arXiv:2512.22042v1 [math.LO] 26 Dec 2025

EEsakia 序紧化与局部 Esakia 空间

Rodrigo Nicolau Almeida、Guram Bezhanishvili 和 Nick Bezhanishvil i

摘要

我们引入 Esakia 序紧化，并研究其如何融入 Priestley 序紧化的一般理论。我们通过特殊的上集环刻画 Esakia 序紧化，从而给出 Dwinger 定理的一个类似结果。这些考察自然引出了局部 Esakia 空间的概念。对于这类空间，我们证明取最大的 Esakia 序紧化具有函子性，从而得到 Banaschewski 定理的一个类似结果。

目录

1 引言 1**2 序分离与序零维性 3****3 序紧化与 Priestley 序紧化 4****4 Heyting 与 Esakia 序紧化 8****5 局部 Esakia 空间与函子性 14**

参考文献 **18**

2020 年数学主题分类: 54F05; 06F30; 54D35; 06E15; 06D50; 06D20**关键词**: 有序空间；Priestley 空间；Esakia 空间；序紧化；序零维性

1 引言

紧化理论是点集拓扑学的主流领域之一。一个经典结果是，拓扑空间 X 存在紧化当且仅当它是完全正则的，并且 Stone-ˇCech 紧化 βX 是 X 的最大紧化（例如参见 [Eng89，第 3 章。5]）。事实上，对应关系 $X \mapsto \beta X$ 可扩展为一个函子，它是从紧 Hausdorff 空间范畴到完全正则空间范畴中包含关系的左伴随（例如参见[Joh82，第 130 页及以下131]）。

在代数逻辑中，零维紧 Hausdorff 空间发挥着特殊作用，因为它们是布尔代数的 Stone 对偶，并广为人知为*Stone* 空间。这促使人们研究零维紧化，其理论与一般紧化的理论相似：拓扑空间 X 当且仅当它是一个

零维（Hausdorff）空间时，才存在最大的零维紧化$\beta_0 X$；该紧化是布尔代数的 Stone 对偶，Clop(X)由 X [Ban55]的所有既开又闭子集构成。紧化 $\beta_0 X$ 称为*Banaschewski* 紧化，对应关系 $X \mapsto \beta_0 X$ 扩展为一个函子，它是将 Stone 空间范畴包含到零维空间范畴中的左伴随 [Ban55]（另见 [Ban63]）。根据 Dwinger 定理 [Dwi61，定理 131]（另见 [MG68]），X 的所有零维紧化都可以刻画为以下对象的 Stone 对偶：布尔基，即Clop(X) 的布尔子代数，且它们是该拓扑的基。

Nachbin 将紧化理论推广为序紧化理论（例如参见 [Nac65]），此后许多作者对其进行了进一步发展。在这一理论中，Priestley 序紧化 [KS91; BM10]发挥着零维紧化的作用。Priestey 空间在代数逻辑中尤为重要，因为它们是分配格的 Priestley 对偶，从而将 Stone 对偶推广到了布尔代数。对于有序空间，零维性的对应概念是序零维性；有序空间 X 存在 Priestley 序紧化，当且仅当它是序零维的 [BM10, Cor. 3.8]。此外，还存在最大的 Priestley 序紧化 $\eta_0 X$，它是分配格 ClopUp(X) 的 Priestley 对偶；ClopUp(X) 由 X的所有开闭上集组成。此对应关系 $X \mapsto \eta_0 X$ 还扩展为一个函子，它是从 Priestley 空间范畴到序零维空间范畴的包含函子的左伴随 [BM10, Rem. 3.10]。此外，X 的所有 Priestley 序紧化都可以刻画为 Priestley 基的 Priestley 对偶；所谓 Priestley 基，就是生成 X [拓扑的 ClopUp(X) 的子格 5]BM10, Sec.。因此，Banschewski 紧化和 Dwinger 定理都有自然的推广，适用于序零维情形。

与 Stone 空间和 Priestley 空间一样，Esakia 空间在代数逻辑中扮演着关键角色，因为它们是 Heyting 代数的 Priestley 对偶（例如，参见 [Esa19]）。Esakia 空间是指序为连续序的 Priestley 空间。我们的目标是发展 Esakia 序紧化理论，以此细化 Priestley 序紧化理论，并在连续序的框架下推广 Banaschewski 和 Dwinger 的结果。正如我们将看到的，这会引出两种并不等价的序紧化概念，我们称之为 Heyting 序紧化和 Esakia 序紧化（见定义 4.10）。进而，它们导出序零维性的两种细化：H-序零维性和 E-序零维性（见定义4.16），后者与我们的研究尤为相关。

我们分别为 Heyting 序紧化和 Esakia 序紧化给出 Dwinger 定理的一个类似结果，随后考察 Esakia 序紧化的函子性问题。由于 Esakia 空间范畴中的映射是连续 p-态射，因此自然会考虑将它们作为 E-序零维空间范畴中的映射。这引出了局部 *Esakia* 空间这一关键概念：一种每个点的上集都是紧集的 E-序零维空间。这一概念自然推广了 Esakia 空间和像有限偏序集（其中每个点的上集都是有限集）。我们证明，对应关系 $X \mapsto \eta_0 X$ 可提升为一个函子，它是从 Esakia 空间范畴到局部 Esakia 空间与连续 p-态射范畴之包含关系的左伴随，从而为局部 Esakia 空间给出了 Banaschewski 结果的一个类似结果。

我们很高兴将这项工作献给 Mai Gehrke 的纪念文集。几十年来，Mai 一直是同事和朋友（对第二及第三作者而言），也是 TACL 社群中的核心人物。[1] 序紧化在 Mai 的工作中发挥了重要作用。

[1]TACL 是逻辑中的拓扑、代数与范畴的缩写 https://math.univ-cotedazur.fr/tacl/。

例如，在她为 Esakia 文集撰写的论文中， [Geh14], Mai 将直觉主义逻辑的 n-泛模型的序紧化与拟一致空间的双完备化联系起来。她与他人合作的工作 [Bez+06] 发展了一套原有限完备化理论，该理论高度依赖于像有限偏序集的序紧化。通过引入局部 Esakia 空间，我们为这一方法提供了一个自然的推广。

2 序分离与序零维性

我们假设读者熟悉格论（例如参见 [BD74]）、拓扑（例如参见[Eng89]）和范畴论（例如参见 [Mac78]）。与 [Joh82], 一样，所有格都假定有界，且所有格同态都保界。我们用字母 L, D 表示分配格， H 表示 Heyting代数， B 表示布尔代数。

按照惯例，对于偏序集 X 和 $S \subseteq X$，我们记作

$$\uparrow S = \{x \in X \mid \exists s \in S : s \leqslant x\} \quad \text{and} \quad \downarrow S = \{x \in X \mid \exists s \in S : x \leqslant s\}.$$

我们称 S 为一个上集，若 $S = \uparrow S$；若 $S = \downarrow S$，则称其为一个下集。如果 $S = \{x\}$ 是单点集，我们就简记为 $\uparrow x$ 和 $\downarrow x$。我们令 $\mathrm{Up}(X)$ 表示 X的所有上集构成的集合，并注意到 $\mathrm{Up}(X)$ 是一个完全分配的完备格，其中并与交分别是集合论意义上的并集与交集。

所谓有序拓扑空间，或简称有序空间，是指一个偏序集 X，它同时也是一个拓扑空间。有序拓扑空间的研究由 Nachbin 开创。他的主要研究成果汇集于 [Nac65]，本小节将其作为主要参考文献之一。

定义 2.1。若有序空间 X 是一个*Nachbin* 空间，则 X 是紧的，且序 $\leqslant$ 是闭的（在乘积空间 $X \times X$中）。

众所周知（见 [Nac65，第 26]页），序 $\leqslant$ 闭等价于以下序分离公理：对每个 x， $y \in X$，若 $x \not\leqslant y$ 则存在一个 U 的上集邻域 x和一个 V的下集邻域 y，使得 $U \cap V = \varnothing$。显然，这种分离称为序 *Hausdorff* 性（见 [McC68]）。特别地，它意味着 X 是一个豪斯多夫空间。

本文主要关注序零维空间，它是零维空间在序拓扑方面的类比。回顾一下，拓扑空间 X的子集若同时是闭集和开集，则称为既开又闭；若零维空间 满足其开闭子集构成 X 上拓扑的一个基，则称 X 为零维空间。对于有序空间 X，令 $\mathrm{ClopUp}(X)$ 表示 X的开闭上集所组成的集合。

一般而言，我们将序拓扑性质称为“序-P”，例如序零维性。有些作者将这类空间称为零维有序空间（例如， [Nai00]）。由于后一说法也可能被理解为恰好具有零维性质的有序空间，我们倾向于使用“序-P”这一说法，以避免不必要的混淆。

定义 2.2。设 X 为一个有序空间。

(1)（Priestley 分离）若对每个 x， $y \in X$，只要 $x \not\leqslant y$，就存在一个开闭上集 U，使得 $x \in U$且 $y \notin U$，则称 X 满足*Priestley* 分离公理。

(2)（序零维性）若满足以下条件，我们称其为 X 序零维

(a) X 满足 Priestley 分离公理，且

(b) 集合 $\{U \setminus V\colon\ U,\ V \in \mathrm{ClopUp}(X)\}$ 是该拓扑的一个基。

备注 2.3. 显然，Priestley 分离蕴含序 Hausdorff 性。此外，由于 $U \setminus V$对每个 U而言都是凸集，$V \in \mathrm{ClopUp}(X)$，每个序零维空间都有一个由开闭凸集构成的基，因此是局部凸的（参见 [Nac65，第 27]页）。

与序零维空间密切相关的一类有序空间是 Priestley 空间，它们在分配格表示理论中发挥着核心作用。

定义 2.4. [DP02，第 258] 一个有序空间 X 是 *Priestley* 空间，如果它是紧的且满足 Priestley 分离公理。

定理 2.5 (Priestley 对偶，[Pri70])。范畴 Pries （由 *Priestley* 空间及连续保序映射构成）与范畴 DLat （由分配格及格同态构成）对偶等价。

Priestley 对偶与布尔代数的 Stone 对偶密切对应。我们简要回顾函子对对象的作用，因为后文将用到这些内容。对于每个 Priestley 空间 X，我们将其与对偶分配格 $\mathrm{ClopUp}(X)$相联系；对于每个连续保序映射$f\colon\ X \to Y$，则将其与格同态 $f^{-1}\colon \mathrm{ClopUp}(Y) \to \mathrm{ClopUp}(X)$相联系。

对于每个分配格 D，我们关联一个 Priestley 空间 $\mathrm{Spec}(D)$，它由 D 的素滤子构成，按包含关系排序，并由基 $\{\varphi(a) \setminus \varphi(b)$ 生成拓扑：$a,\ b \in D\}$，其中

$$\varphi(a) = \{P \in \mathrm{Spec}(D) : a \in P\}.$$

对于每个格同态 $f\colon D \to D'$，我们关联一个连续保序映射$f^{-1}\colon \mathrm{Spec}(D') \to \mathrm{Spec}(D)$。

我们将自由使用以下关于 Priestley 空间的众所周知的事实（例如，参见 [Pri84，命题 2。6] 以及 [DP02，第 11] 章）：

事实 2.6。对于每个 Priestley 空间 X，有：

(1) X 是 Nachbin 空间。因此，若 F 是 X 的闭子集，则 $\uparrow F$ 和 $\downarrow F$ 都是闭的。(2) 若 F 和 G 是 X 的闭子集，且 $\uparrow F \cap \downarrow G = \varnothing$，则存在 X 的开闭上集 U，使得 $F \subseteq U$ 且 $G \subseteq X \setminus U$。(3) 集合 $U,\ V \in \mathrm{ClopUp}(X)\}$ 构成 X 上拓扑的一个基。因此，每个既开又闭的 $W \subseteq X$ 都可写为 $W = \bigcup_{i=1}^{n} (U_i \setminus V_i)$，其中 $U_i,\ V_i$ 是开闭上集。

3 序紧化与 Priestley 序紧化

序紧化的概念在有序空间这一框架下有两种自然的推广。其中较为严格的一种，Nachbin 已经研究过 [Nac65], 我们称之为*N*-序紧化；较为一般的一种则由 Blatter 后来提出 [Bla75], 并逐渐成为更通行的定义。

定义 3.1。一个映射 $f\colon X \to Y$，其定义域和值域均为有序空间，称为序嵌入，如果

- f 是一个拓扑嵌入；
- $x \leqslant y$ 当且仅当 $f(x) \leqslant f(y)$。

定义 3.2。 设 X 是一个有序空间。

(1) X 的一个序紧化 是一个有序对 (Y, e)，其中 Y 是 Nachbin 空间，且 $e\colon X \to Y$是序嵌入，使得 $e[X]$ 在 Y中稠密。(2) 若序 $\leqslant_Y$ 是 Y 上 $\leqslant_X$ 在乘积映射 $e \times e\colon X \times X \to Y \times Y$下的像的闭包，则称序紧化 (Y, e) 为*N*-序紧化 。

备注 3.3。 在不会引起混淆时，我们将 X 与其在 Y中的像 $e[X]$ 等同，把X 视为 Y的稠密子空间，并将 Y 视为 X的序紧化。于是， Y 是 X 的 N-序紧化，当且仅当 X 上的序在 Y上的序中稠密。

一个经典结果指出，拓扑空间 X 存在序紧化，当且仅当它是完全正则的；在这种情况下，所有紧化的（等价类的）集合具有自然的偏序，而 Stone–Čech 紧化 βX 是此偏序下最大的紧化 [Eng89，第 166-168]页。这些结果推广到了序紧化的情形 [Bla75]。

定义 3.4。 [Nac65，第 II 节。1] 有序空间 X 是 完全序正则的 ，如果

(1) 对每个 $x,\ y \in X$，若 $x \not\leqslant y$ ，则存在连续保序的 $f\colon X \to [0,\ 1]$ ，使得 $f(x) > f(y)$。
(2) 对每个 $x \in X$ 以及满足 $x \notin F$的闭集 F ，存在连续保序的$f\colon X \to [0,\ 1]$和连续反序的 $g\colon X \to [0,\ 1]$，使得 $f(x) = 1 = g(x)$ 且 $F \subseteq f^{-1}(0) \cup g^{-1}(0)$。

定理 3.5。 [Bla75，定理 1.5(i)] 有序空间存在序紧化，当且仅当它是完全序正则的。

我们还有序紧化上的一个显然的序：

定义 3.6。设 $(Y_1,\ e_1)$ 和 $(Y_2,\ e_2)$ 是完全序正则空间 X的序紧化。若存在连续保序映射 $f\colon Y_2 \to Y_1$ ，使得 $f \circ e_2 = e_1$，则记作 $(Y_1,\ e_1) \preceq (Y_2,\ e_2)$ 。

由于 $e_1[X]$ 在 Y_1中稠密，这样的 f 映射总是满射。此外，与紧化的情形一样，我们有 $(Y_1,\ e_1) \preceq (Y_2,\ e_2)$ 且 $(Y_2,\ e_2) \preceq (Y_1,\ e_1)$ 当且仅当存在序同胚 $f\colon Y_1 \to Y_2$，使得 $f \circ e_1 = e_2$。这在序紧化的集合（等价类）上定义了一个偏序 [Bla75，第 57],页，记作 $\mathcal{K}(X)$。

该偏序集的最大元由 Nachbin 构造 [Nac65，附录 2]，其方法是将 Stone–Čech 紧化的构造推广到有序空间的情形。我们称之为***Nachbin*** 序紧化，并记作 ηX。[2] 值得指出的是， ηX 事实上是一个 N-序紧化 [Nac65，第 103]页。与 Stone–Čech 紧化类似，Nachbin 序紧化具有以下泛映射性质：

[2]Nachbin 序紧化有时记作 $\beta_0 X,\ \beta_1 X$ （例如参见 [Cho79；Ric93]），或 nX （例如参见 [Bez+06；BM10]）。

定理 3.7。（例如，参见 [Cho79，第 56]页）若 Z 是一个 ***Nachbin*** 空间，则每个连续保序映射 f：$X \to Z$ 都有唯一的连续保序延拓 g： $\eta X \to Z$。

关于 ηX 的各种构造，请参见 [Cho79，第 56–57]页。与 Stone-ˇCech 紧化一样， ηX 的构造较为复杂，但如果 X 是序零维的，事情就简单多了。

定义 3.8。 [KS91；BM10] 若称一个 Y 的序紧化 X 为***Priestley*** 序紧化， Y 如果它是 Priestley 空间（等价地， Y 它是序零维的）。

我们指出， X 具有 Priestley 序紧化，当且仅当 X 它是序零维的[BM10，定理 3。5]。对于这样的 X，令 $\mathcal{K}_0(X)$ 为 $\mathcal{K}(X)$ 中由 Priestley 序紧化组成的子偏序集。偏序集 $\mathcal{K}_0(X)$ 可以用 [BM10]中研究的特殊集合环来描述：

定义 3.9。

(1) 偏序集 X 的上集环是一个集合族 $\mathcal{R} \subseteq \mathsf{Up}(X)$，在有限并和有限交下封闭（特别地， $\mathcal{R}$包含 $\varnothing$ 和 X）。(2) 若对于任意 x， $y \in X$ 和 $x \not\leqslant y$，都存在 $A \in \mathcal{R}$ 使得 $x \in A$ 且$y \notin A$，则称 $\mathcal{R}$ 为***Priestley***环。(3) 若 X是一个有序空间，则若 Priestley 环 $\mathcal{R}$ 满足 $\{U \setminus V \mid U,$ $V \in \mathcal{R}\}$ 是 X上拓扑的一个基，就称它为***Priestley*** 基。令 $\mathfrak{PB}(X)$ 为 X的 Priestley 基集合。

下面推广了零维空间的斯通紧化的相应结果 [Dwi61，定理 13。1] （另见 [MG68]）：

定理 3.10。 [BM10，定理 5。2] 对于序零维空间 X，偏序集 $(\mathcal{K}_0(X),\ \preceq)$同构于 $(\mathfrak{PB}(X),\ \subseteq)$。

注3.11。定理3.10 中的同构将每个 Priestley 序紧化 $(Y,\ e)$ 与 X 的 Priestley 基

$$\mathcal{R}_Y := \{e^{-1}(U) : U \in \mathsf{ClopUp}(Y)\},$$

以及对 X 的每个 Priestley 基 $\mathcal{R}$，对应的 Priestley 序紧化为 $(\mathsf{Spec}(\mathcal{R}),\ e)$，其中 $\mathsf{Spec}(\mathcal{R})$ 是 $\mathcal{R}$ 的 Priestley 空间，并且 e: $X \to \mathsf{Spec}(\mathcal{R})$ 定义为

$$e(x) = \{U \in \mathcal{R} : x \in U\}.$$

对于 X 的 Priestley 序紧化 $(Y,\ e)$，令

$$\mathcal{B}_Y := \{e^{-1}(W) : W \in \mathsf{Clop}(Y)\}.$$

那么 $\mathcal{B}_Y$ 是 X 的布尔基（也就是说， $\mathcal{B}_Y$ 是 $\mathsf{Clop}(X)$ 的布尔子代数，并且是 X 上拓扑的一个基）。

定义 3.12。 设 X 是序零维的，且 $(Y,\ e)$ 是X的 Priestley 序紧化。若对于所有 W， $V \in \mathcal{B}_Y$，相关的 Priestley 基 $\mathcal{R}_Y$是一个***N*-基**，则称之为

$$\uparrow W \cap \downarrow V = \varnothing \Longrightarrow \exists K \in \mathcal{R}_Y : W \subseteq K \text{ and } V \subseteq X \setminus K.$$

下一个定理刻画了哪些 Priestley 序紧化是 N-序紧化。

定理 3.13。 设 X 是序零维的，且 $(Y、e)$ 是 X 的 *Priestley* 序紧化。则 $(Y、e)$ 是 *N*-序紧化，当且仅当 $\mathcal{R}_Y$ 是 *N*-基。

证明。为简化记号，我们假设 X 是 Y 的子空间，且 e 是恒等映射（见注 3.3）。首先假设 Y 是 X 的 N-序紧化。则 $\leqslant_Y$ 是 $\leqslant_X$ 在 Y^2 中的闭包。设 $W、V$ 是 Y 中的闭开集，使得 $\uparrow_X(W\cap X)\cap\downarrow_X(V\cap X)=\varnothing$，其中 $\uparrow_X(W\cap X)$ 表示 $W\cap X$ 在 X 中的上集，而 $\downarrow_X(V\cap X)$ 表示 $V\cap X$ 在 X 中的下集。我们证明 $\uparrow W\cap\downarrow V=\varnothing$ 属于 Y。根据假设，$\uparrow_X(W\cap X)\cap\downarrow_X(V\cap X)=\varnothing$，因此 $\leqslant_X\cap(W\times V)=\varnothing$。由于 Y 是 N-序紧化，$\leqslant_Y$ 是 $\leqslant_X$ 的闭包。因此，$\leqslant_Y\cap(W\times V)=\varnothing$，从而 $\uparrow W\cap\downarrow V=\varnothing$。由于 Y 是 Priestley 空间，根据事实 2.6.2，我们可以找到 Y 的一个开闭上集 U，使得 $W\subseteq U$ 且 $V\cap U=\varnothing$。令 $K=U\cap X$，即完成了 $\mathcal{R}_Y$ 是 N-基的证明。

反过来，假设 Y 不是 X的 N-序紧化。那么存在 (x,y) in$\leqslant_Y$，使得 (x,y) 不在 $\leqslant_X$的闭包中。因此，存在 Y的闭开集 W,V，使得$(x,y)\in W\times V$，但 $(W\times V)\cap\leqslant_X=\varnothing$。于是，$\uparrow_X(W\cap X)\cap\downarrow_X(V\cap X)=\varnothing$。我们证明不存在满足 $W\cap X\subseteq K$和 $(V\cap X)\cap K=\varnothing$的 $K\in\mathcal{R}_Y$。反设存在这样的 K。由于 $K\in\mathcal{R}_Y$，存在 Y的开闭上集 U，使得 $K=U\cap X$。因为 X 在 Y中稠密，所以有$U=U\cap X=K$。~~这意味着~~ ~~$W\cap X\subseteq U$~~，因此 $W=W\cap U\subseteq U$。此外，~~$(V\cap X)\cap K=\varnothing$~~，所以 $(V\cap X)\cap U=\varnothing$，进而 $V\cap U=V\cap X\cap U=\varnothing$。由于 ~~$x\in U$~~且 U是 Y的上集，我们有 $y\in U$。但是 $y\in V$，因此 $V\cap U\neq\varnothing$，矛盾。■

注记 3.14。 定理3.13 让人联想到 [Bla75，定理 1。6]，该定理刻画了所有 X 的序紧化中的 N-序紧化。

对于序零维空间 X，显然存在其最大的 Priestley 基，即由所有开闭上集组成的基 ClopUp(X)。因此，X 存在最大的 Priestley 序紧化，我们将其记为 η_0X。它可以通过取 ClopUp(X) 的 Priestley 空间来构造。

正如记号所示，η_0X 是零维空间 Banaschewski 紧化的一种推广β_0X X [Ban55] (另见 [Ban63])。经典结果表明，零维空间的 Banaschewski 紧化 X 与 X 的 Stone-Cech 紧化一致，当且仅当 X 是强零维的。对于 η_0X与 ηX一致的情形，我们也有类似情况；为此需要加强序零维性的概念:

定义 3.15。 设 X 是一个有序空间。

(1)（完全序分离）设 $A\subseteq X$ 是一个上集，$B\subseteq X$ 是一个下集，且 $A\cap B=\varnothing$。如果存在一个连续保序的 $f\colon X\to[0,\ 1]$，使得 $A\subseteq f^{-1}(1)$ 且 $B\subseteq f^{-1}(0)$，则称 A 与 B 完全序分离。
(2)（强普利斯特利分离）如果每当 $A,\ B$ 完全序分离时，都存在一个开闭上集 U，使得 $A\subseteq U$ 且 $B\subseteq X\setminus U$，则称 X 满足强普利斯特利分离公理。**(3)**（强序零维性）如果 X 满足强普利斯特利分离公理，则称其为强序零维的。

对于完全序正则空间，强序零维性蕴含序零维性 [BM10，命题 4。2]。由于每个紧序空间都是完全序正则的（见[Nac65，第 46]页），我们得到 Dwinger 结果的一般化 [Dwi61，定理 10。2]:

命题 3.16. 设 X 是一个 Nachbin 空间。以下条件等价。

(1) X 是一个 Priestley 空间;

(2) X 是序零维的;

(3) X 是强序零维的。

证明。 由于 X 是一个 Nachbin 空间，我们有 (3)⇒(2)⇒(1)。为证明 (1)⇒(3)，设 A, B 是完全序分离的。则 $\uparrow$闭包$(A) \cap \downarrow$闭包$(B) = \varnothing$。因此，存在一个开闭上集 U 使得 $A \subseteq U$ 并且 $B \subseteq X \setminus U$ (见事实 2.6。2)，证毕。 ■

命题 3.17. 设 X 是一个完全序正则空间。以下条件等价: t.

(1) X 是强序零维的；(2) ηX 是一个 Priestley 空间；(3) $\eta_0 X \cong \eta X$。

证明。 (1)⇔(2) 这已在 [Nai00，定理 2 中证明。9](另见 [BM10，命题 4。4]).(2)⇒(3) 若 ηX 是一个 Priestley 序紧化，则 $\eta X \preceq \eta_0 X$，因此 $\eta X \cong \eta_0 X$.(3)⇒(1) 若 $\eta X \cong \eta_0 X$，显然 ηX 是一个 Priestley 空间，因为 $\eta_0 X$也是如此。 ■

4 Heyting 与 Esakia 序紧化

本小节将发展那些产生 Esakia 空间的 Priestley 序紧化理论。由于 Esakia 空间是 Heyting 代数的 Priestley 对偶 [Esa74], ，这类序紧化在直觉主义逻辑及相关系统的研究中具有重要意义。

定义 4.1。 设 X 是一个有序空间。我们称

(1) 若序 $\leqslant$在 X 上是连续的，则

(i) 对每个 $x \in X$， $\uparrow x$ 都是闭的，且 (ii) U 开 $\implies \downarrow U$ 是开集;

(2) 若 X 是连续有序的，则 $\leqslant$ 是连续序;

(3) 若 X 是一个*Esakia* 空间，则 X 是一个连续有序 Stone 空间。

Esakia 空间由 Esakia 引入 [Esa74] ，当时称为“混合体”（拓扑与序的混合），旨在为 Heyting 代数提供对偶理论。此后，这些空间得到了广泛研究，如今通常称为 Esakia 空间。一个有序空间 X 成为 Esakia 空间有若干等价刻画。我们仅列出以下两种，并请感兴趣的读者参阅[Esa19，定理 3.1。2]了解更多。

定理 4.2。 对于有序 *Stone* 空间 X，以下各项等价。

(1) X 是 *Esakia* 空间。

(2) X 是一个 *Priestley* 空间，且 U *open* $\Longrightarrow \downarrow U$ 是开集。

(3) $\downarrow x$ 对每个 $x \in X$ 都是闭集，且 $\uparrow A = \uparrow \overline{A}$ 对每个 $A \subseteq X$都是闭集。

根据 Esakia 对偶，Heyting代数之间的 Heyting 同态在对偶意义下由其 Esakia 空间之间满足以下附加条件的连续保序映射刻画：

定义 4.3。一个保序映射 $f: X \to Y$ 在偏序集之间是一个*p*-态射，如果对于所有$x \in X$ 和 $y \in Y$，从 $f(x) \leqslant y$ 可以推出存在 $x' \geqslant x$ 使得 $f(x') = y$（见图 1）。

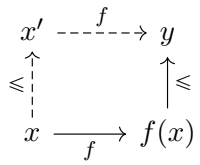

图 1

注 4.4。

(1) 众所周知（例如，参见 [Esa19，命题 1.4。12]），对于保序映射 $f: X \to Y$，以下条件等价：

- f 是一个 p-态射。
- 若 U 是 X 的上集，则 $f[U]$ 是 Y 的上集。
- 对每个 $x \in X$，$\uparrow f(x) \subseteq f[\uparrow x]$;
- 对每个 $y \in Y$，$f^{-1}[\downarrow y] \subseteq \downarrow f^{-1}[y]$。

(2) 值得指出的是，虽然序同胚必然是 p-态射，但并非每个序嵌入都是 p-态射。

定理 4.5 (Esakia 对偶，[Esa74])。范畴 Esa 由 *Esakia* 空间和连续 *p*-态射构成，与HA 范畴（由 *Heyting* 代数和 *Heyting* 同态构成）对偶等价。

Esakia 对偶是 Priestley 对偶的一个受限版本（注意，Esa 既不是Pries 的满子范畴，HA 也不是 DLat的满子范畴）。关于 Esakia 空间，我们将直接使用以下众所周知的事实（参见例如 [Esa19]）：

事实 4.6。

(1) Esakia 空间的每个闭上集都是一个 Esakia 空间。

(2) 如果 X 是一个 Esakia 空间，那么格 ClopUp(X) 是一个 Heyting代数，其中 Heyting 蕴涵的计算方式为

$$U \to_{\mathsf{ClopUp}(X)} V := X \setminus \downarrow (U \setminus V) = \{x \in X : \uparrow x \cap U \subseteq V\}$$

对于每个 U，$V \in$ ClopUp(X)。

（3）设 X，Y是连续有序空间，因此 ClopUp(X) 和 ClopUp(Y) 是 Heyting 代数。则连续保序映射 $f: X \to Y$ 是 p-态射，当且仅当 $f^{-1}:$ ClopUp$(Y) \to$ ClopUp(X) 是 Heyting 同态，这等价于

$$f^{-1}\downarrow(U \setminus V) \subseteq \downarrow f^{-1}[U \setminus V]$$

对每个 U，$V \in$ ClopUp(Y)。

(4) 一个 Heyting 同态 $f: H \to H'$ 是单射，当且仅当 $f^{-1}:$ Spec$(H') \to$ Spec(H) 是满射 .

设 X 是序零维的，Y 是 X 的 Priestley 序紧化，而 $\mathcal{R}_Y$ 是相应的 X 的 Priestley 基。根据 Esakia 对偶，Y 是 Esakia 空间，当且仅当 $\mathcal{R}_Y$ 是 Heyting代数。然而，$\mathcal{R}_Y$ 未必是 ClopUp(X) 的 Heyting 子代数，下面将看到这一点。

例 4.7。集合 X 由自然数组成，赋予平凡序和离散拓扑，显然是序零维的。我们令 $Y := X \cup \{\infty\}$ 为 X 的单点紧化，并通过以下方式给Y定义序：$x \leqslant y$ 当且仅当 $x = y$ 或 $y = \infty$（见图 2）。

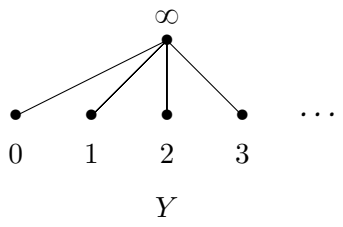

图2

众所周知（例如，参见 [Esa19，定理3.2。4]），Y是一个 Esakia 空间，因此 $\mathcal{R}_Y$ 是一个 Heyting代数。然而，ClopUp(X) 是幂集 $\wp(X)$，显然 $\mathcal{R}_Y$ 不是$\wp(X)$ 的 Heyting 子代数（例如，若 $U = X \setminus \{0\}$，则 $U \to_{\mathcal{R}_Y} \varnothing = \varnothing$ 而 $U \to_{\wp(X)} \varnothing = \{0\}$）。

这引出了偏序集的上集环的以下两个概念。

定义4.8。我们称偏序集 X 上的 Priestley 环 $\mathcal{R}$

(1) 若 $\mathcal{R}$ 是 Heyting代数，则称其为 *Heyting* 环;

(2) 若 $\mathcal{R}$ 是 Up(X) 的 Heyting 子代数，则称其为 *Esakia* 环。

由此便引出了序零维空间的以下两种基的概念。

De定义 4.9. 我们称序零维空间 X 的 Priestley 基 $\mathcal{R}$

(1) 为 *Heyting* 基，如果 $\mathcal{R}$ 是 Heyting 环;

(2) 为 *Esakia* 基，如果 $\mathcal{R}$ 是 Esakia 环。

令 $(\mathfrak{CB}_H(X), \subseteq)$ 为 Heyting 基的偏序集，$(\mathfrak{CB}_E(X), \subseteq)$ 为 X 的 Esakia 基的偏序集。这些偏序集各自都会导出一些特殊的 Priestley 序紧化，我们将在下文介绍。

定义 4.10. 设 X 是序零维的。我们称 Y为 X的 Priestley 序紧化

(1) 一个 *Heyting* 序紧化，如果 Y 是一个 Esakia 空间；

(2) 若它是 Heyting 序紧化，且对每个 $x \in X$， $\uparrow_X x$ 在$\uparrow_Y x$ 中稠密，则称其为 *Esakia* 序紧化 。

定理 4.11。 设 X 是序零维的。 X 的 *Priestley* 序紧化 Y 满足

(1) 当且仅当 $\mathcal{R}_Y$ 是 *Heyting* 基时，它是 *Heyting* 序紧化；

(2) 当且仅当 $\mathcal{R}_Y$ 是 *Esakia* 基时，它是 *Esakia* 序紧化。

证明。 (1) 根据 Esakia 对偶， Y 是 Heyting 序紧化，当且仅当 $\mathsf{ClopUp}(Y)$ 是 Heyting代数。由于 $\mathcal{R}_Y$ 同构于 $\mathsf{ClopUp}(Y)$，这等价于 $\mathcal{R}_Y$ 是 Heyting 基。

(2) 首先假设 Y是 X的 Esakia 序紧化。设 E， $F \in \mathcal{R}_Y$。那么存在 U， $V \in \mathsf{ClopUp}(Y)$ 使得 $E = U \cap X$ 且 $F = V \cap X$。我们证明

$$E \to_{\mathsf{Up}(X)} F = (U \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} V) \cap X.$$

一个包含关系是显然的：如果 $x \in (U \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} V) \cap X$，那么 $x \in X$和 $\uparrow_Y x \cap U \subseteq V$，所以 $\uparrow_X x \cap E \subseteq F$，从而 $x \in E \to_{\mathsf{Up}(X)} F$。对于另一个包含关系，假设 $x \in X$，但$x \notin U \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} V$。于是存在 $y \geqslant_Y x$使得 $y \in U \setminus V$。由于 Y是 X的 Esakia 序紧化，集合 $\uparrow_Y x \cap X$ 在 $\uparrow_Y x$中稠密。因此，存在 $y' \in \uparrow_Y x \cap X$ 满足$y' \in U \setminus V$。于是， $x \notin (U \cap X) \to_{\mathsf{Up}(X)} (V \cap X)$。这表明 $\mathcal{R}_Y$是 $\mathsf{Up}(X)$的 Heyting 子代数，从而 $\mathcal{R}_Y$是 X的 Esakia 基。

反之，假设 $\mathcal{R}_Y$是 X的 Esakia 基。回顾 $\varphi(A) = \{x \in Y : \text{对于每个 } A \in \mathcal{R}_Y, \ A \in x\}$，我们有：

断言 4.12. $\varphi(E \to_{\mathcal{R}_Y} F) = \varphi(E) \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} \varphi(F)$ 对每个 E， $F \in \mathcal{R}_Y$。

证明。 包含关系 $\varphi(E \to_{\mathcal{R}_Y} F) \subseteq \varphi(E) \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} \varphi(F)$ 显然。对于另一个包含关系，假设 $y \notin \varphi(E \to_{\mathcal{R}_Y} F)$。考虑以下族

$$\mathcal{K} = \{\varphi(A) : A \in \mathcal{R}_Y, y \in \varphi(A)\} \cup \{\varphi(E) \setminus \varphi(F)\}.$$

如果 $\mathcal{K}$ 不具有有限交性质，那么存在 $A \in \mathcal{R}_Y$ 满足 $y \in \varphi(A)$且$\varphi(A) \cap \varphi(E) \subseteq \varphi(F)$，因此 $\varphi(A \cap E) \subseteq \varphi(F)$，进而 $A \cap E \subseteq F$。由于 $\mathcal{R}_Y$是一个 Esakia 基，$A \subseteq E \to_{\mathcal{R}_Y} F$，所以 $y \in \varphi(A)$ 意味着 $y \in \varphi(E \to_{\mathcal{R}_Y} F)$，矛盾。因此， $\mathcal{K}$ 具有有限交性质。由于 Y是紧的， $\bigcap\{\varphi(A) : A \in \mathcal{R}_Y, \ y \in \varphi(A)\} \cap (\varphi(E) \setminus \varphi(F)) \neq \varnothing$。对于交集中的每个 z，我们有 $y \leqslant z$且 $z \in \varphi(E) \setminus \varphi(F)$，因此 $\uparrow y \cap \varphi(E) \nsubseteq \varphi(F)$，进而$y \notin \varphi(E) \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} \varphi(F)$。 ■

由于 $\mathcal{R}_Y$ 是 Heyting代数， Y 是 Esakia 空间。因此，要证明 Y 是 X 的 Esakia 序紧化，只需证明对于每个 $x \in X$， $\uparrow_X x$ 在 $\uparrow_Y x$ 中稠密。根据我们将 X 与其在 Y 中的像相认的方式，我们将 $x \in X$ 与 $e(x) = \{A \in \mathcal{R}_Y$ 相认： $x \in A\}$。因此，我们必须验证 $\uparrow_Y e(x) \cap e[X]$ 在 $\uparrow_Y e(x)$ 中稠密。设 $\uparrow_Y e(x) \cap W \neq \varnothing$，其中 $W \subseteq Y$ 既开又闭。根据事实 2.6.3，存在 E、$F \in \mathcal{R}_Y$，使得 $\uparrow_Y e(x) \cap (\varphi(E) \setminus \varphi(F)) \neq \varnothing$。因此， $\uparrow_Y e(x) \cap \varphi(E) \nsubseteq \varphi(F)$，从而 $e(x) \notin \varphi(E) \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} \varphi(F)$。根据断言 4.12，$\varphi(E) \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} \varphi(F) = \varphi(E \to_{\mathcal{R}_Y} F)$，所以 $e(x) \notin \varphi(E \to_{\mathcal{R}} F)$；按定义，这意味着 $x \notin E \to_{\mathcal{R}_Y} F$，因此 $\uparrow_X x \cap E \nsubseteq F$。于是，存在 $y \in X$，使得 $x \leqslant_X y$ 且 $y \in E \setminus F$，所以 $e(y) \in \varphi(E) \setminus \varphi(F)$，从而 $\uparrow_Y e(x) \cap e[X] \cap W \neq \varnothing$。因此， Y 是 X 的 Esakia 序紧化。 ■

给定两个 Heyting 序紧化 $(Y_1,\ e_1)$ 和 $(Y_2,\ e_2)$，定义 $(Y_1,\ e_1) \preceq_H (Y_2,\ e_2)$，条件是存在一个连续保序映射 $f\colon\ Y_2 \to Y_1$，使得 $f \circ e_2 = e_1$。与序紧化的情形一样，$(Y_1,\ e_1) \preceq_H (Y_2,\ e_2)$ 且 $(Y_2,\ e_2) \preceq_H (Y_1,\ e_1)$，当且仅当存在一个序同胚 $f\colon Y_1 \to Y_2$，使得 $f \circ e_1 = e_2$；这在 Heyting 序紧化的等价类集合上定义了一个偏序。我们将这个偏序集记为 $(\mathcal{K}_H(X),\ \preceq_H)$，并注意到它是 X 的 Priestley 序紧化偏序集 $(\mathcal{K}_0(X),\ \preceq)$ 的子偏序集。

我们还令 $(\mathcal{K}_E(X), \preceq_E)$ 表示 $(\mathcal{K}_H(X), \preceq_H)$ 的子偏序集，其中包含 Esakia 序紧化。换言之，$\preceq_E$ 是 $\preceq_H$ 在 $\mathcal{K}_E(X)$ 上的限制。有趣的是，序 $\preceq_E$ 由 Esakia 序紧化之间的连续 p- 态射所决定：

命题 4.13. 设 (Y_1, e_1) 和 (Y_2, e_2) 是序零维空间 X 的两个 Esakia 序紧化。那么，$(Y_1, e_1) \preceq_E (Y_2, e_2)$ 当且仅当存在连续 p-态射 $f\colon\ Y_2 \to Y_1$，使得 $f \circ e_2 = e_1$。

证明。一边显然。对于另一边，设 $(Y_1, e_1) \preceq_E (Y_2, e_2)$，于是存在连续保序映射 $f\colon\ Y_2 \to Y_1$，使得 $f \circ e_2 = e_1$。只需证明 f 是 p-态射。设 $\mathcal{R}_{Y_1}$,$\mathcal{R}_{Y_2}$ 是相应的 Priestley 基，由定理 4.11.1 可知它们是 Heyting 基。由定理 3.10，$\mathcal{R}_{Y_1} \subseteq \mathcal{R}_{Y_2}$。由于 (Y_1, e_1) 和 (Y_2, e_2) 是 Esakia 序紧化，$\mathcal{R}_{Y_1}$ 和$\mathcal{R}_{Y_2}$ 是 Esakia 基。因此，它们各自都是 $\mathrm{Up}(X)$ 的 Heyting 子代数。于是，$\mathcal{R}_{Y_1} \subseteq \mathcal{R}_{Y_2}$ 蕴含 $\mathcal{R}_{Y_1}$ 是 $\mathcal{R}_{Y_2}$ 的 Heyting 子代数。但根据 Esakia 对偶，f 是 p-态射。■

由定理3.10 和4.11可立即得到：

定理 4.14. 设 X 是序零维的。

(1) $(\mathcal{K}_H(X), \preceq_H)$ 与 $(\mathfrak{EB}_H(X), \subseteq)$同构。(2) $(\mathcal{K}_E(X), \preceq_E)$ 与 $(\mathfrak{EB}_E(X), \subseteq)$同构。

请注意，并非每个 Heyting 序紧化都是 N-序紧化。事实上，在例 4.7中，Y 是 X的 Heyting 序紧化，但它不是 N-序紧化：对于任意自然数 n，都有 $n \leqslant_Y \infty$，但 $(n,\ \infty)$ 不属于 $\leqslant_X$的闭包。另一方面，每个 Esakia 序紧化确实都是 N-序紧化，下面将对此进行说明。

命题 4.15. 设 X 是序零维的。如果 Y 是 Esakia 序紧化，那么 Y 是 N-序紧化。

证明。我们不妨假设 X 是 Y 的稠密子空间，且 e 是恒等映射。令 $y)$ 属于 $\leqslant_Y$，使得 $x \leqslant_Y y$，并令 $W \times V$ 为 $(x$ 的基本闭开邻域，$y)$。只需证明 $(W \times V) \cap \leqslant_X \neq \varnothing$。由于 $x \leqslant_Y y$、W，V 在 Y 中既开又闭，且 $\leqslant_Y$ 连续，因此 $W \cap {\downarrow_Y} V$ 是 Y 的非空既开又闭子集，所以 $(W \cap {\downarrow_Y} V) \cap X \neq \varnothing$。因此，存在 $x' \in X$ 使得 $x' \in W \cap {\downarrow_Y} V$。由于 Y 是一个 Esakia 序紧化，$X \cap {\uparrow_Y} x'$ 在 ${\uparrow_Y} x'$ 中稠密。因此，由于 ${\uparrow_Y} x' \cap V \neq \varnothing$，存在 $y' \in X$，满足 $x' \leqslant_Y y'$ 和 $y' \in V$。由于 $\leqslant_Y \cap X^2 = \leqslant_X$，我们得到 $x' \leqslant_X y'$，所以 $(W \times V) \cap \leqslant_X \neq \varnothing$，从而 Y 是一个 N-序紧化。■

请注意，并非每个序零维空间都存在 Heyting 或 Esakia 序紧化。事实上，若 X 是一个非 Esakia 的 Priestley 空间，则 X 不存在任何 Heyting 序紧化，因此也不存在任何 Esakia 序紧化。这引出了以下定义。

定义 4.16. 我们称序零维空间 X

(1) ***H*-序零维** 若满足 X，则存在 Heyting 序紧化（意即 $\mathcal{K}_H(X) \neq \varnothing$）；**(2)** ***E*-序零维** 若满足 X，则存在 Esakia 序紧化（意即 $\mathcal{K}_E(X) \neq \varnothing$）。

接下来我们证明，存在 Esakia 序紧化等价于序是连续的。

Theo注 4.17. 对于序零维空间 X，以下条件等价: $t.$

(1) X 是连续有序的。(2) $\eta_0 X$ 是 *Esakia* 序紧化。(3) X 是 *E*-序零维的。

(4) $\mathsf{ClopUp}(X)$ 是 *Esakia* 基。

证明。 (2)⇔**(4)** 这由定理 4.14得出。2。

(2)⇒(3) 这是显然的。

(1)⇒(4) 令 E, $F \in \mathsf{ClopUp}(X)$。那么 $E \setminus F$ 是既开又闭的，因此 $\downarrow(E \setminus F)$ 也是既开又闭的，因为 X 是连续有序的。因此， $E \to_{\mathsf{Up}(X)} F \in \mathsf{ClopUp}(X)$，从而 $\mathsf{ClopUp}(X)$ 是 $\mathsf{Up}(X)$ 的 Heyting 子代数。

(3)⇒(1) 设 Y 是 X 的 Esakia 序紧化。只需证明，若 X 中的 U 是开集，则 X 中的 $\downarrow_X U$ 是开集。我们有 $U = W \cap X$，其中某个开集为 $W \subseteq Y$。由于 Y 是 Esakia 空间， Y 中的 $\downarrow_Y W$ 是开集。我们证明

$$\downarrow_X U = \downarrow_Y W \cap X.$$

一个包含关系是显然的。对于另一个包含关系，假设 $x \in X$ 和 $x \in \downarrow_Y W$。那么 $\uparrow_Y x \cap W \neq \varnothing$。由于 Y 是 Esakia 序紧化， $\uparrow_X x$ 在 $\uparrow_Y x$ 中稠密，因此 $\uparrow_X x \cap W \neq \varnothing$。所以，存在 $y' \in U$ 使得 $x \leqslant y'$，从而得到 $x \in \downarrow_X U$。因此， X 中的 $\downarrow_X U$ 是开集。■

然而 ，H-序零维性并不等价于 E-序零维性 :

例4.18. 令 C 为配备通常序的康托空间。我们固定一个稠密子集 D 属于 C，令 $D' = \{x' : x \in D\}$ 为 D的一个副本，并定义 X 为拓扑和 $C \cup D'$，其上的序由 $\{(x$的自反闭包给出， $x') : x \in D\}$ 位于 $C \cup D'$ 之内。在图 3 中，白色圆圈表示点 $y' \notin D'$，该点未包含在我们的空间 $C \cup D'$ 中。

容易验证 X 是序零维的。此外，由于 D' 在 X中既开又闭，若 X 是连续有序的， $\downarrow D' = D' \cup D$ 就在 X中既开又闭，这将意味着 D 在 C中既开又闭，矛盾。因此， X 不是连续有序的，故根据定理4.17，它不是 E-序零维的。

我们证明 X 是 H-序零维的。令 C' 为 C 的一个副本，并令 Y为 $C \cup C'$ 的拓扑和，其上的序由 $\{(x$的自反闭包给出， $x') : x \in C\}$ 在 $C \cup C'$中。为说明 Y 是一个 Esakia 空间，显然对于每个 $y \in Y$， $\uparrow y$ 都是闭的。此外， Y的每个既开又闭集都具有 $U \cup V'$的形式，其中 U， V 是 C中的既开又闭集，因此 $\downarrow(U \cup V') = (U \cup V') \cup V$是 Y中的既开又闭集。另外， X 是 Y的一个（同胚于）稠密子空间。因此， Y是 X的一个 Heyting 序紧化，从而 X 是 H-序零维的。

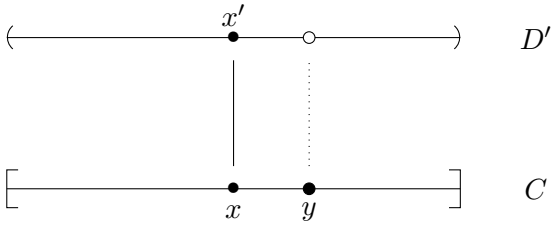

图3：不是 E-序零维的 H-序零维空间 1

5 局部 Esakia 空间与函子性

˘ 拓扑学中的一个经典结果是，取 Stone–Čech 紧化是从完全正则空间范畴到紧 Hausdorff 空间范畴的包含关系的左伴随（参见，例如 [Joh82，第 130—131]页）。同样，取 Banaschewski 紧化是从零维（Hausdorff）空间范畴到 Stone 空间范畴的包含关系的左伴随[Ban55]。后一个结果可以推广为： η_0 是从序零维空间范畴到 Priestley 空间范畴的包含关系的左伴随（参见，例如 [BM10，注 3。10]）。我们将对 Esakia 空间范畴证明同样的结果Esa 。正如我们在定理 4.17中所看到的，当X 是 E-序零维时， $\eta_0 X$ 是 X的最大 Esakia 序紧化。因此，一个自然的研究范畴似乎是 E-序零维空间范畴。然而，嵌入 $X \hookrightarrow \eta_0 X$ 一般不一定是 p-态射。因此，我们需要将注意力限制在那些 E-序零维空间上，在这些空间中嵌入 $X \hookrightarrow \eta_0 X$ 确实是一个 p-态射。这就产生了局部 Esakia 空间的概念，而局部 Esakia 空间正是本节研究的主要对象。

引理 5.1. 设 X 是序零维的，且 Y 是 X的 Heyting 序紧化。若X 是 Y的一个上集，那么对于每个 $x \in X$， $\uparrow_X x$ 都是一个 Esakia 空间。

证明。 由于 Y是一个 Esakia 空间， $\uparrow_Y x$ 是一个 Esakia 空间（参见事实 4.6。1）。但由于 X 是 Y 的一个上集，因此有 $\uparrow_X x = \uparrow_Y x$，结论得证。 ■

鉴于引理 5.1，我们将把注意力限制在这样的序零维空间 X上：其中 $\uparrow x$ 对每个 $x \in X$都是一个 Esakia 空间。确保这一点的关键在于 $\uparrow x$ 是紧的。

定义 5.2.

(1) 若有序空间 X 像紧 ，则称其为像紧空间，若对每个 $x \in X$， $\uparrow x$ 都是紧的。

(2) 若有序空间 X 局部 *Esakia* ，即其为 E-序零维且像紧，则称其为局部 Esakia 空间。(3) 令 LocEsa 表示局部 Esakia 空间及连续 p-态射所构成的范畴。

注 5.3。

(1) 上述像紧空间的概念推广了一个广为人知的概念，即像有限偏序集——其中 $\uparrow x$ 对每个 x 都是有限的偏序集（这类偏序集最早见于[Bez+06，定义 4，6]“像有限”一词则见于 [BB08，定义 35]）。事实上，若有序空间 X 的拓扑是离散的，那么 X 它是像紧的，当且仅当它是像有限的。因此，Esakia 空间和像有限偏序集都是像紧空间的例子。

(2) 显然，Esa 是 LocEsa 的满子范畴。事实上，局部 Esakia 空间是 Esakia 空间，当且仅当它是紧的。因此，局部 Esakia 空间对 Esakia 空间的推广，正如局部 Stone 空间对 Stone 空间的推广一样。

下一个结果刻画了在何种条件下，X 是其 Esakia 序紧化中的一个上集。

命题 5.4. 设 X 是序零维的，且 Y 是 X的 Heyting 序紧化。那么，X 是 Y 的上集，当且仅当 X 是像紧的，且 Y 是 X的 Esakia 序紧化。

证明。 首先假设 X 是 Y中的一个上集。那么 X 由引理5.1可知是像紧的。此外，由于 X是 Y中的一个上集，因此对每个 $x \in X$，都有 $\uparrow_X x = \uparrow_Y x$，于是 $\uparrow_X x$在 $\uparrow_Y x$中稠密，因而Y 是 X的 Esakia 序紧化。

反过来，假设 X 是像紧的，且 Y 是 X的 Esakia 序紧化。设 $x \in X$ 和 $x \leqslant_Y y$。考虑以下族

$$\mathcal{F} = \{\uparrow_Y x \cap U \cap X : y \in U\} \cup \{\uparrow_Y x \setminus (V \cap X) : y \notin V\},$$

其中 U，$V \in \mathsf{ClopUp}(Y)$。如果 $\mathcal{F}$不具有有限交性质，那么

$$\uparrow_Y x \cap U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap X \subseteq (V_1 \cup \ldots \cup V_m) \cap X.$$

对于某些 U_1、……、U_n、V_1、……、$V_m \in \mathsf{ClopUp}$。令 $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$且 $V = V_1 \cup \ldots \cup V_m$。则$U$、$V \in \mathsf{ClopUp}(X)$且 $\uparrow_Y x \cap U \cap X \subseteq V \cap X$。因此，$\uparrow_Y x \cap X \subseteq (Y \setminus U) \cup V$。由于 Y是 X的 Esakia 序紧化，$\uparrow_X x$ 在 $\uparrow_Y x$中稠密，所以

$$\uparrow_Y x = \overline{\uparrow_Y x \cap X} \subseteq (Y \setminus U) \cup V.$$

因此，$x \in U \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} V$，从而 $y \in U \to_{\mathsf{ClopUp}(Y)} V$，这与 $y \in U$和$y \notin V$相矛盾。于是，$\mathcal{F}$具有有限交性质；又因为 $\uparrow_Y x$ 是紧的，所以存在

$$y' \in \bigcap\{\uparrow_Y x \cap U \cap X : y \in U\} \cap \bigcap\{\uparrow_Y x \setminus (V \cap X) : y \notin V\}.$$

由于 y 和 y' 包含在 Y的相同开闭上集中，根据 Priestley 分离公理可知 $y = y'$，因此 $y \in X$，从而 X 是 Y的上集。■

由此，我们得到定理4.17 针对像紧空间的如下版本。

定理 5.5. 对于序零维空间 X，以下各项等价：

(1) X 是局部 *Esakia* 空间。(2) X 有一个 *Esakia* 序紧化 Y，其中 X 是上集。(3) $\eta_0 X$ 是一个 *Esakia* 序紧化，其中 X 是上集。

证明。 (3)⇒(2) 显然，而 (1)⇒(3) 由定理4.17 和命题5.4得出。我们证明 (2)⇒(1)。由命题 X 5.4 可知，5.4 是像紧的。我们证明 X 是连续有序的。设 $U \subseteq X$ 是开集。则 $U = V \cap X$ 对某个开集 $V \subseteq Y$成立。由于 X 是 Y的上集,

$$\downarrow_X U = \downarrow_X (V \cap X) = \downarrow_Y V \cap X$$

(因为 $x \in X$、$x \leqslant_Y y$和 $y \in V$意味着 $y \in V \cap X$）。由于 Y是一个 Esakia 空间，$\downarrow_Y V$是开集。因此，$\downarrow_X U$ 是开集，从而 X 是连续有序的。因此，只需应用定理4.17。■

设OZD为序零维空间及连续保序映射构成的范畴。正如本节开头所指出的，η_0 是嵌入Pries $\hookrightarrow$ OZD的左伴随。因此，每个 OZD-态射 $f\colon\ X \to Z$，其中 $X \in$ OZD 且 $Z \in$ Pries，都有唯一提升 $\eta_0 f\colon\ \eta_0 X \to Z$。我们给出该提升的一种便捷描述，并将 [Bez，引理 3推广。

命题 5.6. 设 $X \in$OZD、$Z \in$ Pries，且 $f\colon X \to Z$ 连续且保序。
(1) 唯一提升 $\eta_0 f\colon \eta_0 X \to Z$由 $(\eta_0 f)(x) = \bigcap \mathcal{F}_x^f \cap \bigcap \mathcal{I}_x^f$给出，对每个 $x \in \eta_0 X$均成立，其中

$$\mathcal{F}_x^f = \{\uparrow\overline{f[U]} : U \in \mathsf{ClopUp}(X), U \in x\} \text{ and } \mathcal{I}_x^f = \{\downarrow\overline{f[X \setminus V]} : V \in \mathsf{ClopUp}(X), V \notin x\}.$$

(2) 对每个 $x \in \eta_0 X$ 和 $U,\ V \in \mathbf{ClopUp}(Z)$,

$$x \in (\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V] \iff f^{-1}[U] \in x \text{ and } f^{-1}[V] \notin x.$$

证明。 (1) 设 $x \in \eta_0 X$。首先我们证明 $\bigcap \mathcal{F}_x^f \cap \bigcap \mathcal{I}_x^f$是一个单点集。若交集为空，则有

$$\uparrow\overline{f[U_1]} \cap \ldots \cap \uparrow\overline{f[U_n]} \cap \downarrow\overline{f[X \setminus V_1]} \cap \ldots \cap \downarrow\overline{f[X \setminus V_m]} = \varnothing$$

对某些 $U_1, \ldots, U_n, V_1, \ldots, V_m \in \mathbf{ClopUp}(X)$ 成立。这意味着

$$f[U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap (X \setminus V_1) \cap \ldots \cap (X \setminus V_k)] = \varnothing,$$

因此 $U_1 \cap \ldots \cap U_n \cap (X \setminus V_1) \cap \ldots \cap (X \setminus V_k) = \varnothing$，进而 $U_1 \cap \ldots \cap U_n \subseteq V_1 \cup \ldots \cup V_k$，这与 $U_1 \cap \ldots \cap U_n \in x$ 矛盾，但 $V_1 \cup \ldots \cup V_k \notin x$。
关于唯一性，若交集中包含 $y_1 \not\leqslant y_2$，则存在 $W \in \mathbf{ClopUp}(Z)$，使得 $y_1 \in W$且 $y_2 \notin W$。若 $f^{-1}[W] \in x$，则 $y_2 \in \uparrow\overline{ff^{-1}[W] \subseteq W}$；若 $f^{-1}[W] \notin x$，则$y_1 \in \downarrow\overline{ff^{-1}[Z \setminus W]} \subseteq Z \setminus W$。由此得到矛盾，唯一性的证明即告完成。

接下来证明 $\eta_0 f$ 是连续的。设 $W \in$ClopUp(Z)。我们证明

$$(\eta_0 f)^{-1}[W] = \bigcup\{\varphi(U) : \uparrow\overline{f[U]} \subseteq W\}.$$

若 $\uparrow\overline{f[U]} \subseteq W$且 $x \in \varphi(U)$，则根据构造有 $(\eta_0 f)(x) \in W$。反过来，若 $(\eta_0 f)(x) \in W$，则$\bigcap_{U \in x} \uparrow f[U] \subseteq W$。由紧致性，存在 U_1、……、U_n，使得 $U_i \in x$且 $\uparrow f[U_i] \subseteq W$。因此，令 $U = U_1 \cap \ldots \cap U_n$，便得到 $\uparrow f[U] \subseteq W$且 $U \in x$，故 $x \in \varphi(U)$。类似的论证表明，若 W 是 Z的既开又闭下集，则

$$(\eta_0 f)^{-1}[W] = \bigcup\left\{\eta_0 X \setminus \varphi(V) : \downarrow\overline{f[X \setminus V]} \subseteq W\right\}.$$

现在应用事实 2.6。3 得出 $\eta_0 f$ 是连续的。
接下来只需证明 $\eta_0 f$ 是保序的。设 $x, y \in \eta_0 X$ 满足 $x \leqslant y$，并令 $W \in \mathbf{ClopUp}(Z)$。若 $\eta_0 f(x) \in W$，则 $x \in (\eta_0 f)^{-1}[W]$，它是若干开闭上集的并，因此是一个上集。因此，$y \in (\eta_0 f)^{-1}[W]$，所以 $(\eta_0 f)(y) \in W$。于是，根据 Priestley 分离公理，$\eta_0 f(x) \leqslant \eta_0 f(y)$。

(2) 首先，假设 $(\eta_0 f)(x) \in U \setminus V$。若 $f^{-1}[U] \notin x$，则 $(\eta_0 f)(x) \in \downarrow\overline{ff^{-1}[Z \setminus U]}$由 (1) 可知。但 $\underline{ff^{-1}[Z \setminus U] \subseteq Z \setminus U}$，且由于后者是一个闭下集，我们得到$\downarrow ff^{-1}[Z \setminus U] \subseteq Z \setminus U$，这意味着 $(\eta_0 f)(x) \notin U$，矛盾。因此，$f^{-1}[U] \in x$，类似的论证可得 $f^{-1}[V] \notin x$。反过来，假设 $f^{-1}[U] \in x$且 $f^{-1}[V] \notin x$。由 (1) 可知，$(\eta_0 f)(x) \in \underline{\uparrow ff^{-1}[U]} \subseteq U$且 $(\eta_0 f)(x) \in \downarrow\underline{ff^{-1}[Z \setminus V] \subseteq Z} \setminus V$，因此 $(\eta_0 f)(x) \in U \setminus V$。■

我们利用命题 5.6 证明 η_0 是嵌入 Esa $\hookrightarrow$LocEsa的左伴随。为此，我们将用到以下经典结果：

命题 5.7.（Esakia 引理，[Esa74]）设 X 是一个 Esakia 空间，且 $\mathcal{F}$ 是一个非空闭子集的向下有向族（相对于包含关系），其中各集合均为 X的子集。那么

$$\downarrow\bigcap\{F : F \in \mathcal{F}\} = \bigcap\{\downarrow F : F \in \mathcal{F}\}.$$

注记 5.8。Esakia 引理可以在更一般的情形下证明；参见 [BBH15，引理 2。17]。

下一个结果推广了 [Bez+06，引理 4。3]。

命题 5.9. 设 X 是 E-序零维的。若 Z 是一个 Esakia 空间，且 $f\colon X \to Z$ 是一个连续 p-态射，那么唯一提升 $\eta_0 f\colon \eta_0 X \to Z$ 是一个 p-态射。

证明。根据注记 4.4。1，只需证明

$$(\eta_0 f)^{-1}[\downarrow y] = \downarrow(\eta_0 f)^{-1}[y]$$

对每个 $y \in Z$均成立。由于 Z 中的每个单点集都是所有包含它的闭开集的交集，根据事实2.6。3以及 Esakia 引理，

$$\downarrow(\eta_0 f)^{-1}[y] = \bigcap\{\downarrow(\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V] : y \in U \text{ and } y \notin V\},$$

其中 U，V 取遍 $\mathsf{ClopUp}(Z)$。我们证明

$$\downarrow(\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V] = (\eta_0 f)^{-1}[\downarrow(U \setminus V)].$$

由于 $\eta_0 f$是保序的，$\downarrow(\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V] \subseteq (\eta_0 f)^{-1}[\downarrow(U \setminus V)]$。对于反向包含关系，若$x \in (\eta_0 f)^{-1}[\downarrow(U \setminus V)]$，则 $x \in (\eta_0 f)^{-1}[Z \setminus (U \to_{\mathsf{ClopUp}(Z)} V)]$（见事实 4.6。2）。因此，根据命题 5.6。2，$f^{-1}[U \to_{\mathsf{ClopUp}(Z)} V] \notin x$。由于 f是连续的 p-态射，f^{-1}是一个 Heyting 同态（见事实 4.6。3）。因此，$f^{-1}[U] \to_{\mathsf{ClopUp}(X)} f^{-1}[V] \notin x$，从而

$$x \notin \varphi(f^{-1}[U] \to_{\mathsf{ClopUp}(X)} f^{-1}[V]) = \varphi(f^{-1}[U]) \to_{\mathsf{ClopUp}(\eta_0 X)} \varphi(f^{-1}[V]),$$

其中等式由命题 4.12 得出，因为 $\mathsf{ClopUp}(X)$ 是一个 Esakia 基。因此，存在$y \geqslant x$使得 $y \in \varphi(f^{-1}[U])$且 $y \notin \varphi(f^{-1}[V])$。于是，存在 $y \geqslant x$使得 $f^{-1}[U] \in y$且$f^{-1}[V] \notin y$。再次利用命题 5.6。2，$y \in (\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V]$，因此 $x \in \downarrow(\eta_0 f)^{-1}[U \setminus V]$。

因此，再次利用 Esakia 引理，

$$\begin{aligned}
\downarrow(\eta_0 f)^{-1}[y] &= \bigcap\{(\eta_0 f)^{-1}[\downarrow(U \setminus V)] : y \in U \text{ and } y \notin V\} \\
&= (\eta_0 f)^{-1}\bigcap\{\downarrow(U \setminus V) : y \in U \text{ and } y \notin V\} \\
&= (\eta_0 f)^{-1}\downarrow\bigcap\{U \setminus V : y \in U \text{ and } y \notin V\} \\
&= (\eta_0 f)^{-1}[\downarrow y],
\end{aligned}$$

因此 $\eta_0 f$ 是一个 p-态射。 ■

下面的结果使我们能够得出结论：Esa 是 LocEsa 的反射子范畴。

定理 5.10。 η_0： LocEsa $\to$ Esa 是包含函子Esa $\hookrightarrow$ LocEsa的左伴随。

证明。设 X 是一个局部 Esakia 空间。由于 X 是像紧的，嵌入 $X \hookrightarrow \eta_0 X$是连续 p-态射。此外，由于 X 是 E-序零维的，连续 p-态射$f\colon X \to Y$到 Esakia 空间 Y存在唯一提升 $\eta_0 f\colon \eta_0 X \to Y$，且此提升属于 Esa。因此，$\eta_0$: LocEsa到 Esa的函子是包含函子的左伴随 Esa $\hookrightarrow$LocEsa (例如，参见 [Mac78，第 91]页）。 ■

参考文献

.[Ban55] B. Banaschewski。《关于零维空间》。载于：《数学通讯》13.3–4（1955），第129–140页。[Ban63] B. Banaschewski。《关于 Wallman 紧化方法》。载于：《数学通讯》27.1–2（1963），第105–114页。[BB08] G. Bezhanishvili 和 N. Bezhanishvili。《原有限 Heyting代数》。载于：《序》25.3（2008），第211–227页。[BBH15] G. Bezhanishvili、N. Bezhanishvili 和 J. Harding。《模态紧豪斯多夫空间》。载于：J. Logic Comput. 25.1（2015），第1–35页。[BD74] R. Balbes 和 P. Dwinger。《分配格》。密苏里大学出版社，密苏里州哥伦比亚，1974。[Bez+06] G. Bezhanishvili、M. Gehrke、R. Mines 和 P. J. Morandi。《Heyting代数的原有限完备化与典范扩张》。载于：《序》23.2–3（2006），第143–161页。[Bla75] J. Blatter。《全序拓扑空间的序紧化》。载于：J. Approximation Theory 13.1（1975），第56–65页。[BM10] G. Bezhanishvili 和 P. J. Morandi。《Priestley环与 Priestley 序紧化》。载于：《序》28.3（2010），第399–413页。[Cho79] T.H. Choe。《偏序拓扑空间》。载于：An. Acad. Brasil. Ciênc. 51.1（1979），第53–63页。[DP02] B. A. Davey 和 H. A. Priestley。《格与序导论》。第二版。剑桥大学出版社，纽约，2002。[Dwi61] P. Dwinger。《布尔代数导论》。Physica出版社，1961。[Eng89] R. Engelking。《一般拓扑学》。第二版。Sigma纯数学丛书。德国柏林：Heldermann出版社，1989。[Esa19] L. Esakia。《Heyting代数》。G. Bezhanishvili 和 W. H. Holliday 编。A. Evseev 译。第50卷。逻辑趋势—Studia Logica文库。施普林格，查姆，2019。[Esa74] L. Esakia。《拓扑Kripke模型》。载于：《苏联数学文献》214（1974），第147–151页。[Geh14] M. Gehrke。《典范扩张、Esakia 空间与泛模型》。载于：《Leo Esakia论模态逻辑与直觉主义逻辑中的对偶性》。G. Bezhanishvili 编。多德雷赫特：施普林格荷兰，2014，第9–41页。[Joh82] P. T. Johnstone。《Stone 空间》。第3卷。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，剑桥，1982。[KS91] V. Koubek 和 J. Sichler。《关于积的 Priestley 对偶》。载于：Cahiers Topologie Géom. Différentielle Catég. 32.3（1991），第243–256页。[Mac78] S. Mac Lane。《工作数学家的范畴论》。第二版。施普林格纽约，1978。[McC68] S. D. McCartan。《拓扑有序空间的分离公理》。载于：Proc. Cambridge Philos. Soc. 64.4（1968），第965–973页。

[MG68] K. D. Magill 和 J.A. Glasenapp。“零维紧化与布尔环”。载于：《澳大利亚数学学会杂志》8.4 (1968)，第 755–765 页。[Nac65] L. Nachbin。拓扑与序。Van Nostrand数学研究。Van Nostrand，1965。[Nai00] K. R. Nailana。“（强）零维偏序空间”。载于：《纪念 *Bernhard Banaschewski* 论文集。Kluwer学术出版社，多德雷赫特，2000，第 445–456 页。[Pri70] H. A. Priestley。“利用有序Stone空间表示分配格”。载于：《伦敦数学学会通报》2 (1970)，第 186–190 页。[Pri84] H.A. Priestley。“有序集与分配格对偶性”。载于：《序：描述与作用。爱思唯尔，1984，第 39–60 页。[Ric93] T. A. Richmond。“有序紧化的偏序集”。载于：《澳大利亚数学学会通报》47.1 (1993)，第 59–72 页。

RodrigoNicolau Almeida逻辑、语言与计算
研究所 阿姆斯特丹大学 荷兰阿姆斯特丹，
1098XH
r.dacruzsilvapinadealmeida@uva.nl

Guram Bezhanishvili数学科学系
新墨西哥州立大学 美国新墨西哥州拉
斯克鲁塞斯，NM 88003
guram@nmsu.edu

Nick Bezhanishvili逻辑、语言与计算研究所
阿姆斯特丹大学 荷兰阿姆斯特丹，1098XH
n.bezhanishvili@uva.nl