arXiv:2512.22078v1 [math.CT] 26 Dec 2025

关于有限全序集范畴及相关范畴的札记。

MATSUOKA, TAKUO

Abstract. 本札记旨在汇集有关有限全序集范畴及若干相关范畴的事实。更具体地说，我们汇集了其中一些结果，这些结果将有助于按照我们 [3], 这项工作的思路研究迭代元代数理论；该工作属于高阶泛代数的一种。

Contents

1. 预备知识 1 1.1. 范畴与群胚 1 1.2. 偏序 2 1.3. 富化 4 2. Birkhoff 对偶 5 2.1. 对偶 5 2.2. 中间自对偶 6 2.3. 通过伴随映射描述 9 3. 代数运算 11 3.1. 泛幺半群上的泛模 11 3.2. 配对 14 3.3. 对偶结构的相互作用 15 参考文献 19

1. Preliminaries

本节介绍范畴论的若干内容，为后续论述做准备。

1.1. 范畴与群胚。

本节汇集了一些基本定义和事实。

定义 1.1. 给定一个范畴 $\mathcal{C}$，其**底层**群胚 $\mathcal{C}_0$ 是由与 $\mathcal{C}$ 相同的对象以及恰好以 $\mathcal{C}$ 中的同构为态射所构成的群胚，并且其中 $\mathcal{C}_0$ 的复合由 $\mathcal{C}$限制而来。

注 1.2。 存在一个函子 $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ ，它将$\mathcal{C}_0$ 中的每个对象和态射映射为 $\mathcal{C}$中的自身。

引理 1.3. 设 $\mathcal{C}$、 $\mathcal{D}$ 为范畴，且 $F\colon\ \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 为函子。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：06A05；次要分类：18C10、18M05、06D05、18A40。*Key words and phrases.* 泛代数，Birkhoff 对偶。

(1) 若 F 是忠实的，则对于每个范畴 $\mathcal{X}$，所诱导的函子

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{X},F)\colon \mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{D})$$

在函子范畴上是忠实的。(2) 此外，若群胚的底函子 $F_0\colon \mathcal{C}_0 \to \mathcal{D}_0$ 是全忠实的，则底群胚上的 $\mathrm{Fun}(\mathcal{X},F)_0$ 是全忠实的。

术语 1.4. 函子 F 若满足引理中的两个假设，则称为**单的**。

注 1.5. 这样的 F 在 [1] 中称为伪单的。我们采用这一术语只是为了简便，因为我们看不出还有其他单态性概念对这些笔记有帮助。

例 1.6. 对于一个范畴 $\mathcal{C}$，注 1.2 中的典范函子 $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ 是单的。

推论 1.7. 设 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个单函子。那么，对于每个范畴 $\mathcal{X}$，所诱导的函子

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{C}) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{D}) \times_{\mathrm{Fun}(\mathcal{X}_0,\mathcal{D}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{X}_0,\mathcal{C}_0)$$

是单的，其中目标是范畴的双范畴中的纤维积。

证明。只需注意到，该假设也意味着投影

$$\mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{D}) \times_{\mathrm{Fun}(\mathcal{X}_0,\mathcal{D}_0)} \mathrm{Fun}(\mathcal{X}_0,\mathcal{C}_0) \longrightarrow \mathrm{Fun}(\mathcal{X},\mathcal{D})$$

是全忠实的。 □

注 1.8。引理 1.3 的逆命题是：函子 $F\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是单的，当且仅当对每个小范畴 $\mathcal{X}$，函子 $\mathrm{Fun}(\mathcal{X},F)_0$ 是全忠实的。事实上，只需取 $\mathcal{X}$ 的两个例子即可，例如可缩群胚和记号 2.4 中的 [**1**]。（关于后一个例子，参见约定 1.23 或例 1.24。）

定义 1.9。双范畴 $\mathcal{C}$ 的**底层范畴**是一个以群胚的笛卡尔双范畴为富集范畴的范畴 $\mathcal{C}_1$，其对象是 $\mathcal{C}$ 的对象，并且满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}_1}(X,Y) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,Y)_0$$

对每一对对象 X, Y，$\mathcal{C}_1$ 中的复合是从 $\mathcal{C}$ 限制而来的。

注 1.10。我们有一个典范函子 $\mathcal{C}_1 \to \mathcal{C}$。

1.2. **偏序**。

记号 1.11. Cat 表示小范畴构成的双范畴（参见下文的注）。

注 1.12。所谓 **小**，我们始终指本质小。事实上，**我们从不试图使用或引入任何不在范畴等价下保持不变的概念**。

记号 1.13. Gpd 表示 Cat 中由小群胚构成的满子双范畴。

事实上，Gpd 是 Cat_1 中的。函子 $(-)_0\colon \mathsf{Cat}_1 \to \mathsf{Gpd}$ 是包含函子的右伴随，其余单位由注 1.2 中的典范函子 $\mathcal{C}_0 \to \mathcal{C}$ 给出，对每个 $\mathcal{C} \in \mathsf{Cat}_1$ 都成立。

记号 1.14. Set 表示集合范畴。

任何范畴都可以通过将其同态集视为相应的同伦离散群胚而看作一个双范畴。以这种方式看作双范畴的 Set 嵌入 Gpd 中，成为由小的同伦离散群胚构成的全子范畴。事实上，一个小的同伦离散群胚可以与其同构类集合等同起来。

在本节中，我们回顾这一等价关系如何推广为偏序集与某些小范畴之间的等价。

术语 1.15. A**同伦（**-1**）型**是一个其中所有元素都相等的集合。

同伦（-1）型是方便的真值，它们源自逻辑与集合之间的关系，如下所示。

定义 1.16. 给定一个命题 P，为简单起见，我们假设它可以表示为不使用变量“t”的形式，令

$$\mathrm{T}(\mathsf{P}) \;=\; \{t \in T \mid \underline{\mathsf{P}}\}, \tag{1.17}$$

其中 T 是一个终端集，而表达式“P”并不指定一个对象，而应替换为 P 的内容，并且该内容不使用变量“t”表示。（例如，如果 P 是命题“$T = 0$”，且该表达式在某个上下文中有意义，那么在该上下文中 $\mathrm{T}(\mathsf{P}) = \{t \in U \mid T = 0\}$，其中 U 是一个终端集。）

注 1.18。 在定义中选择终端集 T 无关紧要，因为 (1.17) 的右侧关于 T 是函子性的。

T(P) 是一个同伦 (-1)-类型，并表示 P 是否为真。更一般地，同伦 (-1)-类型可以是任意集合的子集的包含映射的纤维，这对应于该集合元素上的一个谓词。

注 1.19。 要将 T(P) 的定义扩展到任意命题 P，取一个变量 v（我们在定义 1.16 中假设它是“t”），且表达 P 时不必用到该变量。那么 $\mathrm{T}(\mathsf{P}) = \{\mathsf{v} \in T \mid \mathsf{P}\}$，其中表达式“v”和“P”应分别替换为 v 的符号以及一个不含变量 v 的 P 的表达式。

构造 1.20。 由一个偏序集 P，我们得到一个范畴 $\mathcal{P}$，其对象是 P 的一个元素，并且满足

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{P}}(x, y) \;=\; \mathrm{T}(\mathsf{P}(x, y))$$

对于 $\mathcal{P}$ 中的任意一对对象 x、y，其中，对于 P 中的元素 x、y，P(x, y) 表示命题

$$x \leq y \quad \text{in } P.$$

与以这种方式从偏序集得到的范畴等价的小范畴，其特征是：对每一对源和目标，其中的态射集合都是一个同伦 (-1)-型。

记号 1.21. Poset 表示 Cat 的满子双范畴，由这些小范畴组成。

术语 1.22. 偏序集的 2-**范畴是双范畴 Poset。**

Poset_1中每一对源和目标之间的态射群胚都是同伦离散的，因此 Poset_1 可视为通常意义下未经富化的范畴，即以 Set 富化的范畴。此外，由偏序集构造的 Poset_1对象之间，同伦离散群胚中的

Poset_1 中的态射可以与这些偏序集之间的非递增映射集合等同。因此，构造 1.20 给出了从通常的偏序集范畴（其中态射为非递增映射）到 Poset_1的一个等价。

约定 1.23. 我们通过这一等价，将偏序集范畴与Poset_1 等同，并将后者的每个对象与相应的偏序集等同，因此，我们通常用“偏序集”指 Poset 的一个对象。

例 1.24. 同伦(-1)-类型范畴可以与记号 2.4 中的偏序集 $[\mathbf{1}]$ 等同。

事实上，Poset 中任意一对源和目标之间的态射范畴都属于 Poset，因此可以将 Poset 视为在笛卡尔范畴 Poset_1中富化的范畴。这是 Poset_1 在自身中的富化（按术语 1.25），源于其笛卡尔闭性（见注 1.26）。请注意，偏序集的底群胚在同伦意义下是离散的，并且就是通常意义上偏序集的底集。

1.3. **富化**。本节中，我们介绍一些术语。

术语 1.25。设 $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是幺半范畴之间的松幺半函子。

当 F 被视为遗忘函子时，对于一个在 $\mathcal{V}$ 中富集的范畴 $\mathcal{C}$，带有 F 的松幺半结构的 $\mathcal{W}$-富集范畴**底层** $\mathcal{C}$，是由 $\mathcal{C}$ 经由 F 诱导出的 $\mathcal{W}$-富集范畴。

反过来，给定一个在 $\mathcal{W}$ 中富集的范畴 $\mathcal{D}$，$\mathcal{D}$ 在 $\mathcal{V}$ 中的**富化**是一个以 $\mathcal{D}$ 为**底层**的 $\mathcal{V}$-富集范畴。

注 1.26。通常，例如在 [2] 中，F 是由 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ 的单位对象**1** 表示的函子 $\mathcal{V} \to$Set，其松幺半结构来自**1** 的幺半结构。特别地，在 $\mathcal{W}$ 中富集的范畴就是通常意义下的范畴。这个遗忘函子是闭对称幺半范畴在自身中富集时所采用的函子。

对于一般情形，通常要求 $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 与相应的遗忘函子到 Set 的映射在 $\mathcal{V}$ 和 $\mathcal{W}$ 上交换，可能是合理的。

术语 1.27。幺半范畴$\mathcal{V}$ 上的**典范遗忘函子** 是由 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ 中的单位幺半群**1** 表示的到 Set 的松幺半函子。

在富化语境之外，这个函子可能并不 适用于每个幺半范畴。

例 1.28。余笛卡尔幺半范畴上的典范遗忘函子是取终端幺半群为常值的。也就是说，它分解为从终端幺半范畴到 Set 的松幺半函子；该函子刻画 Set 中的终端幺半群。

以下断言的有效性很容易证明。

命题 1.29。设 $F\colon \mathcal{V} \to \mathcal{W}$ 是一个幺半范畴之间的松幺半函子，并且与典范遗忘函子相容。设 $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个 $\mathcal{V}$-富集范畴之间的函子，且 $\mathcal{W}$-富集函子 $F_*f\colon F_*\mathcal{C} \to F_*\mathcal{D}$ 有一个左伴随（例如）。那么，f 有一个左伴随，使得该伴随诱导出 $\mathcal{W}$-富集伴随，如果 F 反映同构。

2. Birkhoff duality

本节中，我们将 Birkhoff 对偶作为范畴等价来研究有限全序集。

2.1. 对偶。

记号 2.1. Ord 表示 Poset 的全子范畴[1]，其对象为有限全序集。

注 2.2。 Ord 范畴对于泛代数很有用，因为它是泛幺半群所在的幺半范畴。

幺半结构将在第 3 节中考察。本节中，我们只考虑其作为范畴的结构。

底群胚 Ord_0 具有离散同伦类型，例如可以将其描述为自然数集合。

我们来考虑另一个范畴，它恰好有一个到 Ord 的单忘却函子。

定义 2.3。 范畴 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的定义如下。

- $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$中的对象 是一个非空全序集合。
- 其中此类对象之间的态射是一个非递增映射，并且保留最小元和最大元。

遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \to$Ord 是单的。其在底群胚上诱导的全忠实函子可以视为集合之间的一个单射，例如可以理解为严格正整数到所有自然数中的包含。

作为偏序集，$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 中的每个对象都是一个格，而 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 实际上是有界格范畴的一个满子范畴。此外，Birkhoff 对偶（有限分配格与有限偏序集之间）中一个与布尔情形大不相同的部分给出了等价 $\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \overset{\text{其}}{\simeq}$Ord。（对偶的布尔部分给出了有限布尔代数与有限集合之间的等价，而 Ord 的对象在某种意义上是有限偏序集中最远离集合的。）

本节余下部分，我们回顾这一由“对偶对象”给出的等价。

记号 2.4。 $[\mathbf{1}]$ 表示 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$的始对象。

我们希望给出：

- 对象 $[\mathbf{1}]$在 Ord中相对于遗忘函子 Ord $\to$Set 的 Ord-对象结构；该函子会遗忘序和有限性；以及
- 对象 $[\mathbf{1}]$ 在 Ord ($\supset$Ord中) 相对于遗忘函子复合 Ord $\to$ Ord $\to$ Set 的 Ord中-对象结构。

为此做准备，我们通过松单子的遗忘函子 $\mathrm{Poset}_1 \to$Set，将 Ord 富化于 Poset_1。具体做法是，将（富化后的）Ord 视为 Poset_1 中一个全 Poset_1-富化子范畴。

记号 2.5. 对于 Ord 的对象 I, J，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(I, J)$ 表示 Ord 的这种富化中的同态偏序集。

换句话说，$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(I, J)$ 表示视为偏序集的 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Poset}}(I, J)$。$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(I, J)$ 的底集正是我们最初所说的 Ord 中态射的集合。

回想一下，我们希望通过遗忘函子提升由 $[\mathbf{1}]$ 表示的 Ord 上的预层。注意，遗忘函子 Ord $\to$ Set 可分解为包含函子

$\mathbf{Ord} \hookrightarrow \mathbf{Poset}_1$，再接上遗忘函子 $\mathbf{Poset}_1 \to$Set。具体而言，我们已将该预层提升为函子 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(-, [\mathbf{1}])\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Poset}_1$，以遗忘函子 $\mathbf{Poset}_1 \to \mathbf{Set}$ 为目标；$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(-, [\mathbf{1}])$ 的函子性源于 $\mathbf{Poset}_1$ 的闭性。（这种函子性也可通过松单子的遗忘函子 $\mathbf{Poset}_1 \to$Set 由 $\mathbf{Poset}_1^{\mathrm{op}}$ 中的单位幺半群表示而得到。）此外，这个提升的像落在 $\mathbf{Poset}_1$ 的全子范畴 Ord 中。因此，我们已将该预层提升为一个以 Ord 为目标的反变函子。最后，这个反变函子来自一个函子 $\mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$。（参见引理 1.3 或其推论。）由此实现了我们提出的第二个目标。

为实现另一个目标，要将由 $[\mathbf{1}]$ 表示的 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上的预层提升为到 $\mathbf{Poset}_1$，的反变函子，只需将 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 丰富于 $\mathbf{Poset}_1$ 中。我们通过以下方式进行丰富：使遗忘函子 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}} \to \mathbf{Ord}$ 以这样的方式得到丰富，即对于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 中任意一对对象 I、J，所诱导的映射

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}(I, J) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathrm{Ord}}(I, J)$$

同态偏序集之间的映射将是全忠实的。（请记住，对我们而言，偏序集的映射是一个函子。）这是可行的，因为我们需要作为所需全忠实函子的底层函子的映射确实是单射，也就是说，它是同伦离散群胚之间的全忠实函子。此外，所得的提升 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}(-, [\mathbf{1}])\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}}$ 它 $\to \mathbf{Poset}_1$ 落在 $\mathbf{Poset}_1$ 的全子范畴 Ord 中。由此实现了我们的第一个目标。

因此，在 Ord 与 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 之间，我们得到了两个方向各一个反变函子，它们通过遗忘函子提升可表预层。此外，这些预层的表示对象具有共同的底集。

为了说明这些函子互为逆等价，并由 Birkhoff 对偶给出，由于我们赋予 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的 $\mathbf{Poset}_1$ 富化是有界格范畴 Lattice 的通常富化的限制，只需注意遗忘函子 Lattice $\to \mathbf{Poset}_1$ 也是单的。

2.2. **中间自对偶**。本节将 Birkhoff 对偶置于一个结构更丰富的对偶之中。

记号 2.6。$\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 表示非空全序集范畴，其态射为保持最大元的非递增映射；其定义方式与定义 2.3 中 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的定义方式类似。

注 2.7。$\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 与泛代数相关，因为它是 Ord 上的一个模范畴，而泛幺半群上的泛模就在其中。（模的侧别由以下约定决定：这些约定导出模结构函子 $\mathbf{Ord} \to \mathbf{End}(\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}})$ 的幺半范畴变异性，并规定 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 在哪一侧是 $\mathbf{End}(\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}})$ 上的模（因此，侧别名称与变异性的对应关系是任意的）。不过，Ord 等价于其幺半对范畴。对范畴 $\mathcal{C}$ 上的（左或右）Ord-模结构，一种不涉及侧别或变异性的描述是：它是 $\mathcal{C}$ 上的一个单子；而在 Ord-模范畴 $\mathcal{C}$ 中，泛幺半群上的模将是 $\mathcal{C}$上的结构单子所对应的代数。）

第 3.1 节将考察 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 上的 Ord-模结构。

遗忘函子 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}} \to$Ord 是单的。因此，遗忘函子 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 是单的。

$[\mathbf{1}]$ 同样会是 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 中的对偶对象。为此，像我们处理 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$那样，在 $\mathbf{Poset}_1$中对 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 进行富化。然后，函子 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}}(-, [\mathbf{1}])\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}}$ 到 $\to \mathbf{Poset}_1$，用于提升由 $[\mathbf{1}]$ 表示的 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 上的预层，落在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$中。

记号 2.8. $\mathbb{D}\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{t}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 表示由此得到的函子。

定理 2.9。$\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{D}\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$ 的逆。

证明。 这些函子互为伴随，其单位映射 $\epsilon\colon \mathrm{id} \to \mathbb{D}\mathbb{D}$ 与余单位映射重合。因此，只需证明 ϵ 是一个同构。映射 $\epsilon\mathbb{D}\colon \mathbb{D} \to \mathbb{D}\mathbb{D}\mathbb{D}$ 是一个截面，但对于每个对象 $I \in \mathrm{Ob}\,\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$，我们都有$\mathbb{D}I \simeq I$。结论立即得出。□

我们将把这种对偶与 Birkhoff 对偶联系起来。

记号 2.10。 $\mathbb{B}\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \rightleftarrows \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}\colon \mathbb{B}$ 表示 Birkhoff 对偶函子。（我们对这两个函子使用相同的符号。这是简写：一个写作 $\mathbb{B}$，另一个写作 $\mathbb{B}^{-1}$。）

注意，每个遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}$ 都有一个左伴随。

记号 2.11。 这些伴随函子按照 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \xleftarrow{i} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xleftarrow{t} \mathrm{Ord}$ 中的记号表示。

这些伴随实际上是 Poset_1 中的富集伴随。

注意，范畴 Ord、$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$、$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 属于本质上是 Set-富范畴的范畴，例如 $\mathrm{Cat}_1 \times_{\mathrm{Gpd}} \mathrm{Set}$。

命题 2.12. 以下方块

$$\begin{array}{ccccc}
\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} & \hookrightarrow & \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} & \hookrightarrow & \mathrm{Ord} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{B}} \\
\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{t} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{op}} & \xrightarrow{i} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}^{\mathrm{op}} \\
\downarrow{\scriptstyle \mathbb{B}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{D}} & & \downarrow{\scriptstyle \mathbb{B}} \\
\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} & \hookrightarrow & \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} & \hookrightarrow & \mathrm{Ord}
\end{array}$$

交换，其中垂直箭头分别是对偶同构。

证明。 我们证明下方方块的交换性。这就足够了，因为上方方块中的每个垂直箭头，都是其正下方函子的逆。

要证明左方交换图交换，只需证明这两个函子经单遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \hookrightarrow \mathrm{Poset}_1$ 后相等。然而，与遗忘函子复合所得的两个复合函子，由 Poset_1-富化伴随给出的同构联系起来。

右方交换图随即交换，因为它是由左方交换图中函子的伴随函子构成的方块。或者，也可以用类似于证明左方交换图时所用的论证，直接证明该方块交换。□

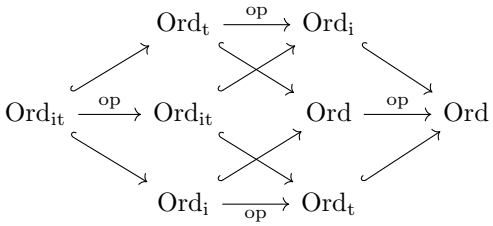
因此，这些对偶性给出了序列 $\mathrm{Ord} \xrightarrow{t} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{i} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$与 $\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$ 它 $\hookrightarrow \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$ 它 $\hookrightarrow \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$之间的同构。

在命题的左方交换图中，每个 Birkhoff 对偶函子 $\mathbb{B}$ 与一个单函子后复合后的结果，都以一种不依赖于这两个函子的方式加以描述。事实上，这引出了一个不依赖于 $\mathbb{B}$的 $\mathbb{B}$ 本身的描述（或者等价地，不依赖于 $\mathbb{B}$ 与一个无关同构复合后的描述）。让我们来找出这种描述。基本上，我们希望描述此前与 $\mathbb{B}$ 后复合的那个单函子的像，而不使用该单函子或其源。

记号 2.13. $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$ 表示非空全序集及保持最小元的非递增映射所构成的范畴。

尽管这个范畴可通过取偏序集（及范畴）的对偶的函子与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 等价，但我们仍将其视为 Ord 的一个不同的（非满）子范畴；通过上述 Ord 上的函子，它会与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 互换。

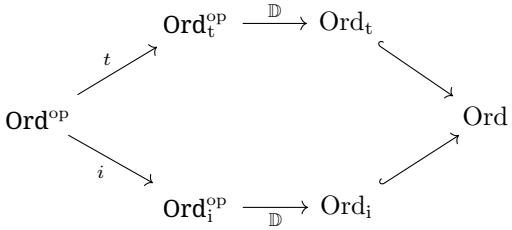
记号 2.14. op 表示在图表的每个位置取对偶的函子



记号 2.15. 遗忘函子的左伴随 $\mathrm{Ord_{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord_i} \hookrightarrow \mathrm{Ord}$ 记作 $\mathrm{Ord_{it}} \overset{t}{\leftarrow} \mathrm{Ord_i} \overset{i}{\leftarrow} \mathrm{Ord}$。

记号 2.16. $\mathbb{D}\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{Ord_i}$ 表示对偶同构。

引理 2.17. 图表



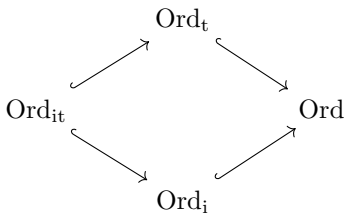
交换。

证明。 由命题 2.12 可知，上方的复合等于

$$\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \xrightarrow{\mathbb{B}} \mathrm{Ord_{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}$$

根据同一命题针对 $\mathrm{Ord_i}$ 的版本，下方的复合也等于该复合。□

引理 2.18。该方块



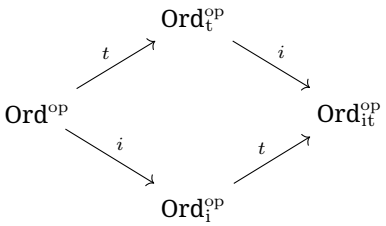
是一个拉回方块。

证明。 纤维积的底群胚是同伦离散群胚，它对应于在集合范畴中取的同伦离散底群胚的纤维积。纤维积中的映射集合是映射集合的纤维积。□

由命题 2.12 可得，$\mathbb{B}\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ord_{it}}$ 是到纤维积的函子，它对应于引理 2.17 的交换图。

我们可以得到 $\mathbb{B}\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}} {}_{\mathbb{C}} \to \mathrm{Ord}$ 的类似描述，但为了更清楚地展示，命题 2.12 中序列的对偶同构及其对应的

$\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 拼接成引理 2.18 中拉回方块的一个同构，并与方块

(2.19)


注 2.20。如记号 2.14 所示，引理 2.18 中的方块与其翻转后的自身同构，这些同构为 op。这些同构 op 也会翻转方块（2.19）。通过 op 共轭对偶同构所得到的两个翻转方块之间的同构，与该对偶同构（翻转后）相同。事实上，对偶同构与 op 交换（op 是 op 的"对偶"），因为 $[\mathbf{1}]^{\mathrm{op}} = [\mathbf{1}]$（$[\mathbf{1}]$没有什么特别之处）。在下一节中，我们将直接描述对偶同构与 op 的复合。

2.3. **通过伴随映射的描述**。在本节中，我们将对上述所讨论的对偶性给出另一种描述。

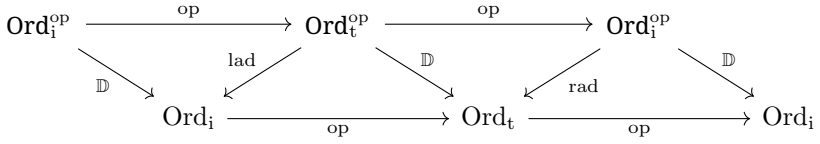
还有一个等价

(2.21)
$$\mathrm{lad}\colon \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{op}} \xleftarrow{\sim} \mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} : \mathrm{rad},$$

其中函子定义如下。

定义 2.22。函子 (2.21) 将每个对象映射到其自身。对于一个态射，即偏序集的适当函子，lad（分别为 rad）将其映射到其左伴随（分别为右伴随）。

定理 2.23。图表



交换。

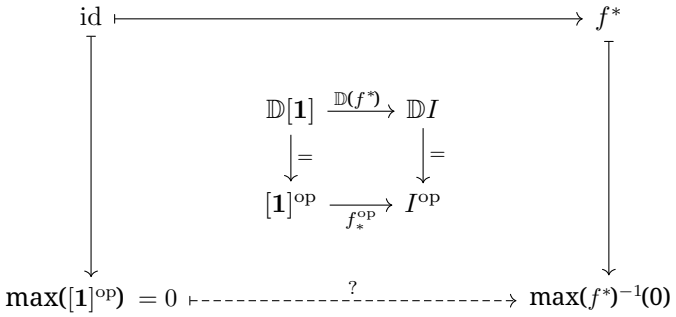
证明。根据对称性，只需证明最右侧三角形交换（或者也可以另外使用任意平行四边形的交换性）。因此，设有一个态射 $f^*\colon\ I \to J$属于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$。我们希望证明，映射 $\mathbb{D}(f^*)\colon\ \mathbb{D}J \to \mathbb{D}I$ 属于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 与映射 $f_*^{\mathrm{op}}\colon\ J^{\mathrm{op}} \to I^{\mathrm{op}}$一致，其中 f_* 表示映射 $\mathrm{rad}(f^*)\colon\ J \to I$属于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$。（$f_*^{\mathrm{op}}$与 Ord 中的 f_*相同，但我们选择使用这一记号，是希望更清楚地表明该态射是在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$中考虑的。）

我们可以假设 $J = [\mathbf{1}]$。事实上，设我们已经在此情形下得到了结论。那么，对于一般情形，我们只需证明：对于每个态射 $j_*\colon\ [\mathbf{1}] \to J$属于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$，映射 $f_{\mathrm{op}*}$ 和 $\mathbb{D}(f^*)$ 都被 $j_*^{\mathrm{op}}\colon\ [\mathbf{1}]^{\mathrm{op}} \to J^{\mathrm{op}}$等化。然而，在图表中

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbb{D}[\mathbf{1}] & \xrightarrow{\mathbb{D}(j^*)} & \mathbb{D}J & \xrightarrow{\mathbb{D}(f^*)} & \mathbb{D}I \\
\downarrow{=} & & \downarrow{=} & & \downarrow{=} \\
[\mathbf{1}]^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[j_*^{\mathrm{op}}]{} & J^{\mathrm{op}} & \xrightarrow[f_*^{\mathrm{op}}]{} & I^{\mathrm{op}}
\end{array}$$

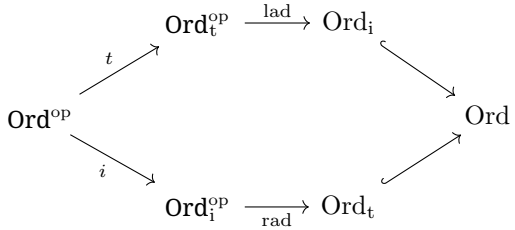
在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 中，其中 j^* 表示映射 $\mathrm{lad}(j_*)\colon\ [\mathbf{1}] \leftarrow J$ 属于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$，我们已经知道外侧方形和左侧方形都交换，因此得出所需结论。

因此，假设 $J = [\mathbf{1}]$。那么该结果可由图表推出



在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 中，其中 $0 = \min[\mathbf{1}],$，并且通过计算 $f_*(0) = \max(f^*)^{-1}(0)$ 得到右伴随函子的值。□

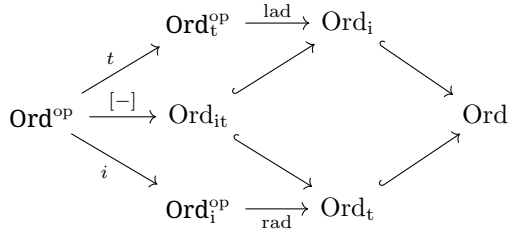
推论 2.24。图表



交换。

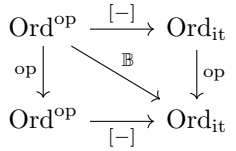
证明。 这由定理和引理 2.17 得出。 □

记号 2.25。 $[-]\colon \mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{it}} = \mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times_{\mathbf{Ord}} \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$（引理 2.18）表示使图表成立的唯一函子



交换（见推论）。对于 $\mathbf{Ord}$ 的一个对象 I，$[-](I)$ 记作 $[I]$。

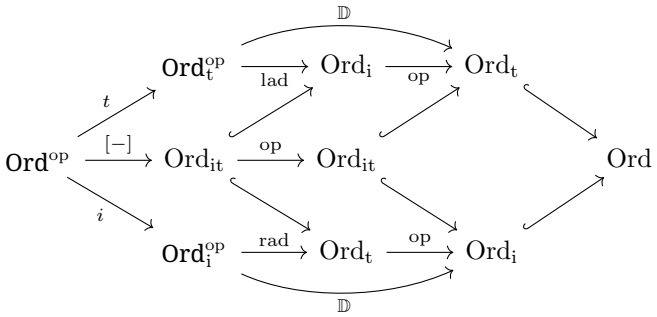
引理 2.26。图表



交换。

证明。 鉴于利用引理 2.17 将 Birkhoff 函子描述为一个取值于纤维积的函子，上三角的交换性可由

图表

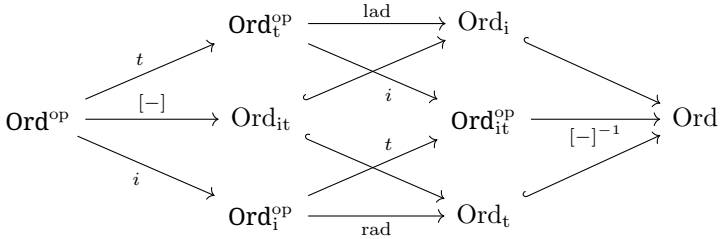


根据定理 2.23，该图表交换。

下三角形的交换性由此以及 $\mathbb{B}$ 与 op 的交换性得出，也可由与上文类似的图表得出。□

注 2.27。 这可以作为 $[-]$ 的定义。

由引理、定理 2.23 和命题 2.12，我们得到以下结果。**命题 2.28**。 图表



交换，从而得到拉回方块的一个同构。

3. Algebraic operations

在本节中，我们研究伯克霍夫型对偶性如何与相关范畴上的一些代数结构相互作用。

3.1. **泛幺半群上的泛模**。 在本节中，我们研究我们的一些范畴上的一些简单代数结构。

为了明确我们的约定，我们先明确给出一些熟悉概念定义的一种（或许并不常见的）表述。

在我们的术语中，除非另有说明，我们将含幺性也包括在**结合性** 之内。

定义 3.1. 设 $\mathcal{V}$ 是一个幺半范畴，其幺半运算为 $\otimes$。那么，一个在 $\mathcal{V}$ 中**丰富化**的范畴 $\mathcal{C}$ 由以下信息组成。

- 一个由 $\mathcal{C}$ 的**“对象”**组成的集合 $\mathrm{Ob}\,\mathcal{C}$ 。
- 对于 $\mathcal{C}$ 中的每一对对象 X ，都有一个 $\mathcal{V}$ 中的对象 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[X]$ 。
- 假设给定以下数据。– 一个 I $\mathbf{Ord}$ 的对象。– 一个族 $X = (X_b)_{b\in\mathbb{B}I}$ ，其元素为由 $\mathbb{B}I$索引的 $\mathcal{C}$ 的对象。于是有一个**“复合”**态射，其中– $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[X] := \bigotimes_{i\in I(=\mathbb{B}\mathbb{B}I)} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[X|_i]$; 对于 $i\colon \mathbb{B}I \to [\mathbf{1}]$ 在 $\mathbf{Ord}$ 中的态射 $X|_i$ ，它是序对 $(X_{\max i^{-1}(\min[\mathbf{1}])}, X_{\min i^{-1}(\max[\mathbf{1}])})$，并且 $\bigcirc_I \colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[X] \longrightarrow \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[\partial X]$,

– ∂X is the pair $(X_{\min \mathbb{B}I}, X_{\max \mathbb{B}I})$.

此外，要求该复合是结合的。

我们用 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\ Y)$ 表示 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[(X,\ Y)]$（而非 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}[(Y,\ X)],$，但这种选择无关紧要）。使用 $\mathbb{B}I$ 而非 $[I]$ 只是为了方便，这种选择同样并非必要。

$\mathcal{V}$ 中的幺半群本质上是这一概念的一个特例。

定义 3.2。给定 $\mathcal{V}$ 的一个对象 A，在 A 上的一个**幺半群**结构由以下对应构成：对 Ord 的每个对象 I，指定一个**"乘法"**态射

$$\bigotimes_I : A^{\otimes I} \longrightarrow A$$

使得以下数据定义了一个以 $\mathcal{V}$ 为富化的范畴 BA。

- 任意非空集合作为 $\mathrm{Ob}\, BA$。 O
- A 作为 $\mathrm{Hom}_{BA}[X]$，对于每一对 X in O。
- 假设给定以下数据。– Ord 的一个对象 I。– 由 $\mathbb{B}I$ in O 索引的一个族 X。那么 $\bigotimes_I$ 作为复合函子 $\mathrm{Hom}_{BA}[X] \to \mathrm{Hom}_{BA}[\partial X]$。

例 3.3. 设 $\mathcal{V}$ 是一个幺半范畴，$\mathcal{C}$ 是一个由 $\mathcal{V}$富集的范畴，而 X是 $\mathcal{C}$的一个对象。那么对象 $\mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, X)$ 属于 $\mathcal{V}$，并具有幺半群结构，其乘法由 $\mathcal{C}$中的复合给出。

例 3.4. 当 $\mathcal{V}$是笛卡尔闭范畴 $\mathrm{Cat}_1 \times_{\mathrm{Gpd}} \mathrm{Set}$ 时，$\mathcal{V}$ 的 X 中的一个对象所具有的幺半群结构，等价于范畴 X上的一个幺半结构。

下面为 Ord 给出一个幺半结构。给定 Ord 的一个对象 I，我们希望定义乘法函子

$$\bigsqcup_I : \mathrm{Ord}^{\times I} \longrightarrow \mathrm{Ord}.$$

对于一个由Ord的对象组成的族 $X = (X_i)_{i \in I}$，令 $\bigsqcup_I X$ 为这样一个对象：它接受一个指向 I 的态射，并由以下条件刻画：对于每个 $i \in I$，都有一个拉回方块

$$\begin{array}{ccc} X_i & \longrightarrow & \bigsqcup_I X \\ \downarrow & & \downarrow \\ * & \xrightarrow{\ i\ } & I \end{array}$$

其中 $*$ 表示终端集。

如果 $\mathcal{V}$ 是一个对称幺半范畴，那么我们可以定义$\mathcal{V}$-富集范畴的相反范畴，特别地，也可以定义 $\mathcal{V}$中的幺半群的相反幺半群。我们的幺半结构使 Ord 成为一个自对偶的幺半群。事实上，函子 $\mathrm{op} : \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}$ 是幺半群 Ord 到其幺半对范畴的一个同构。

注3.5：Ord 的上述幺半结构使其终对象成为一个泛幺半群，因此，幺半范畴 $\mathcal{V}$ 中的幺半群由幺半函子 $\mathrm{Ord} \to \mathcal{V}$分类。

记号 3.6。**Univ** 表示 Ord 中的终端幺半群。

术语 3.7. 设 $\mathcal{V}$ 是一个幺半范畴，且 A 是 $\mathcal{V}$中的一个幺半群。那么，对于一个以 $\mathcal{V}$为丰的范畴 $\mathcal{C}$，A上的一个**模**，或 $\mathcal{C}$ 中的一个 A**-模**，就是一个 $\mathcal{V}$-丰范畴之间的函子 $BA \to \mathcal{C}$。

等价地， $\mathcal{C}$ 中的一个 A-模是 $\mathcal{C}$ 的一个对象 M，并配备了一个态射$A \to \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(M)$，它是 $\mathcal{V}$中的幺半群之间的态射。

术语 3.8. 设 $\mathcal{V}$ 是一个对称幺半范畴，且 A 是 $\mathcal{V}$ 中的一个结合幺半群。那么对于一个在 $\mathcal{V}$ 中丰化的范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 中关于 A 的**逆变模**是指 $\mathcal{C}$ 中关于幺半群 A 的对偶的模。

请注意，尽管名称如此，逆变 A-模并非前述意义下的 A 上的模。为加以区分，我们引入另一个术语。

术语 3.9. 设 $\mathcal{V}$ 是一个对称幺半范畴，且 A 是 $\mathcal{V}$ 中的一个结合幺半群。那么对于一个在 $\mathcal{V}$ 中丰化的范畴 $\mathcal{C}$， $\mathcal{C}$ 中关于 A 的**协变**模，是指术语 3.7 意义下 $\mathcal{C}$ 中关于 A 的模。

当 $\mathcal{V}$ 是对称的时，**“模”**一词通常可能指协变模或逆变模，而不只是协变模。

如果 $\mathcal{V}$ 是对称闭的，那么它就在自身中丰化，因此我们可以在 $\mathcal{V}$ 中同时讨论协变模和逆变模。

Ord 的幺半结构自然使其成为自身上的双模（具有彼此交换的协变与反变作用，假设我们不必称之为“双变”模）。op: Ord $\to$ Ord 并不是双模的态射，但与标量上的同构 op 相容。

$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 的子范畴在 Ord 对 Ord 的协变作用下是闭的。因此，$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 具有 Ord 上的协变模结构，该结构由如下要求确定：遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \hookrightarrow$Ord 是协变 Ord-模的同态。

注 3.10。给定幺半范畴 $\mathcal{V}$中的幺半群 A，有一种概念：在协变 $\mathcal{V}$ 模**中的 -模** $\mathcal{M}$。事实上， $\mathcal{M}$ 在范畴化意义上就是这样一个对象，因此有些人（但不是我们）或许更愿意称它为类似“2-模”的东西，以强调其富化。（遗憾的是，“双模”一词已经有了不同的含义。） $\mathcal{M}$ 中的 A-模相当于从终端协变 Ord-模到 $A^*\mathcal{M}$ 的松弛态射，其中目标是通过将 $\mathcal{M}$ 经由分类 A 的幺半函子 Ord $\to \mathcal{V}$ 得到的协变 Ord-模。于是，协变 Ord-模 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 中的终对象（事实上是零对象）在协变 Ord-模中关于泛幺半群**Univ** 上的模具有普遍性。因此，给定幺半范畴 $\mathcal{V}$中的幺半群 A，协变 $\mathcal{V}$-模 $\mathcal{M}$ 中的 A-模由协变 Ord-模的态射 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to A^*\mathcal{M}$ 分类。（用单子来表述，$A^*\mathcal{M}$ 可描述为底层范畴为 $\mathcal{M}$ 、且其单子为自由 A-模单子的结构。见注 2.7。）

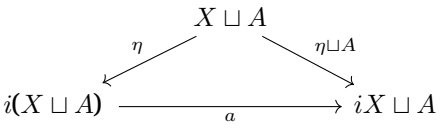
遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \hookrightarrow$Ord 同样是 Ord 的一个逆变协变子模的包含函子。函子 op: Ord $\to$ Ord 将这个子模与协变子模 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 互换，从而翻转模的变异性。

注 3.11。逆变 Ord-模 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$ 中的零对象，在逆变 Ord-模中对幺半群 **Univ** 上的模具有泛性质。

定理 3.12。 函子 $i\colon \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$ 在逆变Ord-模的双范畴中提升为遗忘函子的一个左伴随$\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \hookrightarrow$Ord 。

证明。 给定 Ord 的一个对象 A，将 Ord-模底层范畴上 A 的逆变作用视为函子，并记作 $-\sqcup A$。那么，对于每个对象

X（属于 Ord），都有一个映射 $a\colon i(X \sqcup A) \to iX \sqcup A$（属于 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$），使得图表



在 Ord 中交换，即在 Cat 中 i 与遗忘函子之间的伴随下，对应于 $\eta \sqcup A$ 的映射。只需证明对于每个 X 和 A，a 都是同构，但只要检查一下便可轻易看出这一点。□

推论 3.13. 函子 $t\colon \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 可提升为遗忘函子的一个左伴随，$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}$ 位于协变 Ord-模的双范畴中。

证明. 对定理应用 op，或者采用类似的论证。 □

3.2. **配对.** 本节中，我们将介绍一些进一步的代数结构，即我们上文所讨论的模之间的一种配对。

记号 3.14。 给定 Ord 的一个对象 I 以及幺半范畴 $\mathcal{V}$, $X_{\min I} \otimes \cdots \otimes X_{\max I}$ 中的对象族 $X = (X_i)_{i \in I}$，其中各因子按指标在 I 中的顺序排列，表示幺半群积 $\bigotimes_I X$。

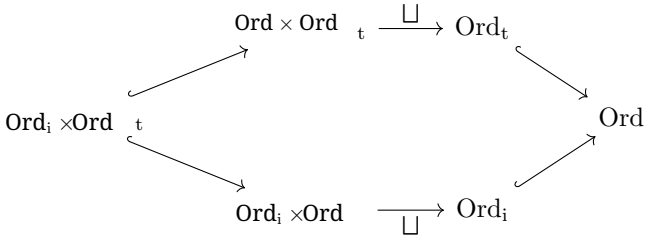
为了说明下文记号 3.16 中所采用的约定，我们先讨论一些启发性想法。可以将幺半群 A 在 $\mathcal{V}$ 上的**协-**（分别为**反-**）**变模** 的定义推广到 $\mathcal{V}$ 并非闭合、而仅仅是结合的情形。这只是 A 在协-（分别为反-）变 $\mathcal{V}$-模 $\mathcal{V}$中的一个模，正如注 3.10（分别为 3.11）中所讨论的那样。按照上文任意选定的记号，这将是 $\mathcal{V}$ 中的一个左（分别为右） A-模。

注 3.15。 这些定义在任意双模 $\mathcal{M}$ 上也更一般地适用。然而，如果赋予 $\mathcal{V}$ 的幺半结构以对称性，那么就需要对双模结构施加某种限制，才能使反变 A-模与幺半群 A的反幺半群上的协变模相同。只要 $\mathcal{M}$ 来自对称幺半范畴上的一个模，就足够了。当 $\mathcal{V}$ 仅具有编织时，问题会更加微妙；不过，只要 $\mathcal{M}$来自小圆盘 歌剧上的歌剧式 $\mathcal{V}$-模，也同样足够。特别地，双模 $\mathcal{V}$ 在这两种情形下都适用。

记号 3.16。 $\bigsqcup\colon \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$（分别地，$\bigsqcup\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$）表示 Ord 在其协变（分别地，逆变）模上的结构作用。

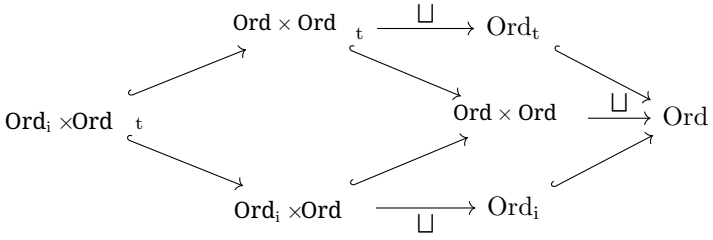
选择了这些方向后，希望我们不必比其他情况更频繁地使用 $\mathrm{Cat}_1 \times_{\mathrm{Gpd}} \mathrm{Set}$ 上（笛卡尔）幺半结构的对称性。

命题 3.17. 图表



交换，其中每个未标记的箭头都是由相应的遗忘函子诱导的。

证明。 这由该图表得出



由于遗忘函子 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$（分别为 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$）$\to \mathbf{Ord}$ 是协变（分别为逆变）$\mathbf{Ord}$-模的同态，这一关系交换。□

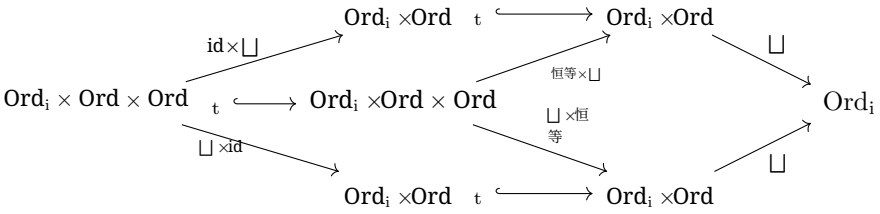
记号 3.18. $\bigsqcup\colon \mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 表示由引理 2.18 的拉回方块确定的命题中的交换图所导出的函子。

因此，我们在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 与 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 之间得到了一个取值于 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的配对。

定理 3.19. 函子 $\bigsqcup\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 余等化这两个函子

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \underset{\bigsqcup \times \mathrm{id}}{\overset{\mathrm{id} \times \bigsqcup}{\rightrightarrows}} \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$$

证明。 交换图



证明所讨论的两个函子被 $\bigsqcup$ 从 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 到 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 的限制余等化。由对称性，或由类似的图表可知，这两个函子也被 $\bigsqcup$ 从 $\mathbf{Ord} \times \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 到 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 的限制余等化。由此及引理 2.18 即得结论。

或者，$\bigsqcup$ 从 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord} \to \mathbf{Ord}_{\mathrm{i}}$ 到 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathbf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 的限制可分解为

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\bigsqcup} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$$

而这复合中的遗忘函子是一个单态射。 □

推论 3.20. 与配对 $\bigsqcup\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 对应的函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 是协变 Ord-模的一个同态。等价地，与配对$\bigsqcup$对应的函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{Hom}_{\mathrm{Cat}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 是逆变 Ord-模的一个同态。

3.3. 对偶结构的相互作用。

本节给出一些总结性结果。

当然可以沿同构 $\mathbf{Ord}^{\mathrm{op}} \simeq \mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 传递 $\mathbf{Ord}$ 上的幺结构，使该同构成为幺半群的同构。利用同构 $\mathbb{B}$ 和 $[-]$，我们在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上得到两种幺结构。这两种幺结构互为对偶，由此得到的两个幺半群通过范畴 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$的自同构 op 同构。

具体而言，通过 $\mathbb{B}$ （分别是通过 $[-]$）在 $\mathbf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上得到的幺半结构可描述如下。给定 $\mathbf{Ord}$ 的一个对象 I，乘法函子

$$\sum_{I}\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}^{\times I} \longrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$$

如下。对于 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$中的对象族 $X = (X_i)_{i\in I}$， $\sum_I X$ 是一个对象，它接受来自 $\mathbb{B}I$（分别是来自 $[I]$）的态射，该态射由以下条件刻画：对于每个 $i \in I$，我们都有一个推挤方块

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{B}I \ (\text{resp. } [I]) & \longrightarrow & \sum_I X \\ {\scriptstyle i}\downarrow & & \downarrow \\ [\mathbf{1}] & \longrightarrow & X_i \end{array}$$

其中 i 被解释为 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$中的态射 $\mathbb{B}I$（分别为 $[I] = \mathbb{B}I^{\mathrm{op}}$） $\to [\mathbf{1}]$。

我们令 $\sum$ 为通过同构 $\mathbb{B}$从 $\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}$上的幺半结构获得的$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上的幺半结构。

注 3.21。 这种幺半结构对泛代数的意义在于：相对于这种结构，$\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 中的始余幺半群，也就是 $\mathbb{B}\mathbf{Univ}$，在所有幺半范畴中的余幺半群里具有普遍性。

利用幺半群的同构 $\mathbb{B}$: $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}} \to \mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}$，我们现在可以将 $\mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}$ 视为 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$上的双模。这个双模有一个协变（分别为反变）子模 $\mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{t}}$ （分别为 $\mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{i}}$）。对偶函子 $\mathbb{D}$ 将其与 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$的协变（分别为反变）子模 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$ （分别为 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{i}}$）对应起来。

注 3.22. $\mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$ （分别为 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{i}}$）的初始（及零）对象，是余幺半群$\mathbb{B}\mathbf{Univ}$ 上模（或“余模”，以强调范畴变差性）的普遍对象，且处于协变（分别为逆变）的 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$-模中。事实上，它对应于 $\mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{t}}$ （分别为 $\mathsf{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{i}}$）中余幺半群余幺半群 $\mathbf{Univ}$ 上的普遍协变（分别为逆变）模。

推论 3.23. 遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$（分别为 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$）在双范畴中提升为函子 $i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$（分别为 $t\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$）的右伴随；该双范畴由协变（分别为逆变）的 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$-模构成。

证明。 这是定理 3.12 的推论。 □

定理 3.24. *Ord* 上对$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ （分别为$\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$）的协变（分别为逆变）作用，与$\mathrm{Ord}$ 及 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的作用相交换，从而共同给出幺半群 $\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$的作用。

证明。 对于 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$，我们需要证明这些函子

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\bigsqcup} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\sum} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$$

其中 $\sum$ 表示 $\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 在其协变模上的作用，并且

$$\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sum} \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\bigsqcup} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}},$$

在通过交换前两个因子来识别它们的源之后，两者相等。这个等式等价于：沿任意函子$[\mathbf{1}] \to\mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 限制这些函子后，它们相等。

任意函子 $[\mathbf{1}] \to \mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 都可沿复合

$$\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\bigsqcup} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \tag{3.25}$$

提升为协变 Ord-模之间的同态，其中 Ord 在 $\mathsf{Ord} \times\mathsf{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上（或复合中的另一个直积上）的作用施加于因子 Ord。因此，只需证明沿此复合 (3.25) 限制 $\sum\colon \mathsf{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathsf{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathsf{Ord}_{\mathrm{t}}$ 后，得到的是协变 Ord-模的同态。

作为函子，(3.25) 等于以下复合

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord} \xrightarrow{\mathrm{id}\times t} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\sum} \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \tag{3.26}$$

将此源与 (3.25) 的源通过交换因子对应起来之后即可得到。 $\sum$ 沿此复合 (3.26) 的限制表现为交换图右上方的复合

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times t} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} & \xrightarrow{\mathrm{id}\times\sum} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \\ \downarrow{\scriptstyle \sum\times\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum\times\mathrm{id}} & & \downarrow{\scriptstyle \sum} \\ \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord} & \xrightarrow[\mathrm{id}\times t]{} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} & \xrightarrow[\sum]{} & \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \end{array}$$

其中，左侧的竖直函子和底部的复合（与 (3.26) 相同）都是 Ord-模同态。这证明，沿着复合 (3.25) 对 $\sum\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 作限制，所得映射是 Ord-模同态，正如所需。

关于 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$ 的结果可由对称性或对称论证得出。 □

定理 3.27。 配对 $\bigsqcup\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 是$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$-双模同态。

证明。 由推论 3.23 可知，该函子是协变模同态，因为复合

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\sqcup} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$$

根据配对的构造和定理 3.24，它也是如此。由对称性或对称论证可知，该函子也是反变模同态。□

由此，我们得到推论 3.20 的如下推广。

推论 *3.28.* 配对 $\bigsqcup\colon Ord_{\mathrm{i}} \times Ord_{\mathrm{t}} \to Ord_{\mathrm{it}}$ 确定了一个协变 $(Ord \times Ord_{\mathrm{it}})$-模之间的同态 $Ord_{\mathrm{t}} \to Hom^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(Ord_{\mathrm{i}}, Ord_{\mathrm{it}})$，其目标是反变 Ord_{it}-模之间的同态 $Ord_{\mathrm{i}} \to Ord_{\mathrm{it}}$。等价地，配对 $\bigsqcup$ 确定了一个反变 $(Ord \times Ord_{\mathrm{it}})$-模之间的同态 $Ord_{\mathrm{i}} \to Hom^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(Ord_{\mathrm{t}}, Ord_{\mathrm{it}})$，其目标是协变 Ord_{it}-模之间的同态。

注 3.29。 推论 3.20 中的每个同态，都是这里相应同态与 Ord-线性遗忘函子的复合；该遗忘函子从这里的目标映射到前文的目标。

注 3.30。 由 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 的泛性质（注 3.22）可知，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 作为范畴（事实上，作为反变 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$-模）等价于 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$，即 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 中关于泛余幺半群 $\mathbb{B}\mathbf{Univ}$ 的协变模范畴。或者，利用注 3.10，范畴

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}^{\mathrm{op}}, \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}) \\ &\simeq \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord})^{\mathrm{op}} \end{aligned} \tag{3.31}$$

等价于 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord})^{\mathrm{op}}$。

类似地，我们有范畴

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \simeq \mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \simeq \mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord})^{\mathrm{op}}$$

等价。

配对 $\bigsqcup$ 在以下意义下是完美的 。

定理 3.32。 推论 *3.28* 中的同态实际上都是同构。

证明中，我们使用以下事实。

引理 3.33。 底层对象函子 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 等价于 $i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$，视为到（即，作为其上的范畴）$\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$的函子。

证明。 Ord 上的逆变 $\mathbb{B}\mathbf{Univ}$-模余单子（也称“余自由”，以强调范畴变差性）$_{\mathrm{it}}$ 等于与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \leftrightarrows \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$之间的伴随以及遗忘函子相关联的余单子。其中，$i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$。此外，根据 Barr–Beck 定理，这一伴随是余单子的。□

注 3.34。 很快就会发现，这个同构在 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 上是线性的。这为推论 3.23 中伴随的线性提供了一种具体的解释。

定理的证明。 要证明同态 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}},\ \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 是同构，只需证明它在底层范畴上是等价。因此，只需证明复合

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\bigsqcup} \mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \tag{3.35}$$

是范畴等价。参见注 3.30。

为此，只需证明 (3.35) 与其后接底层对象函子 $\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的复合等于 $i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$。事实上，由引理及 $i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的单态性可推出 (3.35) 等于引理中的同构。

为计算它，复合

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathbb{B}\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}) \longrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$$

是将每个同态 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 的底层函子作用于 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$中普遍逆变 $\mathbb{B}\mathbf{Univ}$-模的底层对象所得的结果，而该对象是始对象。此外，$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 上的配对 $\bigsqcup$ 与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$中的始对象组合后，再接上遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$，等于复合

$$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{i} \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$$

根据配对的构造。由于遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}} \hookrightarrow \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 是单的，结论成立。

另一个同态的结果可由对称性或对称论证得出。□

我们记录证明过程中一次计算所得的结果。

例 3.36。 $i\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}$ 是 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 的一个零对象，因为它与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$ 的零对象配对为 $\bigsqcup$。对称地，$t \in \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}_{\mathrm{it}}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$ 是一个零对象。

记号 3.37。 $\sum\colon \mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \to \mathrm{Ord}$ 表示与 $\bigsqcup\colon \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{t}} = (\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{t}})^{\mathrm{op}} \to \mathrm{Ord}^{\mathrm{op}}{}_{\mathrm{it}}$ 通过对偶同构同构的配对。

推论 3.38。 配对 $\sum$ 确定了一个同构 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord})$（分别为 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}} \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord})$）的协变（分别为逆变）$(\mathrm{Ord} \times \mathrm{Ord}_{\mathrm{it}})$-模。

证明。 这由推论 3.28 和定理 3.32 得出。 □

例 3.39. 遗忘函子 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$（分别是 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$）$\hookrightarrow \mathrm{Ord}$ 是 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}, \mathrm{Ord})$（分别是 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}, \mathrm{Ord})$）中的零对象，因为它与 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$（分别是 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$）的零对象配对。

注 3.40。 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}},\mathrm{Ord})$ 中的这一结论显然是例 3.36 在同构 (3.31) 下的对偶（该同构已在由先前得到的对偶结果推导推论时被隐式使用），$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}},\mathrm{Ord})$ 中的结论也类似。

注 3.41。 根据例中所见的对应，推论中的同构（作为余变（分别为逆变）Ord-模）是 Ord 上的同构，其中 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}},\mathrm{Ord})$（分别为 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}},\mathrm{Ord})$）通过在源的零对象处对底层函子求值而映射到 Ord。（$\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}}$ 和 $\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}}$分别通过相应的遗忘函子映射到 Ord。）

注 3.42。 如注 3.30 所述，$\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{contra}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{i}},\mathrm{Ord})$（分别为 $\mathrm{Hom}^{\mathrm{Mod}^{\mathrm{co}}_{\mathrm{Ord}}}(\mathrm{Ord}_{\mathrm{t}},\mathrm{Ord})$）作为 Ord 上的余变（分别为逆变）Ord-模，与 $\mathrm{Mod}^{variance}_{\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord})$ 同构，其中 $variance$ 为逆变（分别为余变）。

注 3.43。 $\mathrm{Mod}^{variance}_{\mathbf{Univ}}(\mathrm{Ord})$ 在 $variance$ 为逆变（分别为余变）时是 Ord 上的单子范畴，其中伴随/单子作为 Ord 上的余变（分别为逆变）线性结构。结合前面的注，这便对定理 3.12（分别为推论 3.13）中伴随的线性给出了具体解释。

References

[1] Carboni, Aurelio；Johnson, Scott；Street, Ross；Verity, Dominic。《调制双范畴》，《纯粹与应用代数杂志》**94** (1994) 229–282。[2] Kelly, Gregory Maxwell。《富集范畴论基本概念》，伦敦数学会讲义系列，**64**。剑桥等地：剑桥大学出版社。（1982）。[3] Matsuoka, T. *Higher theories of algebraic structures*。arXiv:1601.00301 (math.CT)*Email address*: motogeometop@gmail.com