arXiv:2512.22079v1 [math.AT] 26 Dec 2025

芬斯勒空间中的几何障碍与无挠持久同调

RAFAEL CAVALCANTI

摘要。我们将芬斯勒空间中拓扑数据分析这一新颖概念与可表示性联系起来，后者有望防止伪特征的出现。我们利用整数矩阵的分解，寻找合适的素整数p，使得在 $\mathbb{Z}_p$ 上的同调群只包含与自由部分相关的洞。

目录

1. 引言 2
2. 预备知识与背景 2
3. 芬斯勒空间中的拓扑障碍 5
4. 持久同调模上的系数 6
参考文献 10

日期：2025年12月29日。

1. 引言

众所周知，通过拓扑数据分析（简称 TDA），关于单纯复形的理论结果及其同调群的知识，增进了人们对许多数据集的理解。这方面最主要的例子是神经定理。

定理 1.1 (Alexandroff, [1])。设 $\mathscr{U}$ 是拓扑空间 X 的一个良覆盖。那么，$\mathscr{N}(\mathscr{U})$ 的几何实现与 $\bigcup_{U\in\mathscr{U}} U$. 同伦等价

上述定理中提到的神经 $\mathscr{N}(\mathscr{U})$，在 TDA 的实际应用中被视为 Čech复形，正如我们稍后在定义 2.2 中所述。尽管如此，Čech复形涉及许多高阶相互作用，其数量取决于数据量。TDA 通常旨在识别高于简单一维相互作用的关系。因此，以下包含关系部分解决了这一问题，将高阶相互作用简化为两两关系。

命题1.1。设 $\varepsilon > 0$。我们有以下包含关系

$$Rips(X,\varepsilon) \subseteq \check{C}ech(X,\varepsilon) \subseteq Rips(X,2\varepsilon).$$

即使决定数据拓扑的主要单纯复形是 Čech复形，我们也可以利用上述包含关系来降低复杂度并近似结果。在研究单纯复形的可表示性时，我们可以推断出关于所讨论复形的同调的一些结论。例如，我们将看到，在芬斯勒空间中，数据无法形成“简单的洞”。

在许多拓扑数据分析（TDA）分析中，同调系数的选择通常被视为次要问题。然而，即使选择 $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z} = \mathbb{Z}_2$ 不会带来定向方面的麻烦，也可能引入以挠元形式出现的噪声。我们仍不清楚挠元是否很可能是噪声，但我们提出一种基于边界算子的史密斯标准形的系数集，使得同调群原有的挠部分不会出现在采用这组新系数得到的同调群中。

我们的主要结论是推论3.1和4.1。前者施加了一项几何约束，可排除滤过中的伪高维特征；后者则确立了一项代数稳定性结果：除有限个素数外，采用 $\mathbb{Z}_p$ 系数的持久同调只反映自由同调类，因此与 $\mathbb{Q}$上的秩不变量一致。

2. 预备知识与背景

在本节中，每当我们使用 Ω 时，都将其视为某个 $\mathbb{R}^m$的子集。

定义 2.1。 抽象单纯复形 Δ 是有限集 V 的子集族，并且满足 Δ 对包含关系封闭，即如果 $\sigma \in \Delta$ 且 $\tau \subset \sigma$，那么 $\tau \in \Delta$。在本文中可以省略“抽象”一词。V 称为 Δ 的顶点集，而每个 σ 称为单纯形。

几何单纯复形 Δ 是 $\mathbb{R}^n$ 中的单纯形的有限集合，并满足：

(1) Δ 中单纯形的每个面也属于 Δ。(2) Δ 中任意两个单形的交集要么为空，要么是它们的公共面。

Δ 的 底空间 记作 $|\Delta|$，它是所有单形的并集：

$$|\Delta| = \bigcup_{\sigma \in \Delta} \sigma \subset \mathbb{R}^n.$$

直观来说，几何单纯复形是由点、线段、三角形、四面体等在 $\mathbb{R}^n$ 中“粘合”而成的，其中各单形只会沿着公共面以良好的方式相交。事实上，每个d维抽象单纯复形都可以在 $\mathbb{R}^{d+1}$中实现，但这种实现可能无法保留相应抽象单纯复形的拓扑。因此，了解单纯复形也有一种惠特尼定理 [3]型的定理是很重要的：

定理 2.1. 设 Δ 是一个 d 维单纯复形。那么，$|\Delta|$可以嵌入到 $\mathbb{R}^{2d+1}$中，也就是说，存在一个嵌入 $|\Delta| \hookrightarrow \mathbb{R}^{2d+1}$。

设 Δ 是一个有限单纯复形。第 k 个链群 $C_k(\Delta)$ 是由 Δ的 k-单形生成的自由阿贝尔群（或取定域上的向量空间）。边界算子 $\partial_k : C_k(\Delta) \to C_{k-1}(\Delta)$ 将每个 k-单形映射为其 $(k-1)$-维面的交错和。该算子满足 $\partial_{k-1} \circ \partial_k = 0$。k-循环是边界为零的 k-链，构成子群 $Z_k(\Delta) = \ker \partial_k$。k-边界是某个 $(k+1)$-链的边界所得到的 k-链，构成子群 $B_k(\Delta) = \operatorname{im} \partial_{k+1}$。由于每个边界都是一个圈，因此 $B_k(\Delta) \subseteq Z_k(\Delta)$。第 k 个同调群定义为以下商群

$$H_k(\Delta) = Z_k(\Delta)/B_k(\Delta),$$

其元素表示模去边界后的圈的等价类。直观来说，$H_k(\Delta)$ 捕捉了 Δ 中未被更高维单形填充的“k维洞”。$H_k(\Delta)$ 的秩即为第 k 个贝蒂数，β_k，它统计了独立的k维洞：β_0 对应连通分支，β_1 对应环，β_2 对应空腔或空腔。关于有限生成阿贝尔群和同调群，我们有以下两个预备结果，后文将会用到。

定理 2.2（结构定理）。设 G 是有限生成阿贝尔群。那么存在非负整数 $r, n_1, \ldots, n_t$，使得 $G \cong \mathbb{Z}^r \oplus (\bigoplus_i \mathbb{Z}_{n_i})$，其中 $\mathbb{Z}^r$ 是 G 的自由部分，求和 $\bigoplus_i \mathbb{Z}_{n_i}$ 是 G 的挠部分，且 $r =$ 秩G。

定理 2.3 (泛系数定理)。若 C 是由自由阿贝尔群构成的链复形，则存在自然的短正合列

$$0 \to H_n(\Delta) \otimes G \to H_n(\Delta, G) \to \operatorname{Tor}(H_{n-1}(\Delta), G) \to 0$$

对所有 n 和 G 均成立，并且这些序列可分裂，但这种分裂并非自然的。

在本文中，我们用 $\tilde{Z}_k(\Delta)$ 表示$Z_k(\Delta)$ 中由$k+2$个顶点构成的圈的集合。注意，$H_k(\Delta)$ 包含圈类，而每个圈类的代表元都是独立圈。因此，$\tilde{Z}_k(\Delta)$ 未必包含圈类的代表元，因为并非所有简单圈都是独立圈。不过，我们关注的是顶点数最少的那些圈。图 1 给出了 $\tilde{Z}_k(\Delta)$ 中圈的一个简要示例；在该例中，1-独立圈由顶点v_1,v_2, v_3 和v_5构成。

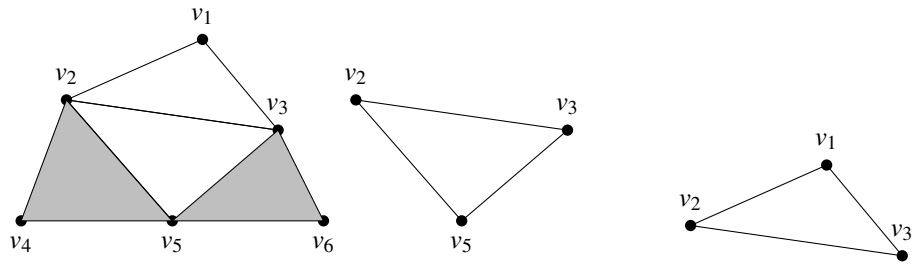

图 1. 从左到右：一个含有两个 1-循环的单纯复形。中间是由顶点 v_2,v_3 和 v_5构成的圈。最右侧是另一个由顶点 v_1,v_2 和v_3构成的 1-循环

在拓扑数据分析中，一些单纯复形在其应用及理论结果的发展过程中发挥了重要作用，具体而言，它们是 Vietoris-Rips复形和 Čech复形。如本文前文所述, [2], 我们将使用这些复形在芬斯勒空间中的定义。

设 Ω是一个光滑的n维流形。 Ω 上的一个芬斯勒度量 是一个函数

$$F : T\Omega \longrightarrow [0,\infty)$$

满足对每个$x \in \Omega$，限制函数$F_x := F(x\ \cdot)$在切空间$T_x\Omega$ 上满足：

(1) **光滑性：** F在$T\Omega \setminus \{0\}$上是C^∞的。(2) **正齐次性：** $F(x\ \lambda v) = \lambda F(x,v)$对所有 $\lambda > 0$均成立。(3) **强凸性：** 平方F_x^2关于v在$T_x\Omega \setminus \{0\}$上具有正定海森矩阵。

称有序对$(\Omega,\ F)$为一个芬斯勒空间。

定义 2.2. 设 X 是芬斯勒空间(Ω,F)中的一个有限点集。则与参数 ε关联的 X 的*ˇCech*复形，记作*ˇCech*$(X\ \varepsilon)$ 是一个顶点集为 X 的单纯复形，其中 $\{p_1,\ldots,p_{k+1}\} \subset X$ 张成一个 k-单纯形，当且仅当

$$\mathscr{B}_\varepsilon(p_1) \cap \cdots \cap \mathscr{B}_\varepsilon(p_{k+1}) \neq \emptyset.$$

拓扑数据分析中有一个广为认可的观点：在 $\mathbb{R}^n$ 中，以每个样本点为中心取凸球，会生成该点的膨胀版本。因此，通过这些球来观察整个点云，等同于考察膨胀后的点集。因而，这些球的并集的拓扑反映了所假定的膨胀点集的拓扑。对该点集的拓扑不变量进行研究，并在滤过 [6]之后将其绘制在图中。

定义 2.3. 设 X 是芬斯勒空间$(\Omega,\ F)$中的有限点集。与参数 ε关联的 X 的 *Vietoris-Rips*复形记为 *Rips*$(X\ \varepsilon)$，它是一个顶点集为 X 的单纯复形；若 $\{p_1,\ldots,p_{k+1}\} \subset X$ 张成一个 k-单纯形，则

$$d_{p_i}(p_i,p_j) \leq \varepsilon \quad \textit{for all} \quad p_i,p_j \in \{p_1,\ldots,p_{k+1}\}.$$

命题 2.1. 设 Δ 为一个单纯复形，并假设对于某个 k $<d$，有 $\tilde{Z}_k(\Delta) \neq /0$。那么，$\Delta$不可能是任何度量空间或芬斯勒空间的 *Vietoris-Rips*复形。

证明。 设 $\tilde{Z}_k(\Delta) \neq /0$，并且对于距离 d 或芬斯勒度量 F，有 $\Delta = Rips(X\ \varepsilon)$。若$V = \{p_0,p1,\ \ldots,\ p_{k+1}\}$是 $\tilde{Z}_k(\Delta)$ 中一个k圈的顶点集，则这些顶点上不存在 Δ_{k+1}单纯形

。由于 Δ是一个*Rips*复形，因此对于$p_i \in V$，在度量空间情形下有 $d(p_i, p_j) \leq \varepsilon$；而在芬斯勒空间中有 $d_{p_i}(p_i, p_j) = F_{p_i}(p_j - p_i) \leq \varepsilon$，这些条件构成一个$\Delta_{k+1}$单纯形。这就产生了矛盾。 ■

设 $\mathbb{k}$ 为一个固定的环，I 为 $\mathbb{R}$的一个区间。

定义 2.4. 有限集 X 的一个滤过是由完全图在 X 上的顶点所构成的子复形组成的族 $\{\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon \in I}$，满足 $\Delta_\varepsilon \subseteq \Delta_{\varepsilon'}$，当 $\varepsilon \leq \varepsilon'$ 时。

对于每个包含关系 $\Delta_\varepsilon \hookrightarrow \Delta_{\varepsilon'}$，都有诱导的线性映射 $v_\varepsilon^{\varepsilon'}: H_k(\Delta_\varepsilon; \mathbb{k}) \to H_k(\Delta_{\varepsilon'}; \mathbb{k})$，对所有 $\varepsilon \leq \varepsilon'$ 均成立。此外，可以看到 $v_\varepsilon^{\varepsilon} = \mathrm{id}$，且 $v_{\varepsilon'}^{\varepsilon''} \circ v_\varepsilon^{\varepsilon'} = v_\varepsilon^{\varepsilon''}$。遵循 [10], 中的记号和背景，这精确定义了一个**持久模** $\mathbb{V}$，其定义在 I上；从范畴论角度看，它可以视为一个函子 $\mathbb{V}: (I \leq) \longrightarrow \mathbf{Vect}_{\mathbb{k}}$。

3．T芬斯勒空间中的拓扑障碍 PACES

设 Δ 为一个有限单纯复形。如果存在一族凸集 $\mathscr{U} = \{U1, \ldots, U_k\}$，其中 $\mathbb{R}^d$，使得 $\mathscr{N}(\mathscr{U})$与 Δ同构，则称 Δ 是*d*-可表示的。例如，$\mathbb{R}^d$ 中一个有限凸集族的神经本身就是*d*-可表示的。特别地，由芬斯勒空间给出的 $\mathbb{R}^d$ 中的 Čech复形（如定义 2.2所述）对任意*d*都满足*d*-可表示性条件。

可表示性为推进拓扑数据分析提供了一个自然框架，因为它阐明了那些允许几何实现的拓扑特征与仅仅具有组合性质的拓扑特征之间的区别。例如，下面的定理对此作出了明确说明。

定理3.1（Perel'man、 [7] 和 Wegner， [5]）。设 Δ 为一个 d 维单纯复形。则 Δ 是*(2d+1)*-可表示的。

尽管如今已知，$2d+1$ 是*d*维复形可表示性的紧下界，但在 Wegner 定理提出后的四十多年里，这个问题一直悬而未决。2011 年，Tancer 终于解决了这一问题，并证明了以下结论 [4]。

定理 3.2 (Tancer 紧性定理)。 对于每个 $d > 0$，都存在一个不能被2*d*-可表示的 d 维单纯复形，因此$2d+1$ 界是最优的。

目前大多数拓扑数据分析（TDA）实现都没有将数据嵌入到能够反映其内在几何结构的空间中，因此可能无法捕捉其真正的拓扑特征。在下面的讨论中，我们使用芬斯勒度量来避免这种现象。

定义 3.1。 如果˘*Cech*复形˘*Cech*$(X\ \varepsilon)$是一个单纯复形 Δ，且神经定理适用，我们就称其捕捉了 X 的拓扑 Δ 。

命题 3.1。 设 Δ 是一个顶点集为 X 的单纯复形，其中 $\mathbb{R}^n$，并且假设 ˜Z_k（Δ）$\neq$/0。如果 $k \geq n+1$，那么 Δ 无法捕捉 X 在芬斯勒空间中的拓扑。

证明。 设 Δ 如假设所述。假设 Δ 能够捕捉 X 的拓扑，将其视为某个具有度量 F 的芬斯勒空间中的数据集。根据神经定理，我们可以假设 $\Delta = \check{C}e\mathrm{ch}(X\ \varepsilon)$，其中 $\varepsilon > 0$。将 $\mathscr{B}_\varepsilon$ （p_i）写作半径为 ε、中心位于 $p_i \in V$ 的球，取一个 *k*- 圈 $z \in$ ˜Z_k（Δ），也就是顶点为 $p_0, p1$、.....、p_{k+1} 的圈，并令 $\mathscr{C}$ 为由F给出的、半径为 ε 且以这些点为中心的球族。由于F_{p_i} 总是产生凸球，因此 $\mathscr{C}$ 是一个凸族。

断言3.1。 任意 n 个 $+1$ 球的 $\mathscr{C}$交集非空。

根据定义，有 $k+2$ 个维数为 k 的单纯形粘合在一起形成 z。这些 $k+2$ 个单纯形中的任意 k个单纯形都共享一个（$k-1$）-单纯形。于是，令 p^{i_0}、p^{i_1}、.....、p^{i_k}为这个（$k-1$）-单纯形的顶点，根据 $\check{C}e\mathrm{ch}(X\ \varepsilon)$ 的构造，我们有

$$\bigcap_{j=0}^{k}\mathscr{B}_{\varepsilon}\left(p_{i_j}\right)\neq\emptyset.$$

因此，在 $\mathscr{C}$ 中任意选取 $k\geq n+1$ 个球，都满足 $\mathbb{R}^n$ 中的 Helly 定理条件。因此，$\bigcap_{C\in\mathscr{C}}C\neq/0$。根据定义，$\{p_0,p1,\ldots,p_{k+1}\}$构成了$\Delta$的一个（$k+1$）-单纯形，而不是一个$k$-圈。因此，$\Delta$不可能是 $\check{C}e\mathrm{ch}(X\ \varepsilon)$，因而无法捕捉带有度量$F$的芬斯勒空间中$X$ 的拓扑。

■

推论 3.1。设 $X\subset\mathbb{R}^n$ 是一个有限集，且 $\{\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ 是由芬斯勒度量诱导的 $\check{C}ech$ 滤过。那么，对于任意域 $\mathbb{k}$，我们有

$$H_k(\Delta_\varepsilon;\mathbb{k})=0\quad for\ all\ \varepsilon>0\ and\ all\ k>n.$$

特别地，对于所有 $k>n$，k 阶持久同调模都是平凡的。

证明。设 $\mathbb{V}$ 是持久模 $H_k(\Delta_\bullet;\mathbb{k})$。该结论由命题 3.1 立即得出。

■

4. 持久同调模上的系数

在专门介绍本节将要讨论的主要对象之前，我们先介绍伟大的数学家 *Henry Smith* 在其著作 [8]中提出的一种精妙分解。

定理 4.1。设 R 是一个主理想整环，且 A 是 R 上的一个非零 $m\times n$ 矩阵。则存在 R 上的可逆 $m\times m$ 矩阵 U 和 $n\times n$ 矩阵 V，使得乘积 UAV 为

$$\left(\begin{array}{ccc|c}\alpha_1 & & 0 & \\ & \ddots & & 0_{r\times n-r}\\ 0 & & \alpha_r & \\ \hline \multicolumn{3}{c|}{0_{m-r\times r}} & 0_{m-r\times n-r}\end{array}\right)=\mathrm{diag}(\alpha_1,\ldots,\alpha_r,0\ldots,0)$$

其中对角线上的每个 α_i 都满足 $\alpha_i\mid\alpha_{i+1}$，对所有 $1\leq i<r$ 均成立。这些值由 $\alpha_i=d_i(A)\ d_{i-1}(A)$确定。其中已知 $d_i(A)$ 是 A 的所有 $i\times i$ 子式的行列式的最大公因数。这些值称为 A 的初等因子。按照惯例，我们令 $d_0(A)=1$。

我们称定理 4.1 中的这种对角矩阵为矩阵A的**史密斯标准形**，或简称 SNF。于是，特别地，对于所有整数矩阵 A，都可以计算A的史密斯标准形。

对于每个边界映射 $\partial_k:\mathbf{C}_k\longrightarrow\mathbf{C}_{k-1}$，当链复形明确给出时，我们省略 ∂_k 中的下标 k。为实现本章的进一步目标，考虑下面的图。

$$\begin{array}{ccccccccc}0\longrightarrow\cdots & C_{k+2} & \xrightarrow{\partial} & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & C_k & \xrightarrow{\partial} & \cdots\longrightarrow 0\\ & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \downarrow\partial & & \\ 0\longrightarrow\cdots & C_{k+1} & \xrightarrow{\partial} & C_k & \xrightarrow{\partial} & C_{k-1} & \xrightarrow{\partial} & \cdots\longrightarrow 0\end{array}$$

如果每个 $C_k(\Delta,\ \mathbb{Z})$ 都由 m_k k-单形张成，我们可以进行这一识别 $C_k\cong\mathbb{Z}^{m_k}$。令 A^{m_k} 表示矩阵 $[\partial]$，其对应于由 $\mathbf{C}_k$ 的生成元单形表示的映射：$\mathbf{C}_k\longrightarrow\mathbf{C}_{k-1}$

和 $\mathbf{C}_{k-1}$。由此，边界映射可自然地识别为 $A^{m_k}:\mathbb{Z}^{m_k}\longrightarrow\mathbb{Z}^{m_{k-1}}$。由于 A^{m_k}的元素取自集合 $\{-1,0,1\}$，我们可以将 A^{m_k}分解为 Smith 标准形。现在，我们给出两个已确立的结果，作为本文所需的引理。

引理 4.1。 如果 α_1、α_2、.....、α_r 是一个 $m\times n$ 整数矩阵 A 的初等因子，那么 A 的余核： $\mathbb{Z}^m\longrightarrow\mathbb{Z}^n$ 满足余核$(A):=\mathbb{Z}^n/$像$(A)\cong\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{\alpha_i}\oplus\mathbb{Z}^{n-r}$。

证明。 注意到，对于 $A=UBV$，通过 $x+\mathrm{im}(A)\mapsto U^{-1}x+\mathrm{im}(B)$，有 coker$(A)\cong$ coker(B)。一个重要情形是利用前述引理描述 $\mathbb{Z}$ 上的同调群。

引理 4.2。 设 $B:\ \mathbb{Z}^m\longrightarrow\mathbb{Z}^n$ 且 $A:\ \mathbb{Z}^n\longrightarrow\mathbb{Z}^d$ 为整数矩阵，满足 $AB=0$。如果 r 是 B 的秩，s 是 A 的秩，那么核 $(A)/$ 像 $(B)\cong\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{\alpha_i}\oplus\mathbb{Z}^{n-r-s}$。

证明。证明的思路是考虑同态 $\bar{}\mathrm{A}:\mathbb{Z}^n/\mathrm{im(B)}\to\mathbb{Z}^l$，并注意到 $\ker(\mathrm{A})/\mathrm{im(B)}\cong\ker(\bar{}\mathrm{A})$。前一个引理保证 $\mathbb{Z}^n/\mathrm{im(B)}\cong\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{\alpha_i}\oplus\mathbb{Z}^{n-r}$。由于我们定义 $\bar{}\mathrm{A}(\bar{}\mathrm{z})=\mathrm{A(z)}$，对于所有等价类 $\bar{}\mathrm{z}\in\mathbb{Z}^n/\mathrm{im(B)}$，可以注意到 $\mathrm{im(A)}=\mathrm{im}(\bar{}\mathrm{A})$。由于 $\mathrm{im}(\bar{}\mathrm{A})$ 是自由的，$\mathbb{Z}^n/\mathrm{im(B)}$ 的挠元必定位于 $\bar{}\mathrm{A}$ 的核中。因此，$\ker(\bar{}\mathrm{A})=\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{\alpha_i}\oplus\ker\left(\bar{}\mathrm{A}\big|_{\mathbb{Z}^{n-r}}\right)$，这意味着 $\mathrm{im}(\bar{}\mathrm{A})=\mathrm{im}\left(\bar{}\mathrm{A}\big|_{\mathbb{Z}^{n-r}}\right)$。根据等式 $\mathrm{n}-\mathrm{r}=\ker(\mathrm{A})+\mathrm{s}$，可以得到所需的同构。

■

命题4.1。 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 和 $\tilde{\alpha}_1,\ldots,\tilde{\alpha}_s$ 分别是 $\partial k+1$ 和 ∂k 的初等因子，p 是任意满足 最大公约数$(p\,\alpha_r\tilde{\alpha}_s)=1$ 的素数。那么，$H_k(\Delta;\ \mathbb{Z}_p)\cong\mathbb{Z}^{\beta_k}p$。

证明。 设 $H_k(\Delta)$ 表示 Δ 在 $\mathbb{Z}$ 上的第k阶同调群，β_k 表示其贝蒂数。根据结构定理 2.2，存在一些整数 $t1,\ldots,tr$，使得 $H_k(\Delta)\cong\bigoplus_{ri=1}\mathbb{Z}_{t_i}\oplus\mathbb{Z}^{\beta_k}$。现在，利用关于 $G=\mathbb{Z}_p$ 的万能系数定理 2.3，可得

$$\begin{aligned}H_k(\Delta;\mathbb{Z}_p)&\cong(H_k(\Delta)\otimes\mathbb{Z}_p)\bigoplus\mathrm{Tor}(H_{k-1}(\Delta),\mathbb{Z}_p)\\&\cong\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}\mathbb{Z}_{t_i}\oplus\mathbb{Z}^{\beta_k}\right)\otimes\mathbb{Z}_p\right)\bigoplus\mathrm{Tor}(H_{k-1}(\Delta),\mathbb{Z}_p)\\&\cong\left(\left(\bigoplus_{i=1}^{r}(\mathbb{Z}_{t_i}\otimes\mathbb{Z}_p)\right)\oplus\mathbb{Z}_p^{\beta_k}\right)\bigoplus\mathrm{Tor}\left(H_{k-1}(\Delta),\mathbb{Z}_p\right),\end{aligned}$$

现在应用关于 $H_{k-1}(\Delta)$ 的结构定理，得到 $H_{k-1}(\Delta)\cong\bigoplus_{si=1}\mathbb{Z}_{\tilde{t}_i}\oplus\mathbb{Z}^{\beta_{k-1}}$。因此，Tor $(H_{k-1}(\Delta)\ \mathbb{Z}_p)\cong\mathrm{Tor}\left(\bigoplus_{si=1}\mathbb{Z}_{\tilde{t}_i}\oplus\mathbb{Z}^{\beta_{k-1}},\ \mathbb{Z}_p\right)\cong\bigoplus_{si=1}(\mathbb{Z}_{\tilde{t}_i}\otimes\mathbb{Z}_p)$。Tor 的一个性质是，Tor $(\mathbb{Z}_n,\ \mathbb{Z}_m)\cong\mathbb{Z}_{\gcd(n,m)}$。

另一方面，令$C_k(\Delta,\ \mathbb{Z})\cong\mathbb{Z}^{m_k}$为已知，并令$A^{m_k}$为矩阵$[\partial_k]$。现在，考虑以下已知序列

$$\mathbb{Z}^{m_{k+1}}\xrightarrow{A_{m_{k+1}}}\mathbb{Z}^{m_k}\xrightarrow{A_{m_k}}\mathbb{Z}^{m_{k-1}}\xrightarrow{A_{m_{k-1}}}\mathbb{Z}^{m_{k-2}}$$

其中 $\mathrm{rank}A^{m_k}=r_k$。根据引理 4.2，$H_k(\Delta)$ 和$H_{k-1}(\Delta)$ 都可以写作$H_k(\Delta)\cong\bigoplus_{ri=1}\mathbb{Z}_{\alpha_i}\oplus\mathbb{Z}^{m_k-}{}_{rk-}{}_{rk-1}$和$H_{k-1}(\Delta)\cong\bigoplus_{si=1}\mathbb{Z}_{\tilde{\alpha}_i}\oplus\mathbb{Z}^{m_{k-1}-rk-1-rk-2}$。结合证明开头给出的同构，我们必有

$$m_k-r_k-r_{k-1}=\beta_k,\quad\prod_{i=1}^{r}\alpha_i=\prod_{i=1}^{r}t_i,\quad m_{k-1}-r_{k-1}-r_{k-2}=\beta_{k-1},\quad\prod_{i=1}^{s}\tilde{\alpha}_i=\prod_{i=1}^{s}\tilde{t}_i.$$

令$A_j=\{$为$j\times j$阶子式的全体构成的集合，其中这些子式取自$A_{m_{k+1}}\}$；并令 $\tilde{}A_j=\{$为$j\times j$阶子式的全体构成的集合，其中这些子式取自$A_{m_k}\}$。这些集合定义了系数 $\alpha_i=$最大公约数$_{\{Ai\}}$最大公约数$_{\{Ai-1\}}$以及 $\tilde{\alpha}_i=$最大公约数$_{\{\tilde{}Ai\}}$最大公约数$_{\{\tilde{}Ai-1\}}$。我们关注的是 α_r和

$\tilde{\alpha}_s$。若d是一个不整除 α_r 也不整除 $\tilde{\alpha}_s$ 的素数，则 $\gcd(d\ \alpha_r\tilde{\alpha}_s) = 1$，反之亦然。取$p$为假设中所述的数，则 $\gcd(p,t_r) = 1$ 且 $\gcd(p\ \tilde{}t_s) = 1$，因为p 不整除 α_r 也不整除 $\tilde{\alpha}_s$，同样有 t_i 和t_i。 ■

推论 4.1. 设 $\{\Delta_\varepsilon\}_{\varepsilon\in I}$ 是一个有限滤子。则存在一个由素数组成的有限集 P，使得对于所有 $p \notin P$ 和所有 $\varepsilon \in I$,

$$H_k(\Delta_\varepsilon;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{\beta_k(\Delta_\varepsilon)}.$$

证明. 对于每个 ε，命题4.1保证存在一个有限集P_ε，其元素为整除 ∂_{k+1} 的初等因子的素数，而非 ∂_k。该滤过本质上由 $+1$ 个阶段决定： $\varepsilon_0,\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_N$。现在，只需考虑$P=\bigcup_{Ni=0} P\varepsilon_i$。 ■

注 1。由于 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ 是域，以任一域为系数的持久同调都存在区间分解。根据前面的推论，除有限多个素数外，对于所有素数p，我们有

$$H_k(\Delta_\varepsilon;\mathbb{Z}_p) \cong \mathbb{Z}_p^{\beta_k(\Delta_\varepsilon)} \quad \text{for all } \varepsilon.$$

此外，对于所有 ε,

$$\dim_{\mathbb{Q}} H_k(\Delta_\varepsilon;\mathbb{Q}) = \beta_k(\Delta_\varepsilon) = \dim_{\mathbb{Z}_p} H_k(\Delta_\varepsilon;\mathbb{Z}_p).$$

因此，对于每个 $\varepsilon \le \varepsilon'$,

$$\operatorname{rank}(H_k(\Delta_\varepsilon \to \Delta_{\varepsilon'};\mathbb{Z}_p)) = \operatorname{rank}(H_k(\Delta_\varepsilon \to \Delta_{\varepsilon'};\mathbb{Q}))\,.$$

因此，持久模$H_k(\Delta_\bullet;\mathbb{Q})$ 和$H_k(\Delta_\bullet;\mathbb{Z}_p)$ 的秩不变量相同。根据域上逐点有限维持久模的分类定理，秩不变量唯一确定区间分解。因此，以 $\mathbb{Q}$ 和 $\mathbb{Z}_p$ 为系数的持久同调具有相同的区间及其重数；例如参见 [9, 10]。

在计算 Rips 复形的同调时，单纯复形同调的研究占有特殊地位，这是因为 Rips 复形可用于点集的滤过及其持久性图。虽然我们定义的 Vitoris-Rips 复形针对的是度量空间或芬斯勒空间中的有限子集，但将这一概念推广到无限点集也完全可行。关于连续流形上 Rips 复形研究的主要论文之一，给出了通过 Rips 复形研究流形同调的充分条件，反之亦然，如下述定理所示。

定理 4.2 (Hausmann, [13])。设 M 是一个闭黎曼流形，则存在一个充分小的 ε，使得 $Rips(M\ \varepsilon)$ 与 M 同伦等价。

作者在该论文中留下的问题之一，是关于在 M 上增加紧致性条件后，能否通过 M 的有限子集的 Rips 复形恢复M 的同调这一猜想。最近，有人对圆 $\mathbb{S}^1$ 给出了肯定的回答[11]；我们逐字重现他们更强版本的定理原文如下：

定理 4.3。 如果 X 在 $\mathbb{S}^1$ 中稠密（特别是当 $X = \mathbb{S}^1$ 时），且 $0 < r < \frac{1}{2},-$ 那么我们有

$$Rips(X,r) \simeq \mathbb{S}^{2l+1} \qquad for \qquad \frac{l}{2l+1} < r < \frac{l+1}{2l+3}, \quad l = 0,1,2,\ldots$$

备注 2。尽管这个定理给出了 $\mathbb{S}^1$ 的稠密子集的同调，但在同一篇论文中，他们还证明了一个类似的结果：当X 是圆的有限子集时。

前一个定理及其相关论文针对一个紧流形和有限 Rips 复形的例子，回答了 Hausmann 提出的问题。然而，沿着同一方向，莱切夫在 2000 年代初证明，对于闭黎曼流形M，在某些条件下，M的稠密子集与M具有相同的同调。请看下面的定理以了解详情。

定理 4.4（拉切夫，[12]）。设 M 是一个闭黎曼流形。那么存在$\varepsilon_0 > 0$，使得对于每个 $0 < \varepsilon \leq \varepsilon_0$，都存在一个 $\delta > 0$，使得任意度量空间 Y 的 $Rips$（Y ε）的几何实现（其中 Y 到 M 的 $Gromov\text{-}Hausdorff$ 距离小于 δ）都与 M 同伦等价。

我们略去最后这三个定理的证明，因为我们借此说明背景，并给出有限集的 Rips 复形含有挠元的例子。

例 4.1。设 $M = \mathbb{RP}^2$。我们已经知道 $H_1(M\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}_2$，因此根据豪斯曼定理，当 ε 充分小时，$Rips$（M ε）$\simeq M$。下面构造 M 的一个子集 X，使得 $Rips$（X ε）仍与 M 同伦等价。令 C_0 为 xy 平面上 $\mathbb{S}^2$ 的半圆。若 δ是任意正实数，令 $N = \lceil \frac{\pi}{\delta} \rceil$ 个点以相等间距分布在半圆上，角度为 $\theta_k = \pi kN$，$k = 0$，1，……，$N - 1$。对于 C_0, 上的这 N 个点中的每一个，取连接该点与其对径点的半圆，该半圆沿 $z \geq 0$方向。因此，我们得到 $N + 1$个半圆：C_0,C_1，……，C_N：

$$\begin{array}{l|cccc} \textit{points of semicircle } C_0 & p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0N} \\ \textit{points of semicircle } C_1 & p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \textit{points of semicircle } C_N & p_{N0} & p_{N1} & \cdots & p_{NN} \end{array}.$$

现在，我们证明：对于 $\mathbb{S}^2$ 的上半球面中的任意一点 p，都存在某个 p^{ij}，使得 $d_{\mathbb{S}^2}(p, p^{ij}) \leq \delta$。如果 p 位于任意一个半圆上，根据构造即可得证。但如果 p 不属于任何一个半圆，我们可以找到 C_i 和 C_{i+1}，使得 p 位于这两条曲线之间。考虑另一条经过 p 的半圆 C，则存在 p_{ik} 和 $p^{(i+1)k}$，使得 p 的距离小于 $\frac{\delta}{2}$。应用三角不等式可得 $d_{\mathbb{S}^2}(p, p^{(i+1)k}) \leq d_{\mathbb{S}^2}(p\ p_{ik}) + d_{\mathbb{S}^2}(p_{ik}, p^{(i+1)k}) \leq \delta$，其中 p_{ik} 是由 C 与连接 p_{ik} 和 $p^{(i+1)k}$ 的弧的交集所确定的点。因此，集合 $S = \{p_{ij}\}$ 在 $\mathbb{S}^2$ 中是 δ-稠密的。我们可以将 M 视为带有对踵关系的 $\mathbb{S}^2$。给定 $x\ y \in M$，我们通过 $d_M(x\ y) = min\{d_{\mathbb{S}^2}(x, y), d_{\mathbb{S}^2}(x, -y)\}$ 计算它们之间的距离，于是 $X = \{p_ij\}$ 在 M 中是 δ-稠密的。一个基本事实是，$Gromov\text{-}Hausdorff$ 距离不超过 $Hausdorff$ 距离 $d_{GH}^M(A, B) \leq d_H^M(A, B)$，其中 $d_H^M(A, B) = max\left\{sup\ a \in A\ d_M(a, B), sup\ b \in B\ d_M(b, A)\right\}$，其中 A 和 B 是 M 的子集。因此，对于 X 和 M，有 $d_{GH}^M(X, M) \leq d_H^M(X, M) \leq \delta$。由于 M 满足 $Latschev$ 定理的假设，存在 ε，因此我们可以在构造中选择 δ作为定理中的那个对象，从而得到 M 与 $Rips(X\ \varepsilon)$ 之间的同伦等价。

例4.2. 将克莱因瓶 K 看作单位正方形 $[0,1]^2$ 在以下识别关系下的商：对所有 x，$(x,0) \sim (x, 1)$；对所有 y，$(0, y) \sim (1, 1-y)$，并记 $\pi: [0,1]^2 \to K$ 为商映射。在 $[0,1]^2$ 上赋予欧几里得度量，并在 K 上赋予相应的商度量。也可以构造 K 的一个 δ-稠密子集；由于 K 满足 $Latschev$ 定理，我们可以找到 K 中有限个点构成的 $Rips$ 复形，使其与 K 同伦等价，而 K 的 $H_1(K\ \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$。

众所周知，一般的单纯复形中可能出现挠元；例如， $\mathbb{RP}^2$ 的三角剖分在第一同调群中含有挠元，正如我们上文所见，Rips 复形中也可能出现挠元。由于计算拓扑数据分析会针对不同尺度对 Rips 复形进行滤过，因此我们必须认识到，过程中可能会出现挠元。命题**4.1**提出了一个标量域，使得扭结循环在滤过过程中被排除。

参考文献

.[1] P. Alexandroff，关于一般维数概念及其与初等几何直观的关系，《数学年刊》，第 98 卷，第 1 期，第 617–635 页，1928，ISSN 0025-5831，doi:10.1007/BF01451612.[2]Rafael Cavalcanti，Nelson Leal，Serafim Rodrigues，Danilo Barros 和 Math- ieu Desroches，芬斯勒空间中的拓扑数据分析，arXiv 预印本 arXiv:2509.12660（2025）。[3] Hassler Whitney，光滑 n维流形在$2n$维空间中的自交，《数学年刊》（1944）。[4] Martin Tancer，固定维数单纯复形的d-可表示性，《计算几何学报》（2011）。[5] G. Wegner，同调简单族的神经的性质 $\mathbb{R}^n$。博士论文，Universit¨at G¨ottingen，（1967）。德文。[6] Chazal，D. Cohen-Steiner，M. Glisse，L.J. Guibas 和 S.Y. Oudot，持久模及其图表的接近性，载于 SCG，第 237–246 页，（2009）[7] G. Ya. Perel’man，凸多面体交集的抽象k-骨架的实现 $\mathbb{R}^{2k+1}$。《函数与集合理论中的几何问题》（Kalinin. Gos. Univ., Kalinin），第 129–131 页，（1985）。俄文。[8] H. J. S. Smith，关于线性不定方程组和同余式，《伦敦皇家学会哲学汇刊》，第 151 卷，第 293–326 页，1861。[9] W. Crawley-Boevey，逐点有限维持久模的分解，《代数与应用杂志》**14**（2015），第 5 期，1550066。[10] F. Chazal，V. de Silva，M. Glisse 和 S. Oudot，持久模的结构与稳定性，Springer数学简明丛书，Springer，2016。[11] Michał Adamaszek 和 Henry Adams，圆的*Vietoris–Rips*复形，arXiv 预印本 arXiv:1503.03669，2015。[12] Janko Latschev，闭黎曼流形附近度量空间的*Vietoris–Rips*复形，《数学档案》，第 77 卷，第 6 期，第 522–528 页，2001。[13] Jean-Claude Hausmann，关于 *Vietoris–Rips* 复形及度量空间的上同调理论，载于：Frank Quinn（编），《拓扑学展望：纪念 *William Browder* 的会议论文集》，普林斯顿大学出版社，普林斯顿，第 175–188 页，1996。

伯南布哥联邦大学，巴西累西腓电子邮件地址：
rafael@dmat.ufpe.br