结果提供了明确的理论依据，并进一步深化了谱图论与图绘制定性评估之间的联系。

此外，我们的工作凸显了在应力模型中选择恰当“理想距离”的深远影响。正如我们的实验所示，仅仅替换距离度量便能显著提升布局质量，这一事实表明，理想距离的设计是图绘制中一个至关重要、或许尚未得到充分探索的方面。电阻距离以电路理论和谱分析为坚实的理论基础，相较于更多出于启发式动机的图论最短距离，展现出了极具说服力的替代方案。

我们的方法与经典谱方法之间的联系同样值得关注。正如第 4 节所确立的，使用低秩电阻距离的无权应力模型的解（这等价于对电阻距离进行经典多维尺度分析）在 $d = 2$ 时，与经典谱图绘制生成的布局一致。这在图绘制的两种主要范式——基于应力的优化与谱方法——之间搭建了一座统一的桥梁。因此，我们的框架可以被视为谱绘制的一种推广，将其扩展到加权应力模型，并通过随机梯度下降实现进一步优化。

最后，Omega 在计算方面的优势十分显著。传统 SparseSGD 使用图论最短距离时，对于加权图的复杂度为 $O(|E| + |V| \log |V|)$（这是由于 Dijkstra 算法），而 Omega 始终保持 $O(|E|)$ 的复杂度。这是因为 RDMDS预计算取决于图的谱性质，不受边权重影响。因此，Omega 有望成为一种可扩展的解决方案，适用于许多现实世界应用中常见的大型加权网络。

© 2025 IEEE。本文为作者版本，已发表于 IEEE可视化与计算机图形学汇刊。此记录的最终版本见：xx.xxxx/TVCG.201x.xxxxxxx/

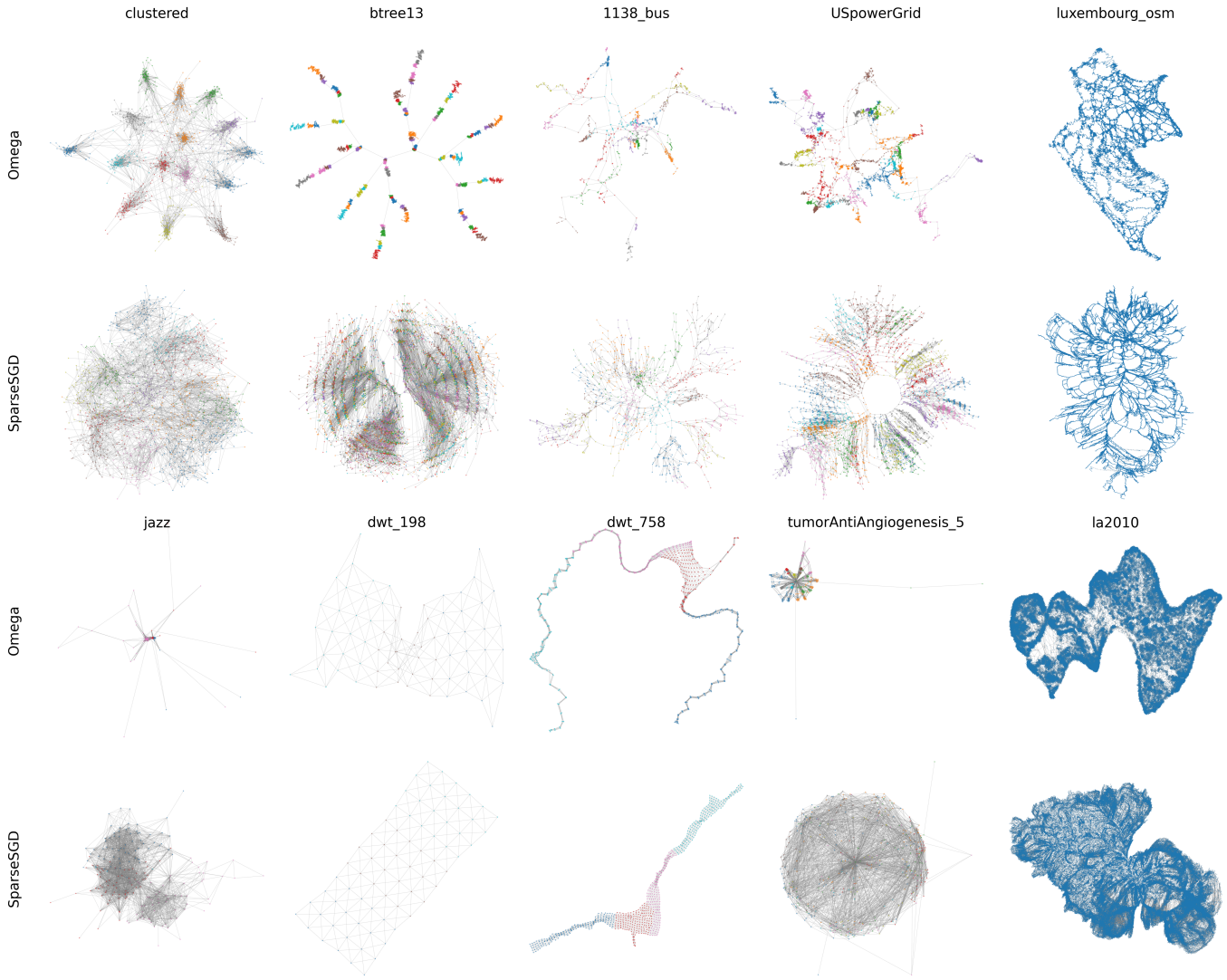

图 6：10 个代表性图的布局集锦，对比 Omega（每组上排）和 SparseSGD（每组下排）的输出。Omega 始终能更清晰地呈现簇结构和全局关系。

关于参数选择，我们的计算实验表明，Omega 对范围广泛的参数取值都具有稳健性。该算法在不同的嵌入秩 d 和采样参数 h取值下均表现良好，不过某些默认值能够在质量与效率之间取得良好平衡。就布局质量而言，我们发现，嵌入维度为 $d = 10$、采样参数为 $h = 50$、最小理想距离为 $\varepsilon_d = 0.01$ 时，在大多数情况下效果良好。当 $d \geq 10$时，性能仍然稳定，这证实了低秩足以捕捉关键结构信息；而将 h 提高到 50 以上所带来的收益则开始递减。总体运行时间主要取决于 RDMDS 的参数。特征值容差 τ_{eig} 和移位参数 σ 必须小于最小非零特征值；对于边数不超过一百万的图，取值分别为 10^{-5} 和 10^{-6}通常效果良好。我们将共轭梯度容差 τ_{CG} 设为 0.1，对于这一规模的图，通常只需少于 10 次反幂迭代和少于 100 次共轭梯度迭代。将 SGD 迭代次数和调度器的ε 参数设为与传统随机梯度下降中使用的值相近时，效果良好。

9 结论与未来工作

本文在基于应力的模型中，以电阻距离取代图论最短距离。我们证明，这一转变克服了传统方法的局限。我们提出的基于电阻距离的应力模型能够生成更忠实于图结构的布局。我们还提出了 Omega，这是一种线性时间算法，将高效的电阻距离嵌入与全面的随机采样相结合，用于随机梯度下降。实验表明，对于加权图，Omega 能生成质量更高的布局，且具有性能优势。与基于枢轴的采样相比，其随机抽样策略在不同距离度量下获得的应力值更低且更稳定。

本研究将谱图论与基于应力的优化联系起来，为未来研究开辟了新的方向。Omega 的核心计算适合通过 GPU 加速进一步提升速度。开发自适应方法以选择最佳秩 d，或可改善性能与质量之间的权衡。未来工作包括与 LinLog 和 tsNET 等忠实保留簇结构的方法进行比较，并探索电阻距离与聚类方法之间的理论联系。我们的随机抽样策略或可推广到其他图绘制和优化问题，只要这些问题能够高效地进行距离预计算。这些原则也可扩展至图绘制以外的领域，如网络嵌入和流形学习。

参考文献

[1] V. Batagelj 和 M. Zaversnik。用于网络核分解的 o (m) 算法。*arXiv* 预印本 *cs/0310049*，2003 年。doi: 10.48550/arXiv.cs/

0310049 7

[2] U. Brandes 和 C. Pich。用于大型数据渐进式多维尺度分析的特征求解器方法。载于《国际图绘制研讨会》，第 42–53 页。Springer，2006。doi: 10.1007/978-3-540-70904-6_6 2[3] S. Cai、S.-H. Hong、A. Meidiana、P. Eades 和 D. Keim。聚类保真图可视化：新度量指标与算法。载于2024年IEEE第17届太平洋可视化会议（PacificVis），第 192–201 页。IEEE，2024。doi: 10.1109/PacificVis60374.2024.00029 6[4] K.-T. Chen、T. Dwyer、K. Marriott 和 B. Bach。Doughnets：利用环面缠绕实现网络可视化。载于《2020年人机交互系统会议论文集》，第 1–11 页，2020。doi: 10. 1145/3313831.3376180 2[5] F. R. Chung。《谱图论》，第 92 卷。美国数学学会，1997。2[6] A. Clauset、M. E. Newman 和 C. Moore。在超大型网络中发现社区结构。《物理评论E——统计、非线性与软物质物理》，70(6):066111，2004。doi: 10.1103/PhysRevE.70.066111 8[7] T. A. Davis 和 Y. Hu。佛罗里达大学稀疏矩阵集合。ACM数学软件汇刊（TOMS），38(1):1–25，2011。doi: 10.1145/2049662.2049663 4, 6, 7, 8[8] T. Dwyer 和 Y. Koren。Dig-CoLa：通过约束能量最小化进行有向图布局。载于IEEE信息可视化研讨会，2005年（INFOVIS 2005），第 65–72 页。IEEE，2005。doi: 10.1109/ INFVIS.2005.1532130 2[9] T. Dwyer、Y. Koren 和 K. Marriott。通过应力主化和梯度投影进行约束图布局。《离散数学》，309(7):1895– 1908, 2009 10 1016 2007 12 103 2 。doi: . /j.disc. . . P. Eades[10]、S.-H. Hong、A. Nguyen 和 K. Klein。大型图可视化的基于形状的质量度量指标。《图算法与应用期刊》，21 1 29 53, 2017 10 7155 00405 6 ( ): – 。doi: . /jgaa. P. Eades[11]、Q. Nguyen 和 S.-H. Hong。使用谱稀疏化绘制大型图。载于《国际图绘制与网络可视化研讨会》，第 272–286 页。Springer，2017。doi: 10.1007/978-3 -319-73915-1 22 2 [12] S. Fortunato。图中的社区发现。《物理学报告》，486(3-5 75 174, 2010 10 1016 2009 11 002 8): – 。doi: . /j.physrep. . . E. B. Fowlkes[13] 和 C. L. Mallows。一种比较两个层次聚类的方法。《美国统计学会杂志》，78 383 553 569, 1983 10 1080 01621459 1983 10478008 6 ( ): – 。doi: . / . . E. R. Gansner[14]、Y. Hu 和 S. North。用于图布局的最大熵应力模型。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，19 6 927 940, 2012 10 1109 2012 299 2 ( ): – 。doi: . /TVCG. . E. R. Gansner[15]、Y. Koren 和 S. North。通过应力主化进行图绘制。载于《国际图绘制研讨会》，第 239–250 页。Springer，2004 10 1007 978 3 540 31843 9_25 2 3 。doi: . / - - - - , G. H. Golub[16] 和 C. F. Van Loan。《矩阵计算》。约翰斯·霍普金斯大学出版社，2013。3[17] T. Kamada 和 S. Kawai。一种绘制一般无向图的算法。《信息处理快报》，31(1):7–15，1989。doi: 10.1016/0020 0190 89 90102 6 2, 3 - ( ) - M. Khoury[18]、Y. Hu、S. Krishnan 和 C. Scheidegger。通过低秩应力主化绘制大型图。载于《计算机图形论坛》，第 31 卷，第 975–984 页。Wiley Online Library，2012。doi: 10.1111/j.1467-8659.2012 .03090.x 2[19] D. J. Klein 和 M. Randi´c。电阻距离。《数学化学杂志》，12 1 81 95, 1993 10 1007 01164627 1, 2, 3 ( ): – 。doi: . /BF[20] S. G. Kobourov。力导向绘图算法。载于《图绘制与可视化手册》，第 12 章，第 383–408 页。CRC出版社，2013。1[21] Y. Koren。关于谱图绘制。载于《国际计算与组合学会议》，第 496–508 页。Springer，2003。doi: 10.1007/3 -540-45071-8_50 2, 4[22] N. Linial、E. London 和 Y. Rabinovich。图的几何及其若干算法应用。《组合数学》，15(2):215–245，1995。doi: 10.1007/BF01200757 1[23] A. Meidiana、S.-H. Hong、S. Cai、M. Torkel 和 P. Eades。Sublinearforce：用于大型复杂图绘制的全次线性时间力计算。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，30(7):3386–3399，2024。doi: 10.1109/TVCG.2022.3233287 2[24] A. Meidiana、S.-H. Hong、M. Torkel、S. Cai 和 P. Eades。用于大型复杂网络可视化的次线性时间力计算。载于《计算机Graphics Forum，第39卷，第579–591页。Wiley Online Library，2020。doi: 10 1111 14003 2 。/cgf。A. Meidiana[25]、J. Wood 和 S.-H. Hong。用于图绘制应力最小化的次线性时间算法。载于《2021年IEEE第14届太平洋可视化研讨会（PacificVis）》，第166–175页。IEEE，2021。doi: 10. 1109/PacificVis52677.2021.00030 2[26] H. Meyerhenke、M. Nöllenburg 和 C. Schulz。通过多层最大熵应力优化绘制大型图。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，24(5):1814–1827，2017。doi: 10.1109/TVCG. 2017.2689016 2[27] J. Miller、V. Huroyan 和 S. Kobourov。通过多维尺度分析进行球面图绘制。载于《国际图绘制与网络可视化研讨会》，第77–92页。Springer，2022。doi: 10.1007/978-3-031 -22203-0 7 2 [28] J. Miller、S. Kobourov 和 V. Huroyan。基于浏览器的图双曲可视化。载于《2022年IEEE第15届太平洋可视化研讨会（PacificVis）》，第71–80页。IEEE，2022。doi: 10.1109/PacificVis53943.2022. 00016 2[29] Q. H. Nguyen、S.-H. Hong、P. Eades 和 A. Meidiana。代理图：大图采样的视觉质量指标。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，23(6):1600–1611，2017。doi: 10. 1109/TVCG.2017.2674999 6[30] Y. Onoue。图绘制应力模型的距离调整。arXiv预印本 arXiv: *2403 15811*, 2024 10 48550 2403 15811 1, 2 。. doi: ./[31] arXiv。. A. Ortega。图信号处理导论。剑桥大学出版社，2022。2[32] M. Ortmann、M. Klimenta 和 U. Brandes。稀疏应力模型。《图算法与应用期刊》，21(5):791–821，2017。doi: 10. 7155 00440 2 /jgaa。Y. Saad。稀疏线性系统的迭代方法。工业与应用[33]数学学会，2003 3 。D. A. Spielman[34] 和 S.-H. Teng。用于预条件和求解对称对角占优线性系统的近线性时间算法。《SIAM矩阵分析与应用期刊》，35(3):835–885，2014。doi: 10.1137/090771430 4[35] 2012 3 G. Strang[36]。线性代数及其应用。. R. Tamassia。《图绘制与可视化手册》。CRC出版社，2013。1[37] U. Von Luxburg。谱聚类教程。《统计与计算》，17 4 395 416, 2007 10 1007 11222 007 9033 2, 3, 8 ( ): – 。doi: ./s - -z[38] Y. Wang、Y. Wang、Y. Sun、L. Zhu、K. Lu、C.-W. Fu、M. Sedlmair、O. Deussen 和 B. Chen。重新审视应力主化：交互式约束图可视化的统一框架。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，24(1):489–499，2017。doi: 10.1109/TVCG.2017.2745919 2[39] M. Watanabe 和 Y. Onoue。环面上图绘制的单元格大小优化。载于《2024年IEEE第17届太平洋可视化会议（PacificVis）》，第283–288页。IEEE，2024。doi: 10.1109/PacificVis60374.2024.00039 2[40] J. X. Zheng、S. Pawar 和 D. F. Goodman。通过随机梯度下降进行图绘制。IEEE可视化与计算机图形学汇刊，25(9):2738–2748，2018。doi: 10.1109/TVCG.2018.2859997 1, 2, 3