arXiv:2512.22004v1 [math.QA] 26 Dec 2025

与对称蝴蝶箭图相关的量子簇代数给出的三维反射方程的解

REI INOUE 和 ATSUO KUNIBA

Dedicated to the memory of Professor Rodney James Baxter

Abstract. 我们构造了三维反射方程的一种新解（R, K）。三维反射方程是四面体方程的边界类比。 R-算子是 Sun、Terashima、Yagi 和作者于 2024年 得到的算子，其中涉及四个自变量属于 q-韦尔代数的量子二对数。新的 K-算子同样涉及十个这样的量子二对数。我们的方法基于与 C 型布线图上的对称蝴蝶箭图相关的量子簇代数。

1. 引言与主要结果

1.1. 背景。在（$1+1$）维时空中的可积量子场论以及统计力学的二维可解格点模型中，Yang-Baxter方程 [1]在体内、反射方程 [6, 29]在边界处发挥着基础作用。它们自然的三维推广分别称为四面体方程（TE） [32] 和三维反射方程（3DRE） [10]。本文讨论其若干种表述中的以下版本：

$$R_{456}\,R_{236}\,R_{135}\,R_{124} = R_{124}\,R_{135}\,R_{236}\,R_{456}, \tag{1.1}$$

$$R_{124}K_{1356}R_{178}R_{258}K_{2379}K_{4689}R_{457} = R_{457}K_{4689}K_{2379}R_{258}R_{178}K_{1356}R_{124}. \tag{1.2}$$

这里， R_{ijk} 和 K_{ijkl} 分别表示作用于由其指标指定的三个空间和四个空间上的算子 R 和 K 。[1] 关于三维反射方程的几何解释、代数解释及应用，参见 [19, 第 4、15 章以及 16]。[2]

对于四面体方程（1.1），已有若干引人注目的解被发现；例如参见[2, 16, 4, 3, 15, 28, 27, 5, 20, 11, 13, 26] 及其中的参考文献。相比之下，迄今为止，三维反射方程仅有少数非平凡解为人所知，即 [21, 22, 31, 11]中的那些解。

本文旨在构造一个新的 K算子，使其满足三维反射方程（1.2），并与 [13], 中由 Sun、Terashima、Yagi 及作者们得到的配套 R算子共同成立。我们的方法基于 [30] 中提出并在 [11, 12, 13]中进一步发展的量子簇代数 [8], 。

R-算子背后的量子簇代数 [13] 是通过所谓的对称蝴蝶 （SB）箭图定义的，该箭图与 A 型魏尔群相关。本文将其自然地推广到 C 型，而这一扩展后的结构也适用于 K-算子；参见（3.17）和图 3.3。为方便起见，我们也将这些 C 型变体称为 SB 箭图。

1.2. 三维反射方程的新解。下面明确给出我们的解；其有效性将在第6.4节和第6.5节中得到证明。关于下文所给最终形式的推导指南见第6.5节。

Date: 2025年12月26日。[1]（1.1）和（1.2）中的下标分别独立重置。因此，两条方程中相同的下标并不表示相同的空间。关于这一点的详细说明，请见（1.8）之后的解释。[2]方程（1.2）对应于 [19, 方程（4.3）]，其中下标 1, 2,3,4,5, 6,7,8,9 分别替换为 9, 8, 6, 7,5,4, 3, 2, 1。

对于 $i=1,\ 2,\ \ldots\ldots,\ 9$，设 $(u_i,\ w_i)$ 为满足以下条件的典范变量

$$[u_i,w_j]=\hbar\,\gamma_i\,\delta_{ij},\qquad [u_i,u_j]=[w_i,w_j]=0,\qquad (\gamma_1,\ldots,\gamma_9)=(1,1,2,1,1,2,1,1,2), \tag{1.3}$$

其中，$\hbar$ 是一个参数。我们令 $q=\mathrm{e}^{\hbar}$，并始终假设 q 是一般的。设 $(a_i,b_i,c_i,d_i,e_i)_{i=1,\ldots,9}$ 为满足以下约束条件的参数：

$$a_i+b_i+c_i+d_i+e_i=0\quad (i=1,\ldots,9), \tag{1.4}$$

$$a_i=c_i\quad (i=1,2,4,5,7,8), \tag{1.5}$$

$$\begin{pmatrix}-a_3+c_3\\-a_6+c_6\\-a_9+c_9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_1+c_5\\c_4+c_8\\-c_2+c_7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}c_2+c_7\\-c_1+c_5\\-c_4+c_8\end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

在 [13]中得到的 R-算子如下（参见（6.27）、（6.29））：[3]

$$\begin{aligned}R_{ijk}=\ &\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_k-c_j-b_i+u_i+u_k+w_i-w_j+w_k})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_k+c_j+b_i+e_i-u_k+u_i-w_i+w_j-w_k})P_{ijk}\\&\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{d_i+e_i+a_j+b_k+u_i-u_k-w_i+w_j-w_k})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_i-a_j-b_k+u_i+u_k-w_i+w_j-w_k}),\end{aligned} \tag{1.7}$$

$$P_{ijk}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_k-u_j)w_i}\mathrm{e}^{\frac{e_j-e_k}{2\hbar}(w_k-w_j-w_i)}\mathrm{e}^{\frac{-b_j+d_j+b_k-d_k}{2\hbar}(u_i-u_j)}\rho_{jk}. \tag{1.8}$$

这里，Ψ_q 表示在（2.7）中定义的量子二对数。算子 ρ_{jk} 按照 $\rho_{jk}(u_m,w_m)=(u_{m'},w_{m'})\rho_{jk}$ 交换典范变量；除非 $(m,m')=(j,k)$ 或 (k,j)，否则 $m=m'$，并保持所有参数不变。下文（1.10）中出现的算子 ρ_{jl} 以相同方式定义。已知 R-算子 R_{ijk} [13] 对 $\{1,2,4,5,7,8\}$ 中的任意不同指标 i、j、k、l、m、n 均满足四面体方程 $R_{lmn}\,R_{jkn}\,R_{ikm}\,R_{ijl}=R_{ijl}\,R_{ikm}\,R_{jkn}\,R_{lmn}$。[4] 上述 R_{ijk} 对应于（4.13）中的 $R^{(+)}_{ijk}$ 和（4.25）中的 $R^{(-)}_{ijk}$，二者在条件（1.4）–（1.6）下重合；参见（6.21）。P_{ijk} 的一个显著特点是，它自身满足四面体方程，$P_{lmn}\,P_{jkn}\,P_{ikm}\,P_{ijl}=P_{ijl}\,P_{ikm}\,P_{jkn}\,P_{lmn}$。

现在转而讨论 K-算子。它包含十个量子二对数，反映了图3.2中 SB 箭图的十次变异。具体而言，它可表示如下（参见 (6.32)、(6.33)）：

$$\begin{aligned}K_{ijkl}=\ &\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_i-c_j-d_k+u_i+u_k+w_i-w_j+w_k}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_k-b_j-d_l+u_j+u_l+w_j-2w_k+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{2a_k-b_i+b_k-c_j+u_i-u_k+w_i-w_j+w_k}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_k+a_i-2c_j-d_j+d_l+u_j-u_l-w_j+2w_k-w_l}\right)\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-2a_i+c_j-d_i+d_k+u_i-u_k-w_i+w_j-w_k}\right)\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_k-2b_i-b_j+2b_k+b_l+a_i-2c_j+2c_l+2u_i+u_j-2u_k-u_l+2w_i-w_j+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_i-b_j+b_k+b_l+a_i-c_j+2c_l+u_i+u_j-u_k-u_l+w_i-w_k+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_k+a_i-2c_j-d_j+d_l+u_j-u_l-w_j+2w_k-w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_i-b_k-c_j-d_i-d_j+d_l+u_i+u_j+u_k-u_l-w_i+w_k-w_l}\right)\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_k-b_j-d_l+u_j+u_l+w_j-2w_k+w_l}\right)P^K_{ijkl},\end{aligned} \tag{1.9}$$

$$P^K_{ijkl}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\{(u_j-u_l)(a_j-a_l-2w_i)-(b_j-d_j-b_l+d_l)(u_i-u_k)-\frac{1}{2}(e_j-e_l)(w_j-w_l)\}}\rho_{jl}. \tag{1.10}$$

[3]此处使用的算子 R_{ijk} 对应于 R_{kji} 中的 [13]。[4]仅在约束条件 (1.4) 下，该性质就已成立。附加条件 (1.5) 和 (1.6) 仅在三维反射方程中才是必需的。

这对应于 §5.2 中 ρ_{24} 型解在 (5.19) 和 (B.3) 中的具体表达式，并考虑了条件 (1.4)–(1.6)。

本文的主要结果如下（定理 6.6）：

定理. 在条件 (1.4)–(1.6)下， R-算子 (1.7)–(1.8)以及 (1.9)–(1.10) 中的 K-算子满足三维反射方程 (1.2)。

每个算子 R_{ijk} 和 K_{ijkl} 都分解为二对数部分和单项式部分，分别记作 P_{ijk}和 P^K_{ijkl}。通过按照 $\eta^{(+)}_{ijk}$ (4.6) 和 η^K_{ijkl} (5.15) 对典范变量施加伴随作用，可以将单项式因子 P_{ijk}和 P^K_{ijkl}移至二对数因子之间的任意位置。与四面体方程的情形一样，三维反射方程也有相应的分解：它分解为关于二对数部分和单项式部分的恒等式。这些恒等式在 §2.3 引入的形式洛朗级数集合以及 (6.15) 附近所述的群 $N(C_3) \rtimes S(C_3)$ 中均有意义。单项式部分 P_{ijk} 和 P^K_{ijkl} 彼此满足三维反射方程（命题 6.5）。剩下的二对数恒等式在等式两边各包含 $3\times 10+4\times 4=46$ 个量子二对数，其中 31 个由 Ψ_q给出，其余 15 个由 Ψ_{q^2}给出。在 $5\times 9=45$ 个参数 $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ 中，(1.4)–(1.6) 给出了 21 个关系。因此，我们对三维反射方程的解包含 $5\times 9-21=24$ 个自由参数，但典范变量的常数平移除外 u_i 和 w_i。

我们的解可以在典范变量的各种表示中进行评估。事实上， R-算子的相应像（包括其量子双版本）已知涵盖了通过对参数进行适当特化而在 $[15,\ 4,\ 3,\ 20,\ 11]$ 中获得的重要四面体方程解；参见 [13,表 1。1]

对于本文中新构造的 K-算子，它将 [11] 中的算子作为特例包含在内。这将在第 7 节中展示，作为从 SB 箭图约化到 [11]中所使用的 Fock-Goncharov（FG）箭图的结果。我们进一步预期，通过适当调节参数，我们的 K-算子还可以重现 [21], 中的解；该解是由量子化坐标环的表示论 $A_q(C_2)$导出的三维反射方程的第一个非平凡解。

1.3. **方法**。我们构造 K-算子的策略与早期工作 $[11,12,\ 13]$, 相平行，可概述如下。我们从与 SB 箭图相关的量子簇代数出发，其顶点位于魏尔群 $W(C_2)$的布线图的所有交叉点、反射点和面上（3.17）。它自然嵌入与 $W(C_3)$相关的量子簇代数中，如图 3.3 所示。

对应于将 $W(C_3)$ 的最长元的一个约化表达式变为“距离最远”的逆序表达式的变换序列，我们得到量子 Y变量的簇变换之间一个非平凡的恒等式。它已具有$\widehat{\quad}$ $\widehat{\quad}$三维反射方程 (3.24) 的形式，其中构件 R_{ijk} 和 K_{ijkl} 分别对应于三次和四次考克斯特关系。

与变异分解（参见 (2.6)）相对应，簇变换分解为 $\widehat{R}_{ijk}=\mathrm{Ad}(R^\Psi_{ijk})\circ\tau_{ijk}$和 $\widehat{K}_{ijkl}=\mathrm{Ad}(K^\Psi_{ijkl})\circ\tau^K_{ijkl}$，其中 R^Ψ_{ijk}和 K^Ψ_{ijkl}是量子 Y变量中的量子二对数乘积，而 τ_{ijk} 和 τ^K_{ijkl} 是单项式部分（见 (3.9) 和 (5.12)）。

下一步的关键是通过环同态将量子 Y-变量转化为典范变量 (1.3)。随后，我们寻求一种特殊情形，使单项式部分 τ_{ijk}和 τ^K_{ijkl}分别可表示为适当的 P_{ijk}和 P^K_{ijkl}的伴随作用 $\mathrm{Ad}(P_{ijk})$ 和 $\mathrm{Ad}(P^K_{ijkl})$。这实际上将簇变换 $\widehat{R}_{ijk}$ 和 $\widehat{K}_{ijkl}$ 转化为完全的伴随算子 $\mathrm{Ad}(R^\Psi_{ijk}P_{ijk})$ 和 $\mathrm{Ad}(K^\Psi_{ijkl}P^K_{ijkl})$，其中 R^Ψ_{ijk} 和 K^Ψ_{ijkl} 现在用典范变量表示。我们进一步假设，组合算子$R_{ijk}:=R^\Psi_{ijk}P_{ijk}$ 和 $K_{ijkl}:=K^\Psi_{ijkl}P^K_{ijkl}$ 本身 满足三维反射方程（!）。这些要求极具挑战性；在量子簇代数的框架下，没有一般性结果能够保证此类 P_{ijk}和 P^K_{ijkl}的存在，也无法保证乘积 R^Ψ_{ijk} 和 K^Ψ_{ijkl} 的良定义性。我们分析的一项核心亮点，是充分利用了

在分解 (2.6) 中变异时可选的符号自由度。详细过程概述于 §6 的引言中。

1.4. **展望**。 本文的结果引出了若干有待研究的问题。

一个自然的方向是计算 K-算子在 u-对角或 w-对角表示中的矩阵元，或在它们的量子双版本中的矩阵元，同时开展与 [13] 中对 R-算子的分析。在这类表示中，3DRE 两边相等有望被解释为一种对偶性，其中涉及与 (6.34) =(6.38) 相对应的 46q-阶乘。有关这类计算的基本示例，见 [11, 定理 6.2]。

R-算子也被刻画为所谓 $RLLL$ 关系 $R(L_{12}L_{13}L_{23}) = (L_{23}L_{13}L_{12})R$ [13, 定理 7.1] 的唯一解（差一个归一化因子）。这里， L 表示一个三维 L-算子 [4, 3], ，可将其视为定义了一个量子化六顶点模型[20, 14]。类似地，可以自然地预期，本文构造的 K-算子可由一种量子化反射方程（参见 [23], [19, 第 4.4] 节）$(L_{12}G_2L_{21}G_1)\,K = K\,(G_1L_{12}G_2L_{21})$ 刻画，其中 G 是一个适当的算子。一旦得到这样的量子化反射方程，便可由此构造出二维通常反射方程的无穷多个解，并将其表示为矩阵乘积形式 [23]。

在 §5 中，我们得到了类型为 ρ_{24} 和 ρ_{13}的 K算子。后续分析聚焦于前一种情形，其对应的 SB 箭图 (3.17) 属于 C 型，且顶端边界边上包含权重为二的节点。类型为 ρ_{13} 的 K算子则对应 B 型，值得进行平行研究。参见注6.7。特别地，预期该算子的适当特化能够重现 [22] 中由量子化坐标环 $A_q(B_2)$ 推导出的解。

1.5. **论文结构**。 在 §2 中，我们概述量子簇代数的基本事实。定理 2.1 发挥着关键作用，该定理涉及沿突变序列进行的簇变换。

在 §3 中，我们回顾了 [13] 中用于 R算子的 SB 箭图，并介绍了适用于 K算子的扩展版本。文中还给出了相关的簇变换及其三维反射方程。

在第4节中，我们回顾 R-算子在 [13], 中的构造，其中命题4.6和定理 4.7对其描述作了略微细化，具体而言，该描述涉及 $N(A_3) \rtimes S(A_3)$、 $N'(A_3) \rtimes S(A_3)$以及第2.3节中引入的 Laurent级数集合 $\mathcal{L}_\gamma$ 。

在第5节中，我们通过分析 τ^K_{ijkl} 可实现为伴随算子的条件，得到类型为 ρ_{24} 和 ρ_{13} 的 K-算子。本文其余部分聚焦于情形 ρ_{24}；参见注6.7。

在第6节中，基于前几节的结果，我们在参数所需满足的若干附加约束下建立三维反射方程。我们还详细证明了三维反射方程中量子二对数乘积定义良好；这些乘积既可视为量子 Y-变量的 Laurent级数，也可用 q-韦尔代数生成元来表示。第6.5节展示了显式公式 (1.7)–(1.10) 的推导。

在 §7 中，我们展示如何通过对参数进行适当特化，恢复与 FG 箭图相关联的 K-算子 [11], 。

附录 A 给出了命题 5.4 的证明。附录 B 列出了符号序列的一般允许取值下 K-算子的显式公式。根据命题 5.4，它们只是同一个算子的不同表现形式。附录 C 汇总了用于证明二对数恒等式良定义性的资料。附录 D 与 §7 相对应，说明如何将 FG 箭图的R-算子 [11] 作为本文中算子的特化得到。

致谢。作者感谢 Xiaoyue Sun、Yuji Terashima 和 Junya Yagi 在此前研究中的合作。RI 获得 JSPS KAKENHI 项目资助，资助编号为 23K03048。AK 获得 JSPS KAKENHI 项目资助，资助编号为 24K06882。

2. Basics of quantum cluster mutations and notations

2.1. 量子簇变异。我们回顾 Fock 和 Goncharov [7], 提出的量子簇变异定义，以及本文所用周期突变序列的一项重要性质。

令 I 为有限指标集，并令 $B=(b_{ij})_{i,\ j\in I}$ 为斜对称化交换矩阵，其元素属于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$；也就是说，存在一个对角矩阵 $d=\operatorname{diag}(d_j)_{j\in I}$，其元素为正整数$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$，使得 $B=(b_{ij})_{i,\ j\in I}:=B\,d=(b_{ij}d_j)_{i,\ j\in I}$ 是斜对称的。我们假设 $\gcd(d_j\mid j\in I)=1$，因此 d 由 B 唯一确定。

定义子集 $I_0:=\{\,i\in I\mid b_{ij}\notin\mathbb{Z}\ \text{或}\ b_{ji}\notin\mathbb{Z}\,\}$。令 $\mathcal{Y}(B)$ 表示由量子 Y-变量 $Y=(Y_i)_{i\in I}$ 生成的斜域，满足以下 q-交换关系

$$Y_iY_j=q^{2\widehat{b}_{ij}}\,Y_jY_i. \tag{2.1}$$

我们记作 $q_i:=q^{d_i}$。数据 (B,d,Y) 称为一个量子 Y-种子，每个 Y_i 称为一个量子 y-变量。

对于 $k\in I\setminus I_0$，量子突变 μ_k 将 (B,d,Y) 变换为 (B',d',Y')：$=\mu_k(B,d,Y)$，其定义如下：

$$b'_{ij}=\begin{cases}-b_{ij}, & i=k\ \text{or}\ j=k,\\[2mm] b_{ij}+\dfrac{|b_{ik}|\,b_{kj}+b_{ik}\,|b_{kj}|}{2}, & \text{otherwise},\end{cases} \tag{2.2}$$

$$d'_i=d_i, \tag{2.3}$$

$$Y'_i=\begin{cases}Y_k^{-1}, & i=k,\\[2mm] Y_i\displaystyle\prod_{j=1}^{|b_{ik}|}\bigl(1+q_k^{2j-1}Y_k^{-\operatorname{sgn}(b_{ik})}\bigr)^{-\operatorname{sgn}(b_{ik})}, & i\neq k.\end{cases} \tag{2.4}$$

下文中，我们将 (B,d,Y) 简写为 (B,Y)，因为 d 在突变下保持不变。突变 μ_k 诱导一个斜域同构 $\mu_k^*:\ \mathcal{Y}(B')\to\mathcal{Y}(B)$，其中 $\mathcal{Y}(B')$ 是由 Y'_i 生成、满足关系 $Y'_iY'_j=q^{2\widehat{b}'_{ij}}Y'_jY'_i$ 的斜域。

为直观表示交换矩阵 B，我们使用加权箭图。对于有序对 (B,d)，定义斜对称矩阵 $\sigma=(\sigma_{ij})_{i,j\in I}$，使其满足 $\sigma_{ij}=b_{ij}\gcd(d_i,d_j)/d_i$。本文中，我们只遇到 σ_{ij} 为整数或 $\pm\frac{1}{2}$ 的情况。我们按如下方式确定加权箭图 $Q=(\sigma,d)$，并排除自环和二循环。Q 的顶点集为 I，每个顶点 $i\in I$ 带有权重 d_i。权重为 1 的顶点用圆圈表示，而权重为 $d_i>1$ 的顶点则用内含 d_i 的圆圈表示。当 σ_{ij} 为整数时，我们绘制普通箭头 $\longrightarrow$，使得从 i 到 j 有 $\sigma_{ij}=$ # 条箭头，从 j 到 i 有 {# 条箭头。当 $\sigma_{ij}=1/2$（分别为 $\sigma_{ij}=-1/2$）时，我们绘制一条虚线箭头 $\dashrightarrow$，从 i 指向 j（分别从 j 指向 i）。当 B 为斜对称时，对所有 $i\in I$ 都有 $d_i=1$。

量子突变的分解。量子突变可以分解为两个部分——单项式部分和自同构部分 [8] ——，如 [18] 中所述，有两种等价的方式。对于 $\varepsilon\in\{+,-\}$，定义一个斜域同构 $\tau_{k,\varepsilon}$，其定义如下：

$$\tau_{k,\varepsilon}:\ \mathcal{Y}(B')\to\mathcal{Y}(B);\quad Y'_i\mapsto\begin{cases}Y_k^{-1}, & i=k,\\ q^{-\widehat{b}_{ik}[\varepsilon b_{ik}]_+}\,Y_i\,Y_k^{[\varepsilon b_{ik}]_+}, & i\neq k,\end{cases} \tag{2.5}$$

其中 $[a]_+:=\max(0,a)$。于是我们有

$$\mu_k^*=\operatorname{Ad}\Psi_{q_i}(Y_k)\circ\tau_{k,+}(Y'_i)=\operatorname{Ad}\Psi_{q_i}(Y_k^{-1})^{-1}\circ\tau_{k,-}(Y'_i), \tag{2.6}$$

其中 $\mathrm{Ad}(X)(Y) = XYX^{-1}$，且 $\Psi_q(U)$ 表示量子二对数，其定义为 by

$$\Psi_q(U) = \frac{1}{(-qU;q^2)_\infty}, \qquad (z;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty}(1-zq^k). \tag{2.7}$$

函数 $\Psi_q(U)$ 可展开为级数

$$\Psi_q(U) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-qU)^n}{(q^2;q^2)_n}, \qquad \Psi_q(U)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{q^{n^2}U^n}{(q^2;q^2)_n}, \qquad (z;q)_n = \frac{(z;q)_\infty}{(zq^n;q)_\infty} \quad (n\in\mathbb{Z}), \tag{2.8}$$

并且它是形式幂级数代数 $\mathbb{Q}(q)[[U]]$ 的一个元素。方程 (2.6) 是由 $\Psi_q(U)$ 的基本性质之一推出的,

$$\Psi_q(q^2U)\,\Psi_q(U)^{-1} = 1+qU. \tag{2.9}$$

量子环面代数。与 B 相关联的量子环面代数 $\mathcal{T}(B)$是由满足以下关系的非交换变量 Y^α $(\alpha\in\mathbb{Z}^I)$ 生成的 $\mathbb{Q}(q)$- 代数

$$q^{\langle\alpha,\beta\rangle}\,\mathsf{Y}^\alpha\mathsf{Y}^\beta = \mathsf{Y}^{\alpha+\beta}, \tag{2.10}$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 是由 $\langle\alpha,\ \beta\rangle = -\langle\beta,\ \alpha\rangle = -\alpha\cdot B\beta$ 定义的斜对称双线性型。令 e_i 为 $\mathbb{Z}^I$ 的标准单位向量，并将 Y_i 记作 Y^{e_i}。那么 $\mathsf{Y}_i\mathsf{Y}_j = q^{2b_{ij}}\mathsf{Y}_j\mathsf{Y}_i$。将 Y_i 认作 Y_i，即可恢复 (2.1)。(2.5) 中 μ_k^*, $\tau_{k,\ \varepsilon}$ 的单项式部分自然诱导出一个量子环面代数同构，记作

$$\tau_{k,\varepsilon}:\mathcal{T}(B')\to\mathcal{T}(B); \quad \mathsf{Y}'_i\mapsto\begin{cases}\mathsf{Y}_k^{-1}, & i=k,\\ \mathsf{Y}^{e_i+e_k[\varepsilon b_{ik}]_+}, & i\neq k.\end{cases} \tag{2.11}$$

2.2. 周期性与量子二对数恒等式。令 $\mathbb{P}(u) = \mathbb{P}_{\mathrm{trop}}(u_1,\ u_2,\ \ldots\ldots,\ u_p) := \{\prod_{i=1}^p u_i^{a_i} \mid a_i\in\mathbb{Z}\}$ 为秩为 p 的热带半域，其加法 $\oplus$ 和乘法 $\cdot$ 定义为

$$\prod_{i=1}^p u_i^{a_i}\oplus\prod_{i=1}^p u_i^{b_i} = \prod_{i=1}^p u_i^{\min(a_i,b_i)}, \qquad \prod_{i=1}^p u_i^{a_i}\cdot\prod_{i=1}^p u_i^{b_i} = \prod_{i=1}^p u_i^{a_i+b_i}.$$

对于 $v=\prod_{i\in I}u_i^{a_i}\in\mathbb{P}(u)$，记 $v=u^\alpha$，其中 $\alpha=(a_i)_{i\in I}\in\mathbb{Z}^I$。若 $\alpha\in\mathbb{Z}^I_{\geq 0}$（相应地，$\alpha\in\mathbb{Z}^I_{\leq 0}$），则称 v 为正（相应地，负）。

对于有限集 I，令 $\mathbb{P}(u)$ 为秩为 $|I|$ 的热带半域。对于热带 y-种子 $(B,\ y)$，其中 $B=(b_{ij})_{i,\ j\in I}$ 且 $y=(y_i)_{i\in I}\in\mathbb{P}(u)^I$，以及 $k\in I\backslash I_0$，变异 $\mu_k(B,\ y)=(B',\ y')$ 由（2.2）及下式定义

$$y'_i = \begin{cases} y_k^{-1}, & i=k,\\ y_i\cdot(1\oplus y_k^{-\mathrm{sgn}(b_{ik})})^{-b_{ik}}, & i\neq k.\end{cases} \tag{2.12}$$

热带 y变量的一个重要性质是符号相干性：对于通过 $y=(u_i)_{i\in I}$对初始种子 (B,y) 进行变异而得到的任意热带 y变量$y'_i=u^{\alpha'}$，指数向量 α'要么为正，要么为负。α' 的符号称为 y'_i的热带符号 。

对称群 $\mathfrak{S}_I$ 自然地作用于热带 y种子上，其作用方式为

$$\sigma:(b_{ij},y_i)\mapsto(b_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)},\ y_{\sigma^{-1}(i)}), \qquad \sigma\in\mathfrak{S}_I,$$

并以类似的方式作用于量子 Y-种子。对于序列 $\mathbf{i}=(i_1,\ i_2,\ \ldots\ldots,\ i_L)\in I^L$，定义变异的复合 $\mu_{\mathbf{i}}:=\mu_{i_L}\mu_{i_{L-1}}\cdots\mu_{i_2}\mu_{i_1}$，并分别考虑从 $(B,\ u)$ 和 $(B,\ Y)$ 出发得到的热带 y-种子与量子 y-种子序列:

$$(B,u)=(B^{(1)},y^{(1)})\xrightarrow{\mu_{i_1}}(B^{(2)},y^{(2)})\xrightarrow{\mu_{i_2}}\cdots\xrightarrow{\mu_{i_L}}(B^{(L+1)},y^{(L+1)}), \tag{2.13}$$

$$(B,Y)=(B^{(1)},Y^{(1)})\xrightarrow{\mu_{i_1}}(B^{(2)},Y^{(2)})\xrightarrow{\mu_{i_2}}\cdots\xrightarrow{\mu_{i_L}}(B^{(L+1)},Y^{(L+1)}). \tag{2.14}$$

对于 $\sigma \in \mathfrak{S}_I$，若序列 $\mathbf{i}$ 满足 $\sigma^{-1}(b^{(L+1)},\ y^{(L+1)}) = (b,\ y)$，则称其为 $(B,\ u)$ 的 σ-周期。$(B,\ Y)$ 的 σ-周期类似定义。对于交换矩阵 B，我们将针对 B 的变异序列与 I 的一个置换合称为突变序列。

下述定理由以下同步性结合得出： [25] 在 x-种子、 y- 种子与热带 y-种子之间的同步性，以及经典种子与量子种子之间的同步性[9, 引理 2.22], [17,命题 3.4]。

定理 2.1. 对于交换矩阵 B 以及针对 B的变异序列 ν，以下两个陈述等价：

(1) 对于一个热带 y-种子 (B, y)，有 $\nu(B, y) = (B, y)$。(2) 对于一个量子 Y-种子 (B, Y)，有 $\nu(B, Y) = (B, Y)$。

证明热带 y-种子的周期性，比证明其量子对应物的周期性容易得多。本文中，我们利用该定理，使陈述 (2) 可由 (1) 推出。

对于 $t = 1, \dots, L+1$，令 $\mathbf{Y}_i^{(t)}$ $(i \in I)$ 表示量子环面 $\mathcal{T}(B^{(t)})$ 的生成元。(2.14) 中的量子 y-变量可表示为

$$\begin{aligned} Y_i^{(t+1)} &= \mathrm{Ad}\big(\Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{Y}_{i_1}^{(1)\delta_1})^{\delta_1}\big)\tau_{i_1,\delta_1}\cdots\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q_{i_t}}(\mathbf{Y}_{i_t}^{(t)\delta_t})^{\delta_t}\big)\tau_{i_t,\delta_t}(\mathbf{Y}_i^{(t+1)}) \\ &= \mathrm{Ad}\big(\Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{Y}^{\delta_1\beta_1})^{\delta_1}\cdots\Psi_{q_{i_t}}(\mathbf{Y}^{\delta_t\beta_t})^{\delta_t}\big)\circ\tau_{i_1,\delta_1}\cdots\tau_{i_t,\delta_t}(\mathbf{Y}_i^{(t+1)}), \end{aligned} \tag{2.15}$$

其中 $\beta_r \in \mathbb{Z}^I$ 由 $\mathbf{Y}^{\beta_r} = \tau_{i_1,\ \delta_1}\cdots\tau_{i_{r-1},\ \delta_{r-1}}(\mathbf{Y}_{i_r}^{(r)})$ 确定。特别地，$\beta_1 = e_{i_1}$。这样，同构 $\mu_{\mathbf{i}}^*\colon \mathcal{Y}(B^{(L+1)}) \to \mathcal{Y}(B^{(1)})$ 被分解为单项式部分

$$\tau_{i_1,\delta_1}\tau_{i_2,\delta_2}\cdots\tau_{i_L,\delta_L} : \mathcal{Y}(B^{(L+1)}) \to \mathcal{Y}(B^{(1)}), \tag{2.16}$$

和二对数部分

$$\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{Y}^{\delta_1\beta_1})^{\delta_1}\Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{Y}^{\delta_2\beta_2})^{\delta_2}\cdots\Psi_{q_{i_L}}(\mathbf{Y}^{\delta_L\beta_L})^{\delta_L}\big) : \mathcal{Y}(B^{(1)}) \to \mathcal{Y}(B^{(1)}). \tag{2.17}$$

假设 $\mathbf{i} = (i_1,\ i_2,\ \dots,\ i_L)$ 是 $(B,\ Y)$ 的一个 σ-周期。对于任意符号序列 $(\delta_t)_{t=1,\dots,L}$，若 $\delta_t \in \{+,-\}$，则有

$$\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{Y}^{\delta_1\beta_1})^{\delta_1}\Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{Y}^{\delta_2\beta_2})^{\delta_2}\cdots\Psi_{q_{i_L}}(\mathbf{Y}^{\delta_L\beta_L})^{\delta_L}\big)\circ\tau_{i_1,\delta_1}\tau_{i_2,\delta_2}\cdots\tau_{i_L,\delta_L}\sigma = \mathrm{id}. \tag{2.18}$$

如果每个 δ_t 都选为 $y_{i_t}^{(t)}$ 的热带符号，那么根据定理 2.1 以及[18, 17], 中的讨论，等式(2.18) 分解为两个恒等式：

$$\tau_{i_1,\delta_1}\tau_{i_2,\delta_2}\cdots\tau_{i_L,\delta_L}\sigma = \mathrm{id}, \tag{2.19}$$

$$\Psi_{q_{i_1}}(\mathbf{Y}^{\delta_1\beta_1})^{\delta_1}\Psi_{q_{i_2}}(\mathbf{Y}^{\delta_2\beta_2})^{\delta_2}\cdots\Psi_{q_{i_L}}(\mathbf{Y}^{\delta_L\beta_L})^{\delta_L} = 1. \tag{2.20}$$

对于一般的符号序列，无法保证 (2.18) 可以分解为这样两个恒等式。

2.3. **q-韦尔代数**。固定一个正整数 p 和一个非零复数 $\hbar$。对于 $\gamma = (\gamma_i)_{i=1,\dots,p} \in \mathbb{Z}_{>0}^p$，令 $(u_i,\ w_i)$ $(i = 1,2,\dots,p)$ 为满足以下条件的典范对

$$[u_i, w_j] = \hbar\,\gamma_i\,\delta_{ij}, \qquad [u_i, u_j] = [w_i, w_j] = 0. \tag{2.21}$$

我们将$\mathbf{u} = (u_1, u_2, \dots, u_p, w_1, w_2, \dots, w_p)$记作。令 $q = \mathrm{e}^{\hbar}$，并令 $\mathcal{W}_\gamma$ 表示由 q-韦尔对 $\mathrm{e}^{\pm u_i}$, $\mathrm{e}^{\pm w_i}$ $(i = 1, 2, \dots, p)$生成的 $\mathbb{C}(q^{1/2})$上的代数，它们满足 q-交换关系

$$\begin{aligned} &\mathrm{e}^{u_i}\mathrm{e}^{w_j} = q^{\gamma_i\,\delta_{ij}}\,\mathrm{e}^{w_i}\mathrm{e}^{u_i}, \\ &\mathrm{e}^{u_i}\mathrm{e}^{u_j} = \mathrm{e}^{u_j}\mathrm{e}^{u_i}, \qquad \mathrm{e}^{w_i}\mathrm{e}^{w_j} = \mathrm{e}^{w_j}\mathrm{e}^{w_i}. \end{aligned} \tag{2.22}$$

我们用 $\mathcal{L}_\gamma$ 表示满足 (2.22) 的关于 e^{u_i} 和 e^{w_i} 的形式洛朗级数集合，写作

$$\mathcal{L}_\gamma = \left\{ \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{2p}} f(\mathbf{m})\,\mathrm{e}^{\mathbf{m}\cdot\mathbf{u}} \;\middle|\; f(\mathbf{m}) \in \mathbb{C}(q^{1/2}) \right\}, \tag{2.23}$$

其中 t 关系 $\mathsf{e}^{u_i}\mathsf{e}^{w_j} = \mathsf{e}^{\frac{1}{2}[u_i,w_j]}\mathsf{e}^{u_i+w_j}$。注意， $\mathcal{L}_\gamma$ 在乘法下不封闭

我们将 γ 与对角矩阵 $\mathrm{diag}(\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_p) \in GL_p(\mathbb{Z})$ 对应。对于 $\alpha \in \mathbb{C}^{2p}$ 和满足 $\gamma^{-1}A\gamma \in GL_p(\mathbb{Z})$ 且 $\det A = \pm 1$ 的整矩阵 $A \in GL_p(\mathbb{Z})$，定义 $\eta_{A,\alpha}$ 在 $\mathbf{u}$ 上的一个仿射变换为

$$\eta_{A,\alpha}:\ \mathbf{u} \mapsto \tilde{A}\mathbf{u} + \alpha; \qquad \tilde{A} = \begin{pmatrix} A & O \\ O & \gamma(A^{-1})^T\gamma^{-1} \end{pmatrix} \in SL_{2p}(\mathbb{Z}). \tag{2.24}$$

容易验证，$\eta_{A,\alpha}$ 作为变量的典范变换，保持对易关系 (2.21) 不变。该 $\eta_{A,\alpha}$ 定义了一个 $\mathcal{W}_\gamma$ 的同构，我们将此同构记作相同的符号。

引理 2.2。对于 $F = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{2p}} f(\mathbf{m})\,\mathrm{e}^{\mathbf{m}\cdot\mathbf{u}} \in \mathcal{L}_\gamma$，定义诱导变换 $\eta^*_{A,\alpha}$ 为

$$\eta^*_{A,\alpha}(F) = \sum_{\mathbf{m}\in\mathbb{Z}^{2p}} f(\mathbf{m})\,\mathrm{e}^{\mathbf{m}\cdot(\tilde{A}\mathbf{u}+\alpha)}.$$

则有 $\eta^*_{A,\alpha}(F) \in \mathcal{L}_\gamma$。特别地，$\eta^*_{A,\alpha}$ 作用于 $\mathcal{L}_\gamma$。

证明。该断言源于矩阵 $\tilde{A}$ 定义了一个单射 $\tilde{A}:\ \mathbb{Z}^{2p} \to \mathbb{Z}^{2p}$，其形式为 $\mathbf{m} \mapsto \mathbf{m}A$。□

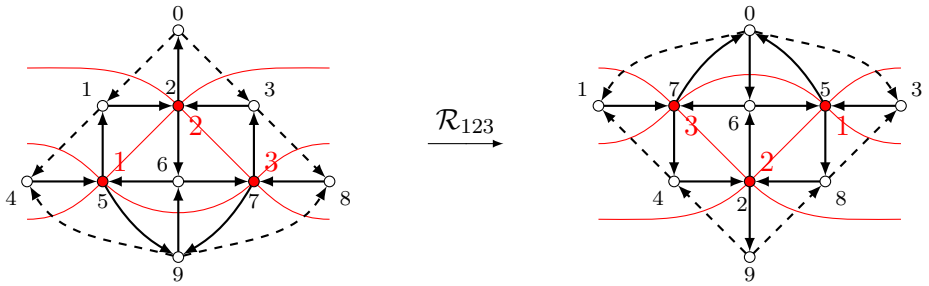
2.4. 其他记号。对于秩为 ℓ 的单李代数 $\mathfrak{g}$，记相应的魏尔群 $W(\mathfrak{g})$ 为由简单反射 $s_1,\dots,s_\ell$ 生成的群。元素 $W(\mathfrak{g})$ 的一个约化表达式 $s_{i_1}s_{i_2}\cdots s_{i_p}$ 简写为 $i_1i_2\cdots i_p$。

当 $\mathfrak{g} = A_\ell$ 时，我们考虑一个具有 $\ell+1$ 条线的布线图，其中 $s_k (k = 1,\dots,\ell)$ 交换从底部数起的第 k 条和第 $(k+1)$ 条线。

当 $\mathfrak{g} = C_\ell$ 或 B_ℓ 时，我们考虑一个具有 ℓ 条线和一面反射这些线的墙的布线图，其中 $s_k (k = 1,\dots,\ell-1)$ 交换从底部数起的第 k 条和第 $(k+1)$ 条线，而 s_ℓ 将第 ℓ 条线在墙处反射。

3. Tetrahedron and 3D reflection equations from cluster mutations

3.1. R-算子。回顾在 [30, 13]中引入的对称蝴蝶（SB）箭图的 R-算子。它由以下布线图（红色所示）及相应箭图（黑色所示）的变换构造而成，这些图对应于魏尔群 $W(A_2)$ 中最长元的两个约化表达式 121 和 212。



$B(A_2)$ $\qquad$ $B'(A_2)$ (3.1)

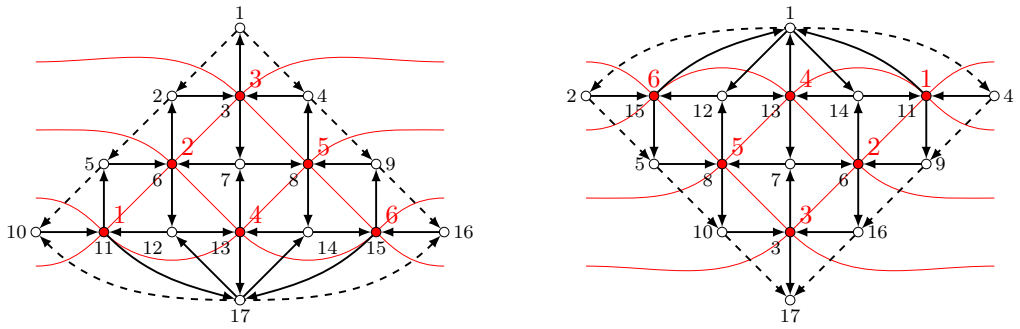
对于布线图和箭图的变换，我们都使用相同的记号 $\mathcal{R}_{123}$，其中箭图变换表示为突变序列 $\mathcal{R}_{123} = \sigma_5\,\sigma_7\sigma_2\,\sigma_6\mu_2\mu_7\mu_5\mu_6$。

根据图 3.1 所示的布线图和箭图（它们对应于魏尔群 $W(A_3)$ 中最长元的约化表达式 123121 和 321323），我们得到箭图变换 $\mathcal{R}_{ijk}$ 的四面体方程：

$$\sigma_{7,12}\mathcal{R}_{456}\mathcal{R}_{236}\mathcal{R}_{135}\mathcal{R}_{124}(B(A_3)) = \sigma_{7,14}\mathcal{R}_{124}\mathcal{R}_{135}\mathcal{R}_{236}\mathcal{R}_{456}(B(A_3)) = B'(A_3),$$

以及对于量子 Y-种子，

$$\sigma_{7,12}\mathcal{R}_{456}\mathcal{R}_{236}\mathcal{R}_{135}\mathcal{R}_{124}(B(A_3),Y) = \sigma_{7,14}\mathcal{R}_{124}\mathcal{R}_{135}\mathcal{R}_{236}\mathcal{R}_{456}(B(A_3),Y). \tag{3.2}$$



$B(A_3)$ $B'(A_3)$

FIGURE 3.1. SB 的四面体关系。

对应于变异序列 $\mathcal{R}_{123} = \sigma_{5,\ 7}\sigma_{2,\ 6}\mu_2\mu_7\mu_5\mu_6$，我们定义如下量子 Y-种子序列：

$$\begin{aligned}(B(A_2), Y) = (B^{(1)}, Y^{(1)}) \xrightarrow{\mu_6} (B^{(2)}, Y^{(2)}) \xrightarrow{\mu_5} (B^{(3)}, Y^{(3)}) \xrightarrow{\mu_7} (B^{(4)}, Y^{(4)}) \\ \xrightarrow{\mu_2} (B^{(5)}, Y^{(5)}) \xrightarrow{\sigma_{5,7}\sigma_{2,6}} (B^{(6)}, Y^{(6)}) = (B'(A_2), Y').\end{aligned} \tag{3.3}$$

该变异序列诱导了斜域的同构 $R_{123} : \mathcal{Y}(B'(A_2)) \to \mathcal{Y}(B(A_2))$。对于符号序列 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3, \varepsilon_4) \in \{-1, 1\}^4$, $\widehat{R}_{123}$ 可表示为

$$\begin{aligned}\widehat{R}_{123} = \mathrm{Ad}\Big(\Psi_q((Y_6^{(1)})^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_1}\Big)\, \tau_{6,\varepsilon_1} \mathrm{Ad}\Big(\Psi_q((Y_5^{(2)})^{\varepsilon_2})^{\varepsilon_2}\Big)\, \tau_{5,\varepsilon_2} \\ \cdot \mathrm{Ad}\Big(\Psi_q((Y_7^{(3)})^{\varepsilon_3})^{\varepsilon_3}\Big)\, \tau_{7,\varepsilon_3} \mathrm{Ad}\Big(\Psi_q((Y_2^{(4)})^{\varepsilon_4})^{\varepsilon_4}\Big)\, \tau_{2,\varepsilon_4} \sigma_{5,7}\sigma_{2,6}.\end{aligned} \tag{3.4}$$

我们将 R_{123} 的单项式部分定义为

$$\tau_{123|\varepsilon} = \tau_{6,\varepsilon_1}\, \tau_{5,\varepsilon_2}\, \tau_{7,\varepsilon_3}\, \tau_{2,\varepsilon_4}\, \sigma_{5,7}\sigma_{2,6} : \mathcal{Y}(B'(A_2)) \longrightarrow \mathcal{Y}(B(A_2)). \tag{3.5}$$

$\widehat{R}_{123}$ 和 $\tau_{123|\varepsilon}$ 都可以扩展为 R_{ijk} 和 $\tau_{ijk|\varepsilon}$，对应于四面体方程 (3.2) 中出现的变换 $\mathcal{R}_{ijk}$。在 [13], 中，我们研究了一个齐次四面体方程，其中所有算子 R_{ijk} 共享同一个符号序列 ε，并满足以下条件：

(i) 算子 R_{ijk} 的四面体方程可以分解为两部分：其单项式部分 $\tau_{ijk|\varepsilon}$ 满足的、具有相同符号序列 ε 的四面体方程，

$$\tau_{124|\varepsilon}\tau_{135|\varepsilon}\tau_{236|\varepsilon}\tau_{456|\varepsilon}\sigma_{7,12} = \tau_{456|\varepsilon}\tau_{236|\varepsilon}\tau_{135|\varepsilon}\tau_{124|\varepsilon}\sigma_{7,14},$$

以及相应的二重对数恒等式。

(ii) 通过从量子 Y 变量到 q-韦尔代数的环同态，与符号序列 ε 相关联的每个单项式部分 $\tau_{ijk|\varepsilon}$ 都可实现为适当算子的伴随作用。

结果表明，满足条件 (i) 的符号序列有两个：$\varepsilon = (-,-,+,+)$ 和 $(-,+,-,+)$ [13, 命题3.8 和 3.9]。对于这些符号序列，(3.4) 和 (3.5) 具有如下形式

$$\widehat{R}_{123} = \mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_6^{-1})^{-1}\Psi_q(qY_5^{-1}Y_6^{-1})^{-1}\Psi_q(q^{-1}Y_6Y_7)\Psi_q(q^{-2}Y_2Y_6Y_7)\big)\tau_{123|--++}, \tag{3.6}$$

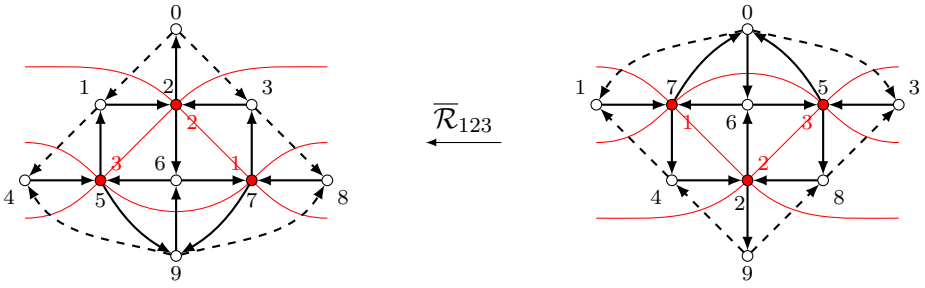
$$\tau_{123|--++} : \begin{cases} Y_0' \mapsto Y_0, & Y_5' \mapsto Y_2, \\ Y_1' \mapsto q^2 Y_1 Y_5 Y_6, & Y_6' \mapsto q^{-2} Y_2^{-1} Y_6^{-1} Y_7^{-1}, \\ Y_2' \mapsto Y_5, & Y_7' \mapsto Y_2 Y_5^{-1} Y_7, \\ Y_3' \mapsto Y_3, & Y_8' \mapsto Y_6 Y_7 Y_8, \\ Y_4' \mapsto Y_4, & Y_9' \mapsto Y_9, \end{cases} \tag{3.7}$$

对于 $\varepsilon=(-,-,+,+)$，以及

$$\widehat{R}_{123}=\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_6^{-1})^{-1}\Psi_q(qY_5Y_6)\Psi_q(q^{-1}Y_6^{-1}Y_7^{-1})^{-1}\Psi_q(Y_2Y_5Y_6)\big)\tau_{123|-+-+}, \tag{3.8}$$

$$\tau_{123|-+-+}:\begin{cases} Y_0'\mapsto Y_0, & Y_5'\mapsto Y_2Y_5Y_7^{-1},\\ Y_1'\mapsto Y_1, & Y_6'\mapsto Y_2^{-1}Y_5^{-1}Y_6^{-1},\\ Y_2'\mapsto Y_7, & Y_7'\mapsto Y_2,\\ Y_3'\mapsto Y_3Y_6Y_7, & Y_8'\mapsto Y_8,\\ Y_4'\mapsto Y_4Y_5Y_6, & Y_9'\mapsto Y_9, \end{cases} \tag{3.9}$$

对于 $\varepsilon=(-,\ +,\ -,\ +)$。我们将在 §4 中说明，这些符号序列满足条件 (ii)。为后续使用，我们还引入一个变换 $\mathcal{R}_{123}$:



$B(A_2)$ $\qquad$ $B'(A_2)$ $\qquad$ (3.10)

注意，布线图 (3.1) 和 (3.10) 中交叉点的编号不同，而 (3.1) 和 (3.10) 中箭图顶点的编号相同。因此，作为布线图的变换，$\mathcal{R}_{123}$ 不是 $\mathcal{R}_{123}$ 的逆变换。另一方面，作为突变序列，$\mathcal{R}_{123}$ 与 $\mathcal{R}_{123}$ 一致，并诱导出斜域同构 $\mathcal{Y}(B(A_2))\to\mathcal{Y}(B'(A_2))$，该同构是 $\mathcal{R}_{123}$ 的逆同构。

类比于 $\mathcal{R}_{123}$，我们定义一个量子 Y-种子序列如下

$$\begin{aligned}(B'(A_2),\overline{Y})=(\overline{B}^{(1)},\overline{Y}^{(1)})&\xrightarrow{\mu_6}(\overline{B}^{(2)},\overline{Y}^{(2)})\xrightarrow{\mu_5}(\overline{B}^{(3)},\overline{Y}^{(3)})\xrightarrow{\mu_7}(\overline{B}^{(4)},\overline{Y}^{(4)})\\ &\xrightarrow{\mu_2}(\overline{B}^{(5)},\overline{Y}^{(5)})\xrightarrow{\sigma_{5,7}\sigma_{2,6}}(\overline{B}^{(6)},\overline{Y}^{(6)})=(B(A_2),\overline{Y}'),\end{aligned} \tag{3.11}$$

其中，我们用 $\overline{Y}=(\overline{Y_i})$ 表示量子 Y-变量，以强调其与 (3.3) 的区别。

我们还定义了所诱导的斜域同构的单项式部分 $\overline{\tau}_{123|\varepsilon}$ $R_{123}:\mathcal{Y}(B(A_2))\to\mathcal{Y}(B'(A_2))$ 对于符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3,\varepsilon_4)\in\{-1,1\}^4$，其定义为

$$\overline{\tau}_{123|\varepsilon}=\tau_{6,\varepsilon_1}\,\tau_{5,\varepsilon_2}\,\tau_{7,\varepsilon_3}\,\tau_{2,\varepsilon_4}\,\sigma_{5,7}\sigma_{2,6}:\ \mathcal{Y}(B(A_2))\longrightarrow\mathcal{Y}(B'(A_2)). \tag{3.12}$$

对于上文引入的符号序列 $\varepsilon=(-,\ -,\ +,\ +)$ 和 $\varepsilon=(-,\ +,\ -,\ +)$，同构 ~phism R_{123} 及其单项式部分 (3.12) 定义如下

$$\widehat{\overline{R}}_{123}=\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(\overline{Y}_6^{-1})^{-1}\Psi_q(q\overline{Y}_5^{-1}\overline{Y}_6^{-1})^{-1}\Psi_q(q^{-1}\overline{Y}_6\overline{Y}_7)\Psi_q(q^{-2}\overline{Y}_2\overline{Y}_6\overline{Y}_7)\big)\overline{\tau}_{123|--++}, \tag{3.13}$$

$$\overline{\tau}_{123|--++}:\begin{cases} \overline{Y}_0'\mapsto\overline{Y}_0, & \overline{Y}_5'\mapsto\overline{Y}_2,\\ \overline{Y}_1'\mapsto q^{-2}\overline{Y}_1\overline{Y}_6\overline{Y}_7, & \overline{Y}_6'\mapsto q^{-2}\overline{Y}_2^{-1}\overline{Y}_6^{-1}\overline{Y}_7^{-1},\\ \overline{Y}_2'\mapsto\overline{Y}_5, & \overline{Y}_7'\mapsto\overline{Y}_2\overline{Y}_5^{-1}\overline{Y}_7,\\ \overline{Y}_3'\mapsto\overline{Y}_3, & \overline{Y}_8'\mapsto\overline{Y}_5\overline{Y}_6\overline{Y}_8,\\ \overline{Y}_4'\mapsto\overline{Y}_4, & \overline{Y}_9'\mapsto\overline{Y}_9, \end{cases} \tag{3.14}$$

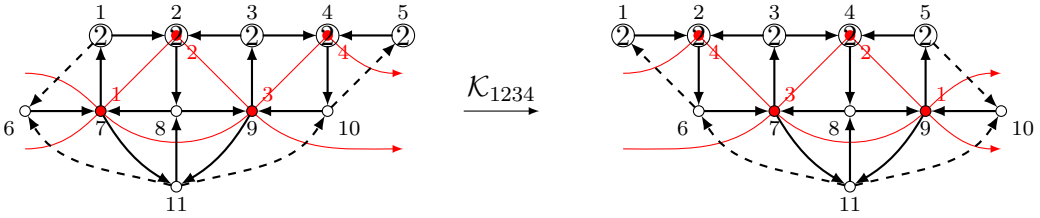
对于 $\varepsilon=(-,\ -,\ +,\ +)$，以及

$$\widehat{\overline{R}}_{123}=\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(\overline{Y}_6^{-1})^{-1}\Psi_q(q\overline{Y}_5\overline{Y}_6)\Psi_q(q^{-1}\overline{Y}_6^{-1}\overline{Y}_7^{-1})^{-1}\Psi_q(\overline{Y}_2\overline{Y}_5\overline{Y}_6)\big)\overline{\tau}_{123|-+-+},\tag{3.15}$$

$$\overline{\tau}_{123|-+-+}:\begin{cases}\overline{Y}'_0\mapsto\overline{Y}_0, & \overline{Y}'_5\mapsto\overline{Y}_2\overline{Y}_5\overline{Y}_7^{-1},\\ \overline{Y}'_1\mapsto\overline{Y}_1, & \overline{Y}'_6\mapsto\overline{Y}_2^{-1}\overline{Y}_5^{-1}\overline{Y}_6^{-1},\\ \overline{Y}'_2\mapsto\overline{Y}_7, & \overline{Y}'_7\mapsto\overline{Y}_2,\\ \overline{Y}'_3\mapsto\overline{Y}_3\overline{Y}_5\overline{Y}_6, & \overline{Y}'_8\mapsto\overline{Y}_8,\\ \overline{Y}'_4\mapsto\overline{Y}_4\overline{Y}_6\overline{Y}_7, & \overline{Y}'_9\mapsto\overline{Y}_9,\end{cases}\tag{3.16}$$

对于 $\varepsilon=(-,\ +,\ -,\ +)$。注意，对于任一符号序列 ε，$\tau_{123|\varepsilon}$ 是$\overline{\tau}_{123|\varepsilon}$的逆映射。

3.2. K-算子。现在我们引入 $B(C_2)$ 和 $B'(C_2)$，它们是与魏尔群 $W(C_2)$ 中最长元的两个约化表达式 1212 和 2121 所对应的布线图相对应的 SB 箭图。令 $\mathcal{K}_{1234}$ 表示如下定义的布线图（红色所示）和箭图（黑色所示）的变换。



(3.17)

$B(C_2)$ $B'(C_2)$

这些箭图的交换矩阵不是斜对称的。利用对角矩阵$d=(2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$，我们对 $B(C_2)$ 的交换矩阵 $B=(b_{ij})$ 进行对称化，得到

$$\widehat{B}:=B\,d=\begin{bmatrix}0&2&0&0&0&1&-2&0&0&0&0\\-2&0&-2&0&0&0&0&2&0&0&0\\0&2&0&2&0&0&0&0&-2&0&0\\0&0&-2&0&-2&0&0&0&0&2&0\\0&0&0&2&0&0&0&0&0&-1&0\\-1&0&0&0&0&0&1&0&0&0&-\frac{1}{2}\\2&0&0&0&0&-1&0&-1&0&0&1\\0&-2&0&2&0&0&1&0&1&0&-1\\0&0&2&0&0&0&0&-1&0&-1&1\\0&0&0&-2&1&0&0&0&1&0&-\frac{1}{2}\\0&0&0&0&0&\frac{1}{2}&-1&1&-1&\frac{1}{2}&0\end{bmatrix}.\tag{3.18}$$

这确定了 q-交换关系，即量子 Y 变量在 Y-种子$\sim(B(C_2)\ Y)$ 中的交换关系，如 $Y_iY_j=q^{2b_{ij}}Y_jY_i$ 所示。见 (2.1)。如果箭图中顶点 i和 j之间没有箭头（即 $b_{ij}=0$），我们就用 $\mu_{i,\ j}$ 表示相应的一对可交换变异$\mu_i\mu_j(=\mu_j\mu_i)$。

注3.1。矩阵 B (3.18) 的秩为 8。因此，由 $Y_1,\ldots,Y_{11}$ 生成的斜域 $\mathcal{Y}(B(C_2))$的中心由以下三个元素生成：

$$Y_1Y_3^{-1}Y_5Y_6^4Y_7^2Y_{11}^2,\quad Y_1^2Y_2Y_4^{-1}Y_5^{-2}Y_6^2Y_7^2Y_8^2Y_{10}^{-2},\quad Y_1Y_2Y_3Y_5^{-1}Y_7Y_8^2Y_9.\tag{3.19}$$

我们注意到，这个秩与典范变量 $u_i,\ w_i\,(i=1,\ldots,4)$ 的数量一致，这些变量将在 §5.1 中引入。类似的性质也适用于 (3.10) 中的箭图 $B(A_2)$，以及文献 [12] 中研究的方形簇。

引理3.2. 关系 $\mu_{3,8}\mu_{2,9}\mu_{4,7}\mu_{2,9}\mu_{3,8}(B(C_2))=B'(C_2)$ 成立。等价地，作为箭图变换，$\mathcal{K}_{1234}=\mu_{3,8}\mu_{2,9}\mu_{4,7}\mu_{2,9}\mu_{3,8}$。

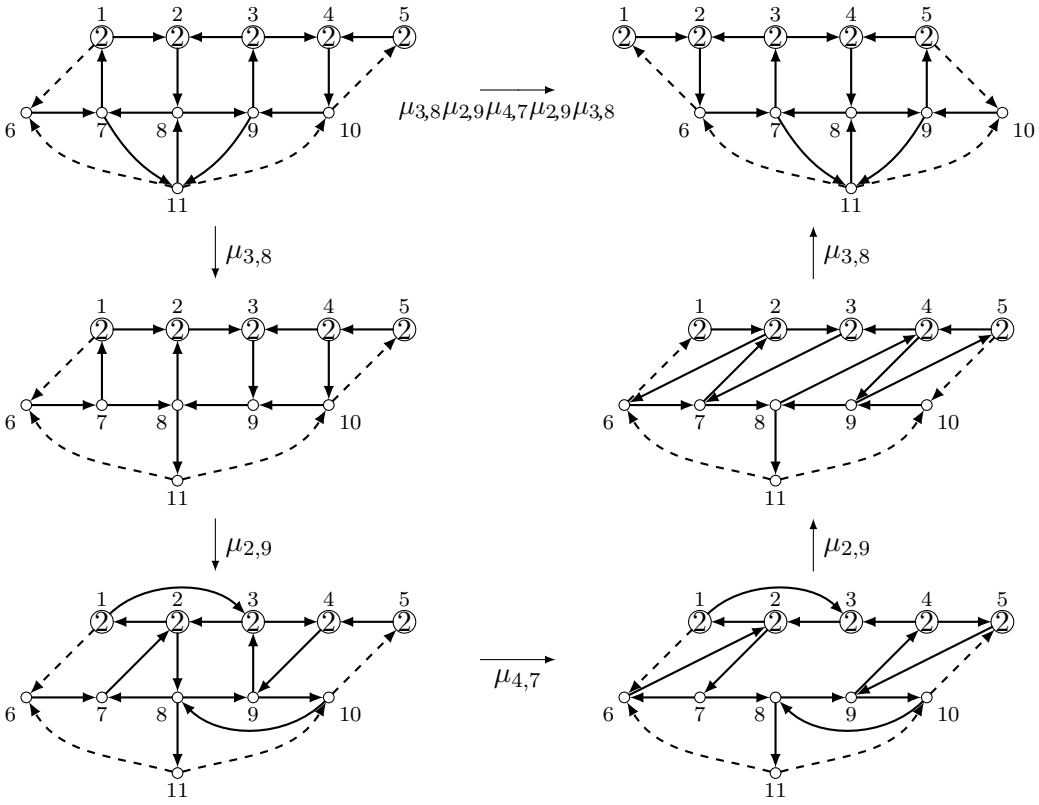


FIGURE 3.2. $\mathcal{K}_{1234}$的突变序列。

相应地，我们定义以下量子 Y-种子序列：

$$\begin{aligned}(B(C_2),Y)=(B^{(1)},Y^{(1)}) &\xrightarrow{\mu_8}(B^{(2)},Y^{(2)})\xrightarrow{\mu_3}(B^{(3)},Y^{(3)})\xrightarrow{\mu_9}(B^{(4)},Y^{(4)})\xrightarrow{\mu_2}(B^{(5)},Y^{(5)})\\ &\xrightarrow{\mu_7}(B^{(6)},Y^{(6)})\xrightarrow{\mu_4}(B^{(7)},Y^{(7)})\xrightarrow{\mu_9}(B^{(8)},Y^{(8)})\xrightarrow{\mu_2}(B^{(9)},Y^{(9)})\\ &\xrightarrow{\mu_8}(B^{(10)},Y^{(10)})\xrightarrow{\mu_3}(B^{(11)},Y^{(11)})=(B'(C_2),Y').\end{aligned}\tag{3.20}$$

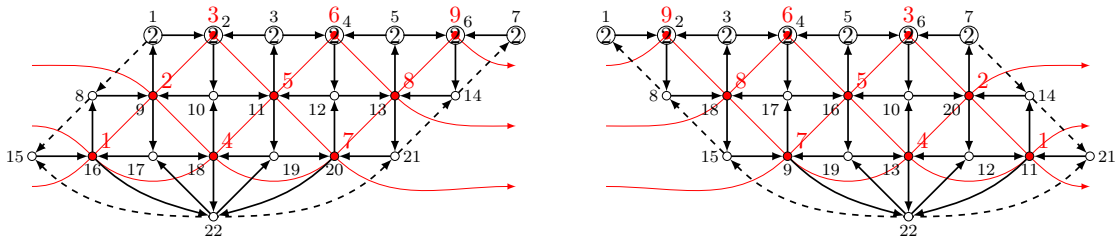
突变序列 $\mathcal{K}_{1234}$ 诱导出斜域同构 K_{1234}： $\mathcal{Y}(B'(C_2)\ Y')\ \to\mathcal{Y}(B(C_2)\ Y)$。对于符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_k)_{k=1,\dots,10}\in\{1,-1\}^{10}$，我们定义

$$\begin{aligned}\widehat{K}_{1234}=\ &\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_8^{(1)\varepsilon_1})^{\varepsilon_1}\big)\tau_{8,\varepsilon_1}\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q^2}(Y_3^{(2)\varepsilon_2})^{\varepsilon_2}\big)\tau_{3,\varepsilon_2}\\ &\cdot\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_9^{(3)\varepsilon_3})^{\varepsilon_3}\big)\tau_{9,\varepsilon_3}\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q^2}(Y_2^{(4)\varepsilon_4})^{\varepsilon_4}\big)\tau_{2,\varepsilon_4}\\ &\cdot\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_7^{(5)\varepsilon_5})^{\varepsilon_5}\big)\tau_{7,\varepsilon_5}\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q^2}(Y_4^{(6)\varepsilon_6})^{\varepsilon_6}\big)\tau_{4,\varepsilon_6}\\ &\cdot\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_9^{(7)\varepsilon_7})^{\varepsilon_7}\big)\tau_{9,\varepsilon_7}\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q^2}(Y_2^{(8)\varepsilon_8})^{\varepsilon_8}\big)\tau_{2,\varepsilon_8}\\ &\cdot\mathrm{Ad}\big(\Psi_q(Y_8^{(9)\varepsilon_9})^{\varepsilon_9}\big)\tau_{8,\varepsilon_9}\mathrm{Ad}\big(\Psi_{q^2}(Y_3^{(10)\varepsilon_{10}})^{\varepsilon_{10}}\big)\tau_{3,\varepsilon_{10}}.\end{aligned}\tag{3.21}$$

我们将 $\widehat{K}_{1234}$ 的单项式部分 $\tau^K_{1234|\varepsilon}$ 定义为

$$\tau^K_{1234|\varepsilon}=\ \tau_{8,\varepsilon_1}\tau_{3,\varepsilon_2}\tau_{9,\varepsilon_3}\tau_{2,\varepsilon_4}\tau_{7,\varepsilon_5}\tau_{4,\varepsilon_6}\tau_{9,\varepsilon_7}\tau_{2,\varepsilon_8}\tau_{8,\varepsilon_9}\tau_{3,\varepsilon_{10}}:\mathcal{Y}(B'(C_2),Y')\to\mathcal{Y}(B(C_2),Y).\tag{3.22}$$

3.3. 三维反射方程。 变换 $\mathcal{R}_{ijk},\mathcal{R}_{ijk}$ 和 $\mathcal{K}_{ijkl}$ 满足三维反射方程，它表现为 SB 箭图 $B(C_3)$ 的两个变换之间的等式：该箭图与魏尔群 $W(C_3)$ 中最长元 123123123 相关，并变换到对应于 321321321 的箭图 $B'(C_3)$。参见图 3.3。



$B(C_3)$ $B'(C_3)$

FIGURE 3.3. 由三维反射方程两侧连接的 SB 箭图 .

命题 3.3。 变换 $\mathcal{R}_{ijk}$、 $\mathcal{R}_{ijk}$ 和 $\mathcal{K}_{ijkl}$ 满足三维反射方程：

$$\begin{aligned}&\overline{\mathcal{R}}_{457}\mathcal{K}_{4689}\mathcal{K}_{2379}\mathcal{R}_{258}\overline{\mathcal{R}}_{178}\mathcal{K}_{1356}\mathcal{R}_{124}(B(C_3),Y)\\&\quad=\overline{\mathcal{R}}_{124}\mathcal{K}_{1356}\mathcal{R}_{178}\overline{\mathcal{R}}_{258}\mathcal{K}_{2379}\mathcal{K}_{4689}\mathcal{R}_{457}(B(C_3),Y).\end{aligned}\tag{3.23}$$

因此，我们得到三维反射方程，即从 $\mathcal{Y}(B'(C_3))$ 到 $\mathcal{Y}(B(C_3))$ 的斜域同构，由 R_{ijk}、 R_{ijk} 和 K_{ijkl} 组成，如下所示

$$\widehat{R}_{124}\widehat{K}_{1356}\widehat{\overline{R}}_{178}\widehat{R}_{258}\widehat{K}_{2379}\widehat{K}_{4689}\widehat{\overline{R}}_{457}=\widehat{R}_{457}\widehat{K}_{4689}\widehat{K}_{2379}\widehat{\overline{R}}_{258}\widehat{R}_{178}\widehat{K}_{1356}\widehat{\overline{R}}_{124}.\tag{3.24}$$

证明。 从图 3.4 和图 3.5 可以观察到，(3.23) 两侧的箭图突变相一致。对于量子 Y-种子，该等式可以在热带 y-变量层面得到验证，随后由定理 2.1 得出该结论。相应地，(3.24) 作为从 $\mathcal{Y}(B'(C_3))$到 $\mathcal{Y}(B(C_3))$的斜域同构恒等式得到。□

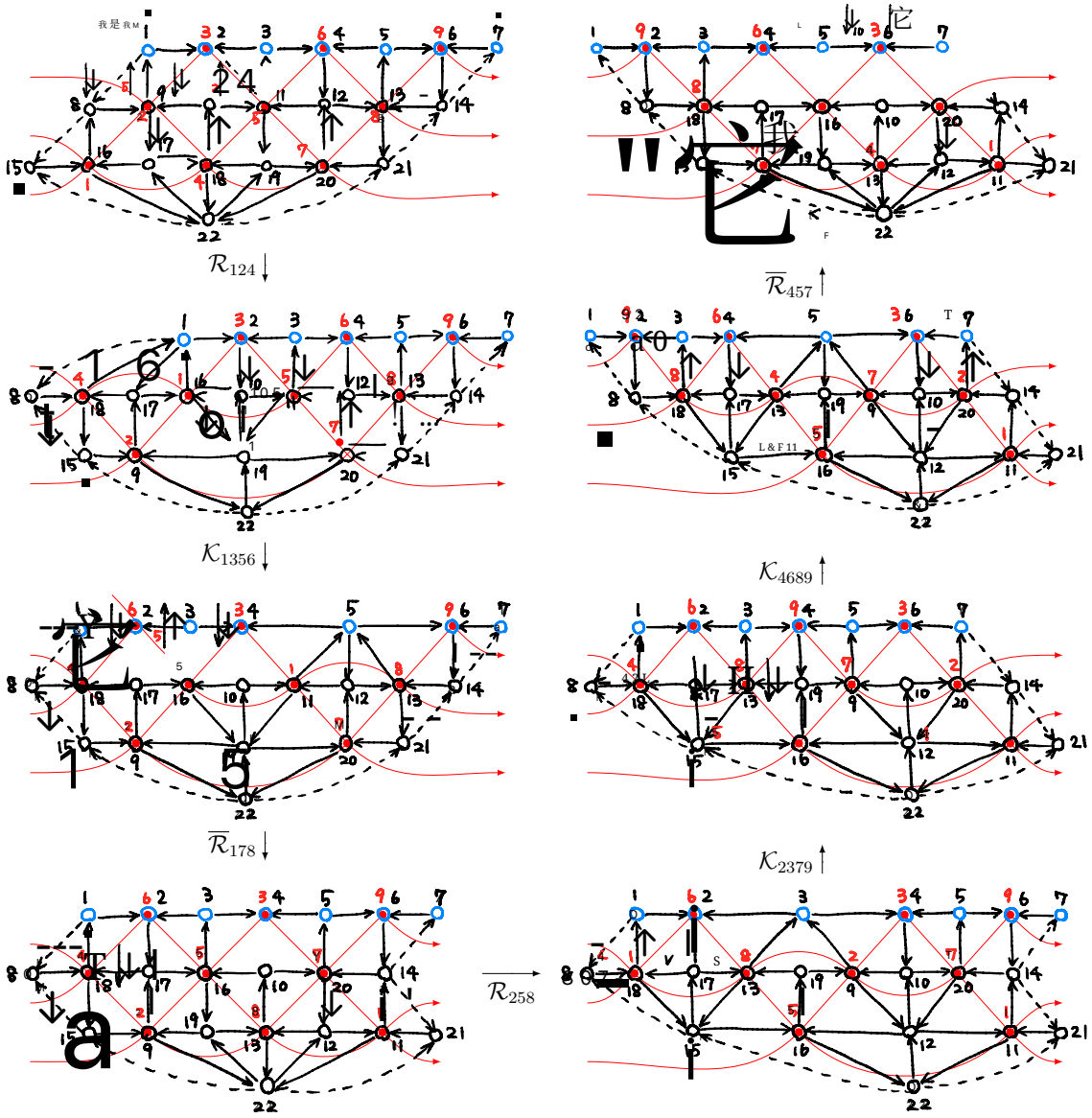


FIGURE 3.4. 三维反射方程 (3.23) 的左端。蓝色顶点的权重为二。

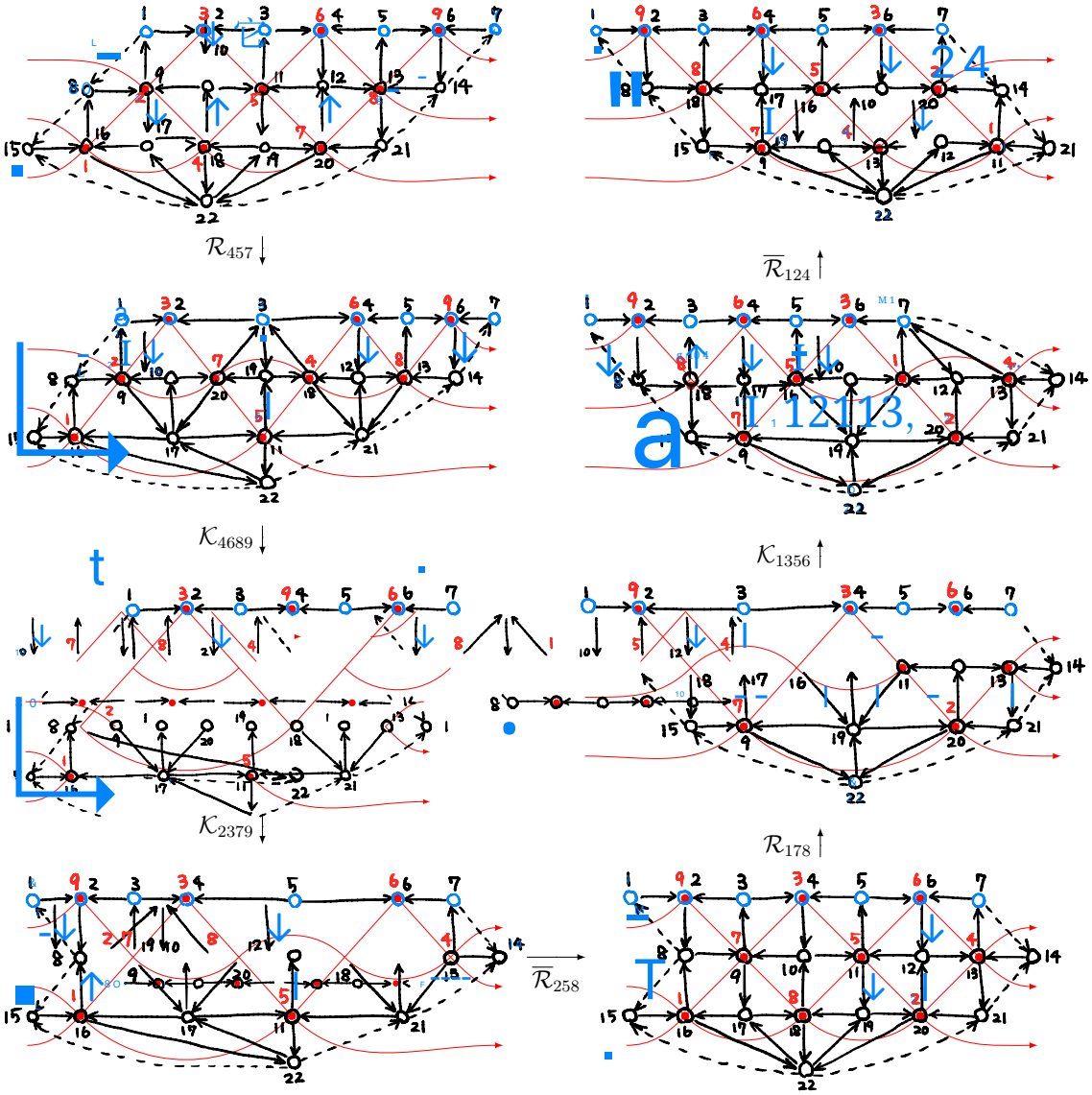


FIGURE 3.5. 三维反射方程（3.23）的右端。蓝色顶点的权重为二。

4. R-OPERATOR FROM q-WEYL ALGEBRA

我们令 $\gamma = (1,\ 1,\ 1)$，并考虑满足以下条件的典范变量（$u_i,\ w_i$）

$$[u_i, w_j] = \hbar\,\delta_{ij}, \qquad [u_i, u_j] = [w_i, w_j] = 0, \tag{4.1}$$

对于 $i, j = 1,2,3$。令 $\mathcal{W}(A_3) := \mathcal{W}_\gamma$ 表示 §2.3 中定义的 q-韦尔代数，并令 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)$ 为其非交换分式域。令 $\mathcal{P}_i := (a_i, b_i, c_i, d_i, e_i) \in \mathbb{C}^5$ 为满足以下条件的参数元组

$$a_i + b_i + c_i + d_i + e_i = 0 \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{4.2}$$

对于 (3.1) 中左侧的箭图，我们根据图 4.1 所示的图形规则，定义斜域的环同态 $\phi\colon \mathcal{Y}(B(A_2)) \to \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)$。

$$\phi : \begin{cases} Y_0 \mapsto \mathrm{e}^{a_2+w_2}, & Y_5 \mapsto \mathrm{e}^{e_1+2u_1}, \\ Y_1 \mapsto \mathrm{e}^{a_1+d_2+w_1-u_2-w_2}, & Y_6 \mapsto \mathrm{e}^{b_1+c_2+d_3-u_1-w_1+w_2-u_3-w_3}, \\ Y_2 \mapsto \mathrm{e}^{e_2+2u_2}, & Y_7 \mapsto \mathrm{e}^{e_3+2u_3}, \\ Y_3 \mapsto \mathrm{e}^{b_2+a_3-u_2-w_2+w_3}, & Y_8 \mapsto \mathrm{e}^{b_3-u_3-w_3}, \\ Y_4 \mapsto \mathrm{e}^{d_1-u_1-w_1}, & Y_9 \mapsto \mathrm{e}^{c_1+c_3+w_1+w_3}. \end{cases} \tag{4.3}$$

类似地，对于 (3.1) 中右侧的箭图，定义环同态 $\phi'\colon \mathcal{Y}(B'(A_3)) \to \mathrm{Frac}\ \mathcal{W}(A_3)$ 如下：

$$\phi' : \begin{cases} Y'_0 \mapsto \mathrm{e}^{a_1+a_3+w_1+w_3}, & Y'_5 \mapsto \mathrm{e}^{e_1+2u_1}, \\ Y'_1 \mapsto \mathrm{e}^{d_3-u_3-w_3}, & Y'_6 \mapsto \mathrm{e}^{d_1+a_2+b_3-u_1-w_1+w_2-u_3-w_3}, \\ Y'_2 \mapsto \mathrm{e}^{e_2+2u_2}, & Y'_7 \mapsto \mathrm{e}^{e_3+2u_3}, \\ Y'_3 \mapsto \mathrm{e}^{b_1-u_1-w_1}, & Y'_8 \mapsto \mathrm{e}^{c_1+b_2+w_1-u_2-w_2}, \\ Y'_4 \mapsto \mathrm{e}^{d_2+c_3-u_2-w_2+w_3}, & Y'_9 \mapsto \mathrm{e}^{c_2+w_2}. \end{cases} \tag{4.4}$$

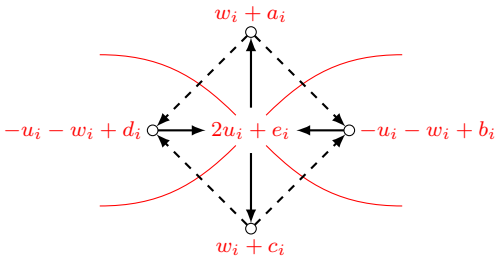


FIGURE 4.1. 布线图交叉点 i （中心）附近，以韦尔代数生成元 q 表示变量 Y 的参数化图示规则（红色）。

定义典范变量的变换 $\eta^{(-)}_{123}$ 和 $\eta^{(+)}_{123}$ 如下：

$$\eta^{(-)}_{123} : \begin{cases} u_1 \mapsto u_2 + \lambda_0, & w_1 \mapsto w_2 - w_3 + \lambda_2, \\ u_2 \mapsto u_1 - \lambda_0, & w_2 \mapsto w_1 + w_3 + \lambda_1, \\ u_3 \mapsto -u_1 + u_2 + u_3 + \lambda_0, & w_3 \mapsto w_3 + \lambda_3, \end{cases} \tag{4.5}$$

$$\eta^{(+)}_{123} : \begin{cases} u_1 \mapsto u_1 + u_2 - u_3 + \kappa_0, & w_1 \mapsto w_1 + \kappa_1, \\ u_2 \mapsto u_3 - \kappa_0, & w_2 \mapsto w_1 + w_3 + \kappa_3, \\ u_3 \mapsto u_2 + \kappa_0, & w_3 \mapsto -w_1 + w_2 + \kappa_2, \end{cases} \tag{4.6}$$

其中，对于 $r = 0, 1, 2, 3$，在条件 (4.2) 下，$\lambda_r = \lambda_r(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ 和 $\kappa_r = \kappa_r(\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \mathcal{P}_3)$ 定义如下：

$$\lambda_0 = \frac{e_2 - e_1}{2}, \quad \lambda_1 = c_1 - c_2 + c_3, \quad \lambda_2 = -a_3 - b_2 + b_1 - \lambda_0, \quad \lambda_3 = a_2 - a_1 + b_2 - b_1 + \lambda_0. \tag{4.7}$$

and

$$\kappa_0 = \frac{e_2 - e_3}{2}, \quad \kappa_1 = b_3 + c_3 - b_2 - c_2 - \kappa_0, \quad \kappa_2 = d_3 - d_2 - a_1 - \kappa_0, \quad \kappa_3 = c_1 - c_2 + c_3. \tag{4.8}$$

这些变换诱导出代数 $\mathcal{W}(A_2)$ 的同构。它们自然作用于 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)$，我们也将这一诱导作用记为 $\eta^{(\pm)}_{123}$。

命题 4.1. *(*参见 [13,§4.2]*) (i)* 以下图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'(A_2)) & \xrightarrow{\phi'} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ {\scriptstyle \tau_{123|--++}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{123}^{(-)}} \\ \mathcal{Y}(B(A_2)) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'(A_2)) & \xrightarrow{\phi'} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ {\scriptstyle \tau_{123|-+-+}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{123}^{(+)}} \\ \mathcal{Y}(B(A_2)) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \end{array} \tag{4.9}$$

(ii) 对于 $\delta=+$ 和 $-$，同构 $\eta_{123}^{(\delta)}$ 可表示为 $\eta_{123}^{(\delta)}=\mathrm{Ad}P_{123}^{(\delta)}$，其中

$$P_{123}^{(-)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_1-u_2)w_3}\mathrm{e}^{\frac{\lambda_0}{\hbar}(-w_3-w_2+w_1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3)}\rho_{12}, \tag{4.10}$$

$$P_{123}^{(+)}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_3-u_2)w_1}\mathrm{e}^{\frac{\kappa_0}{\hbar}(w_3-w_2-w_1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(\kappa_1u_1+\kappa_2u_2+\kappa_3u_3)}\rho_{23}. \tag{4.11}$$

这里，$\rho_{ij}\in\mathfrak{S}_3$ 通过伴随作用作用于 $\mathcal{W}(A_2)$，置换典范变量的指标；例如，$\rho_{ij}u_i=u_j\rho_{ij}$，其他变量也类似。

证明。(i) 通过直接计算，我们验证了对于 $\varepsilon=(-,\delta,-\delta,+)$，有 $\eta_{123}^{(\delta)}\circ\phi'(Y_i')=\phi\circ\tau_{123|\varepsilon}(Y_i')$，其中 $\delta=\pm$和 $i=0,1,\ldots,9$。我们以 $\delta=+$和 $i=4$的情形为例，采用记号$Y_i=\mathrm{e}^{y_i}$ 和 $Y_i'=\mathrm{e}^{y_i'}$。利用 (3.9)、(4.3)、(4.4) 和 (4.6)，可得

$$\begin{aligned} y_4' &\xmapsto{\phi'} d_2+c_3-u_2-w_2+w_3 \xmapsto{\eta_{123}^{(+)}} d_2+c_3-(u_3-\kappa_0)-(w_1+w_3+\kappa_3)+(-w_1+w_2+\kappa_2) \\ &= \underline{d_2+c_3+\kappa_0+\kappa_2-\kappa_3}-2w_1+w_2-u_3-w_3 \\ y_4' &\xmapsto{\tau_{123|\varepsilon}} y_4+y_5+y_6 \xmapsto{\phi} (d_1-u_1-w_1)+(e_1+2u_1)+(b_1+c_2+d_3-u_1-w_1+w_2-u_3-w_3) \\ &= \underline{d_1+b_1+e_1+c_2+d_3}-2w_1+w_2-u_3-w_3, \end{aligned}$$

其中带下划线的部分相同，这是由 (4.2) 和 (4.8) 得出的。
(ii) 通过应用 BCH 公式计算 $\mathrm{Ad}P_{123}^{(\delta)}(Y_i)$，即可证明。 □

因此，对于带有 $\delta\in\{+,-\}$ 的两个符号序列 $\varepsilon=(-,\ \delta,\ -\delta,\ +)$，实现 $\widehat{R}_{123}$ 的算子 $R_{123}^{(\delta)}$ 可通过 $\phi\circ\widehat{R}_{123}=\mathrm{Ad}\,R_{123}^{(\delta)}\circ\phi'$ 得到如下结果。

$$\begin{aligned} R_{123}^{(-)} &= \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-c_2-b_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-c_2-b_1-e_1+u_3-u_1+w_1-w_2+w_3})^{-1} \\ &\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+e_3+c_2+b_1+u_3-u_1-w_1+w_2-w_3})\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+e_3+c_2+e_2+b_1+u_3+2u_2-u_1-w_1+w_2-w_3}) \\ &\quad\cdot P_{123}^{(-)}, \end{aligned} \tag{4.12}$$

$$\begin{aligned} R_{123}^{(+)} &= \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-c_2-b_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+c_2+b_1+e_1-u_3+u_1-w_1+w_2-w_3}) \\ &\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-e_3-c_2-b_1-u_3+u_1+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+c_2+e_2+b_1+e_1-u_3+2u_2+u_1-w_1+w_2-w_3}) \\ &\quad\cdot P_{123}^{(+)}. \end{aligned} \tag{4.13}$$

注 4.2. 在 (4.13) 中，只有最后一个二重对数包含 e^{2u_2}。这种不对称性可以通过将 $P_{123}^{(+)}$ 放在中间来消除，并结合 (4.9) 使用 $\mathrm{Ad}(P_{(+)\,123})=\eta_{123}^{(+)}$。由此得到表达式

$$\begin{aligned} R_{123}^{(+)} &= \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-c_2-b_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+c_2+b_1+e_1-u_3+u_1-w_1+w_2-w_3})P_{123}^{(+)} \\ &\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{d_1+e_1+a_2+b_3+u_1-u_3-w_1+w_2-w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_1-a_2-b_3+u_1+u_3-w_1+w_2-w_3}). \end{aligned} \tag{4.14}$$

交换指标 1 和 3 后，这与 [13, 方程 (B.2)] 一致。本文中给出的其他 R-算子也可以进行类似的改写。

以类似方式，与（3.10）中的变换 R_{123} 相对应，我们通过交换来定义环同态 ϕ：$\mathcal{Y}(B'(A_2))\to\overline{\mathrm{Frac}}\,\mathcal{W}(A_2)$ 和 ϕ'：$\mathcal{Y}(B(A_2))\to\overline{\mathrm{Frac}}\,\mathcal{W}(A_2)$。

所有典范变量 u_i、w_i 以及参数 $\mathcal{P}_i$ 的下标 1 和 3，分别定义环同态 ϕ' 和 ϕ: ϕ(()) Frac()，以及 (()) Frac ()。也就是说，由下式给出

$$\overline{\phi}:\begin{cases}\overline{Y}_0\mapsto \mathrm{e}^{a_1+a_3+w_1+w_3}, & \overline{Y}_5\mapsto \mathrm{e}^{e_3+2u_3},\\ \overline{Y}_1\mapsto \mathrm{e}^{d_1-u_1-w_1}, & \overline{Y}_6\mapsto \mathrm{e}^{d_3+a_2+b_1-u_1-w_1+w_2-u_3-w_3},\\ \overline{Y}_2\mapsto \mathrm{e}^{e_2+2u_2}, & \overline{Y}_7\mapsto \mathrm{e}^{e_1+2u_1},\\ \overline{Y}_3\mapsto \mathrm{e}^{b_3-u_3-w_3}, & \overline{Y}_8\mapsto \mathrm{e}^{c_3+b_2+w_3-u_2-w_2},\\ \overline{Y}_4\mapsto \mathrm{e}^{d_2+c_1-u_2-w_2+w_1}, & \overline{Y}_9\mapsto \mathrm{e}^{c_2+w_2},\end{cases}\tag{4.15}$$

且 ϕ' 由下式给出

$$\overline{\phi}':\begin{cases}\overline{Y}'_0\mapsto \mathrm{e}^{a_2+w_2}, & \overline{Y}'_5\mapsto \mathrm{e}^{e_3+2u_3},\\ \overline{Y}'_1\mapsto \mathrm{e}^{a_3+d_2+w_3-u_2-w_2}, & \overline{Y}'_6\mapsto \mathrm{e}^{b_3+c_2+d_1-u_1-w_1+w_2-u_3-w_3},\\ \overline{Y}'_2\mapsto \mathrm{e}^{e_2+2u_2}, & \overline{Y}'_7\mapsto \mathrm{e}^{e_1+2u_1},\\ \overline{Y}'_3\mapsto \mathrm{e}^{b_2+a_1-u_2-w_2+w_1}, & \overline{Y}'_8\mapsto \mathrm{e}^{b_1-u_1-w_1},\\ \overline{Y}'_4\mapsto \mathrm{e}^{d_3-u_3-w_3}, & \overline{Y}'_9\mapsto \mathrm{e}^{c_1+c_3+w_1+w_3}.\end{cases}\tag{4.16}$$

定义典范变量的变换 $\eta^{(-)}_{123}$ 和 $\eta^{(+)}_{123}$ 如下:

$$\overline{\eta}^{(-)}_{123}:\begin{cases}u_1\mapsto u_1+u_2-u_3+\overline{\lambda}_0, & w_1\mapsto w_1+\overline{\lambda}_1,\\ u_2\mapsto u_3-\overline{\lambda}_0, & w_2\mapsto w_1+w_3+\overline{\lambda}_3,\\ u_3\mapsto u_2+\overline{\lambda}_0, & w_3\mapsto -w_1+w_2+\overline{\lambda}_2,\end{cases}\tag{4.17}$$

$$\overline{\eta}^{(+)}_{123}:\begin{cases}u_1\mapsto u_2+\overline{\kappa}_0, & w_1\mapsto w_2-w_3+\overline{\kappa}_2,\\ u_2\mapsto u_1-\overline{\kappa}_0, & w_2\mapsto w_1+w_3+\overline{\kappa}_1,\\ u_3\mapsto -u_1+u_2+u_3+\overline{\kappa}_0, & w_3\mapsto w_3+\overline{\kappa}_3,\end{cases}\tag{4.18}$$

其中 $\overline{\lambda}_r$ 和 $\overline{\kappa}_r$ 由下式给出

$$\overline{\lambda}_0=\frac{e_2-e_3}{2},\quad \overline{\lambda}_1=c_2-c_3+d_2-d_3+\overline{\lambda}_0,\quad \overline{\lambda}_2=-c_1-d_2+d_3-\overline{\lambda}_0,\quad \overline{\lambda}_3=a_1-a_2+a_3.\tag{4.19}$$

and

$$\overline{\kappa}_0=\frac{e_2-e_1}{2},\quad \overline{\kappa}_1=a_1-a_2+a_3,\quad \overline{\kappa}_2=-c_3+b_1-b_2-\overline{\kappa}_0,\quad \overline{\kappa}_3=d_1+a_1-d_2-a_2-\overline{\kappa}_0.\tag{4.20}$$

与 $\eta^{(\pm)}_{123}$ 类似，这些变换在 $\mathcal{W}(A_2)$上诱导出同构。我们也用 $\eta^{(\pm)}_{123}$ 表示它们在 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)$ 上对应的自然作用。下面的命题可用与命题 4.1 相同的方法证明。

命题 4.3. *(i)* 下列图表是交换的。

$$\begin{array}{ccc}\mathcal{Y}(B(A_2)) & \xrightarrow{\overline{\phi}'} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)\\ {\scriptstyle\overline{\tau}_{123|--++}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\eta}^{(-)}_{123}}\\ \mathcal{Y}(B'(A_2)) & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)\end{array}\qquad\qquad\begin{array}{ccc}\mathcal{Y}(B(A_2)) & \xrightarrow{\overline{\phi}'} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)\\ {\scriptstyle\overline{\tau}_{123|-+-+}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\overline{\eta}^{(+)}_{123}}\\ \mathcal{Y}(B'(A_2)) & \xrightarrow{\overline{\phi}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(A_2)\end{array}\tag{4.21}$$

(ii) 对于 $\delta=+$ 和 $-$，同构 $\eta^{(\delta)}_{123}$ 由 $\eta^{(\delta)}_{123}=\mathrm{Ad}P^{(\delta)}_{123}$ 实现，其中

$$\overline{P}^{(-)}_{123}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_3-u_2)w_1}\mathrm{e}^{\frac{\overline{\lambda}_0}{\hbar}(w_3-w_2-w_1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(\overline{\lambda}_1u_1+\overline{\lambda}_2u_2+\overline{\lambda}_3u_3)}\rho_{23},\tag{4.22}$$

$$\overline{P}^{(+)}_{123}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_1-u_2)w_3}\mathrm{e}^{\frac{\overline{\kappa}_0}{\hbar}(-w_3-w_2+w_1)}\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(\overline{\kappa}_1u_1+\overline{\kappa}_2u_2+\overline{\kappa}_3u_3)}\rho_{12}.\tag{4.23}$$

因此，对于满足 $\delta=\mp$的两个符号序列 $\varepsilon=(-,\delta,-\delta,+)$，通过 $\phi\circ\widehat{R}_{123}=\mathrm{Ad}\ R^{(\mp)}_{123}\circ\phi'$ 和 $\eta^{(\mp)}_{123}=\mathrm{Ad}\ P^{(\mp)}_{123}$实现$\widehat{R}_{123}$的算子 $R^{(\mp)}_{123}$ 和 $P^{(\mp)}_{123}$如下所示。

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^{(-)}_{123} &= \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-a_2-b_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-e_3-a_2-b_1-u_3+u_1+w_1-w_2+w_3})^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+a_2+b_1+e_1-u_3+u_1-w_1+w_2-w_3})\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+a_2+e_2+b_1+e_1-u_3+2u_2+u_1-w_1+w_2-w_3})\\
&\quad\cdot\overline{P}^{(-)}_{123},\\
\overline{R}^{(+)}_{123} &= \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-a_2-b_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+e_3+a_2+b_1+u_3-u_1-w_1+w_2-w_3})\\
&\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{-d_3-a_2-b_1-e_1+u_3-u_1+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{d_3+e_3+a_2+e_2+b_1+u_3+2u_2-u_1-w_1+w_2-w_3})\\
&\quad\cdot\overline{P}^{(+)}_{123},
\end{aligned}
\tag{4.24--4.25}
$$

注4.4。交换参数 a_i 和 c_i后，算子 $R^{(-)}_{123}$ (4.12)、$P^{(-)}_{123}$ (4.10) 以及 $R^{(+)}_{123}$ (4.25)、$P^{(+)}_{123}$ (4.23) 互换；同样，$R^{(+)}_{123}$ (4.13)、$P^{(+)}_{123}$以及 $R^{(-)}_{123}$ (4.24)、$P^{(-)}_{123}$ (4.22) 也互换。也就是说，以下关系成立:

$$
\begin{aligned}
\overline{R}^{(+)}_{123} &= R^{(-)}_{123}\Big|_{(a_1,a_2,a_3)\leftrightarrow(c_1,c_2,c_3)}, \qquad \overline{R}^{(-)}_{123} = R^{(+)}_{123}\Big|_{(a_1,a_2,a_3)\leftrightarrow(c_1,c_2,c_3)},\\
\overline{P}^{(+)}_{123} &= P^{(-)}_{123}\Big|_{(a_1,a_2,a_3)\leftrightarrow(c_1,c_2,c_3)}, \qquad \overline{P}^{(-)}_{123} = P^{(+)}_{123}\Big|_{(a_1,a_2,a_3)\leftrightarrow(c_1,c_2,c_3)}.
\end{aligned}
\tag{4.11}
$$

R-算子 (4.12)、(4.13)、(4.24) 和 (4.25) 的二对数部分的良定义性由以下命题保证。由于稍后将在第 §5.4 节对 K-算子给出类似论证，此处省略证明。

命题4.5. R-算子 $R^{(\pm)}_{123}$ 和 $R^{(\pm)}_{123}$ 的二对数部分属于集合$\mathcal{L}(A_2):=\mathcal{L}_\gamma$。

令 $\gamma=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$，并设 $\mathcal{W}(A_3):=\mathcal{W}_\gamma$为§2.3中定义的相应 q-韦尔代数。同态 $\eta_{123|\varepsilon}$ 和$\eta_{123|\varepsilon}$ 自然延拓为$\eta_{ijk|\varepsilon}$ 和$\eta_{ijk|\varepsilon}$ ，它们作用于$\mathcal{W}(A_3)$及其非交换分式域$\overline{\mathrm{Frac}}\,\mathcal{W}(A_3)$。

设 $\prec$和 $\prec'$是集合 $J:=\{1,2,\dots,6\}$上的两个偏序，定义如下:

$$
1\prec 2,4\prec 3,5,6, \qquad 1,2,3\prec' 4,5\prec' 6.
$$

在第一种情形（分别地，在第二种情形）中，对称子群 $S(A_3):=\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_3\subset\mathfrak{S}_6$ 作用于 J，从而保持序 $\prec$（分别地，$\prec'$）；也就是说，$\mathfrak{S}_2$作用于 $\{2,4\}$，而 $\mathfrak{S}_3$作用于 $\{3,5,6\}$（分别地，$\mathfrak{S}_2$作用于 $\{4,5\}$，而 $\mathfrak{S}_3$作用于 $\{1,2,3\}$）。定义群 $N(A_3)$为由以下元素生成的群

$$
\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{\hbar}u_iw_j}\ (i\succ j), \qquad \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}u_i},\ \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}w_i}\ (a\in\mathbb{C}), \qquad b\in\mathbb{C}^\times,\ i,j\in J, \tag{4.26}
$$

以及由以下元素生成的群 $N'(A_3)$

$$
\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{\hbar}u_iw_j}\ (i\prec' j), \qquad \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}u_i},\ \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}w_i}\ (a\in\mathbb{C}), \qquad b\in\mathbb{C}^\times,\ i,j\in J. \tag{4.27}
$$

这些群中的乘法利用广义 Baker–Campbell–Hausdorff公式以及（4.1）定义；由于按 $\hbar^{-1}$ 分次，该乘法是良定义的。

群 $S(A_3)$ 通过伴随作用作用于 $N(A_3)$ 和 $N'(A_3)$，并置换典范变量的指标。最后，令 $\mathcal{L}(A_3):=\mathcal{L}_\gamma$ 表示形式洛朗级数（2.23）的集合。

算子 $P^{(\mp)}_{123}$、$\mathcal{P}^{(\mp)}_{123}$、$R^{(\mp)}_{123}$和 $R^{(\mp)}_{123}$ 可延拓为作用于 $\overline{\mathrm{Frac}}\,\mathcal{W}(A_3)$上的 $P^{(\mp)}_{ijk}$、$P^{(\mp)}_{ijk}$、$R^{(\mp)}_{ijk}$ 和 $R^{(\mp)}_{ijk}$。这些 R-算子的四面体关系总结如下。

命题4.6。（参见 [13, §3 和引理4。2]）对于两个符号序列$\varepsilon=(-,-,+,+)$和 $\varepsilon=(-,+,-,+)$，有如下结论。

(i) 对于 $\delta = -, +$，典范变量 $\eta_{ijk}^{(\delta)}$ 和 $\eta_{ijk}^{(\delta)}$ 的变换分别满足齐次四面体方程

$$\eta_{456}^{(\delta)}\,\eta_{236}^{(\delta)}\,\eta_{135}^{(\delta)}\,\eta_{124}^{(\delta)} = \eta_{124}^{(\delta)}\,\eta_{135}^{(\delta)}\,\eta_{236}^{(\delta)}\,\eta_{456}^{(\delta)}, \tag{4.28}$$

$$\overline{\eta}_{456}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{236}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{135}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{124}^{(\delta)} = \overline{\eta}_{124}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{135}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{236}^{(\delta)}\,\overline{\eta}_{456}^{(\delta)}. \tag{4.29}$$

(ii) 算子 $P_{ijk}^{(\delta)}$ 和 $P_{(\delta)\,ijk}$ 满足四面体方程

$$P_{456}^{(+)}\,P_{236}^{(+)}\,P_{135}^{(+)}\,P_{124}^{(+)} = P_{124}^{(+)}\,P_{135}^{(+)}\,P_{236}^{(+)}\,P_{456}^{(+)}, \tag{4.30}$$

$$\overline{P}_{456}^{(-)}\,\overline{P}_{236}^{(-)}\,\overline{P}_{135}^{(-)}\,\overline{P}_{124}^{(-)} = \overline{P}_{124}^{(-)}\,\overline{P}_{135}^{(-)}\,\overline{P}_{236}^{(-)}\,\overline{P}_{456}^{(-)} \tag{4.31}$$

在半直积 $N(A_3) \rtimes S(A_3)$中，并且

$$P_{456}^{(-)}\,P_{236}^{(-)}\,P_{135}^{(-)}\,P_{124}^{(-)} = P_{124}^{(-)}\,P_{135}^{(-)}\,P_{236}^{(-)}\,P_{456}^{(-)}, \tag{4.32}$$

$$\overline{P}_{456}^{(+)}\,\overline{P}_{236}^{(+)}\,\overline{P}_{135}^{(+)}\,\overline{P}_{124}^{(+)} = \overline{P}_{124}^{(+)}\,\overline{P}_{135}^{(+)}\,\overline{P}_{236}^{(+)}\,\overline{P}_{456}^{(+)} \tag{4.33}$$

在半直积 $N'(A_3) \rtimes S(A_3)$中。

定理 4.7. （参见 [13, 定理 4.3]）算子 $R_{ijk}^{(\delta)}$ 和 $R_{ijk}^{(\delta)}$ 满足四面体方程

$$R_{456}^{(+)}\,R_{236}^{(+)}\,R_{135}^{(+)}\,R_{124}^{(+)} = R_{124}^{(+)}\,R_{135}^{(+)}\,R_{236}^{(+)}\,R_{456}^{(+)}, \tag{4.34}$$

$$\overline{R}_{456}^{(-)}\,\overline{R}_{236}^{(-)}\,\overline{R}_{135}^{(-)}\,\overline{R}_{124}^{(-)} = \overline{R}_{124}^{(-)}\,\overline{R}_{135}^{(-)}\,\overline{R}_{236}^{(-)}\,\overline{R}_{456}^{(-)}, \tag{4.35}$$

其含义如下：等式两边均可分解为 $\mathcal{L}(A_3)$ 中的双对数部分，以及 $N(A_3) \rtimes S(A_3)$中的单项式变换部分，且这两个部分分别相等。

它们也满足四面体方程

$$R_{456}^{(-)}\,R_{236}^{(-)}\,R_{135}^{(-)}\,R_{124}^{(-)} = R_{124}^{(-)}\,R_{135}^{(-)}\,R_{236}^{(-)}\,R_{456}^{(-)}, \tag{4.36}$$

$$\overline{R}_{456}^{(+)}\,\overline{R}_{236}^{(+)}\,\overline{R}_{135}^{(+)}\,\overline{R}_{124}^{(+)} = \overline{R}_{124}^{(+)}\,\overline{R}_{135}^{(+)}\,\overline{R}_{236}^{(+)}\,\overline{R}_{456}^{(+)}, \tag{4.37}$$

同样，每一侧都可以分解为$\mathcal{L}$（A_3）中的双对数部分，以及 N'（A_3）$\rtimes S$（A_3）中的单项式部分，且两侧的分解相同。

证明（4.28）、（4.30）、（4.32）、（4.34）和（4.36）见 [13] 。我们指出，（4.34）和（4.36）是（4.30）和（4.32）的推论，同时依赖于四面体关系的双对数部分的良定义性 [13, 命题 3.9]。其余恒等式可用类似的方法证明。

5. K-operator from q-Weyl algebra

5.1. K-算子。对于 $i = 1$，2，3，4，设（u_i，w_i）为满足（参见 [11]）的典范变量

$$[u_i, w_j] = \begin{cases} \hbar\,\delta_{ij}, & i,j = 1,3, \\ 2\hbar\,\delta_{ij}, & i,j = 2,4, \end{cases} \tag{5.1}$$

且所有其他对易子均为零。因此，设定 $\gamma =$(1，2、1、2)，并令 $\mathcal{W}(C_2) := \mathcal{W}_\gamma$为由 $\mathrm{e}^{\pm u_i}$和 $\mathrm{e}^{\pm w_i}$生成、满足关系 (2.22) 的 q-韦尔代数。对于 i = 1、2、3、4，令$\mathcal{P}_i =$(a_i、b_i、c_i、d_i、e_i) $\in \mathbb{C}^5$为一个参数元组。为保持记号统一，我们对每个 $\mathcal{P}_i$均保留五个符号，尽管在下文给出的参数化中，条目 a_2 和 a_4实际上并未出现。对于箭图的主体部分，我们假设

$$a_i + b_i + c_i + d_i + e_i = 0 \ \ (i = 1, 3). \tag{5.2}$$

根据图 4.1 和 5.1 中的图示规则，我们定义一个映射 ϕ : $\mathcal{Y}(B(C_2))$ $\to$Frac$\mathcal{W}(C_2)$，如下：

$$\begin{cases} Y_1 \mapsto \exp(-u_2 + 2w_1 - w_2 + a_1 + d_2), \\ Y_2 \mapsto \exp(2u_2 + e_2), \\ Y_3 \mapsto \exp(-u_2 - u_4 - w_2 + 2w_3 - w_4 + a_3 + b_2 + d_4), \\ Y_4 \mapsto \exp(2u_4 + e_4), \\ Y_5 \mapsto \exp(-u_4 - w_4 + b_4), \\ Y_6 \mapsto \exp(-u_1 - w_1 + d_1), \\ Y_7 \mapsto \exp(2u_1 + e_1) \\ Y_8 \mapsto \exp(-u_1 - u_3 - w_1 + w_2 - w_3 + b_1 + c_2 + d_3), \\ Y_9 \mapsto \exp(2u_3 + e_3), \\ Y_{10} \mapsto \exp(-u_3 - w_3 + w_4 + b_3 + c_4), \\ Y_{11} \mapsto \exp(w_1 + w_3 + c_1 + c_3). \end{cases} \tag{5.3}$$

我们还定义了一个映射 ϕ' : $\mathcal{Y}(B'(C_2))$ $\to$ Frac$W(C_2)$，其定义如下

$$\begin{cases} Y'_1 \mapsto \exp(-u_4 - w_4 + d_4), \\ Y'_2 \mapsto \exp(2u_4 + e_4), \\ Y'_3 \mapsto \exp(-u_2 - u_4 - w_2 + 2w_3 - w_4 + a_3 + d_2 + b_4), \\ Y'_4 \mapsto \exp(2u_2 + e_2), \\ Y'_5 \mapsto \exp(-u_2 - w_2 + 2w_1 + a_1 + b_2), \\ Y'_6 \mapsto \exp(-u_3 - w_3 + w_4 + d_3 + c_4), \\ Y'_7 \mapsto \exp(2u_3 + e_3) \\ Y'_8 \mapsto \exp(-u_1 - u_3 - w_1 + w_2 - w_3 + d_1 + c_2 + b_3), \\ Y'_9 \mapsto \exp(2u_1 + e_1), \\ Y'_{10} \mapsto \exp(-u_1 - w_1 + b_1), \\ Y'_{11} \mapsto \exp(w_1 + w_3 + c_1 + c_3). \end{cases} \tag{5.4}$$

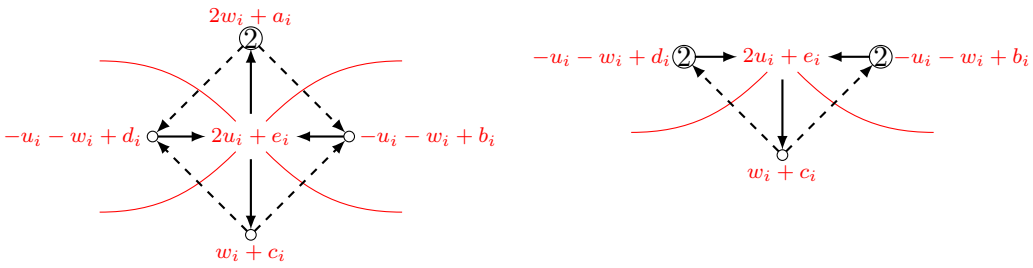


FIGURE 5.1. 根据布线图规则，用 q-韦尔代数生成元表示 Y-变量。左图展示了布线图（红色）中交叉点 i （位于中心）附近的区域；右图展示了墙上反射点 i （位于顶部中心）附近的区域，以及相邻的权重 2 顶点。

以下引理很容易验证。

引理 5.1. ϕ和 ϕ' 是斜域的环同态。

回顾 $\widehat{K}_{1234}$的单项式部分 $\tau^K_{1234|\varepsilon}$(3.22)。令 $\eta^K_{1234|\varepsilon}$为 Frac $\mathcal{W}(C_2)$ 上由下列交换图刻画的映射

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'(C_2)) & \xrightarrow{\phi'} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \\ {\scriptstyle \tau^K_{1234|\varepsilon}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \eta^K_{1234|\varepsilon}} \\ \mathcal{Y}(B(C_2)) & \xrightarrow{\phi} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \end{array} \tag{5.5}$$

我们寻找一个符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{10})$，使其满足以下条件：

(i) 存在一个算子 $P^K_{1234|\varepsilon}$，使 $\eta^K_{1234|\varepsilon}$ 实现为伴随作用，即

$$\mathrm{Ad}(P^K_{1234|\varepsilon}) = \eta^K_{1234|\varepsilon}. \tag{5.6}$$

(ii) 单项式变换 $\tau^K_{1234|\varepsilon}$ 与第4节所研究的四面体方程解 $\tau_{123|-\mp\pm+}$ 或 $\tau_{123|-\mp\pm+}$ 一起满足三维反射方程。本节我们研究条件 **(i)**。我们的目标是将 $P^K_{1234|\varepsilon}$ 实现为如下形式

$$P^K_{1234|\varepsilon} = \exp(\tfrac{1}{\hbar}X)\rho, \tag{5.7}$$

$$X = \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=2}^{4} A_i u_i w_1 + \sum_{i=1}^{4}(B_i u_i + C_i w_i) \text{ for } \rho = \rho_{24}, \\ \displaystyle\sum_{i=1}^{3} A_i u_i w_4 + \sum_{i=1}^{4}(B_i u_i + C_i w_i) \text{ for } \rho = \rho_{13}, \end{cases} \tag{5.8}$$

其中 A_i、B_i 和 C_i 是系数，而 $\rho_{ij} \in \mathfrak{S}_4$ 通过置换典范变量的指标来作用。直接进行计算机计算可得以下结果。

命题5.2。若参数 a_i、b_i、c_i、d_i、$e_i\,(i=1、2、3、4)$ 满足

$$b_2+2c_2+d_2+e_2 = c_1+c_3, \qquad b_4+2c_4+d_4+e_4 = -c_1+c_3, \tag{5.9}$$

除(5.2)外，只有对于以下八种符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_k)_{k=1,\ldots,10}$，才存在满足条件(5.6) 且形式为(5.7)–(5.8) 的算子 $P^K_{1234|\varepsilon}$：

$$(-1,\varepsilon_2,-1,\varepsilon_4,1,-1,-1,-\varepsilon_4,1,-\varepsilon_2), \qquad \varepsilon_2,\varepsilon_4\in\{1,-1\} \quad \textit{(type } \rho_{24}\textit{)}, \tag{5.10}$$

$$(\varepsilon_1,-1,\varepsilon_3,-1,-1,1,-\varepsilon_3,-1,-\varepsilon_1,1), \qquad \varepsilon_1,\varepsilon_3\in\{1,-1\} \quad \textit{(type } \rho_{13}\textit{)}. \tag{5.11}$$

关于 $\eta^K_{1234|\varepsilon}$ 和 $P^K_{1234|\varepsilon}$的详细信息，请参见 §5.2 和 §5.3。对于这些 ε的取值，单项式部分 $\tau^K_{1234|\varepsilon}$ (3.22) 如下所示。对于 (5.10) 中的类型 ρ_{24}，有

$$\tau^K_{1234|\varepsilon}: \begin{cases} Y_1'\mapsto Y_1, & Y_6'\mapsto Y_6Y_7Y_8, \\ Y_2'\mapsto Y_2, & Y_7'\mapsto Y_9, \\ Y_3'\mapsto Y_3, & Y_8'\mapsto q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}, \\ Y_4'\mapsto Y_4, & Y_9'\mapsto Y_2Y_4^{-1}Y_7, \\ Y_5'\mapsto Y_5, & Y_{10}'\mapsto Y_3Y_4Y_8Y_9Y_{10}, \\ Y_{11}'\mapsto Y_{11}, \end{cases} \tag{5.12}$$

其与 ε_2 和 ε_4 无关。对于（5.11）中的类型 ρ_{13}，我们有

$$\tau^K_{1234|\varepsilon}: \begin{cases} Y_1'\mapsto q^4Y_1Y_2Y_3Y_7^2Y_8^2, & Y_6'\mapsto Y_6, \\ Y_2'\mapsto Y_4Y_7^{-2}Y_9^2, & Y_7'\mapsto Y_7, \\ Y_3'\mapsto q^{-4}Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}, & Y_8'\mapsto Y_8, \\ Y_4'\mapsto Y_2, & Y_9'\mapsto Y_9, \\ Y_5'\mapsto Y_3Y_4Y_5, & Y_{10}'\mapsto Y_{10}, \\ Y_{11}'\mapsto Y_{11}, \end{cases} \tag{5.13}$$

其与 ε_1 和 ε_3 无关。

对于 (5.10) 和 (5.11) 中 ε 的取值，我们引入

$$\begin{aligned} K_{1234|\varepsilon} = {} & \Psi_q\big(Y_8^{(1)\varepsilon_1}\big)^{\varepsilon_1}\Psi_{q^2}\big(Y_3^{(2)\varepsilon_2}\big)^{\varepsilon_2}\Psi_q\big(Y_9^{(3)\varepsilon_3}\big)^{\varepsilon_3}\Psi_{q^2}\big(Y_2^{(4)\varepsilon_4}\big)^{\varepsilon_4} \\ & \cdot \Psi_q\big(Y_7^{(5)\varepsilon_5}\big)^{\varepsilon_5}\Psi_{q^2}\big(Y_4^{(6)\varepsilon_6}\big)^{\varepsilon_6}\Psi_q\big(Y_9^{(7)\varepsilon_7}\big)^{\varepsilon_7} \\ & \cdot \Psi_{q^2}\big(Y_2^{(8)\varepsilon_8}\big)^{\varepsilon_8}\Psi_q\big(Y_8^{(9)\varepsilon_9}\big)^{\varepsilon_9}\Psi_{q^2}\big(Y_3^{(10)\varepsilon_{10}}\big)^{\varepsilon_{10}} P^K_{1234|\varepsilon}, \end{aligned} \tag{5.14}$$

其中 $Y_{(j)^{k_j}}$ 表示 $\phi\circ\tau_{k_1,\,\varepsilon_1}\cdots\tau_{k_{j-1},\,\varepsilon_{j-1}}(Y_{(j)^{k_j}})$，其中 $(k_1,\ \ldots\ldots,\ k_{10}) = (8、3、9、2、7、4、9、2、8、3)$。$\widehat{}$算子 (5.14) 通过其在 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)$ 上的伴随作用实现了 K_{1234}。这一事实由 (3.21)、(3.22)、(5.5) 和 (5.6) 得出。

注意，对于每个 $i=1,\ \ldots\ldots,\ 5$，$(2i-1)$th 和 $2i$th 位置上的量子二对数彼此可交换，这反映了相应变异的可交换性。下面我们将分别描述 (5.10) 和 (5.11) 这两种情形下 $K_{1234|\varepsilon}$ 的详细结构。

5.2. 类型 ρ_{24}。当我们按照（5.10）设定 $\varepsilon = (-1、\ \varepsilon_2、\ -1、\ \varepsilon_4、1、\ -1、\ -1、\ -\varepsilon_4、1、\ -\varepsilon_2)$ 时，使图表（5.5）交换的映射$\eta^K_{1234|\varepsilon}$ 实际上与 ε_2 和 ε_4无关。今后我们将其简单地记为 η^K_{1234}。它由下式给出

$$\eta^K_{1234}:\begin{cases} u_1 \mapsto \frac{1}{2}\left(-b_2+b_4+2c_1-2c_2+2c_4-d_2+d_4\right)+u_1+u_2-u_4, \\ u_2 \mapsto \frac{1}{2}\left(b_2-b_4-2c_1+2c_2-2c_4+d_2-d_4\right)+u_4, \\ u_3 \mapsto u_3, \\ u_4 \mapsto \frac{1}{2}\left(-b_2+b_4+2c_1-2c_2+2c_4-d_2+d_4\right)+u_2, \\ w_1 \mapsto \frac{1}{2}\left(-b_2+b_4+d_2-d_4\right)+w_1, \\ w_2 \mapsto \frac{1}{2}\left(2a_1-b_2+b_4+2c_1-2c_2+2c_4+d_2-d_4\right)+2w_1+w_4, \\ w_3 \mapsto \frac{1}{2}\left(b_2-b_4-d_2+d_4\right)+w_3, \\ w_4 \mapsto \frac{1}{2}\left(-2a_1+b_2-b_4-2c_1+2c_2-2c_4-d_2+d_4\right)-2w_1+w_2. \end{cases} \tag{5.15}$$

该映射定义了 $\mathcal{W}(C_2)$ 的一个自同构，因而自然地作用于 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)$ 上。利用 BCH 公式直接计算，可证明以下引理。

引理 5.3。在（5.7）中实现自同构 η^K_{1234} *in* 的算子 $P_{24} := P^K_{1234|\varepsilon}$ 由下式给出 (5.15)

$$\begin{aligned} P_{24} &= \exp\left(\frac{1}{2\hbar}X_{24}\right)\rho_{24}, \\ X_{24} &= (-u_2+u_4)(a_1+c_1-c_2+c_4+2w_1)-(u_1-u_3)(b_2-b_4-d_2+d_4) \\ &\quad +(-w_2+w_4)\Big(\tfrac{1}{2}(-b_2+b_4-d_2+d_4)+c_1-c_2+c_4\Big). \end{aligned} \tag{5.16}$$

在（6.32）中我们将看到，一旦施加满足 §5.1 中条件（ii）所必需的参数约束，这个相当复杂的表达式就会大幅简化。

对于 (5.10) 中 ε 的每种选择，(5.14) 中的算子 $K_{1234|\varepsilon}$ 具有如下显式形式，其中每个 Y_i 都被理解为其在 (5.3) 中经 ϕ 映射所得的像。为简洁起见，我们将 $K_{1234|\varepsilon}$ 简记为 $K_{\varepsilon_2,\ \varepsilon_4}$。

$$\begin{aligned} \varepsilon =& (-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_2=\varepsilon_4=1); \\ K_{++} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_2\right) \\ & \cdot \Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1} \\ & \cdot \Psi_{q^2}\left(Y_2\right)^{-1}\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}P_{24}. \end{aligned} \tag{5.17}$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon =&(-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_2=-\varepsilon_4=1);\\
K_{+-} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}}\\
&\cdot\underline{\Psi_q\left(q^{-1}Y_2Y_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)}\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}}P_{24}.
\end{aligned}
\tag{5.18}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon =&(-1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1)\ (\text{i.e. } -\varepsilon_2=\varepsilon_4=1);\\
K_{-+} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2Y_3\right)}\\
&\cdot\underline{\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\underline{\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2Y_3\right)^{-1}}\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)}P_{24}.
\end{aligned}
\tag{5.19}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon =&(-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_2=\varepsilon_4=-1);\\
K_{--} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(qY_2Y_3Y_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}\right)\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)P_{24}.
\end{aligned}
\tag{5.20}
$$

这里添加下划线是为了在附录 A 中后续使用，我们将在那里证明以下结论。

Pr命题 5.4. 算子 $K_{\varepsilon_2,\ \varepsilon_4}$ 与 ε_2、$\varepsilon_4\in\{1,-1\}$ 的选择无关。

在附录 B 中，我们给出 (5.17)–(5.20) 在 ϕ 的像中的显式公式，其中量子 Y-变量用典范变量表示。

5.3. **类型** ρ_{13}。 当我们如 (5.11) 中那样取 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ -1,\ \varepsilon_3,\ -1,\ -1,\ 1,\ -\varepsilon_3,\ -1,\ -\varepsilon_1,\ 1)$ 时，使图表 (5.5) 交换的映射 η^K_{1234} 由下式给出

$$
\eta^K_{1234}:\begin{cases}
u_1\mapsto\dfrac{1}{2}\big(a_1-a_3+b_1-b_3+c_1-c_3+d_1-d_3\big)+u_3,\\
u_2\mapsto u_2,\\
u_3\mapsto\dfrac{1}{2}\big(-a_1+a_3-b_1+b_3-c_1+c_3-d_1+d_3\big)+u_1,\\
u_4\mapsto a_1-a_3+b_1-b_3+c_1-c_3+d_1-d_3-2u_1+2u_3+u_4,\\
w_1\mapsto\dfrac{1}{2}\big(-a_1+a_3+b_1-b_3-c_1+c_3-2c_4-d_1+d_3\big)+w_3-w_4,\\
w_2\mapsto b_1-b_3-d_1+d_3+w_2,\\
w_3\mapsto\dfrac{1}{2}\big(a_1-a_3-b_1+b_3+c_1-c_3+2c_4+d_1-d_3\big)+w_1+w_4,\\
w_4\mapsto -b_1+b_3+d_1-d_3+w_4.
\end{cases}
\tag{5.21}
$$

该映射与 ε_1 和 ε_3 无关；与类型 ρ_{24} 的情形一样，它定义了 $\mathcal{W}(C_2)$ 的一个自同构，因此在 Frac $\mathcal{W}(C_2)$ 上自然作用。与类型 ρ_{24} 一样，我们有

引理 5.5。 实现 (5.21) 中自同构 η^K_{1234} 的算子 $P_{13}:=P^K_{1234|\varepsilon}$ 为

$$
P_{13}=\exp\left(\frac{1}{2\hbar}X_{13}\right)\rho_{13},
\tag{5.22}
$$

$$
\begin{aligned}
X_{13}=&(u_1-u_3)\big(a_1-a_3+c_1-c_3+2c_4+2w_4\big)\\
&+(w_1-w_3)\big(a_1-a_3+b_1-b_3+c_1-c_3+d_1-d_3\big)\\
&+(u_2-u_4)\big(b_1-b_3-d_1+d_3\big).
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

对于 (5.11) 中 ε 的每种选择，(5.14) 中的算子 $K_{1234|\varepsilon}$ 具有以下显式形式，其中每个 Y_i 均视为其在 (5.3) 中经 ϕ 映射所得的像。为简洁起见，我们将 $K_{1234|\varepsilon}$

简记为 $K_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_3}$。

$$\begin{aligned}
\varepsilon =&(1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_1=\varepsilon_3=1);\\
K_{++} =& \Psi_q\left(Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_8^{-2}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-1}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3Y_4\right)\Psi_q\left(Y_9\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-2}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_8\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-4}Y_2Y_3Y_4Y_8^2Y_9^2\right)P_{13}.
\end{aligned}\tag{5.24}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon =&(1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_1=-\varepsilon_3=1);\\
K_{+-} =& \Psi_q\left(Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_8^{-2}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-1}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{2}Y_3Y_4Y_9^2\right)\Psi_q\left(Y_9^{-1}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-2}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_8\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-4}Y_2Y_3Y_4Y_8^2Y_9^2\right)P_{13}.
\end{aligned}\tag{5.25}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon =&(-1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1)\ (\text{i.e. } -\varepsilon_1=\varepsilon_3=1);\\
K_{-+} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_8Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(q^{2}Y_2^{-1}Y_3^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(qY_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-1}Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3Y_4\right)\Psi_q\left(q^{-1}Y_8Y_9\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-2}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-4}Y_2Y_3Y_4Y_8^2Y_9^2\right)P_{13}.
\end{aligned}\tag{5.26}$$

$$\begin{aligned}
\varepsilon =&(-1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1)\ (\text{i.e. } \varepsilon_1=\varepsilon_3=-1);\\
K_{--} =& \Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{2}Y_2^{-1}Y_3^{-1}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(qY_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-1}Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3Y_4Y_8^2Y_9^2\right)\Psi_q\left(q^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2^{-1}Y_3^{-1}Y_7^{-2}Y_8^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-4}Y_2Y_3Y_4Y_8^2Y_9^2\right)P_{13}.
\end{aligned}\tag{5.27}$$

典范变量下 (5.24)–(5.27) 的显式公式见附录 B。

与类型 ρ_{24} 的情形相同，我们可以证明算子 $K_{\varepsilon_1,\ \varepsilon_3}$ 与 $\varepsilon_1,\ \varepsilon_3\in\{1,-1\}$ 的选择无关。

5.4. 算子的良定义性。由于 (5.14) 对应的符号序列 (5.10) 与 $\mathcal{K}_{1234}$ 的热带符号序列不同，K 算子的二对数部分作为量子 Y变量的形式级数是否良定义并非显而易见（另见注 6.2）。本小节聚焦于类型 ρ_{24} 的情形，并证明它作为量子变量 Y_i 的形式 Laurent级数，以及作为 q-韦尔代数生成元 e^{u_i} 和 e^{w_i} 中 $\mathcal{L}(C_2)$ 的形式 Laurent级数，确实都是良定义的。根据命题 5.4，只需考虑 (5.17) 中的情形 K_{++}。我们用 K_{++}^{Ψ} 表示 K_{++} 中出现的二重对数函数的乘积。

首先，我们考虑 K_{++}^{Ψ} 在量子 Y 变量中的展开。利用 (2.8)，将 (5.17) 中从左数第 i 个二对数按其自变量展开成幂级数，并引入求和指标 n_i。进一步利用 q-可交换性关系 (2.1)，可将其写成如下形式

$$K_{++}^{\Psi}=\sum_{\mathbf{n}}A(\mathbf{n})Y_2^{p_1}Y_3^{p_2}Y_4^{p_3}Y_7^{p_4}Y_8^{p_5}Y_9^{p_6},\tag{5.28}$$

其中，求和遍及 $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_{10})\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{10}$，而 $A(\mathbf{n})$ 是 q 的有理函数。幂 $p_1,\dots,p_6$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
&p_1=n_4+n_8+n_9,\quad p_2=n_2-n_3-2n_6-n_7+n_9+n_{10},\quad p_3=-n_6-n_7,\\
&p_4=n_5+n_9,\quad p_5=-n_1-n_3+n_5-2n_6-n_7+n_9,\quad p_6=-n_3-2n_6-n_7+n_9.
\end{aligned}\tag{5.29}$$

级数 (5.28) 定义良好，因为方程 (5.29) 将 $\mathbf{n}$ 限制为有限个（可能为空的）取值，对任意 $(p_1,\dots,p_6)\in\mathbb{Z}^6$ 均如此。

接下来，我们考虑 K_{++}^{Ψ} 关于变量 e^{u_i} 和 e^{w_i}的展开。回忆一下，我们设定了$\gamma=(1,\ 2,\ 1,\ 2)$。令 $\mathcal{L}(C_2):=\mathcal{L}_\gamma$为一组关于 e^{u_i}和 e^{w_i}的形式洛朗级数 (2.23)，满足

交换关系 (5.1)。将 (5.3) 代入 (5.28) 得到

$$K^{\Psi}_{++} = \sum_{\mathbf{n}} \tilde{A}(\mathbf{n})\, \mathrm{e}^{\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_4 u_4 + \alpha_5 w_1 + \cdots \alpha_9 w_4}, \tag{5.30}$$

其中求和范围为 $\mathbf{n} = (n_1, \ldots, n_{10}) \in (\mathbb{Z}_{\geq 0})^{10}$，而 $\tilde{A}(\mathbf{n})$ 是 q 和参数 $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ $(i = 1, \ldots, 4)$ 的函数。幂 $\alpha_1, \ldots, \alpha_8$ 给定为

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= n_1 + n_3 + n_5 + 2n_6 + n_7 + n_9, \\
\alpha_2 &= -n_2 + n_3 + 2n_4 + 2n_6 + n_7 + 2n_8 + n_9 - n_{10}, \\
\alpha_3 &= n_1 - n_3 - n_5 - 2n_6 - n_7 + n_9, \\
\alpha_4 &= -n_2 + n_3 - n_7 - n_9 - n_{10}, \\
\alpha_5 &= n_1 + n_3 - n_5 + 2n_6 + n_7 - n_9, \\
\alpha_6 &= -n_1 - n_2 + n_5 - n_{10}, \\
\alpha_7 &= n_1 + 2n_2 - n_3 - n_5 - 2n_6 - n_7 + n_9 + 2n_{10}, \\
\alpha_8 &= -n_2 + n_3 + 2n_6 + n_7 - n_9 - n_{10}.
\end{aligned} \tag{5.31}$$

级数 (5.30) 定义良好，因为 (5.31) 将 $\mathbf{n}$ 限制为有限种（也可能为空）的可能取值。因此可得 $K^{\Psi}_{++} \in \mathcal{L}(C_2)$。

6. 3D Reflection equation from q-Weyl algebra

本节给出我们的主要结果：一个三维反射方程（三维反射方程，简称 3DRE）的解，该解由 R-算子 (4.13)、(4.24) 以及类型为 ρ_{24}的 K-算子 (5.17)–(5.20) 表示。沿用 [11, 12, 13]，中为四面体方程提出的策略，我们将分几个步骤完成这一推导。

在第6.1节中，我们根据量子 Y-变量的单项式变换 $\tau^{(\pm)}_{ijk}$、$\tau^{(\pm)}_{ijk}$ 以及 τ^{K}_{ijkl}构造了解（命题 6.1）。这对应于（5.6）之后所描述的条件（ii）。在第6.2节中，我们将这些变换转化为解 $\eta^{(\pm)}_{ijk}$、$\eta^{(\pm)}_{ijk}$、η^{K}_{ijkl}，这些解由典范变量的仿射变换构成，而典范变量包含 q-Weyl生成元（命题 6.3）。在第6.3节中，我们根据算子 $P^{(\pm)}_{ijk}$、$P^{(\pm)}_{ijk}$ 以及 P^{K}_{ijkl} 获得解；这些算子的伴随作用实现了第6.2节中得到的变换（命题 6.5）。在第6.4节中，在上述步骤的基础上，我们给出本文的主要结果，即用R-算子和 K-算子表示三维反射方程的完整解（定理 6.6）。

在中间步骤中，我们要求算子 τ、η 和 P 上标中出现的符号为良好，从而使三维反射方程成立，并满足某种齐次性。事实证明，这些条件逐步限制了符号，最终导出唯一的可能性，这相当令人瞩目。与典范变量一同引入的参数同样需要满足某些关系。

6.1. 的三维反射方程： Y**量子单项式变换变量**。回顾量子 Y 变量的单项式变换，即 $\tau_{123|--++}$ (3.7)、$\tau_{123|-+-+}$ (3.9)、$\tau_{123|--++}$(3.14)、$\tau_{123|-+-+}$(3.16) 和 $\tau^{K}_{1234|\varepsilon}$(5.12)。这些变换自然可扩展到 $\mathcal{Y}(B(C_3))$ 的情形，例如 $\tau_{ijk|--++}$、$\tau^{K}_{ijkl|\varepsilon}$ 等。为简便起见，我们记作

$$\begin{aligned}
&\tau^{(-)}_{ijk} := \tau_{ijk|--++}, \quad \tau^{(+)}_{ijk} := \tau_{ijk|-+-+}, \\
&\overline{\tau}^{(-)}_{ijk} := \overline{\tau}_{ijk|--++}, \quad \overline{\tau}^{(+)}_{ijk} := \overline{\tau}_{ijk|-+-+}, \\
&\tau^{K}_{ijkl} := \tau^{K}_{ijkl|\varepsilon}\ ;\ \varepsilon \text{ is of type } \rho_{24}\ (5.10).
\end{aligned} \tag{6.1}$$

与 (3.24) 相对应，预期它们满足如下形式的三维反射方程

$$\tau^{(\delta_1)}_{124}\, \tau^{K}_{1356}\, \overline{\tau}^{(\delta_2)}_{178}\, \tau^{(\delta_3)}_{258}\, \tau^{K}_{2379}\, \tau^{K}_{4689}\, \overline{\tau}^{(\delta_4)}_{457} = \tau^{(\delta'_1)}_{457}\, \tau^{K}_{4689}\, \tau^{K}_{2379}\, \overline{\tau}^{(\delta'_2)}_{258}\, \tau^{(\delta'_3)}_{178}\, \tau^{K}_{1356}\, \overline{\tau}^{(\delta'_4)}_{124}, \tag{6.2}$$

对于某个符号序列 $\delta = (\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta'_1,\ \delta'_2,\ \delta'_3,\ \delta'_4) \in \{+,-\}^8$。

若符号序列 δ 良好，则称其为良好符号序列；当满足某种齐次性时，(6.2)成立，并且 $\delta_1 = \delta_3 = \delta'_1 = \delta'_3$ 和 $\delta_2 = \delta_4 = \delta'_2 = \delta'_4$ 成立。根据定义，良好符号序列具有如下形式$\delta = (\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2)$。今后，我们将仅用 $(\delta_1,\ \delta_2)$ 指定这样的序列。以下结果可通过直接计算得到。

命题 6.1。 三维反射方程(6.2) 恰有三个良好符号序列 δ ，分别对应$(\delta_1, \delta_2) = (+,+)$、$(+,-)$和$(-,-)$，由此得到以下结果：

$$\tau^{(-)}_{124}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(-)}_{178}\,\tau^{(-)}_{258}\,\tau^{K}_{2379}\,\tau^{K}_{4689}\,\overline{\tau}^{(-)}_{457} = \tau^{(-)}_{457}\,\tau^{K}_{4689}\,\tau^{K}_{2379}\,\overline{\tau}^{(-)}_{258}\,\tau^{(-)}_{178}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(-)}_{124}, \tag{6.3}$$

$$\tau^{(+)}_{124}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(-)}_{178}\,\tau^{(+)}_{258}\,\tau^{K}_{2379}\,\tau^{K}_{4689}\,\overline{\tau}^{(-)}_{457} = \tau^{(+)}_{457}\,\tau^{K}_{4689}\,\tau^{K}_{2379}\,\overline{\tau}^{(-)}_{258}\,\tau^{(+)}_{178}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(-)}_{124}, \tag{6.4}$$

$$\tau^{(+)}_{124}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(+)}_{178}\,\tau^{(+)}_{258}\,\tau^{K}_{2379}\,\tau^{K}_{4689}\,\overline{\tau}^{(+)}_{457} = \tau^{(+)}_{457}\,\tau^{K}_{4689}\,\tau^{K}_{2379}\,\overline{\tau}^{(+)}_{258}\,\tau^{(+)}_{178}\,\tau^{K}_{1356}\,\overline{\tau}^{(+)}_{124}. \tag{6.5}$$

注 6.2。 三维反射方程的热带符号序列导出如下单项式变换的三维反射方程。

$$\begin{aligned}
&\tau_{124|++++}\,\tau^{K}_{1356|++++++--++}\,\overline{\tau}_{178|++++}\,\tau_{258|+-++}\\
&\qquad\circ\,\tau^{K}_{2379|++++++--++}\,\tau^{K}_{4689|--++++--++}\,\overline{\tau}_{457|--++}\\
&=\tau_{457|++++}\,\tau^{K}_{4689|++++++--++}\,\tau^{K}_{2379|++++++--++}\,\overline{\tau}_{258|--++}\\
&\qquad\circ\,\tau_{178|++-+}\,\tau^{K}_{1356|+++++--++}\,\overline{\tau}_{124|-+++}.
\end{aligned}$$

可以看出， $\tau^{K}_{ijkl|\varepsilon}$、 $\tau_{ijk|\varepsilon}$和$\tau_{ijk|\varepsilon}$均不具有符号序列中的齐次性。

6.2. 关于 η的三维反射方程：典范变量的仿射变换。 设 $\gamma = (\gamma_i)_{i=1,\dots,9}$ 由 $\gamma = (1,1,2,1,1,2,1,1,2)$给出。设 $\mathcal{W}(C_3) := \mathcal{W}_\gamma$(2.22)为由 $\mathrm{e}^{\pm u_i}$和 $\mathrm{e}^{\pm w_i}$生成的 q-韦尔代数，其中典范变量 (u_i, w_i) $(i = 1, \dots, 9)$ 满足

$$[u_i, w_j] = \hbar\,\gamma_i\,\delta_{ij}, \qquad [u_i, u_j] = [w_i, w_j] = 0. \tag{6.6}$$

用 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_3)$ 表示 $\mathcal{W}(C_3)$ 的斜域。

回顾一下 $\mathcal{W}(A_2)$ 上 q-Weyl 变量 $\eta^{(\mp)}_{123}$ (4.5)–(4.6)、 $\eta^{(\mp)}_{123}$ (4.17)–(4.18) 的单项式变换，以及 $\mathcal{W}(C_2)$ 上的 η^{K}_{1234} (5.15)。它们可扩展为作用于 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_3)$ 的变换 $\eta^{(\mp)}_{ijk}$ 、 $\eta^{(\mp)}_{ijk}$ 和 η^{K}_{ijkl}。

对于这些算子，良好符号序列 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_3, \delta_4, \delta'_1, \delta'_2, \delta'_3, \delta'_4) \in \{+,-\}^8$ 的定义方式与三维反射方程 (6.2) 中相同。也就是说，若 δ 使得以下条件成立，则称其为良好的：

$$\eta^{(\delta_1)}_{124}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(\delta_2)}_{178}\,\eta^{(\delta_3)}_{258}\,\eta^{K}_{2379}\,\eta^{K}_{4689}\,\overline{\eta}^{(\delta_4)}_{457} = \eta^{(\delta'_1)}_{457}\,\eta^{K}_{4689}\,\eta^{K}_{2379}\,\overline{\eta}^{(\delta'_2)}_{258}\,\eta^{(\delta'_3)}_{178}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(\delta'_4)}_{124}, \tag{6.7}$$

成立，并满足条件 $\delta_1 = \delta_3 = \delta'_1 = \delta'_3$ 和 $\delta_2 = \delta_4 = \delta'_2 = \delta'_4$。良好符号序列的形式为 $\delta = (\delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_2, \delta_1, \delta_2)$，只需由 (δ_1, δ_2) 指定。

利用（ 4.2）、（5.2）和（5.9），我们得到参数 $\mathcal{P}_i = (a_i、\ b_i、\ c_i、\ d_i、\ e_i$ 所满足的条件):

$$a_i + b_i + c_i + d_i + e_i = 0 \quad \text{for } i = 1, 2, 4, 5, 7, 8, \tag{6.8}$$

$$\begin{cases} b_j + 2c_j + d_j + e_j = c_i + c_k, \\ b_l + 2c_l + d_l + e_l = -c_i + c_k \end{cases} \quad \text{for } (i,j,k,l) = (4,6,8,9), (2,3,7,9), (1,3,5,6). \tag{6.9}$$

我们注意到，（6.9）蕴含了必要条件

$$c_1 - c_2 + c_4 = 0, \quad c_2 - c_5 + c_8 = 0, \quad c_1 - c_2 + c_5 - c_7 = 0. \tag{6.10}$$

通过直接计算（4.5）、（4.6）、（4.17）、（4.18）和（5.15），我们得到如下结果。

命题6.3。假设 (6.8)， (6.10)和

$$a_1 - a_2 + a_4 = 0, \quad a_2 - a_5 + a_8 = 0, \quad a_1 - a_2 + a_5 - a_7 = 0. \tag{6.11}$$

那么，三维反射方程(6.7) 恰有三个良好符号序列 δ，分别对应于(δ_1,δ_2) $=(+,+)$、$(+,-)$ 和$(-,-)$，由此得到以下结果：

$$\eta^{(-)}_{124}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(-)}_{178}\,\eta^{(-)}_{258}\,\eta^{K}_{2379}\,\eta^{K}_{4689}\,\overline{\eta}^{(-)}_{457}=\eta^{(-)}_{457}\,\eta^{K}_{4689}\,\eta^{K}_{2379}\,\overline{\eta}^{(-)}_{258}\,\eta^{(-)}_{178}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(-)}_{124},\tag{6.12}$$

$$\eta^{(+)}_{124}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(-)}_{178}\,\eta^{(+)}_{258}\,\eta^{K}_{2379}\,\eta^{K}_{4689}\,\overline{\eta}^{(-)}_{457}=\eta^{(+)}_{457}\,\eta^{K}_{4689}\,\eta^{K}_{2379}\,\overline{\eta}^{(-)}_{258}\,\eta^{(+)}_{178}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(-)}_{124},\tag{6.13}$$

$$\eta^{(+)}_{124}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(+)}_{178}\,\eta^{(+)}_{258}\,\eta^{K}_{2379}\,\eta^{K}_{4689}\,\overline{\eta}^{(+)}_{457}=\eta^{(+)}_{457}\,\eta^{K}_{4689}\,\eta^{K}_{2379}\,\overline{\eta}^{(+)}_{258}\,\eta^{(+)}_{178}\,\eta^{K}_{1356}\,\overline{\eta}^{(+)}_{124}.\tag{6.14}$$

特别是，得益于交换图(4.9)、(4.21) 和(5.5)，这些映射中的每一个都与针对 Y-变量的单项式变换(6.3)–(6.5)的三维反射方程相容。

注意，该结论在条件 (6.10) 下成立，而 (6.10) 弱于 (6.9)。

注 6.4. 除了命题 6.1 和 6.3 中出现的三个良好符号序列 δ 外，还存在另外十个不满足齐次性条件、但仍使三维反射方程成立的符号序列。其中两个在如下意义下是“对称”的：$(\delta_1,\delta_2,\delta_3,\delta_4)$ $=(\delta'_1,\delta'_2,\delta'_3,\delta'_4)$：

$$(-,+,-,-,-,+,-,-),\qquad(+,+,-,+,+,+,-,+).$$

其余八个不对称：

$$(-,-,-,-,+,-,-,+),\ (-,-,+,-,+,-,+,+),\ (-,+,-,-,+,+,-,+),$$
$$(-,+,+,-,+,+,+,+),\ (+,-,-,-,-,-,+,-),\ (+,-,-,+,-,+,+,-),$$
$$(+,-,+,+,+,+,+,-),\ (+,+,-,+,-,+,-,-).$$

6.3. 算子的三维反射方程 P。我们将 (4.10)、(4.11) 中的算子 $P^{(\pm)}_{123}$、$P_{(\pm)\,123}$ 在 (4.22)、(4.23) 中的算子，以及 (5.16) 中的算子 $P^{K}_{1234|\varepsilon}$，自然地扩展为作用于 Frac $\mathcal{W}(C_3)$ 的 $P_{(\pm)\,ijk}$、$P_{(\pm)\,ijk}$ 和 $P^{K}_{1234|\varepsilon}$。为简便起见，我们将 $P^{K}_{ijkl|\varepsilon}$ 记作 P^{K}_{ijkl}。

设集合 J 上由下式给出的偏序为 $\prec:=\{1,2,\dots,9\}$

$$1\prec 2,4\prec 5,7,8,3,6,9.$$

$\mathfrak{S}_9$ 的对称子群 $S(C_3)=\mathfrak{S}_2\times\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3$ 以如下方式作用于 J：$\mathfrak{S}_2$ 作用于 $\{2,4\}$，而 $\mathfrak{S}_3\times\mathfrak{S}_3$ 作用于 $\{5,7,8\}\times\{3,6,9\}$。注意，$S(C_3)$ 保持该偏序。对于典范变量 (6.6)，我们定义由以下元素生成的群 $N(C_3)$

$$\mathrm{e}^{\pm\frac{1}{\hbar}u_iw_j}\ (i\succ j),\quad \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}u_i},\ \mathrm{e}^{\frac{a}{\hbar}w_i}\ (a\in\mathbb{C}),\quad b\in\mathbb{C}^{\times};\ i,j\in\{1,\dots,9\},\tag{6.15}$$

其定义方式与 §4 中的 $N(A_3)$ 相同。群 $S(C_3)$ 通过伴随作用作用于 $N(C_3)$，置换典范变量的指标。此外，令 $\mathcal{L}(C_3):=\mathcal{L}_\gamma$ 表示形式洛朗级数 (2.23) 的集合。通过考察显式公式，很容易看出 $P^{(\pm)}_{ijk}$、$P_{(\pm)\,ijk}$ 和 P^{K}_{ijkl} 都属于 $N(C_3)\rtimes S(C_3)$。

给定一个符号序列 $\delta=(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_3,\ \delta_4,\ \delta'_1,\ \delta'_2,\ \delta'_3,\ \delta'_4)\in\{+,-\}^8$，我们考虑三维反射方程：

$$P^{(\delta_1)}_{124}P^{K}_{1356}\overline{P}^{(\delta_2)}_{178}P^{(\delta_3)}_{258}P^{K}_{2379}P^{K}_{4689}\overline{P}^{(\delta_4)}_{457}=P^{(\delta'_1)}_{457}P^{K}_{4689}P^{K}_{2379}\overline{P}^{(\delta'_2)}_{258}P^{(\delta'_3)}_{178}P^{K}_{1356}\overline{P}^{(\delta'_4)}_{124}.\tag{6.16}$$

同样，若 δ 具有形式 $\delta=(\delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2,\ \delta_1,\ \delta_2)$，且使 (6.16) 成立，则称其为良好符号序列。

下面的命题通过使用 BCH 公式进行直接计算得证。它表明，在命题 6.1 和 6.3 中出现的三个良好符号序列中，只有对应于 $(\delta_1,\ \delta_2)=(+,\ -)$ 的情形能够保留下来。此外，还必须对参数施加条件：

$$a_i=c_i\quad\text{for } i=1,2,4,5,7,8.\tag{6.17}$$

I在这种情况下，我们可以采用注4.4中所述的简化特性，并且 t

$$P_{ijk}=P^{(+)}_{ijk}=\overline{P}^{(-)}_{ijk}.\tag{6.18}$$

命题 6.5. 假设 (6.8)、(6.9) 和 (6.17)成立。那么，三维反射方程 (6.16)存在唯一一个与$(\delta_1, \delta_2) = (+, -)$对应的良好符号序列。用(6.18)中的算子 P_{ijk}和 P^K_{ijkl}表示，它可写成 $N(C_3) \rtimes S(C_3)$中的如下等式：

$$P_{124}\,P^K_{1356}\,P_{178}\,P_{258}\,P^K_{2379}\,P^K_{4689}\,P_{457} = P_{457}\,P^K_{4689}\,P^K_{2379}\,P_{258}\,P_{178}\,P^K_{1356}\,P_{124}. \tag{6.19}$$

6.4. 主要结果：由 R 和 K给出三维反射方程的完整解。 我们将 (4.12)、(4.13) 中的算子 $R^{(\pm)}_{123}$ 扩展到 $R^{(\pm)}_{ijk}$，将 (4.24)、(4.25) 中的算子 $R^{(\pm)}_{123}$ 扩展到 $R^{(\pm)}_{ijk}$，并将 (5.16)–(5.20) 中的算子 $K_{1234|\varepsilon}$ 扩展到 $K_{ijkl|\varepsilon}$，使其自然作用于 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_3)$。为简便起见，我们记 $K_{ijkl|\varepsilon}$ 为 K_{ijkl}（见命题 5.4）。

我们重点考察命题 6.5 中唯一的良好符号序列 $\delta = (+,\ -,\ +,\ -,\ +,\ -,\ +,\ -)$，并检验相应的三维反射方程对 R-算子和 K-算子是否成立：

$$R^{(+)}_{124}K_{1356}\overline{R}^{(-)}_{178}R^{(+)}_{258}K_{2379}K_{4689}\overline{R}^{(-)}_{457} = R^{(+)}_{457}K_{4689}K_{2379}\overline{R}^{(-)}_{258}R^{(+)}_{178}K_{1356}\overline{R}^{(-)}_{124}. \tag{6.20}$$

我们继续假设条件 $a_i = c_i$对 $i = 1$、2、4、5、7、8 成立，如命题 6.5 所要求。在此假设下，(6.20) 中所有 R-算子都满足注4.4中的简化关系。因此，我们设

$$R_{ijk} = R^{(+)}_{ijk} = \overline{R}^{(-)}_{ijk}. \tag{6.21}$$

根据命题4.5和§5.4，算子 R_{ijk} 和 K_{ijkl} 分别分解为 $\mathcal{L}(C_3)$中的二对数部分，以及 $N(C_3) \rtimes S(C_3)$中的单项式部分。我们将这些分解写成

$$R_{ijk} = R^{\Psi}_{ijk}P_{ijk}, \qquad K_{ijkl} = K^{\Psi}_{ijkl}P^K_{ijkl}. \tag{6.22}$$

本文的主要结果是以下定理，它肯定地回答了对(6.20)的探求。

定理 6.6。 假设(6.8)、(6.9)和(6.17)成立。那么三维反射方程(6.20)有效。在(6.21)的记号下，它具有如下形式

$$R_{124}K_{1356}R_{178}R_{258}K_{2379}K_{4689}R_{457} = R_{457}K_{4689}K_{2379}R_{258}R_{178}K_{1356}R_{124}, \tag{6.23}$$

其含义是，两边分别分解为 $\mathcal{L}(C_3)$ 中的二对数部分和 $N(C_3) \rtimes S(C_3)$中的单项式部分，并且这两个部分分别相同。

证明。 利用分解式(6.22)，三维反射方程的左端具有如下形式

$$R^{\Psi}_{124}P_{124}\cdot K^{\Psi}_{1356}P^K_{1356}\cdot R^{\Psi}_{178}P_{178}\cdot R^{\Psi}_{258}P_{258}\cdot K^{\Psi}_{2379}P^K_{2379}\cdot K^{\Psi}_{4689}P^K_{4689}\cdot R^{\Psi}_{457}P_{457}.$$

将单项式部分移到右端，得到

$$R^{\Psi}_{124}K^{\Psi'}_{1356}R^{\Psi'}_{178}R^{\Psi'}_{258}K^{\Psi'}_{2379}K^{\Psi'}_{4689}R^{\Psi'}_{457}\cdot P_{124}P^K_{1356}P_{178}P_{258}P^K_{2379}P^K_{4689}P_{457}, \tag{6.24}$$

其中

$$\begin{aligned}
K^{\Psi'}_{1356} &= \mathrm{Ad}(P_{124})(K^{\Psi}_{1356}),\\
R^{\Psi'}_{178} &= \mathrm{Ad}(P_{124}P^K_{1356})(R^{\Psi}_{178}),\\
R^{\Psi'}_{258} &= \mathrm{Ad}(P_{124}P^K_{1356}P_{178})(R^{\Psi}_{258}),\\
K^{\Psi'}_{2379} &= \mathrm{Ad}(P_{124}P^K_{1356}P_{178}P_{258})(K^{\Psi}_{2379}),\\
K^{\Psi'}_{4689} &= \mathrm{Ad}(P_{124}P^K_{1356}P_{178}P_{258}P^K_{2379})(K^{\Psi}_{4689}),\\
R^{\Psi'}_{457} &= \mathrm{Ad}(P_{124}P^K_{1356}P_{178}P_{258}P^K_{2379}P^K_{4689})(R^{\Psi}_{457}).
\end{aligned}$$

注意到，根据引理 2.2，这些项都属于 $\mathcal{L}(C_3)$。我们分别用 F^{Ψ}_L和 P^{Ψ}_L表示 (6.24) 的二对数部分和单项式部分。同理，我们得到 (6.23) 右端的二对数部分 F^{Ψ}_R和单项式部分 P^{Ψ}_R。我们的目标是证明 $F^{\Psi}_L = F^{\Psi}_R$属于 $\mathcal{L}(C_3)$，且 $P^{\Psi}_L = P^{\Psi}_R$属于 $N(C_3) \rtimes S(C_3)$。后者已可由命题 6.5 得出。接下来，我们证明等式 $F^{\Psi}_L = F^{\Psi}_R$。

首先，我们考虑用量子 Y 变量而非 q-Weyl 生成元表示的 F_L^{Ψ}和 F_R^{Ψ}。令 τ_L 和 τ_R 分别为 (6.4) 的左端和右端。一般理论中的恒等式 (2.18) 应用于三维反射方程的突变序列 (3.23)，得到

$$\mathrm{Ad}(F_L^{\Psi}) \circ \tau_L = \mathrm{Ad}(F_R^{\Psi}) \circ \tau_R,$$

作为 $\mathcal{Y}(B(C_3))$ 上的同态。由 (6.4) 可知 $\tau_L = \tau_R$，从而得到 $\mathsf{Ad}((F_R^{\Psi})^{-1} \cdot F_L^{\Psi}) = \mathrm{id}$。

在下文 §6.6 和 §C.1 中，我们证明 F_L^{Ψ}、 F_R^{Ψ} 以及 $(F_R^{\Psi})^{-1} \cdot F_L^{\Psi}$ 都作为量子 Y-变量的形式洛朗级数是良定义的，并且 F_L^{Ψ} 和 F_R^{Ψ} 的常数项均为 1。这通过与 [17, Th. 3.5] 证明中相同的推理，导出 $F_L^{\Psi} = F_R^{\Psi}$，如下所述。我们将退化交换矩阵 $B(C_3)$（其秩为 18）扩展为非退化交换矩阵 $\check{B}$ ，其大小是 $B(C_3)$ 的两倍（见 [17, Example 2.5]）。于是，根据扩张定理 [24, Th. 4.3], , 种子 ($B(C_3)$ $Y_{(1)}$) 的周期性会被扩展种子（ $\tilde{B}, \tilde{Y}$）继承。因此，$(F_R^{\Psi})^{-1} \cdot F_L^{\Psi}$ 与量子环面代数 $\mathcal{T}(\tilde{B})$ 中的任意元素都交换。由于 $\tilde{B}$ 是非退化的，这意味着 $(F_R^{\Psi})^{-1} \cdot F_L^{\Psi}$ 是一个仅依赖于 q 的常数。该常数必为 1，因为 F_L^{Ψ} 和 F_R^{Ψ} 的常数项均为 1。

最后，根据下文 §6.7 和 §C.2 中的论证，我们看到 F_L^{Ψ}、 F_R^{Ψ} 和 $(F_R^{\Psi})^{-1} \cdot F_L^{\Psi}$ 都是 $\mathcal{L}(C_3)$ 的元素，因此得到 $\mathcal{L}(C_3)$ 中的恒等式 $F_L^{\Psi} = F_R^{\Psi}$。□

注6.7. K 型算子 (5.24)–(5.27) 预计与 SB 箭图（其所有顶点的权重均为二）对应的 R 算子一起，满足与李代数 B_3 相关的三维反射方程。本文不探讨这一方向，而是仅描述 §7.3 中 ρ_{13} 型的 K 算子与 B_2 型 FG 箭图对应算子之间的关系。

6.5. **显式公式。** 定理 6.6 中施加的参数条件 (6.8)、(6.9) 和 (6.17)，使 R 算子和 K 算子的形式略微简化，更具对称性。我们在此记录这些最终表达式，以及推导它们的实际计算过程。

例如，考虑出现在三维反射方程 (6.23) 中的 R_{124}。根据 (6.21)，它由 (4.13)–(4.11) 将指标 1,2, 3 替换为 1,2, 4 得到。因此我们有

$$P_{124} \overset{(6.18)}{=} P_{124}^{(+)} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_4-u_2)w_1} \mathrm{e}^{\frac{\kappa_0'}{\hbar}(w_4-w_2-w_1)} \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(\kappa_1' u_1 + \kappa_2' u_2 + \kappa_4' u_4)} \rho_{24}, \tag{6.25}$$

$$\kappa_0' = \frac{e_2 - e_4}{2}, \quad \kappa_1' = b_4 + c_4 - b_2 - c_2 - \kappa_0', \quad \kappa_2' = d_4 - d_2 - a_1 - \kappa_0', \quad \kappa_4' = c_1 - c_2 + c_4. \tag{6.26}$$

利用定理 6.6 中的条件，可以很容易地推出 $\kappa_1' = -\kappa_2' = \frac{-b_2+d_2+b_4-d_4}{2}$ and $\kappa_4' = 0$。同样的化简适用于所有 P_{ijk}，于是我们得到

$$P_{ijk} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(u_k-u_j)w_i} \mathrm{e}^{\frac{e_j-e_k}{2\hbar}(w_k-w_j-w_i)} \mathrm{e}^{\frac{-b_j+d_j+b_k-d_k}{2\hbar}(u_i-u_j)} \rho_{jk} \tag{6.27}$$

对于 $i,\ j,\ k \in \{1,2,4,5,7,8\}$。

将此表达式与 (4.13) 或 (4.14) 结合， R-算子具有如下形式

$$\begin{aligned} R_{ijk} = {} & \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_k-c_j-b_i+u_i+u_k+w_i-w_j+w_k})^{-1} \Psi_q(\mathrm{e}^{d_k+c_j+b_i+e_i-u_k+u_i-w_i+w_j-w_k}) \\ & \cdot \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_k-e_k-c_j-b_i-u_k+u_i+w_i-w_j+w_k})^{-1} \Psi_q(\mathrm{e}^{d_k+c_j+e_j+b_i+e_i-u_k+2u_j+u_i-w_i+w_j-w_k}) P_{ijk} \end{aligned} \tag{6.28}$$

$$\begin{aligned} = {} & \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_k-c_j-b_i+u_i+u_k+w_i-w_j+w_k})^{-1} \Psi_q(\mathrm{e}^{d_k+c_j+b_i+e_i-u_k+u_i-w_i+w_j-w_k}) P_{ijk} \\ & \cdot \Psi_q(\mathrm{e}^{d_i+e_i+a_j+b_k+u_i-u_k-w_i+w_j-w_k})^{-1} \Psi_q(\mathrm{e}^{-d_i-a_j-b_k+u_i+u_k-w_i+w_j-w_k}), \end{aligned} \tag{6.29}$$

其中，对于 $l = i, j, k,\ \ a_l + b_l + c_l + d_l + e_l = 0$ and $a_l = c_l$。

接下来我们以三维反射方程 (6.23) 中出现的 K_{1356} 为例。我们将其分解为二重对数部分和单项式部分，如 $K_{1356} = K_{1356}^{\Psi} P_{1356}^{K}$ 所示，后者为

根据（5.16），将指标 1、2、3、4 替换为 1、3、5、6。因此我们得到 $P^K_{1356}=\exp(\frac{X}{2\hbar})\rho_{36}$ 其中

$$\begin{aligned}X=&(-u_3+u_6)(a_1+c_1-c_3+c_6+2w_1)-(u_1-u_5)(b_3-b_6-d_3+d_6)\\&+(-w_3+w_6)\Big(\tfrac{1}{2}(-b_3+b_6-d_3+d_6)+c_1-c_3+c_6\Big).\end{aligned}\tag{6.30}$$

利用定理 6.6 中的条件，此处出现的系数可改写为

$$a_1+c_1-c_3+c_6=a_6-a_3,\quad \tfrac{1}{2}(-b_3+b_6-d_3+d_6)+c_1-c_3+c_6=\tfrac{1}{2}(e_3-e_6)\tag{6.31}$$

引入 a_3 并将条件（6.8）推广至 $i=3$、6、9。同样的改写一般也适用于 P^K_{ijkl}，从而得到

$$P^K_{ijkl}=\mathrm{e}^{\frac{1}{2\hbar}\{(u_j-u_l)(a_j-a_l-2w_i)-(b_j-d_j-b_l+d_l)(u_i-u_k)-\frac{1}{2}(e_j-e_l)(w_j-w_l)\}}\rho_{jl}\tag{6.32}$$

对于（i、j、k、l），=(1、3、5、6)、(2、3、7、9) 和 (4、6、8、9)。

对于二对数部分，可以使用表达式 (B.1)–(B.4) 中的任意一个，因为根据命题 5.4，它们都相等。这里我们选用 (B.3)。将指标 1、2、3、4 替换为i、j、k、l后，得到

$$\begin{aligned}K_{ijkl}=\ &\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_i-c_j-d_k+u_i+u_k+w_i-w_j+w_k}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_k-b_j-d_l+u_j+u_l+w_j-2w_k+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_k-b_i+b_k-c_j+c_k+u_i-u_k+w_i-w_j+w_k}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_k+c_i-2c_j+c_k-d_j+d_l+u_j-u_l-w_j+2w_k-w_l}\right)\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_i-c_i+c_j-d_i+d_k+u_i-u_k-w_i+w_j-w_k}\right)\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_k-2b_i-b_j+2b_k+b_l+c_i-2c_j+c_k+2c_l+2u_i+u_j-2u_k-u_l+2w_i-w_j+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_i-b_j+b_k+b_l+c_i-c_j+2c_l+u_i+u_j-u_k-u_l+w_i-w_k+w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_k+c_i-2c_j+c_k-d_j+d_l+u_j-u_l-w_j+2w_k-w_l}\right)^{-1}\\&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_i-b_k-c_j-d_i-d_j+d_l+u_i+u_j+u_k-u_l-w_i+w_k-w_l}\right)\\&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_k-b_j-d_l+u_j+u_l+w_j-2w_k+w_l}\right)P^K_{ijkl}.\end{aligned}\tag{6.33}$$

进一步令 $c_i=a_i$ 和 $c_k=a_k$，即可得到公式 (1.9)。

6.6. 三维反射方程二对数部分的良定义性：量子 Y-变量。本节余下部分的所有公式均基于K-算子的表达式（5.19），该表达式对应于选择（ε_2，ε_4）=（−，+）。

首先，我们证明三维反射方程的二对数部分作为量子 Y-变量的形式洛朗级数具有良定义性。左端的二对数部分为

$$
\begin{aligned}
&\Psi_q\bigl(Y_{17}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q(qY_{16}Y_{17})\,\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q(Y_9Y_{16}Y_{17})\\
&\cdot\Psi_q\bigl(Y_{10}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(Y_3^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_2Y_3\bigr)\\
&\cdot\Psi_q(qY_9Y_{10}Y_{16}Y_{17})\,\Psi_{q^2}\bigl(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-2}Y_{11}^{-2}Y_{17}^{-2}Y_{18}^{-2}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_2Y_3\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^2Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{16}Y_{17}\bigr)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\bigl(Y_3^{-1}\bigr)\,\Psi_q\bigl(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-3}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^3Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}Y_{16}Y_{17}\bigr)\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^4Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}Y_{16}Y_{17}Y_{20}\bigr)\,\Psi_q\bigl(Y_{19}^{-1}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q(qY_{18}Y_{19})\,\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q(Y_{11}Y_{18}Y_{19})\,\Psi_q\bigl(Y_{12}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\bigl(Y_5^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_4Y_5\bigr)\\
&\cdot\Psi_q(qY_{11}Y_{12}Y_{18}Y_{19})\,\Psi_{q^2}\bigl(q^{-2}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-2}Y_{13}^{-2}Y_{19}^{-2}Y_{20}^{-2}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_4Y_5\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^2Y_4Y_5Y_{11}Y_{12}Y_{13}Y_{18}Y_{19}\bigr)\,\Psi_{q^2}\bigl(Y_5^{-1}\bigr)\,\Psi_q\bigl(Y_{10}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(Y_3^{-1}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_2Y_3\bigr)\,\Psi_q(qY_9Y_{10})\,\Psi_{q^2}\bigl(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-2}Y_{11}^{-2}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_{q^2}\bigl(q^2Y_2Y_3\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^2Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}\bigr)\,\Psi_{q^2}\bigl(Y_3^{-1}\bigr)\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}\bigr)^{-1}\,\Psi_q\bigl(q^{-3}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}\bigr)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\bigl(q^3Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}\bigr)\,\Psi_q\bigl(q^4Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}Y_{20}\bigr)\,.
\end{aligned}
\tag{6.34}
$$

它由 $46=3\times10+4\times4$ 个二重对数组成。利用（2.8），将其中从左数第 i 个二重对数按其自变量展开为幂级数，并引入求和指标 n_i。进一步利用 q-可交换性关系（2.1），可将结果化为以下形式

$$
\sum_{\mathbf{n}} C(\mathbf{n})\,Y_2^{p_1}Y_3^{p_2}Y_4^{p_3}Y_5^{p_4}Y_6^{p_5}Y_9^{p_6}Y_{10}^{p_7}Y_{11}^{p_8}Y_{12}^{p_9}Y_{13}^{p_{10}}Y_{16}^{p_{11}}Y_{17}^{p_{12}}Y_{18}^{p_{13}}Y_{19}^{p_{14}}Y_{20}^{p_{15}},
\tag{6.35}
$$

其中求和遍历 $\mathbf{n}=(n_1,\dots,n_{46})\in(\mathbb{Z}_{\geq0})^{46},$，而 $C(\mathbf{n})$ 是 q 的有理函数。级数（6.35）涉及附加在图 3.3 中箭图 $B(C_3)$ 的未冻结顶点上的 15 Y 个变量。它们的幂 $p_1,\dots,p_{15}$ 是 $\mathbf{n}$ 中的线性形式，具体如下:

$$
\begin{aligned}
p_1&=n_2+n_4+n_9+n_{13}+n_{17}+n_{18},\\
p_2&=-n_1+n_2-n_3+n_4-n_5-n_7+n_9-2n_{10}-n_{11}+n_{13}-n_{15}-n_{16}+n_{17}+n_{18},\\
p_3&=-n_{28}-n_{29},p_4=-n_3-n_5-n_7-2n_{10}-n_{11}-n_{15}-n_{16}+n_{20}+n_{22}+n_{27}+n_{31},\\
p_5&=-n_{19}+n_{20}-n_{21}+n_{22}-n_{23}-n_{25}+n_{27}-2n_{28}-n_{29}+n_{31},\\
p_6&=-n_{24}+n_{26}-n_{28}-n_{29}+n_{30}+n_{31}-n_{32},p_7=-n_{16}-n_{25}-2n_{28}-n_{29}+n_{31}-n_{44},\\
p_8&=-n_{10}-n_{11}-n_{15}-n_{16}+n_{26}+n_{30}+n_{31}-n_{38}-n_{39}-n_{43}-n_{44},\\
p_9&=n_{18}-n_{21}-n_{23}-n_{25}-2n_{28}-n_{29}+n_{46},\\
p_{10}&=n_4+n_9+n_{13}+n_{17}+n_{18}+n_{37}+n_{41}+n_{45}+n_{46},\\
p_{11}&=n_8+n_{12}+n_{13}+n_{17}+n_{18}+n_{36}+n_{40}+n_{41}+n_{45}+n_{46},\\
p_{12}&=-n_{15}-n_{16}+n_{17}+n_{18}-n_{23}-n_{25}+n_{27}-2n_{28}-n_{29}+n_{31}-n_{43}-n_{44}+n_{45}+n
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&46,\\
p_{13}&=-n_7-2n_{10}-n_{11}+n_{13}-n_{15}-n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{22}+n_{27}+n_{31}-n_{35}-2n_{38}\\
&-n_{39}+n_{41}-n_{43}-n_{44}+n_{45}+n_{46},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_{14} &= -n_5 - n_7 + n_9 - 2n_{10} - n_{11} + n_{13} - n_{15} - n_{16} + n_{17} + n_{18} - n_{33} - n_{35} + n_{37} - 2n_{38} \\
&\quad - n_{39} + n_{41} - n_{43} - n_{44} + n_{45} + n_{46}, \\
p_{15} &= -n_6 + n_8 - n_{10} - n_{11} + n_{12} + n_{13} - n_{14} - n_{15} - n_{16} + n_{17} + n_{18} - n_{34} + n_{36} - n_{38} \\
&\quad - n_{39} + n_{40} + n_{41} - n_{42} - n_{43} - n_{44} + n_{45} + n_{46}
\end{aligned} \tag{6.36}
$$

为了证明乘积 (6.34) 定义良好，只需证明：对于每个固定的 $(p_1, \dots, p_{15}) \in \mathbb{Z}^{15}$，方程组 (6.36) 仅有有限个（可能为空的）解 $\mathbf{n}$。这一点很容易验证。由涉及 p_1、p_3、p_{10}、p_{11} 的方程以及条件 $\forall n_i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ 可知，n_2、n_4、n_8、n_9、n_{12}、n_{13}、n_{17}、n_{18}、n_{28}、n_{29}、n_{36}、n_{37}、n_{40}、n_{41}、n_{45}、n_{46} 只有有限种可能。对于每一种这样的选择，涉及 p_2、p_9、p_{14}、p_{15} 的方程具有如下形式

$$
\begin{aligned}
p_2' &= -n_1 - n_3 - n_5 - n_7 - 2n_{10} - n_{11} - n_{15} - n_{16}, \\
p_9' &= -n_{21} - n_{23} - n_{25}, \\
p_{14}' &= -n_5 - n_7 - 2n_{10} - n_{11} - n_{15} - n_{16} - n_{33} - n_{35} - 2n_{38} - n_{39} - n_{43} - n_{44}, \\
p_{15}' &= -n_6 - n_{10} - n_{11} - n_{14} - n_{15} - n_{16} - n_{34} - n_{38} - n_{39} - n_{42} - n_{43} - n_{44}
\end{aligned}
$$

其中 p_2'、p_9'、p_{14}'、p_{15}' 为某些量。这些条件将 n_1、n_3、n_5、n_6、n_7、n_{10}、n_{11}、n_{14}、n_{15}、n_{16}、n_{21}、n_{23}、n_{25}、n_{33}、n_{34}、n_{35}、n_{38}、n_{39}、n_{42}、n_{43}、n_{44} 限制为有限多个值。假设这些值固定后，其余方程变为

$$
\begin{aligned}
&p_4'' = n_{20} + n_{22} + n_{27} + n_{31}, \quad p_5'' = -n_{19} + n_{20} + n_{22} + n_{27} + n_{31}, \\
&p_6'' = -n_{24} + n_{26} + n_{30} + n_{31} - n_{32}, \quad p_7'' = n_{31}, \quad p_8'' = n_{26} + n_{30} + n_{31}, \\
&p_{12}'' = n_{27} + n_{31}, \quad p_{13}'' = n_{22} + n_{27} + n_{31}.
\end{aligned}
$$

方程 $p_4'', p_7'', p_8'', p_{12}'', p_{13}''$ 将 $n_{20}, n_{22}, n_{26}, n_{27}, n_{30}, n_{31}$ 限制在有限种可能性之内。一旦这些值确定，剩余的两个方程就化为 $p_5'' = -n_{19}$ 和 $p_6'' = -n_{24} - n_{32}$，其中 p_5'' 和 p_6'' 为某些值，从而迫使 n_{19}, n_{24} 和 n_{32} 也只能取有限多个值。因此，所有变量 $n_1, \dots, n_{46}$ 都被限制在有限种取值之内，这证明了 (6.34) 的良定义性。由此还可得，级数 (6.34) 的常数项（对应于 $\mathbf{n} = \mathbf{0}$）等于 $\mathbf{1}$。

为简便起见，我们将上述过程记为

$$
\begin{aligned}
&p : 1, 3, 10, 11, \\
&n : 2, 4, 8, 9, 12, 13, 17, 18, 28, 29, 36, 37, 40, 41, 45, 46, \\
&p : 2, 9, 14, 15, \\
&n : 1, 3, 5, 6, 7, 10, 11, 14, 15, 16, 21, 23, 25, 33, 34, 35, 38, 39, 42, 43, 44, \\
&p : 4, 7, 8, 12, 13, \\
&n : 20, 22, 26, 27, 30, 31, \\
&p : 5, 6, \\
&n : 19, 24, 32.
\end{aligned} \tag{6.37}
$$

同样的论证也适用于三维反射方程的右端，说明其具有良定义性，且其常数项也为单位。因此，我们在此省略细节，仅

pre给出与（6.34）和（6.36）类似的公式。右端的二对数部分为 s

$$
\begin{aligned}
&\Psi_q\big(Y_{19}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q(qY_{18}Y_{19})\,\Psi_q\big(q^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q(Y_{11}Y_{18}Y_{19})\\
&\cdot\Psi_q\big(Y_{12}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(Y_5^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q\big(q^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_4Y_5\big)\\
&\cdot\Psi_q(qY_{11}Y_{12}Y_{18}Y_{19})\,\Psi_{q^2}\big(q^{-2}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-2}Y_{13}^{-2}Y_{19}^{-2}Y_{20}^{-2}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-1}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_4Y_5\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^2Y_4Y_5Y_{11}Y_{12}Y_{13}Y_{18}Y_{19}\big)\,\Psi_{q^2}\big(Y_5^{-1}\big)\,\Psi_q\big(Y_{10}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(Y_3^{-1}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_2Y_3\big)\,\Psi_q(qY_9Y_{10})\,\Psi_{q^2}\big(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-2}Y_{11}^{-2}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_2Y_3\big)^{-1}\,\Psi_q\big(q^2Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}\big)\,\Psi_{q^2}\big(Y_3^{-1}\big)\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q\big(q^{-3}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_{10}^{-1}Y_{11}^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^3Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}\big)\,\Psi_q\big(q^4Y_2Y_3Y_9Y_{10}Y_{11}Y_{12}Y_{20}\big)\\
&\cdot\Psi_q\big(Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}Y_{19}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q(qY_{16}Y_{17}Y_{18}Y_{19})\,\Psi_q\big(q^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q(Y_{11}Y_{16}Y_{17}Y_{18}Y_{19})\,\Psi_q\big(Y_{12}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(Y_5^{-1}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_4Y_5\big)\,\Psi_q(qY_{11}Y_{12}Y_{16}Y_{17}Y_{18}Y_{19})\\
&\cdot\Psi_{q^2}\big(q^{-2}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-2}Y_{13}^{-2}Y_{17}^{-2}Y_{18}^{-2}Y_{19}^{-2}Y_{20}^{-2}\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^{-1}Y_5^{-1}Y_6^{-1}Y_{12}^{-1}Y_{13}^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}Y_{19}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_{q^2}\big(q^2Y_4Y_5\big)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\big(q^2Y_4Y_5Y_{11}Y_{12}Y_{13}Y_{16}Y_{17}Y_{18}Y_{19}\big)\,\Psi_{q^2}\big(Y_5^{-1}\big)\\
&\cdot\Psi_q\big(Y_4Y_6^{-1}Y_{11}Y_{17}^{-1}Y_{20}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q\big(q^{-1}Y_{17}^{-1}Y_{18}^{-1}\big)^{-1}\,\Psi_q(qY_{16}Y_{17})\,\Psi_q\big(Y_2Y_4^{-1}Y_9Y_{13}^{-1}Y_{16}Y_{17}Y_{20}\big)\,.
\end{aligned}
\tag{6.38}
$$

与左端 (6.34) 不同，底行中有两个符号不一致的自变量。对应于 (6.36) 的方程为

$$
\begin{aligned}
p_1 &= -n_{15}-n_{17}+n_{19}-2n_{20}-n_{21}+n_{23}-n_{25}-n_{26}+n_{27}+n_{28},\\
p_2 &= -n_{16}+n_{18}-n_{20}-n_{21}+n_{22}+n_{23}-n_{24}-n_{25}-n_{26}+n_{27}+n_{28},\\
p_3 &= -n_5-n_7+n_9-2n_{10}-n_{11}+n_{13}-n_{25}-n_{26}+n_{27}+n_{28}-n_{33}-n_{35}+n_{37}\\
&\quad -2n_{38}-n_{39}+n_{41},\\
p_4 &= -n_1+n_2-n_3+n_4-n_5-n_7+n_9-2n_{10}-n_{11}+n_{13}-n_{29}+n_{30}-n_{31}+n_{32}\\
&\quad -n_{33}-n_{35}+n_{37}-2n_{38}-n_{39}+n_{41},\\
p_5 &= -n_6+n_8-n_{10}-n_{11}+n_{12}+n_{13}-n_{14}-n_{34}+n_{36}-n_{38}-n_{39}+n_{40}+n_{41}-n_{42},\\
p_6 &= -n_{10}-n_{11}-n_{38}-n_{39}-n_{43},\\
p_7 &= n_4+n_9+n_{13}-n_{17}-2n_{20}-n_{21}+n_{23}-n_{25}-n_{26}+n_{27}+n_{28}+n_{32}+n_{37}+n_{41}+n_{43},\\
p_8 &= n_2+n_4+n_9+n_{13}-n_{29}+n_{30}-n_{31}+n_{32}-n_{33}-n_{35}+n_{37}-2n_{38}-n_{39}+n_{41}-n_{44},\\
p_9 &= -n_7-2n_{10}-n_{11}+n_{13}-n_{26}-n_{35}-2n_{38}-n_{39}+n_{41}-n_{46},\\
p_{10} &= n_8+n_{12}+n_{13}-n_{20}-n_{21}-n_{25}-n_{26}+n_{36}+n_{40}+n_{41}+n_{43}-n_{46},\\
p_{11} &= n_{19}+n_{23}+n_{27}+n_{28}+n_{46}, p_{12} = n_{18}+n_{22}+n_{23}+n_{27}+n_{28}+n_{46},\\
p_{13} &= -n_3-n_5-n_7-2n_{10}-n_{11}+n_{28}-n_{31}-n_{33}-n_{35}-2n_{38}-n_{39}-n_{43}+n_{46},\\
p_{14} &= n_{30}+n_{32}+n_{37}+n_{41}+n_{45}+n_{46},\\
p_{15} &= -n_{29}+n_{30}-n_{31}+n_{32}-n_{33}-n_{35}+n_{37}-2n_{38}-n_{39}+n_{41}-n_{43}-n_{44}+n_{45}+n_{46}.
\end{aligned}
\tag{6.39}
$$

如同式（6.37）所示，可以按以下步骤确认其良定义性：

$$\begin{aligned}
&p:6,11,12,14,\\
&n:10,11,18,19,22,23,27,28,30,32,37,38,39,41,43,45,46,\\
&p:1,2,13,15,\\
&n:3,5,7,15,16,17,20,21,24,25,26,29,31,33,35,44,\\
&p:3,7,8,9,10,\\
&n:2,4,8,9,12,13,36,40,\\
&p:4,5,\\
&n:1,6,14,34,42.
\end{aligned} \tag{6.40}$$

6.7. 三维反射方程二对数部分的良定义性： q**-韦尔变量**。根据（4.4）、（4.15）和（5.3），从 $\mathcal{Y}(B(C_3))$ 到 $\operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_3)$ 的环同态为

$$\begin{cases}
Y_1 \mapsto \mathrm{e}^{a_2+d_3-u_3+2w_2-w_3}, & Y_{12} \mapsto \mathrm{e}^{a_7+b_5+c_6+d_8-u_5-u_8-w_5+w_6+w_7-w_8},\\
Y_2 \mapsto \mathrm{e}^{e_3+2u_3}, & Y_{13} \mapsto \mathrm{e}^{e_8+2u_8},\\
Y_3 \mapsto \mathrm{e}^{a_5+b_3+d_6-u_3-u_6-w_3+2w_5-w_6}, & Y_{14} \mapsto \mathrm{e}^{b_8+c_9-u_8-w_8+w_9},\\
Y_4 \mapsto \mathrm{e}^{e_6+2u_6}, & Y_{15} \mapsto \mathrm{e}^{d_1-u_1-w_1},\\
Y_5 \mapsto \mathrm{e}^{a_8+b_6+d_9-u_6-u_9-w_6+2w_8-w_9}, & Y_{16} \mapsto \mathrm{e}^{e_1+2u_1},\\
Y_6 \mapsto \mathrm{e}^{e_9+2u_9}, & Y_{17} \mapsto \mathrm{e}^{b_1+c_2+d_4-u_1-u_4-w_1+w_2-w_4},\\
Y_7 \mapsto \mathrm{e}^{b_9-u_9-w_9}, & Y_{18} \mapsto \mathrm{e}^{e_4+2u_4},\\
Y_8 \mapsto \mathrm{e}^{a_1+d_2-u_2+w_1-w_2}, & Y_{19} \mapsto \mathrm{e}^{b_4+c_5+d_7-u_4-u_7-w_4+w_5-w_7},\\
Y_9 \mapsto \mathrm{e}^{e_2+2u_2}, & Y_{20} \mapsto \mathrm{e}^{e_7+2u_7},\\
Y_{10} \mapsto \mathrm{e}^{a_4+b_2+c_3+d_5-u_2-u_5-w_2+w_3+w_4-w_5}, & Y_{21} \mapsto \mathrm{e}^{b_7+c_8-u_7-w_7+w_8},\\
Y_{11} \mapsto \mathrm{e}^{e_5+2u_5}, & Y_{22} \mapsto \mathrm{e}^{c_1+c_4+c_7+w_1+w_4+w_7}.
\end{cases} \tag{6.41}$$

首先考虑三维反射方程的左端。将（6.41）代入级数（6.35），并对 q-韦尔代数中的生成元应用 q-可交换性，可将其表示为

$$\sum_{\mathbf{n}} \tilde{C}(\mathbf{n})\mathrm{e}^{\alpha_1 u_1+\cdots+\alpha_9 u_9+\alpha_{10} w_1+\cdots+\alpha_{18} w_9}, \tag{6.42}$$

其中求和遍历 $\mathbf{n}=(n_1,\ldots,n_{46})\in(\mathbb{Z}_{\geq 0})^{46}$，而 $\tilde{C}(\mathbf{n})$ 是 q 及（6.41）中的参数的函数。系数 $\alpha_1,\ldots,\alpha_{18}$ 由下式给出

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= n_1+n_2+n_3+n_4+n_5+n_7+n_9+2n_{10}+n_{11}+n_{13}+n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18},\\
\alpha_2 &= 2n_4+n_5+n_7+n_9+2n_{10}+n_{11}+n_{13}+n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{33}+n_{35}+n_{37}\\
&\quad +2n_{38}+n_{39}+n_{41}+n_{43}+n_{44}+n_{45}+n_{46},\\
\alpha_3 &= n_6+n_8+n_{10}+n_{11}+n_{12}+n_{13}+n_{14}+n_{15}+n_{16}+n_{17}+n_{18}+n_{34}+n_{36}+n_{38}\\
&\quad +n_{39}+n_{40}+n_{41}+n_{42}+n_{43}+n_{44}+n_{45}+n_{46},\\
\alpha_4 &= n_1-n_2-n_3-n_4-n_5-n_7-n_9-2n_{10}-n_{11}-n_{13}-n_{15}-n_{16}-n_{17}-n_{18}\\
&\quad +n_{19}+n_{20}+n_{21}+n_{22}+n_{23}+n_{25}+n_{27}+2n_{28}+n_{29}+n_{31},\\
\alpha_5 &= n_5-n_7-n_9-2n_{10}-n_{11}+n_{13}+2n_{22}+n_{23}+n_{25}+n_{27}+2n_{28}+n_{29}+n_{31}\\
&\quad +n_{33}-n_{35}-n_{37}-2n_{38}-n_{39}+n_{41},\\
\alpha_6 &= n_6-n_8-n_{10}-n_{11}-n_{12}-n_{13}+n_{14}-n_{15}-n_{16}-n_{17}-n_{18}+n_{24}+n_{26}+n_{28}\\
&\quad +n_{29}+n_{30}+n_{31}+n_{32}+n_{34}-n_{36}-n_{38}-n_{39}-n_{40}-n_{41}+n_{42}-n_{43}-n_{44}-n_{45}-n_{46},\\
\alpha_7 &= 2n_{18}+n_{19}-n_{20}-n_{21}-n_{22}-n_{23}-n_{25}-n_{27}-2n_{28}-n_{29}-n_{31}+2n_{46},\\
\alpha_8 &= n_{15}-n_{16}-n_{17}-n_{18}+n_{23}-n_{25}-n_{27}-2n_{28}-n_{29}+n_{31}+n_{43}-n_{44}-n_{45}-n_{46},\\
\alpha_9 &= n_{24}-n_{26}-n_{28}-n_{29}-n_{30}-n_{31}+n_{32},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\alpha_{10} &= n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 + n_7 - n_9 + 2n_{10} + n_{11} - n_{13} + n_{15} + n_{16} - n_{17} - n_{18},\\
\alpha_{11} &= -n_1 + n_2 - n_3 + n_4 + n_{33} + n_{35} - n_{37} + 2n_{38} + n_{39} - n_{41} + n_{43} + n_{44} - n_{45} - n_{46},\\
\alpha_{12} &= -n_5 + n_6 - n_7 - n_8 + n_9 - n_{10} - n_{12} + n_{14} - n_{33} + n_{34} - n_{35} - n_{36} + n_{37} - n_{38} - n_{40} + n_{42},\\
\alpha_{13} &= n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_{19} - n_{20} + n_{21} - n_{22} + n_{23} + n_{25} - n_{27} + 2n_{28} + n_{29} - n_{31}\\
&\quad - n_{33} - n_{35} + n_{37} - 2n_{38} - n_{39} + n_{41} - n_{43} - n_{44} + n_{45} + n_{46},\\
\alpha_{14} &= n_5 - 2n_6 + n_7 + 2n_8 - n_9 - n_{11} + 2n_{12} + n_{13} - 2n_{14} - n_{19} + n_{20} - n_{21} + n_{22}\\
&\quad + n_{33} - 2n_{34} + n_{35} + 2n_{36} - n_{37} - n_{39} + 2n_{40} + n_{41} - 2n_{42},\\
\alpha_{15} &= n_6 - n_8 + n_{10} + n_{11} - n_{12} - n_{13} + n_{14} - n_{23} + n_{24} - n_{25} - n_{26} + n_{27} - n_{28} - n_{30}\\
&\quad + n_{32} + n_{34} - n_{36} + n_{38} + n_{39} - n_{40} - n_{41} + n_{42},\\
\alpha_{16} &= -n_{15} - n_{16} + n_{17} + n_{18} + n_{19} - n_{20} + n_{21} - n_{22} - n_{43} - n_{44} + n_{45} + n_{46},\\
\alpha_{17} &= n_{15} + n_{16} - n_{17} - n_{18} + n_{23} - 2n_{24} + n_{25} + 2n_{26} - n_{27} - n_{29} + 2n_{30} + n_{31} - 2n_{32}\\
&\quad + n_{43} + n_{44} - n_{45} - n_{46},\\
\alpha_{18} &= n_{24} - n_{26} + n_{28} + n_{29} - n_{30} - n_{31} + n_{32}.
\end{aligned}
\tag{6.43}
$$

采用与 (6.37) 类似的记号，可以分两步证明 (6.42) 的良定义性:

$$
\begin{aligned}
&\alpha : 1, 2, 3,\\
&n : 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40,\\
&\quad 41, 42, 43, 44, 45, 46,\\
&\alpha : 4, 5, 6,\\
&n : 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32.
\end{aligned}
\tag{6.44}
$$

对于三维反射方程的右端，与 (6.43) 对应的方程为

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= n_{29} + n_{30} + n_{31} + n_{32} + n_{33} + n_{35} + n_{37} + 2n_{38} + n_{39} + n_{41} + n_{43} + n_{44} + n_{45} + n_{46},\\
\alpha_2 &= n_{15} + n_{17} + n_{19} + 2n_{20} + n_{21} + n_{23} + n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + 2n_{46},\\
\alpha_3 &= n_{16} + n_{18} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} + n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{28} + 2n_{46},\\
\alpha_4 &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_5 + n_7 + n_9 + 2n_{10} + n_{11} + n_{13} + n_{43} - n_{44} - n_{45} - n_{46},\\
\alpha_5 &= 2n_4 + n_5 + n_7 + n_9 + 2n_{10} + n_{11} + n_{13} + n_{15} - n_{17} - n_{19} - 2n_{20} - n_{21} + n_{23} + 2n_{32}\\
&\quad + n_{33} + n_{35} + n_{37} + 2n_{38} + n_{39} + n_{41} + 2n_{43},\\
\alpha_6 &= n_6 + n_8 + n_{10} + n_{11} + n_{12} + n_{13} + n_{14} + n_{16} - n_{18} - n_{20} - n_{21} - n_{22} - n_{23} + n_{24}\\
&\quad - n_{25} - n_{26} - n_{27} - n_{28} + n_{34} + n_{36} + n_{38} + n_{39} + n_{40} + n_{41} + n_{42} + 2n_{43} - 2n_{46},\\
\alpha_7 &= n_1 - n_2 - n_3 - n_4 - n_5 - n_7 - n_9 - 2n_{10} - n_{11} - n_{13} + 2n_{28} + n_{29} - n_{30} - n_{31}\\
&\quad - n_{32} - n_{33} - n_{35} - n_{37} - 2n_{38} - n_{39} - n_{41} - 2n_{43} + 2n_{46},\\
\alpha_8 &= n_5 - n_7 - n_9 - 2n_{10} - n_{11} + n_{13} + n_{25} - n_{26} - n_{27} - n_{28} + n_{33} - n_{35} - n_{37} - 2n_{38}\\
&\quad - n_{39} + n_{41} - 2n_{46},\\
\alpha_9 &= n_6 - n_8 - n_{10} - n_{11} - n_{12} - n_{13} + n_{14} + n_{34} - n_{36} - n_{38} - n_{39} - n_{40} - n_{41} + n_{42} - 2n_{43},\\
\alpha_{10} &= n_{29} - n_{30} + n_{31} - n_{32} + n_{33} + n_{35} - n_{37} + 2n_{38} + n_{39} - n_{41} + n_{43} + n_{44} - n_{45} - n_{46},\\
\alpha_{11} &= n_{15} + n_{17} - n_{19} + 2n_{20} + n_{21} - n_{23} + n_{25} + n_{26} - n_{27} - n_{28} - n_{29} + n_{30} - n_{31}\\
&\quad + n_{32} - n_{33} - n_{35} + n_{37} - 2n_{38} - n_{39} + n_{41} - n_{43} - n_{44} + n_{45} + n_{46},\\
\alpha_{12} &= -n_{15} + n_{16} - n_{17} - n_{18} + n_{19} - n_{20} - n_{22} + n_{24},\\
\alpha_{13} &= n_1 - n_2 + n_3 - n_4 + n_5 + n_7 - n_9 + 2n_{10} + n_{11} - n_{13} - n_{15} - n_{17} + n_{19} - 2n_{20}\\
&\quad - n_{21} + n_{23} - n_{25} - n_{26} + n_{27} + n_{28} + 2n_{29} - 2n_{30} + 2n_{31} - 2n_{32} + 2n_{33} + 2n_{35}\\
&\quad - 2n_{37} + 4n_{38} + 2n_{39} - 2n_{41} + n_{43} + n_{44} - n_{45} - n_{46},
\end{aligned}
$$

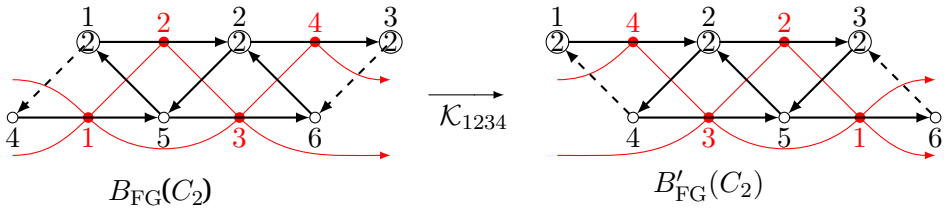
$$
\begin{aligned}
\alpha_{14} &= -n_1+n_2-n_3+n_4+n_{15}-2n_{16}+n_{17}+2n_{18}-n_{19}-n_{21}+2n_{22}+n_{23}-2n_{24}\\
&\quad -n_{29}+n_{30}-n_{31}+n_{32},\\
\alpha_{15} &= -n_5+n_6-n_7-n_8+n_9-n_{10}-n_{12}+n_{14}+n_{16}-n_{18}+n_{20}+n_{21}-n_{22}-n_{23}\\
&\quad +n_{24}-n_{33}+n_{34}-n_{35}-n_{36}+n_{37}-n_{38}-n_{40}+n_{42},\\
\alpha_{16} &= n_1-n_2+n_3-n_4-n_{25}-n_{26}+n_{27}+n_{28}+n_{29}-n_{30}+n_{31}-n_{32},\\
\alpha_{17} &= n_5-2n_6+n_7+2n_8-n_9-n_{11}+2n_{12}+n_{13}-2n_{14}+n_{25}+n_{26}-n_{27}-n_{28}+n_{33}\\
&\quad -2n_{34}+n_{35}+2n_{36}-n_{37}-n_{39}+2n_{40}+n_{41}-2n_{42},\\
\alpha_{18} &= n_6-n_8+n_{10}+n_{11}-n_{12}-n_{13}+n_{14}+n_{34}-n_{36}+n_{38}+n_{39}-n_{40}-n_{41}+n_{42}.
\end{aligned}
\tag{6.45}
$$

这一次，良定义性通过以下内容得到证明：

$$
\begin{aligned}
&\alpha : 1,2,3,\\
&n : 15,16,17,18,19,20,21,22,23,24,25,26,27,28,29,30,31,32,33,35,37,\\
&\quad 38,39,41,43,44,45,46,\\
&\alpha : 4,5,6,\\
&n : 1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,34,36,40,42.
\end{aligned}
\tag{6.46}
$$

7. Reduction to the K-operators for FG quiver

7.1. K-FG 箭图的算子。回顾一下在 [11] 中为 FG 箭图构造的 K-算子。对应于布线图 (3.17)，我们得到 FG 箭图的变换如下：



$B_{\mathrm{FG}}(C_2)$ $B'_{\mathrm{FG}}(C_2)$ (7.1)

这由突变序列 $\mu_2\mu_5\mu_2$ 构成。对于符号序列 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\varepsilon_3)\in\{1,-1\}^3$，相应的量子 Y-种子突变序列

$$
(B_{\mathrm{FG}}(C_2),\mathcal{Y})=(B^{(1)},\mathcal{Y}^{(1)})\xrightarrow{\mu_2}(B^{(2)},\mathcal{Y}^{(2)})\xrightarrow{\mu_5}(B^{(3)},\mathcal{Y}^{(3)})\xrightarrow{\mu_2}(B^{(4)},\mathcal{Y}^{(4)})=(B'_{\mathrm{FG}}(C_2),Y')
\tag{7.2}
$$

诱导同构 $K_{1234}\colon \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2))\to\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2))$，其表达式为

$$
\widehat{K}_{1234}=\mathrm{Ad}\big(\Psi_q((Y_2^{(1)})^{\varepsilon_1})^{\varepsilon_1}\big)\tau_{2,\varepsilon_1}\mathrm{Ad}\big(\Psi_q((Y_5^{(2)})^{\varepsilon_2})^{\varepsilon_2}\big)\tau_{5,\varepsilon_2}\mathrm{Ad}\big(\Psi_q((Y_2^{(3)})^{\varepsilon_3})^{\varepsilon_3}\big)\tau_{2,\varepsilon_3}.
\tag{7.3}
$$

令 $\mathcal{Y}_i$ 和 $\mathcal{Y}'_i$ 分别表示 $\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2))$ 和 $\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2))$ 的生成元。利用典范变量 (5.1)，我们定义嵌入 $\phi_{\mathrm{FG}}:\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2))\hookrightarrow\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)$ 和 $\phi'_{\mathrm{FG}}:\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2))\hookrightarrow\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)$，其中涉及复参数 $\theta_i(i=1,2,3,4)$，定义如下：

$$
\phi_{\mathrm{FG}}:\begin{cases}
\mathcal{Y}_1\mapsto \mathrm{e}^{-w_2-u_2+2w_1-\theta_2},\\
\mathcal{Y}_2\mapsto \mathrm{e}^{-w_2+u_2-w_4-u_4+2w_3+\theta_2-\theta_4},\\
\mathcal{Y}_3\mapsto \mathrm{e}^{-w_4+u_4+\theta_4},\\
\mathcal{Y}_4\mapsto \mathrm{e}^{-w_1-u_1-\theta_1},\\
\mathcal{Y}_5\mapsto \mathrm{e}^{-w_1+u_1-w_3-u_3+w_2+\theta_1-\theta_3},\\
\mathcal{Y}_6\mapsto \mathrm{e}^{-w_3+u_3+w_4+\theta_3},
\end{cases}
\qquad
\phi'_{\mathrm{FG}}:\begin{cases}
\mathcal{Y}'_1\mapsto \mathrm{e}^{-w_4-u_4-\theta_4},\\
\mathcal{Y}'_2\mapsto \mathrm{e}^{-w_4+u_4-w_2-u_2+2w_3-\theta_2+\theta_4},\\
\mathcal{Y}'_3\mapsto \mathrm{e}^{-w_2+u_2+2w_1+\theta_2},\\
\mathcal{Y}'_4\mapsto \mathrm{e}^{-w_3-u_3+w_4-\theta_3},\\
\mathcal{Y}'_5\mapsto \mathrm{e}^{-w_3+u_3-w_1-u_1+w_2-\theta_1+\theta_3},\\
\mathcal{Y}'_6\mapsto \mathrm{e}^{-w_1+u_1+\theta_1}.
\end{cases}
\tag{7.4}
$$

在本文中，我们将 [11] 中典范对的定义调整为 (5.1) 中的定义。此外，我们定义 $\mathcal{W}(C_2)$ 的同构 $\pi^K_{C_2}$，该同构由下列典范变量的仿射变换给出：

$$\pi^K_{C_2}:\begin{cases} w_1 \mapsto w_1 - \theta_{24}, \quad w_2 \mapsto w_4 + 2w_1 - \theta_{24}, \\ w_3 \mapsto w_3 + \theta_{24}, \quad w_4 \mapsto w_2 - 2w_1 + \theta_{24}, \\ u_1 \mapsto u_1 + u_2 - u_4, \quad u_2 \mapsto u_4, \\ u_3 \mapsto u_3, \quad u_4 \mapsto u_2. \end{cases} \tag{7.5}$$

这里设 $\theta_{24} = \theta_2 - \theta_4$。

Set

$$\begin{aligned} K_{C_2:++-} &= \Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{\theta_{24}-w_2+u_2-w_4-u_4+2w_3})\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{13}-w_1+u_1-w_3-u_3+w_2}) \\ &\quad \cdot \Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{\theta_{24}-w_2+u_2-w_4-u_4+2w_3})^{-1} P_{C_2}, \end{aligned} \tag{7.6}$$

$$P_{C_2} = \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(w_1(u_4-u_2)+\theta_{24}(u_3-u_1))}\rho_{24}. \tag{7.7}$$

命题 7.1. [11, §3] 同构 K_{1234} 在 (7.3) 中，符号序列为 $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3) = (1, 1, -1)$，在其于 $\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)$ 中的像上，由 $K_{C_2:++-}$ 在 (7.6) 中的伴随作用实现。也就是说，以下交换图成立：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\phi'_{\mathrm{FG}}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2) \\ {\scriptstyle \widehat{K}_{1234}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\,K_{C_2:++-}} \\ \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\phi_{\mathrm{FG}}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2) \end{array} \tag{7.8}$$

特别地，成立 $\pi^K_{C_2} = \mathrm{Ad}\,\mathcal{P}_{C_2}$，并且下图也是交换的 *e:*

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\phi'_{\mathrm{FG}}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2) \\ {\scriptstyle \tau_{2,+}\tau_{5,+}\tau_{2,-}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}\,\mathcal{P}_{C_2}} \\ \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\phi_{\mathrm{FG}}} & \mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2) \end{array} \tag{7.9}$$

我们引入 K_{1234} 的另一种实现，其符号序列不同于命题 7.1 中出现的符号序列。

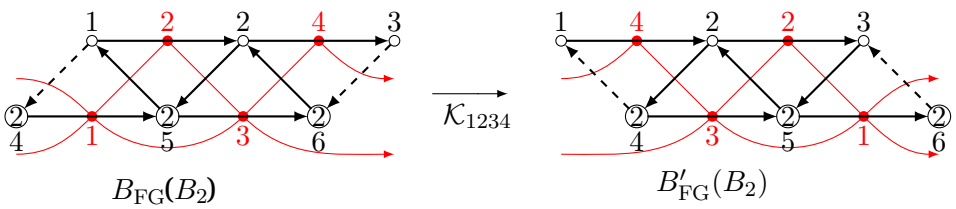
命题 7.2. 同构 K_{1234} 的符号序列为 $\varepsilon = (-1, 1, 1)$，其实现方式与命题 *7.1* 相同，由算子 $\mathcal{K}_{C_2:-++}$ 实现，其中算子定义为

$$\begin{aligned} K_{C_2:-++} &= \Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{-\theta_{24}+w_2-u_2+w_4+u_4-2w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{13}+\theta_{24}+u_1-u_3+u_2-u_4-w_1+w_3-w_4}) \\ &\quad \cdot \Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{-\theta_{24}+w_2-u_2+w_4+u_4-2w_3})P_{C_2}, \end{aligned} \tag{7.10}$$

其中，单项式部分 P_{C_2} 仍由(7.7)给出。此外，$K_{C_2:\,-++}$ 与 $K_{C_2:\,++-}$ 一致。

证明。 算子 $K_{C_2:\,-++}$ 的构造方式与 $K_{C_2:\,++-}$ 相同。按照命题 5.4 的证明中的方法，应用引理 A.1 可验证这两个算子的二对数部分相同。□

现在我们介绍与魏尔群 $W(B_2)$ 相关的 (7.1) 的对偶。我们考虑 FG 箭图的如下变换：



(7.11)

它对应于突变序列 $\mu_2\mu_5\mu_2$。(7.1) 与 (7.11) 的区别在于，在 (7.1) 中，权重 2 的箭图顶点位于墙上，而在 (7.1) 中，权重 1 的箭图顶点位于墙上。注意，通过将顶点对应为 (1，2，3，4，5，6) $\mapsto$ (4，5，6，1，2，3)，并将交叉点对应为 (1，2，3，4) $\mapsto$ (4，3，2，1)，箭图 $B_{\mathrm{FG}}(B_2)$（分别为 $B'_{\mathrm{FG}}(B_2)$）与 $B'_{\mathrm{FG}}(C_2)$（分别为 $B_{\mathrm{FG}}(C_2)$）重合。对于 $\mathcal{K}_{1234}=\mu_2\mu_5\mu_2$，以与 (7.2) 和 (7.3) 相同的方式，定义一列量子$\widehat{\ }$种子以及同构 $K_{1234}:\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(B_2))\to\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(B_2))$。

令 $\mathcal{Y}_i$ 和 $\mathcal{Y}'_i$ 分别表示 $\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(B_2))$ 和 $\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(B_2))$ 的生成元。设 $\gamma=(2,1,2,1)$，并令 $\mathcal{W}(B_2):=\mathcal{W}_\gamma$ 表示由 $\mathrm{e}^{\pm u_i}$，$\mathrm{e}^{\pm w_i}$ 生成、满足关系式 (2.22) 的 q-韦尔代数。定义涉及复参数 $\theta_i(i=1,2,3,4)$ 的嵌入 $\psi_{\mathrm{FG}}:\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(B_2))\hookrightarrow\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(B_2)$ 和 $\psi'_{\mathrm{FG}}:\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(B_2))\hookrightarrow\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(B_2)$，如下：

$$\psi_{\mathrm{FG}}:\begin{cases}\mathcal{Y}_1\mapsto \mathrm{e}^{-w_2-u_2+w_1-\theta_2},\\ \mathcal{Y}_2\mapsto \mathrm{e}^{-w_2+u_2-w_4-u_4+w_3+\theta_2-\theta_4},\\ \mathcal{Y}_3\mapsto \mathrm{e}^{-w_4+u_4+\theta_4},\\ \mathcal{Y}_4\mapsto \mathrm{e}^{-w_1-u_1-\theta_1},\\ \mathcal{Y}_5\mapsto \mathrm{e}^{-w_1+u_1-w_3-u_3+2w_2+\theta_1-\theta_3},\\ \mathcal{Y}_6\mapsto \mathrm{e}^{-w_3+u_3+2w_4+\theta_3},\end{cases}\qquad \psi'_{\mathrm{FG}}:\begin{cases}\mathcal{Y}'_1\mapsto \mathrm{e}^{-w_4-u_4-\theta_4},\\ \mathcal{Y}'_2\mapsto \mathrm{e}^{-w_4+u_4-w_2-u_2+w_3-\theta_2+\theta_4},\\ \mathcal{Y}'_3\mapsto \mathrm{e}^{-w_2+u_2+w_1+\theta_2},\\ \mathcal{Y}'_4\mapsto \mathrm{e}^{-w_3-u_3+2w_4-\theta_3},\\ \mathcal{Y}'_5\mapsto \mathrm{e}^{-w_3+u_3-w_1-u_1+2w_2-\theta_1+\theta_3},\\ \mathcal{Y}'_6\mapsto \mathrm{e}^{-w_1+u_1+\theta_1}.\end{cases}\tag{7.12}$$

我们定义 $\mathcal{W}(B_2)$ 的同构 $\pi^K_{B_2}$，如下：

$$\pi^K_{B_2}:\begin{cases}w_1\mapsto w_1-2\theta_{24},\quad w_2\mapsto w_4+w_1-\theta_{24},\\ w_3\mapsto w_3+2\theta_{24},\quad w_4\mapsto w_2-w_1+\theta_{24},\\ u_1\mapsto u_1+2u_2-2u_4,\quad u_2\mapsto u_4,\\ u_3\mapsto u_3,\quad u_4\mapsto u_2,\end{cases}\tag{7.13}$$

在指数的意义下。我们得到以下结果，这与命题 7.1 和 7.2 相对应。

$\widehat{\ }$命题7.3。对于符号序列 $\varepsilon=(1,1,-1)$ 和 $(-1,1,1)$，变换 $K_{1234}\widehat{\ }$有两种表达式 $\psi_{\mathrm{FG}}\circ K_{1234}=\mathrm{Ad}(K_{B_2:++-})\circ\psi'_{\mathrm{FG}}=\mathrm{Ad}(K_{B_2:-++})\circ\psi'_{\mathrm{FG}}$，其中

$$\begin{aligned}K_{B_2:++-}&=\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{24}-w_2+u_2-w_4-u_4+w_3})\Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{\theta_{13}-w_1+u_1-w_3-u_3+2w_2})\\&\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{24}-w_2+u_2-w_4-u_4+w_3})^{-1}P_{B_2},\end{aligned}\tag{7.14}$$

$$\begin{aligned}K_{B_2:\,-++}&=\Psi_q(\mathrm{e}^{-\theta_{24}+w_2-u_2+w_4+u_4-w_3})^{-1}\Psi_{q^2}(\mathrm{e}^{\theta_{13}+2\theta_{24}+u_1-u_3+2u_2-2u_4-w_1+w_3-2w_4}),\\&\quad\cdot\Psi_q(\mathrm{e}^{-\theta_{24}+w_2-u_2+w_4+u_4-w_3})P_{B_2},\end{aligned}\tag{7.15}$$

$$P_{B_2}=\mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}(w_1(u_4-u_2)+\theta_{24}(u_3-u_1))\rho_{24}}.\tag{7.16}$$

$\widehat{\ }$特别地，对于 K_{1234}，两个单项式变换$\tau_{2,\,+}\tau_{5,\,+}\tau_{2,\,-}$ 和 $\tau_{2,\,-}\tau_{5,\,+}\tau_{2,\,+}$ 都可实现为 P_{B_2}的伴随作用。此外，$K_{B_2:\,++-}$ 与$K_{B_2:\,-++}$一致。

7.2. 极限 K-型算子 ρ_{24}。与 [13, §8.2]，类似，我们定义斜域之间的同态 $\alpha:\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2))\to\mathcal{Y}(B(C_2))$ 和 $\alpha':\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2))\to\mathcal{Y}(B'(C_2))$，它们由以下相同公式给出：

$$\alpha,\alpha':\begin{cases}\mathcal{Y}_1\mapsto Y_1, & \mathcal{Y}_4\mapsto Y_6,\\ \mathcal{Y}_2\mapsto q^2Y_2Y_3, & \mathcal{Y}_5\mapsto qY_7Y_8,\\ \mathcal{Y}_3\mapsto q^2Y_4Y_5, & \mathcal{Y}_6\mapsto qY_9Y_{10}.\end{cases}\tag{7.17}$$

我们考虑以下图表

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{Y}(B(C_2)) \\
{\scriptstyle \phi_{\mathrm{FG}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \\
{\scriptstyle \mathrm{Ad}P_{C_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}P_{24}} \\
\operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \\
{\scriptstyle \phi'_{\mathrm{FG}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi'} \\
\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(C_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{Y}(B'(C_2))
\end{array} \tag{7.18}$$

其中 ϕ、 ϕ' 和 $\mathrm{Ad}(P_{24})$ 分别由 (5.3)、(5.4) 和 (5.15) 定义。

当我们要求图表 (7.18) 可交换时，参数必须满足以下关系：

$$\theta_2 = -a_1 - d_2, \tag{7.19}$$
$$\theta_2 - \theta_4 = e_2 + a_3 + b_2 + d_4, \tag{7.20}$$
$$\theta_4 = e_4 + b_4, \tag{7.21}$$
$$\theta_1 = -d_1, \tag{7.22}$$
$$\theta_1 - \theta_3 = e_1 + b_1 + c_2 + d_3, \tag{7.23}$$
$$\theta_3 = e_3 + b_3 + c_4, \tag{7.24}$$
$$a_1 + c_1 - c_2 + c_4 = 0, \tag{7.25}$$
$$b_2 + d_2 + 2a_1 = b_4 + d_4, \tag{7.26}$$
$$2(\theta_2 - \theta_4) = b_2 - b_4 - d_2 + d_4. \tag{7.27}$$

这里，(7.18) 中上方方块（分别是中间方块）可交换，对应于关系 (7.19)–(7.24)（分别是 (7.25)–(7.27)），而下方方块的可交换性可由此推出。考虑条件 (5.2) 和 (5.9)，我们得到

$$\begin{aligned}
&a_1 = a_3 = -c_1 = -b_2 + b_4 + \theta_2 - \theta_4, \\
&c_2 = c_4, \\
&c_3 = b_2 - b_4 + 2c_4 - \theta_2 + \theta_4, \\
&d_1 = -\theta_1, \\
&d_2 = b_2 - b_4 - 2\theta_2 + \theta_4, \\
&d_3 = -c_4 - \theta_3, \\
&d_4 = -\theta_4, \\
&e_1 = -b_1 + \theta_1, \\
&e_2 = e_4 = -b_4 + \theta_4, \\
&e_3 = -b_3 - c_4 + \theta_3.
\end{aligned} \tag{7.28}$$

定理 7.4。在极限中

$$b_i \to +\infty, \quad b_i + e_i = \textit{fixed} \ \ (i = 1, 2, 3, 4), \quad b_1 - b_3 \to +\infty, \quad b_2 - b_4 = \textit{fixed}, \tag{7.29}$$

算子 K_{-+} (5.19) 和 K_{--} (5.20)（明确地说，(B.3)和 (B.4)）分别化简为 K_{C_2}: $++-$(7.6)和 K_{C_2}: $-++$ (7.10)。

证明。 将（7.28）代入（B.3）可得

$$\begin{aligned}K_{-+} = {} & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{c_1-b_2+\theta_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+b_3+c_4+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{\theta_2-\theta_4+u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)}\\ & \cdot\underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{\theta_1-\theta_3+u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)}\\ & \cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-2b_1+2b_3+2c_4-\theta_2+\theta_4+2u_1+u_2-2u_3-u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+b_3+c_4-\theta_2+\theta_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\ & \cdot\underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{\theta_2-\theta_4+u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)^{-1}}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_3-c_4+\theta_1+\theta_2-\theta_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\ & \cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-b_4-\theta_2+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)P_{C_2},\end{aligned} \tag{7.30}$$

此时， P_{24} 化为 P_{C_2} (7.7)。在极限(7.29)下，(7.30)中只有带下划线的量子二对数保留下来，而其余所有因子都收敛于 1。因此，(7.30)恰好化为$K_{C_2\colon\,++-}$。

将(7.28)代入(B.4)得到

$$\begin{aligned}K_{--} = {} & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-b_4-d_4-\theta_2+\theta_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+b_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-\theta_2+\theta_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}}\\ & \cdot\underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{\theta_1+\theta_2-\theta_3-\theta_4+u_1+u_2-u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)}\\ & \cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-2b_1+2b_3-\theta_2+\theta_4+2u_1+u_2-2u_3-u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1+b_3+c_4-\theta_2+\theta_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-\theta_2+\theta_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)}\\ & \cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_3-c_4+\theta_1+\theta_2-\theta_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\ & \cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-b_4-\theta_2+2\theta_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)P_{C_2}.\end{aligned} \tag{7.31}$$

类似地，在极限(7.29)下，(7.31)化为$K_{C_2\colon\,-++}$ (7.10)。 □

7.3. 型 ρ_{13}算子的极限。与 ρ_{24}型的情形相同，我们以完全相同的方式定义斜域的同态 $\beta\colon\mathcal{Y}($ $B_{\mathrm{FG}}(B_2))\to\mathcal{Y}(B(C_2))$和 $\beta'\colon\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(B_2))\to\mathcal{Y}(B'(C_2))$如下：

$$\beta,\beta'\colon\begin{cases}\mathcal{Y}_1\mapsto Y_{10}, & \mathcal{Y}_4\mapsto Y_5,\\ \mathcal{Y}_2\mapsto qY_9Y_8, & \mathcal{Y}_5\mapsto q^2Y_4Y_3,\\ \mathcal{Y}_3\mapsto qY_7Y_6, & \mathcal{Y}_6\mapsto q^2Y_2Y_1.\end{cases} \tag{7.32}$$

定义斜域的环同态 $\iota\colon\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(C_2)\to\mathrm{Frac}\,\mathcal{W}(B_2)$，由 $u_i\mapsto u_{5-i}$和 $w_i\mapsto w_{5-i}$给出。我们还使用 ι 将参数的标签互换为 $\theta_i\leftrightarrow\theta_{5-i}$。当

考虑图表的可交换性

$$\begin{array}{ccc}
\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(B_2)) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{Y}(B(C_2)) \\
{\scriptstyle \psi_{\mathrm{FG}}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\
\operatorname{Frac}\mathcal{W}(B_2) & \xrightarrow{\iota} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \\
{\scriptstyle \mathrm{Ad}P_{B_2}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{Ad}P_{13}} \\
\operatorname{Frac}\mathcal{W}(B_2) & \xrightarrow{\iota} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(C_2) \\
{\scriptstyle \psi'_{\mathrm{FG}}}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \phi'} \\
\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(B_2)) & \xrightarrow{\beta'} & \mathcal{Y}(B'(C_2))
\end{array} \tag{7.33}$$

$$\theta_3 = -b_3 - c_4, \tag{7.34}$$
$$\theta_1 - \theta_3 = -b_1 - c_2 - d_3 - e_3, \tag{7.35}$$
$$\theta_1 = d_1 + e_1, \tag{7.36}$$
$$\theta_4 = b_4, \tag{7.37}$$
$$\theta_2 - \theta_4 = -a_3 - b_2 - d_4 - e_4, \tag{7.38}$$
$$\theta_2 = a_1 + d_2 + e_2, \tag{7.39}$$
$$a_1 - a_3 + b_1 - b_3 + c_1 - c_3 + d_1 - d_3 = 0, \tag{7.40}$$
$$-a_1 + a_3 + b_1 - b_3 - c_1 + c_3 - 2c_4 - d_1 + d_3 + 2\theta_1 - 2\theta_3 = 0, \tag{7.41}$$
$$b_1 - b_3 - d_1 + d_3 + 2\theta_1 - 2\theta_3 = 0. \tag{7.42}$$

这里，(7.33) 的上方方块（分别为中间方块）的可交换性恰好对应关系 (7.34)–(7.39)（分别为 (7.40)–(7.42) ），而下方方块的可交换性由此得出。

通过求解总共 13 个条件 (5.2)、(5.9)、(7.34)–(7.42)，我们得到

$$\begin{aligned}
&a_3 = a_1 = -c_1, \\
&c_2 = d_1 - d_3 - \theta_1 + \theta_3, \\
&c_3 = -a_1 + 2d_1 - 2d_3 - 2\theta_1 + 2\theta_3, \\
&c_4 = d_1 - d_3 - \theta_1 + \theta_3, \\
&b_1 = -\theta_1, \\
&b_2 = -a_1 - \theta_2, \\
&b_3 = -d_1 + d_3 + \theta_1 - 2\theta_3, \\
&b_4 = -\theta_4, \\
&e_1 = e_3 = \theta_1 - d_1, \\
&e_2 = -a_1 - d_2 + \theta_2, \\
&e_4 = \theta_4 - d_4.
\end{aligned} \tag{7.43}$$

定理 7.5。在极限下

$$d_i \to +\infty, \quad d_i + e_i = \textit{fixed}\ (i = 1, 2, 3, 4), \quad d_2 - d_4 \to -\infty, \quad d_1 - d_3 = \textit{fixed}, \tag{7.44}$$

算子 K_{-+} (5.26) 和 K_{--} (5.27) （明确地说，(B.7) 和 (B.8)）分别化简为 ι 在 $K^{B_2 ;++-}_{\mathrm{FG}}(B_2)$ (7.14) 和 $K^{B_2 ;-++}_{\mathrm{FG}}(B_2)$ (7.15)下的像。

证明。 将 (7.43) 代入 (B.7) 得到

$$\begin{aligned} K_{-+} = {} & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-d_1+2\theta_1-\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-d_4+\theta_2+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-\theta_1+\theta_3-u_1+u_3-w_1+w_2-w_3}\right)}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4+\theta_1-\theta_3-u_1-u_2+u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-\theta_2+\theta_4-u_2+u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)} \\ & \cdot \underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-\theta_1+\theta_3-u_1+u_3-w_1+w_2-w_3}\right)^{-1}} \\ & \cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4+2\theta_1-2\theta_3-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-d_1+2\theta_1-\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right) \\ & \cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_1-d_2-2\theta_1+2\theta_3+\theta_4-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)\iota(P_{B_2}) \end{aligned} \tag{7.45}$$

在极限 (7.44) 下，只有 (7.45) 中带下划线的量子二对数保留下来。因此，(7.45) 化简为 ι的$K_{B_2:\ ++-}$ (7.14) 的像。

将 (7.43) 代入 (B.8) 得到

$$\begin{aligned} K_{--} = {} & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-d_1+2\theta_1-\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-d_4+\theta_2+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{\theta_1-\theta_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}}\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4+\theta_1-\theta_3-u_1-u_2+u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \underline{\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-2\theta_1-\theta_2+2\theta_3+\theta_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)} \\ & \cdot \underline{\Psi_q\left(\mathrm{e}^{\theta_1-\theta_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)} \\ & \cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_1+d_2-d_4+2\theta_1-2\theta_3-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1} \\ & \cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-d_1+2\theta_1-\theta_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right) \\ & \cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_1-d_2-2\theta_1+2\theta_3+\theta_4-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)\iota(P_{B_2}). \end{aligned} \tag{7.46}$$

同理，在极限 (7.44) 下，(7.46) 化简为 ι的$K_{B_2:\ -++}$ (7.15) 的像。□

注 7.6。 在 [13], the R-算子 $R_{123}^{(\pm)}$ (4.12)、(4.13) 中，展示了它们如何化简为 FG 箭图对应的算子。我们在附录 D 中更清晰地重新阐述这一化简。

Appendix A. Proof of Proposition 5.4

我们使用以下引理，其证明很容易。

引理 A.1。 对于作为 $XY = q^2YX$ 的 q-可交换变量 X 和 Y，有 t

$$\mathrm{Ad}(\Psi_q(X)\Psi_q(X^{-1}))(Y) = q^{-1}XY = qYX. \tag{A.1}$$

命题 *5.4* 的证明。 首先我们验证 K_{++} 与 K_{+-}一致。由 Y-变量关于 q的可交换性 (2.1) 结合 (3.18)， K_{++} (5.17) 和 K_{+-} (5.18) 的二对数部分分别可改写为

$$\Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\cdot\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)^{-1}}$$
$$\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}, \tag{A.2}$$

$$\Psi_q\left(Y_8^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\cdot\underline{\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_2Y_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)}$$
$$\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^2Y_2Y_3Y_7Y_8Y_9\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}. \tag{A.3}$$

除下划线部分外，两者完全相同。应用引理 A.1，可将 (A.3) 中的下划线部分改写如下:

$$\begin{aligned}&\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_2Y_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)\\&\quad=\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}\cdot\mathrm{Ad}(\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right))(\Psi_q\left(qY_7Y_8\right))\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)\\&\quad=\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)^{-1}.\end{aligned}$$

最后一行与 (A.2) 中的下划线部分一致。类似地，可以证明K_{-+} (5.19) 与 K_{--} (5.20) 一致。

最后一步，我们证明 K_{+-} (5.18) 与 K_{-+} (5.19) 一致。利用 (3.18)，将 (5.19) 中的下划线部分改写如下:

$$\begin{aligned}&\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2Y_3\right)\\&\quad\cdot\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(q^{-2}Y_3^{-1}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(q^2Y_2Y_3\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)\\&=\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)^{-1}\cdot\mathrm{Ad}(\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right))(\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)\\&\qquad\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)^{-1})\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-1}\right)\\&=\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}\\&\quad\cdot\mathrm{Ad}(\Psi_{q^2}\left(Y_2\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right))(\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(qY_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1})\\&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}\\&=\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(qY_3^{-1}Y_8^{-1}Y_9^{-1}\right)^{-1}\Psi_q\left(q^{-1}Y_2Y_7Y_8\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3^{-2}Y_4^{-1}Y_8^{-2}Y_9^{-2}\right)^{-1}\\&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(Y_2^{-1}\right)\Psi_{q^2}\left(Y_3\right)^{-1}.\end{aligned}$$

利用 (3.18)，这与 (5.18) 中的下划线部分一致。 □

Appendix B. Explicit formulas for $K_{1234|\varepsilon}$

B.1. 类型 ρ_{24}。 我们用典范变量给出 $K_{\varepsilon_2,\varepsilon_4}$ (5.17)–(5.20) 的显式公式。我们从 (5.2) 和 (5.9) 中消去 e_1, e_2, e_3, e_4。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon=(-1,1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,-1);\\
K_{++}=&\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2+d_4-u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3-c_2+c_3-d_4+u_1+u_2-u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-b_2+c_1-2c_2+c_3-d_2+2u_2}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-c_1+c_2-d_1+d_3+u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-2b_1-2b_2+2b_3+b_4+c_1-2c_2+c_3+2c_4-d_4+2u_1+2u_2-2u_3+2w_1-2w_3+2w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3+b_4+c_1-c_2+2c_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-b_2+c_1-2c_2+c_3-d_2+2u_2}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-b_3-c_2-d_1-d_2+d_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2+d_4-u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)^{-1}P_{24}.
\end{aligned}
\tag{B.1}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon=(-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,-1);\\
K_{+-}=&\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2+d_4-u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3-c_2+c_3-d_4+u_1+u_2-u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{b_2-c_1+2c_2-c_3+d_2-2u_2}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-b_2-c_2+c_3-d_1-d_2+d_3+u_1+2u_2-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-2b_1-2b_2+2b_3+b_4+c_1-2c_2+c_3+2c_4-d_4+2u_1+2u_2-2u_3+2w_1-2w_3+2w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3+b_4+c_1-c_2+2c_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{b_2-c_1+2c_2-c_3+d_2-2u_2}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-b_3-c_2-d_1-d_2+d_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2+d_4-u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)^{-1}P_{24}.
\end{aligned}
\tag{B.2}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = (-1,-1,-1,1,1,-1,-1,-1,1,1);\\
K_{-+} = \ & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3-b_1+b_3-c_2+c_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+c_1-2c_2+c_3-d_2+d_4+u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-c_1+c_2-d_1+d_3+u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3-2b_1-b_2+2b_3+b_4+c_1-2c_2+c_3+2c_4+2u_1+u_2-2u_3-u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3+b_4+c_1-c_2+2c_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+c_1-2c_2+c_3-d_2+d_4+u_2-u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-b_3-c_2-d_1-d_2+d_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)P_{24}.
\end{aligned}
\tag{B.3}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon = (-1,-1,-1,-1,1,-1,-1,1,1,1);\\
K_{--} = \ & \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3-b_1+b_3-c_2+c_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-c_1+2c_2-c_3+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1+a_3-c_2+c_3-d_1-d_2+d_3+d_4+u_1+u_2-u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3-2b_1-b_2+2b_3+b_4+c_1-2c_2+c_3+2c_4+2u_1+u_2-2u_3-u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-b_2+b_3+b_4+c_1-c_2+2c_4+u_1+u_2-u_3-u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-c_1+2c_2-c_3+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)\\
&\cdot \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_1-b_3-c_2-d_1-d_2+d_4+u_1+u_2+u_3-u_4-w_1+w_3-w_4}\right)\\
&\cdot \Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)P_{24}.
\end{aligned}
\tag{B.4}
$$

B.2. 类型 ρ_{13}**.** 我们用典范变量给出 $K_{\varepsilon_1,\varepsilon_3}$ (5.24)–(5.27) 的显式公式。我们从 (5.2) 和 (5.9) 中消去 e_1, e_2, e_3, e_4。

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon=(1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,-1,1);\\
K_{++}=\;&\Psi_q\left(\mathrm{e}^{b_1+c_2+d_3-u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_3-c_3-d_3+2u_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-2b_1-c_1-c_3+d_2-2d_3-d_4+2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1-a_3-b_1-c_3+d_1+d_2-2d_3-d_4-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2-b_4-c_1+c_3-2c_4-u_2+u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_3-c_3-d_3+2u_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_1-a_3+c_1-c_3+2d_1+d_2-2d_3-d_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{b_1+c_2+d_3-u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+2b_1-2b_3-b_4-2c_4-d_2-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)P_{13}.
\end{aligned}
\tag{B.5}
$$

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon=(1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,-1,1);\\
K_{+-}=\;&\Psi_q\left(\mathrm{e}^{b_1+c_2+d_3-u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3+b_3+c_3+d_3-2u_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-2b_1-c_1-c_3+d_2-2d_3-d_4+2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1-a_3-b_1-c_3+d_1+d_2-2d_3-d_4-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+b_2-2b_3-b_4-c_1-c_3-2c_4-2d_3-u_2+4u_3+u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3+b_3+c_3+d_3-2u_3}\right)\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_1-a_3+c_1-c_3+2d_1+d_2-2d_3-d_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{b_1+c_2+d_3-u_1-u_3-w_1+w_2-w_3}\right)^{-1}\\
&\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+2b_1-2b_3-b_4-2c_4-d_2-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)P_{13}.
\end{aligned}
\tag{B.6}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= (-1,-1,1,-1,-1,1,-1,-1,1,1);\\
K_{-+} &= \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_3+b_1-b_3+c_2-c_3-u_1+u_3-w_1+w_2-w_3}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-c_1+2c_2-c_3+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1-a_3+c_2-c_3+d_1+d_2-d_3-d_4-u_1-u_2+u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{a_3+b_2-b_4-c_1+c_3-2c_4-u_2+u_4-w_2+2w_3-w_4}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-a_3+b_1-b_3+c_2-c_3-u_1+u_3-w_1+w_2-w_3}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_1-a_3+c_1-c_3+2d_1+d_2-2d_3-d_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+2b_1-2b_3-b_4-2c_4-d_2-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)P_{13}.
\end{aligned}
\tag{B.7}
$$

$$
\begin{aligned}
\varepsilon &= (-1,-1,-1,-1,-1,1,1,-1,1,1);\\
K_{--} &= \Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-b_2-d_4+u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3-b_1+b_3-c_2+c_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3-c_1+2c_2-c_3+d_2-d_4-u_2+u_4+w_2-2w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_1-a_3+c_2-c_3+d_1+d_2-d_3-d_4-u_1-u_2+u_3+u_4+w_1-w_3+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+2b_1+b_2-2b_3-b_4-c_1+2c_2-c_3-2c_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{a_3-b_1+b_3-c_2+c_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{2a_1-a_3+c_1-c_3+2d_1+d_2-2d_3-d_4-2u_1-u_2+2u_3+u_4+2w_1-w_2+w_4}\right)^{-1}\\
&\quad\cdot\Psi_q\left(\mathrm{e}^{-b_1-c_2-d_3+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3}\right)\\
&\quad\cdot\Psi_{q^2}\left(\mathrm{e}^{-a_3+2b_1-2b_3-b_4-2c_4-d_2-2u_1+u_2+2u_3+u_4-2w_1+w_2-w_4}\right)P_{13}.
\end{aligned}
\tag{B.8}
$$

Appendix C. Well-definedness of $(F_R^{\Psi})^{-1}F_L^{\Psi}$

C.1. $(F_R^{\Psi})^{-1}F_L^{\Psi}$中的 Y-变量。 对于式（F_R^{Ψ}）$^{-1}F_L^{\Psi}$中从左数第 i 个量子二对数，使用求和指标 $n_i(i=1,\ldots,92)$，该表达式可展开为（6.35）的形式，其中

$$
\begin{aligned}
&p_1 = n_1+n_{19}+n_{20}+n_{24}+n_{25}+n_{29}+n_{54}+n_{58}+n_{59}+n_{63}+n_{64}+n_{82}+n_{86}\\
&+n_{87}+n_{91}+n_{92},
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
p_2 &= n_{19}+n_{20}-n_{21}-n_{22}-n_{23}+n_{24}+n_{25}-n_{26}-n_{27}+n_{29}-n_{31}-n_{52}+n_{54}\\
&\quad -n_{56}-n_{57}+n_{58}+n_{59}-n_{60}-n_{61}-n_{62}+n_{63}+n_{64}-n_{80}+n_{82}-n_{84}-n_{85}\\
&\quad +n_{86}+n_{87}-n_{88}-n_{89}-n_{90}+n_{91}+n_{92},\\
p_3 &= -n_1+n_4+n_6+n_7+n_{11}-n_{21}-n_{22}-n_{26}-n_{27}+n_{34}+n_{35}+n_{39}-n_{56}-n_{57}\\
&\quad -n_{61}-n_{62}+n_{72}+n_{76}+n_{77}-n_{84}-n_{85}-n_{89}-n_{90},\\
p_4 &= -n_5+n_6+n_7-n_8-n_9+n_{11}-n_{13}-n_{33}+n_{34}+n_{35}-n_{36}-n_{37}+n_{39}-n_{41}\\
&\quad -n_{70}+n_{72}-n_{74}-n_{75}+n_{76}+n_{77}-n_{78},\\
p_5 &= -n_4-n_8-n_9-n_{36}-n_{37}-n_{74}-n_{75},\\
p_6 &= n_1+n_{19}+n_{20}+n_{24}+n_{28}+n_{50}+n_{55}+n_{59}+n_{63}+n_{64}+n_{83}+n_{87}+n_{91}+n_{92},\\
p_7 &= n_{19}+n_{20}-n_{21}-n_{22}+n_{24}-n_{26}-2n_{27}+n_{28}-n_{30}-n_{32}-n_{51}-n_{53}+n_{55}\\
&\quad -2n_{56}-n_{57}+n_{59}-n_{61}-n_{62}+n_{63}+n_{64}-n_{79}-n_{81}+n_{83}-2n_{84}-n_{85}+n_{87}\\
&\quad -n_{89}-n_{90}+n_{91}+n_{92},\\
p_8 &= n_4+n_6+n_{10}+n_{15}+n_{19}+n_{20}-n_{21}-n_{22}+n_{24}-n_{26}-2n_{27}-n_{30}+n_{34}+n_{38}\\
&\quad +n_{43}-n_{53}-2n_{56}-n_{57}+n_{59}-n_{61}-n_{62}+n_{63}+n_{64}+n_{68}+n_{73}+n_{77}-n_{81}\\
&\quad -2n_{84}-n_{85}+n_{87}-n_{89}-n_{90}+n_{91}+n_{92},\\
p_9 &= n_6-n_8-2n_9+n_{10}-n_{12}-n_{14}+n_{19}+n_{20}-n_{21}-n_{22}+n_{34}-n_{36}-2n_{37}+n_{38}\\
&\quad -n_{40}-n_{42}-n_{61}-n_{62}+n_{63}+n_{64}-n_{69}-n_{71}+n_{73}-2n_{74}-n_{75}+n_{77}-n_{89}-n_{90}\\
&\quad +n_{91}+n_{92},\\
p_{10} &= -n_1+n_6-n_8-2n_9-n_{12}-n_{21}+n_{34}-n_{36}-2n_{37}-n_{40}-n_{62}-n_{71}-2n_{74}\\
&\quad -n_{75}+n_{77}-n_{90},\\
p_{11} &= n_1+n_2+n_6+n_{10}+n_{15}+n_{17}+n_{48}+n_{50}+n_{55}+n_{59}+n_{63}+n_{64},\\
p_{12} &= n_1+n_2-n_3-n_4+n_6-n_8-2n_9+n_{10}-n_{12}-n_{14}+n_{15}-n_{16}+n_{17}-n_{18}\\
&\quad -n_{47}+n_{48}-n_{49}+n_{50}-n_{51}-n_{53}+n_{55}-2n_{56}-n_{57}+n_{59}-n_{61}-n_{62}+n_{63}+n_{64},\\
p_{13} &= -n_3+n_6-n_8-2n_9+n_{10}-n_{12}-n_{14}+n_{15}-n_{16}+n_{17}-n_{18}+n_{34}+n_{38}+n_{43}\\
&\quad +n_{45}-n_{49}-n_{51}-n_{53}-2n_{56}-n_{57}-n_{61}-n_{62}+n_{66}+n_{68}+n_{73}+n_{77},\\
p_{14} &= n_6-n_8-2n_9+n_{10}-n_{12}-n_{14}+n_{15}-n_{16}+n_{17}-n_{18}+n_{34}-n_{36}-2n_{37}+n_{38}\\
&\quad -n_{40}-n_{42}+n_{43}-n_{44}+n_{45}-n_{46}-n_{65}+n_{66}-n_{67}+n_{68}-n_{69}-n_{71}+n_{73}\\
&\quad -2n_{74}-n_{75}+n_{77},\\
p_{15} &= n_1-n_4-n_8-2n_9-n_{12}-n_{14}-n_{16}+n_{19}-n_{36}-2n_{37}-n_{40}-n_{42}-n_{44}+n_{64}\\
&\quad -n_{67}-n_{69}-n_{71}-2n_{74}-n_{75}+n_{92}.
\end{aligned}
\tag{C.1}
$$

采用记号 (6.37)，将 $(F_R^{\Psi})^{-1}F_L^{\Psi}$视为关于$Y$变量的形式洛朗级数，其良定义性可按以下步骤验证:

$$
\begin{aligned}
&p\colon 1,\ 5,\ 6,\ 11, n\colon 1,\ 2,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 15,\ 17,\ 19,\ 20,\ 24,\ 25,\ 28,\ 29,\ 36,\ 37,\ 48,\\
&50,\ 54,\ 55,\ 58,\ 59,\ 63,\ 64,\ 74,\ 75,\ 82,\ 83,\ 86,\ 87,\ 91,\ 92, p\colon 2,\ 7,\ 12,\ 15, n\colon 3,\\
&12,\ 14,\ 16,\ 18,\ 21,\ 22,\ 23,\ 26,\ 27,\ 30,\ 31,\ 32,\ 40,\ 42,\ 44,\ 47,\ 49,\ 51,\ 52,\ 53,\\
&56,\ 57,\ 60,\ 61,\ 62,\ 67,\ 69,\ 71,\ 79,\ 80,\ 81,\ 84,\ 85,\ 88,\ 89,\ 90, p\colon 3,\ 8,\ 9,\ 10,\ 13, n\colon\\
&7,\ 11,\ 34,\ 35,\ 38,\ 39,\ 43,\ 45,\ 66,\ 68,\ 72,\ 73,\ 76,\ 77, p\colon 4,\ 14, n\colon 5,\ 13,\ 33,\ 41,\\
&46,\ 65,\ 70,\ 78.
\end{aligned}
\tag{C.2}
$$

C.2. $(F_R^{\Psi})^{-1}F_L^{\Psi}$**中的** q**-Weyl 变量**。 使用求和指标 $n_i (i = 1、\ldots\ldots、92)$ 表示公式（F_R^{Ψ}）$^{-1}F_L^{\Psi}$中从左侧出现的第 i 个量子二对数，并作代换（6.41），该表达式可展开为形式（6.42），其中

$$
\begin{aligned}
\alpha_1 &= n_1 + n_2 + n_3 + n_4 + n_6 + n_8 + 2n_9 + n_{10} + n_{12} + n_{14} + n_{15} + n_{16} + n_{17} + n_{18} \\
&\quad + n_{47} + n_{48} + n_{49} + n_{50} + n_{51} + n_{53} + n_{55} + 2n_{56} + n_{57} + n_{59} + n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64}, \\
\alpha_2 &= 2n_1 + n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{24} + n_{26} + 2n_{27} + n_{28} + n_{30} + n_{32} + 2n_{50} + n_{51} \\
&\quad + n_{53} + n_{55} + 2n_{56} + n_{57} + n_{59} + n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64} + n_{79} + n_{81} + n_{83} + 2n_{84} \\
&+ n_{85} + n_{87} + n_{89} + n_{90} + n_{91} + n_{92}, \\
\alpha_3 &= 2n_1 + n_{19} + n_{20} + n_{21} + n_{22} + n_{23} + n_{24} + n_{25} + n_{26} + n_{27} + n_{29} + n_{31} + n_{52} \\
&+ n_{54} + n_{56} + n_{57} + n_{58} + n_{59} + n_{60} + n_{61} + n_{62} + n_{63} + n_{64} + n_{80} + n_{82} + n_{84} \\
&+ n_{85} + n_{86} + n_{87} + n_{88} + n_{89} + n_{90} + n_{91} + n_{92}, \\
\alpha_4 &= -n_1 - n_2 - n_3 + n_4 + n_{34} + n_{36} + 2n_{37} + n_{38} + n_{40} + n_{42} + n_{43} + n_{44} + n_{45} + n_{46} \\
&+ n_{47} - n_{48} - n_{49} - n_{50} - n_{51} - n_{53} - n_{55} - 2n_{56} - n_{57} - n_{59} - n_{61} - n_{62} - n_{63} - n_{64} \\
&+ n_{65} + n_{66} + n_{67} + n_{68} + n_{69} + n_{71} + n_{73} + 2n_{74} + n_{75} + n_{77}, \\
\alpha_5 &= 2n_4 + n_6 + n_8 + 2n_9 + n_{10} + n_{12} + n_{14} + 2n_{15} + n_{24} - n_{26} - 2n_{27} - n_{28} - n_{30} + n_{32} \\
&+ n_{34} + n_{36} + 2n_{37} + n_{38} + n_{40} + n_{42} + 2n_{43} + n_{51} - n_{53} - n_{55} - 2n_{56} - n_{57} + n_{59} \\
&+ 2n_{68} + n_{69} + n_{71} + n_{73} + 2n_{74} + n_{75} + n_{77} + n_{79} - n_{81} - n_{83} - 2n_{84} - n_{85} + n_{87}, \\
\alpha_6 &= -2n_1 + 2n_4 + n_5 + n_6 + n_7 + n_8 + n_9 + n_{11} + n_{13} - n_{19} - n_{20} - n_{21} - n_{22} + n_{23} \\
&- n_{24} - n_{25} - n_{26} - n_{27} - n_{29} + n_{31} + n_{33} + n_{34} + n_{35} + n_{36} + n_{37} + n_{39} + n_{41} + n_{52} \\
&- n_{54} - n_{56} - n_{57} - n_{58} - n_{59} + n_{60} - n_{61} - n_{62} - n_{63} - n_{64} + n_{70} + n_{72} + n_{74} + n_{75} \\
&+ n_{76} + n_{77} + n_{78} + n_{80} - n_{82} - n_{84} - n_{85} - n_{86} - n_{87} + n_{88} - n_{89} - n_{90} - n_{91} - n_{92}, \\
\alpha_7 &= 2n_1 - 2n_4 - n_6 - n_8 - 2n_9 - n_{10} - n_{12} - n_{14} - n_{15} - n_{16} - n_{17} + n_{18} + 2n_{19} \\
&- n_{34} - n_{36} - 2n_{37} - n_{38} - n_{40} - n_{42} - n_{43} - n_{44} - n_{45} + n_{46} + 2n_{64} + n_{65} - n_{66} \\
&- n_{67} - n_{68} - n_{69} - n_{71} - n_{73} - 2n_{74} - n_{75} - n_{77} + 2n_{92}, \\
\alpha_8 &= -2n_1 + n_6 - n_8 - 2n_9 - n_{10} - n_{12} + n_{14} - n_{19} - n_{20} - n_{21} + n_{22} + n_{34} - n_{36} \\
&- 2n_{37} - n_{38} - n_{40} + n_{42} + n_{61} - n_{62} - n_{63} - n_{64} + n_{69} - n_{71} - n_{73} - 2n_{74} - n_{75} \\
&+ n_{77} + n_{89} - n_{90} - n_{91} - n_{92}, \\
\alpha_9 &= -2n_4 + n_5 - n_6 - n_7 - n_8 - n_9 - n_{11} + n_{13} + n_{33} - n_{34} - n_{35} - n_{36} - n_{37} - n_{39} \\
&+ n_{41} + n_{70} - n_{72} - n_{74} - n_{75} - n_{76} - n_{77} + n_{78}, \\
\alpha_{10} &= -n_1 - n_2 + n_3 + n_4 - n_6 + n_8 + 2n_9 - n_{10} + n_{12} + n_{14} - n_{15} + n_{16} - n_{17} + n_{18} \\
&\quad + n_{47} - n_{48} + n_{49} - n_{50} + n_{51} + n_{53} - n_{55} + 2n_{56} + n_{57} - n_{59} + n_{61} + n_{62} - n_{63} - n_{64}, \\
\alpha_{11} &= n_1 + n_2 - n_3 - n_4 + n_6 - n_8 - 2n_9 + n_{10} - n_{12} - n_{14} + n_{15} - n_{16} + n_{17} - n_{18} - n_{19} \\
&\quad - n_{20} + n_{21} + n_{22} - n_{24} + n_{26} + 2n_{27} - n_{28} + n_{30} + n_{32} - n_{47} + n_{48} - n_{49} + n_{50} + n_{79} \\
&+ n_{81} - n_{83} + 2n_{84} + n_{85} - n_{87} + n_{89} + n_{90} - n_{91} - n_{92}, \\
\alpha_{12} &= n_{23} - n_{25} - n_{27} + n_{28} - n_{29} - n_{30} + n_{31} - n_{32} - n_{51} + n_{52} - n_{53} - n_{54} + n_{55} - n_{56} \\
&- n_{58} + n_{60} - n_{79} + n_{80} - n_{81} - n_{82} + n_{83} - n_{84} - n_{86} + n_{88}, \\
\alpha_{13} &= -n_1 - n_2 + n_3 + n_4 - 2n_6 + 2n_8 + 4n_9 - 2n_{10} + 2n_{12} + 2n_{14} - 2n_{15} + 2n_{16} - 2n_{17} \\
&+ 2n_{18} + n_{19} + n_{20} - n_{21} - n_{22} + n_{24} - n_{26} - 2n_{27} + n_{28} - n_{30} - n_{32} - n_{34} + n_{36} \\
&+ 2n_{37} - n_{38} + n_{40} + n_{42} - n_{43} + n_{44} - n_{45} + n_{46} + n_{47} - n_{48} + n_{49} - n_{50} + n_{65} - n_{66} \\
&+ n_{67} - n_{68} + n_{69} + n_{71} - n_{73} + 2n_{74} + n_{75} - n_{77} - n_{79} - n_{81} + n_{83} - 2n_{84} - n_{85} + n_{87} \\
&- n_{89} - n_{90} + n_{91} + n_{92},
\end{aligned}
$$

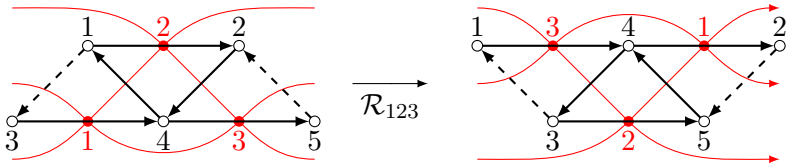
$$
\begin{aligned}
\alpha_{14} &= n_{15} - n_{16} + n_{17} - n_{18} - 2n_{23} + n_{24} + 2n_{25} - n_{26} - n_{28} + 2n_{29} + n_{30} - 2n_{31} + n_{32} \\
&\quad + n_{43} - n_{44} + n_{45} - n_{46} + n_{51} - 2n_{52} + n_{53} + 2n_{54} - n_{55} - n_{57} + 2n_{58} + n_{59} - 2n_{60} \\
&\quad - n_{65} + n_{66} - n_{67} + n_{68} + n_{79} - 2n_{80} + n_{81} + 2n_{82} - n_{83} - n_{85} + 2n_{86} + n_{87} - 2n_{88}, \\
\alpha_{15} &= n_5 - n_7 - n_9 + n_{10} - n_{11} - n_{12} + n_{13} - n_{14} + n_{23} - n_{24} - n_{25} + n_{26} + n_{27} - n_{29} \\
&\quad + n_{31} + n_{33} - n_{35} - n_{37} + n_{38} - n_{39} - n_{40} + n_{41} - n_{42} + n_{52} - n_{54} + n_{56} + n_{57} - n_{58} \\
&\quad - n_{59} + n_{60} - n_{69} + n_{70} - n_{71} - n_{72} + n_{73} - n_{74} - n_{76} + n_{78} + n_{80} - n_{82} + n_{84} + n_{85} \\
&\quad - n_{86} - n_{87} + n_{88}, \\
\alpha_{16} &= -n_{15} + n_{16} - n_{17} + n_{18} + n_{19} + n_{20} - n_{21} - n_{22} - n_{43} + n_{44} - n_{45} + n_{46} - n_{61} \\
&\quad - n_{62} + n_{63} + n_{64} + n_{65} - n_{66} + n_{67} - n_{68} - n_{89} - n_{90} + n_{91} + n_{92}, \\
\alpha_{17} &= -2n_5 + n_6 + 2n_7 - n_8 - n_{10} + 2n_{11} + n_{12} - 2n_{13} + n_{14} - n_{19} - n_{20} + n_{21} + n_{22} \\
&\quad - 2n_{33} + n_{34} + 2n_{35} - n_{36} - n_{38} + 2n_{39} + n_{40} - 2n_{41} + n_{42} + n_{61} + n_{62} - n_{63} - n_{64} \\
&\quad + n_{69} - 2n_{70} + n_{71} + 2n_{72} - n_{73} - n_{75} + 2n_{76} + n_{77} - 2n_{78} + n_{89} + n_{90} - n_{91} - n_{92}, \\
\alpha_{18} &= n_5 - n_6 - n_7 + n_8 + n_9 - n_{11} + n_{13} + n_{33} - n_{34} - n_{35} + n_{36} + n_{37} - n_{39} + n_{41} \\
&\quad + n_{70} - n_{72} + n_{74} + n_{75} - n_{76} - n_{77} + n_{78}.
\end{aligned} \tag{C.3}
$$

与（6.44）和（6.46）类似，$(F_R^{\Psi})^{-1}F_L^{\Psi}$作为关于 e^{u_i} 和 e^{w_i} 的形式洛朗级数的良定义性分两步证明如下

$$
\begin{aligned}
&\alpha\colon 1,\ 2,\ 3, n\colon 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 16,\ 17,\ 18,\ 19,\ 20,\ 21,\ 22,\ 23,\ 24, \\
&25,\ 26,\ 27,\ 28,\ 29,\ 30,\ 31,\ 32,\ 47,\ 48,\ 49,\ 50,\ 51,\ 52,\ 53,\ 54,\ 55,\ 56,\ 57,\ 58,\ 59, \\
&60,\ 61,\ 62,\ 63,\ 64,\ 79,\ 80,\ 81,\ 82,\ 83,\ 84,\ 85,\ 86,\ 87,\ 88,\ 89,\ 90,\ 91,\ 92, \alpha\colon 4,\ 5, \\
&6, n\colon 5,\ 7,\ 11,\ 13,\ 33,\ 34,\ 35,\ 36,\ 37,\ 38,\ 39,\ 40,\ 41,\ 42,\ 43,\ 44,\ 45,\ 46,\ 65,\ 66, \\
&67,\ 68,\ 69,\ 70,\ 71,\ 72,\ 73,\ 74,\ 75,\ 76,\ 77,\ 78.
\end{aligned} \tag{C.4}
$$

Appendix D. Reduction to the R-operators for FG quiver

D.1. R-FG 箭图的算子。 回顾福克-冈察洛夫（FG）箭图及其对应布线图的变换 $\mathcal{R}_{123}$：



(D.1)

其中簇变换由 $\mathcal{R}_{123} = \mu_4$ 给出。量子 y 变量的诱导变换 $R_{123} = \mu_4^*$ 可按两种方式分解：

$$
\mu_4^* = \mathrm{Ad}(\Phi_q(\mathcal{Y}_4)) \circ \tau_{4,+} = \mathrm{Ad}(\Phi_q(\mathcal{Y}_4^{-1})^{-1}) \circ \tau_{4,-}.
$$

回顾涉及参数 $\theta_i \in \mathbb{C}\,(i = 1,2,3)$ [11, eq. (3.6)] 的嵌入 $\phi_{\mathrm{FG}}\colon \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}) \hookrightarrow \mathrm{Frac}\ \mathcal{W}(A_2)$ 和 $\phi'_{\mathrm{FG}}\colon \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}) \hookrightarrow \mathrm{Frac}\ \mathcal{W}(A_2)$，其定义如下

$$
\phi_{\mathrm{FG}}\colon \begin{cases}
y_1 \mapsto \mathrm{e}^{-\theta_2 - w_2 - u_2 + w_1}, \\
y_2 \mapsto \mathrm{e}^{\theta_2 - w_2 + u_2 + w_3}, \\
y_3 \mapsto \mathrm{e}^{-\theta_1 - w_1 - u_1}, \\
y_4 \mapsto \mathrm{e}^{\theta_1 - \theta_3 - w_1 + u_1 - w_3 - u_3 + w_2}, \\
y_5 \mapsto \mathrm{e}^{\theta_3 - w_3 + u_3},
\end{cases}
\qquad
\phi'_{\mathrm{FG}}\colon \begin{cases}
y'_1 \mapsto \mathrm{e}^{-\theta_3 - w_3 - u_3}, \\
y'_2 \mapsto \mathrm{e}^{\theta_1 - w_1 + u_1}, \\
y'_3 \mapsto \mathrm{e}^{-\theta_2 - w_2 - u_2 + w_3}, \\
y'_4 \mapsto \mathrm{e}^{-\theta_1 + \theta_3 - w_3 + u_3 - w_1 - u_1 + w_2}, \\
y'_5 \mapsto \mathrm{e}^{\theta_2 - w_2 + u_2 + w_1}.
\end{cases}
\tag{D.2}
$$

令 π_+ 表示 $\mathcal{W}(A_2)$ [11, eq. (3.7)] 的同构 π_{123} （按指数的意义），并定义另一个同构 π_- 如下：

$$\pi_+ : \begin{cases} w_1 \mapsto w_1 - \theta_2 + \theta_3, \quad w_2 \mapsto w_1 + w_3, \quad w_3 \mapsto w_2 - w_1 + \theta_2 - \theta_3, \\ u_1 \mapsto u_1 + u_2 - u_3, \quad u_2 \mapsto u_3, \quad u_3 \mapsto u_2, \end{cases} \tag{D.3}$$

$$\pi_- : \begin{cases} w_1 \mapsto w_2 - w_3 + \theta_1 - \theta_2, \quad w_2 \mapsto w_1 + w_3, \quad w_3 \mapsto w_3 - \theta_1 + \theta_2, \\ u_1 \mapsto u_2, \quad u_2 \mapsto u_1, \quad u_3 \mapsto -u_1 + u_2 + u_3. \end{cases} \tag{D.4}$$

现在考虑两个 R-算子 R_+ 和 R_-。算子 R_+ 即 [11,式 (4.14)] 中引入的算子：

$$R_+ = \Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_1-\theta_3-w_1+u_1-w_3-u_3+w_2})P_+, \qquad P_+ = \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}w_1(u_3-u_2)}\mathrm{e}^{\frac{\theta_2-\theta_3}{\hbar}(u_2-u_1)}\rho_{23}, \tag{D.5}$$

并引入一个新算子 R_-，其定义方式类似：

$$R_- = \Psi_q(\mathrm{e}^{-\theta_1+\theta_3+w_1-u_1+w_3+u_3-w_2})^{-1}P_-, \qquad P_- = \mathrm{e}^{\frac{1}{\hbar}w_3(u_1-u_2)}\mathrm{e}^{\frac{\theta_1-\theta_2}{\hbar}(u_1-u_2)}\rho_{12}. \tag{D.6}$$

命题 D.1. 对于 $\varepsilon \in \{+,-\}$，以下陈述成立。（
i) 以下图表是可交换的：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\phi'_{\mathrm{FG}}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \tau_{4,\varepsilon}} & & \downarrow{\scriptstyle \pi_\varepsilon} \\ \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\phi_{\mathrm{FG}}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \end{array}$$

(ii) 同构 π_ε 由伴随作用 $\mathrm{Ad}(P_\varepsilon)$ 实现。特别地，我们有$\backsim\phi_{\mathrm{FG}} \circ R_{123} = \mathrm{Ad}(R_\varepsilon) \circ \phi'_{\mathrm{FG}}$。

情形 $\varepsilon = +$ 已在 [11, 命题 3.1] 中证明。注意，R-算子 (D.5) 和 (D.6) 可写成统一形式

$$R_\varepsilon = \Psi_q(\phi_{\mathrm{FG}}(\mathcal{Y}_4^\varepsilon))^\varepsilon P_\varepsilon \quad \text{for } \varepsilon \in \{+,-\}. \tag{D.7}$$

D.2. **的极限-算子**。设 α 和 α' 为斜域的环同态，α: $\mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}) \to \mathcal{Y}(B_{\mathrm{SB}})$ 以及 α': $\mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}) \to \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{SB}})$，定义如下：

$$\alpha : \begin{cases} \mathcal{Y}_1 \mapsto Y_1, \\ \mathcal{Y}_2 \mapsto qY_2Y_3, \\ \mathcal{Y}_3 \mapsto Y_4, \\ \mathcal{Y}_4 \mapsto qY_5Y_6, \\ \mathcal{Y}_5 \mapsto qY_7Y_8, \end{cases} \qquad \alpha' : \begin{cases} \mathcal{Y}'_1 \mapsto Y'_1, \\ \mathcal{Y}'_2 \mapsto qY'_5Y'_3, \\ \mathcal{Y}'_3 \mapsto Y'_4, \\ \mathcal{Y}'_4 \mapsto qY'_7Y'_6, \\ \mathcal{Y}'_5 \mapsto qY'_2Y'_8. \end{cases} \tag{D.8}$$

我们考虑图表

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{Y}(B(A_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathrm{FG}}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_+} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{123}^{(+)}} \\ \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \uparrow{\scriptstyle \phi'_{\mathrm{FG}}} & & \uparrow{\scriptstyle \phi'} \\ \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{Y}(B'(A_2)) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathcal{Y}(B_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\alpha} & \mathcal{Y}(B(A_2)) \\ \downarrow{\scriptstyle \phi_{\mathrm{FG}}} & & \downarrow{\scriptstyle \phi} \\ \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \downarrow{\scriptstyle \pi_-} & & \downarrow{\scriptstyle \eta_{123}^{(-)}} \\ \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) & \xrightarrow{\mathrm{id}} & \operatorname{Frac}\mathcal{W}(A_2) \\ \uparrow{\scriptstyle \phi'_{\mathrm{FG}}} & & \uparrow{\scriptstyle \phi'} \\ \mathcal{Y}(B'_{\mathrm{FG}}(A_2)) & \xrightarrow{\alpha'} & \mathcal{Y}(B'(A_2)) \end{array} \tag{D.9}$$

定义 ϕ(4.3)、ϕ' (4.4)、$\eta_{123}^{(-)}$ (4.5) 和 $\eta_{123}^{(+)}$ (4.6) 见 §3。

命题 D.2. *(i)*（参见 [13, 备注 8。3]）(D.9) 左侧的图表可交换，当且仅当参数 θ_i *(*$i = 1, 2, 3$*)* 和 $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ 在满足 (4.2) 的基础上进一步满足以下关系

$$e_2 = e_3, \tag{D.10}$$

$$\begin{aligned} &a_1 = -a_3 = c_3 = -c_1, \quad a_2 = c_2 = 0, \\ &b_1 + e_1 = -d_1 = \theta_1, \quad b_2 + e_2 - a_1 = -a_1 - d_2 = \theta_2, \quad b_3 + e_3 = -d_3 = \theta_3. \end{aligned} \tag{D.11}$$

(ii) 当且仅当满足(4.2) 的参数 θ_i *(*$i = 1, 2, 3$*)* 和 $(a_i, b_i, c_i, d_i, e_i)$ 满足(D.11) 时，(D.9) 右侧图表可交换，同时

$$e_1 = e_2. \tag{D.12}$$

(ii) 的证明与 (i) 的证明完全相同，如 [13] 中所述。

定理 D.3. *(*参见 [13,§8]*) (i)* 假设(D.10) 和(D.11)成立。 R-算子 R_+ (D.5) 可由特化的 R-算子 $R^{(+)}_{123}$ (4.13) 重现为

$$\lim R^{(+)}_{123} = R_+, \tag{D.13}$$

其中，极限取为

$$e_1 \to -\infty, \ \ e_2 = e_3 \to -\infty, \ \ e_1 - e_3 \to -\infty, \ \ e_i + b_i = \text{finite } (i = 1, 2, 3). \tag{D.14}$$

(ii) 假设(D.10) 和(D.12)成立。 R-算子 R_- (D.6)可由特化的R-算子 $R^{(-)}_{123}$ (4.12) 重现为

$$\lim R^{(-)}_{123} = R_-, \tag{D.15}$$

其中极限取为

$$e_3 \to -\infty, \ \ e_1 = e_2 \to -\infty, \ \ e_3 - e_1 \to -\infty, \ \ e_i + b_i = \text{finite } (i = 1, 2, 3). \tag{D.16}$$

证明。 我们给出第一种情形的证明。第二种情形的证明方法类似。回顾式 $P^{(+)}_{123}$ (4.11) 的参数 κ_i (4.8)。由 (D.10) 可得 $\kappa_0 = 0$，由 (D.11) 可得 $\kappa_1 = -\kappa_2 = \theta_3 - \theta_2$ 和 $\kappa_3 = 0$。因此，$P^{(+)}_{123}$ 化简为 P_+ (D.5)。将关系 (D.10) 和 (D.11) 应用于 R-算子 $R^{(+)}_{123}$ (4.13) 的二对数部分，可得

$$\begin{aligned} R^{(+)}_{123} = \Psi_q(\mathrm{e}^{-\theta_{13}+e_1+u_1+u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\underline{\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{13}+u_1-u_3-w_1+w_2-w_3})} \\ \cdot \Psi_q(\mathrm{e}^{-\theta_{13}+e_1-e_3+u_1-u_3+w_1-w_2+w_3})^{-1}\Psi_q(\mathrm{e}^{\theta_{13}+e_2-u_3+2u_2+u_1-w_1+w_2-w_3})\underline{P_+}. \end{aligned} \tag{D.17}$$

在极限 (D.14) 中，下划线部分保留下来。 □

References

[1] R. J. Baxter, *Exactly solved models in statistical mechanics*, Academic Press, 伦敦 (1982) [2] V. V. Bazhanov, R. J. Baxter, *New solvable lattice models in three-dimensions*, 《统计物理学杂志》 **69** 453–585 (1992) [3] V. V. Bazhanov, V. V. Mangazeev, S. M. Sergeev, *Quantum geometry of 3-dimensional lattices and tetrahedron equation* 16 23 44 , th Int. Congr. of Mathematical Physics. ed. P. Exner (新加坡：World Scientific) – (2010) [4] V. V. Bazhanov, S. M. Sergeev, *Zamolodchikov's tetrahedron equation and hidden structure of quantum groups* **39** 3295 3310 2006 , J. Phys. A: Math. Theor. – ( ) [5] A. Bytsko, A. Volkov, *Tetrahedron equation, Weyl group, and quantum dilogarithm*, 《数学物理快报》 **10**545–61 (2015) [6] I. V. Cherednik, 半直线上的因子化粒子与根系, Theor. Math. Phys. **61** 977–983 (1984) [7] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster $\mathcal{X}$-varieties, amalgamation and Poisson-Lie groups*, 代数几何与数论,《数学进展》系列第253卷，第27–68页，Birkhäuser Boston, Boston, MA (2006)[8] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *Cluster ensembles, quantization and the dilogarithm*, Ann. Sci. ´Ec. Norm. Sup´er. (4) **42** 865–930 (2009) [9] V. V. Fock, A. B. Goncharov, *The quantum dilogarithm and representations of quantum cluster varieties*, 《数学发明》 **175** 第 2 期，223–286 (2009)

[10] A. P. Isaev, P. P. Kulish, *Tetrahedron reflection equations*, Mod. Phys. Lett. A 12 (1997) 427–437. [11] R. Inoue, A. Kuniba, Y. Terashima, *Quantum cluster algebras and 3D integrability: Tetrahedron and 3Dreflection equations*, International Mathematics Research Notices, 2024(16) 11549-11581 (2024年) [12] R. Inoue, A. Kuniba, Y. Terashima, *Tetrahedron equation and quantum cluster algebras*, J. Phys. A: Math. Theor. 57 (2024年) 085202 (33pp) [13] R. Inoue, A. Kuniba, X. Sun, Y. Terashima, J. Yagi, *Solutions of tetrahedron equation from quantum cluster algebra associated with symmetric butterfly quiver*, SIGMA 20 (2024年), 113, 45页 [14] R. Inoue, A. Kuniba, Y. Terashima, J. Yagi, *Quantized six-vertex model on a torus*, arXiv:2505.08924. [15] M. M. Kapranov, V. A. Voevodsky, *2-Categories and Zamolodchikov tetrahedron equations*, Proc. Symposia in Pure Math. 56 177–259 (1994) [16] R. M. Kashaev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov, *Star-square and tetrahedron equations in the Baxter-Bazhanov model* **8** 1399 1409 1993 , Int. J. Mod. Phys. A – ( ) [17] R. M. Kashaev, T. Nakanishi, *Classical and quantum dilogarithm identities*, SIGMA Symmetry Integrability Geom. Methods Appl. 7 Paper 102, 29页 (2011) [18] B. Keller, *On cluster theory and quantum dilogarithm identities i n Representations of Algebras and Related* , , Editors A. *Topics* Skowronski and K. Yamagata, EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society, 85–11 (2011) [19] A. Kuniba, *Quantum groups in three-dimensional integrability*, Springer, Singapore (2022) [20] A. Kuniba, S. Matsuike, A. Yoneyama, *New solutions to the tetrahedron equation associated with quantized six-vertex models* 10 1007 00220 023 04711 2023 , Commun. Math. Phys. . /s - - -y ( ) [21] A. Kuniba, M. Okado, *Tetrahedron and 3D reflection equations from quantized algebra of functions*, J. Phys. A: Math.Theor. 45 (2012) 465206 (27pp). [22] A. Kuniba, M. Okado, *A solution of the 3D reflection equation from quantized algebra of functions of typeB*, Nankai Series in Pure and Applied Mathematics and Theoretical Physics, *Symmetries and groups in contemporary physics*, Proceedings of the XXIXth International Colloquium on Group-Theoretical Methods in Physics, 11 (2013) 181–190. [23] A. Kuniba, V. Pasquier, *Matrix product solutions to the reflection equation from three dimensional integrability* **51** 2018 255204 26 , J. Phys. A: Math. Theor. ( ) (pp) [24] T. Nakanishi, *Periodicities in cluster algebras and dilogarithm identities*, 收录于《代数表示与相关主题》, 编者 A. Skowro´nski 和 K. Yamagata, EMS Series of Congress Reports, European Mathematical Society (2011) 407–444. [25] T. Nakanishi, *Synchronicity phenomenon in cluster patterns*, J. Lond. Math. Soc. (2) 103 (3), 1120–1152 (2021) [26] P. Padmanabhan, V. Korepin, *Solving the Yang-Baxter tetrahedron and higher simplex equations using Clifford algebras* , , Nucl. Phys. B **1007** 116664 2024 ( ) [27] S. M. Sergeev, *Quantum* $2+1$ *evolution model*, J. Phys. A: Math. and Gen. 32 5693 (1999) [28] S. M. Sergeev, V. V. Mangazeev, Yu. G. Stroganov, Bazhanov-Baxter 模型的顶点表述, J. Stat. Phys. 82 31–49 (1996) *Boundary conditions for integrable quantum systems* E. K. Sklyanin, *Boundary conditions for integrable quantum systems*, J. Phys. A: Math. Gen. 21 2375–2389 (1988) [30] X. Sun, J. Yagi, *Cluster transformations, the tetrahedron equation and three-dimensional gauge theories*, Adv. Theor. Math. Phys. 27(4) 1101-1142 (2023) [31] A. Yoneyama, *Tetrahedron and 3D reflection equation from PBW Bases of the nilpotent subalgebra of quantum superalgebras* **387** 481 550 2021 , Commun. Math. Phts. - ( ) [32] A. B. Zamolodchikov, *Tetrahedra equations and integrable systems in three-dimensional space*, Soviet Phys. JETP 79 641–664 (1980)

Rei Inoue, Department of Mathematics and Informatics, Faculty of Science, Chiba University, Chiba 263-8522 , Japan.
Email address: reiiy@math.s.千叶-u.ac.jp

Atsuo Kuniba Institute of Physics Graduate School of Arts and Sciences University of , , Tokyo Komaba Tokyo Japan.
, , „*Email address*: atsuo.s.kuniba@gmail.com