arXiv:2512.22224v1 [math.GM] 23 Dec 2025

一种新的特殊函数及其在概率论中的应用

Zeraoulia Rafik
University of Khemis Miliana，阿尔及利亚，数学系，纯数学与应用数学实验室 (LMPA) zeraoulia@univ-dbkm.dz

Alvaro H Salas哥伦比亚国立大学，哥伦比亚，物理系，Fizmako Group 研究组 ahsalass@unal.edu.co

David L.Ocampo哥伦比亚国立大学，哥伦比亚，Caldas大学，哥伦比亚，数学系 david.ocampo@ucaldas.edu.co

2025年12月30日

摘要

本文介绍一种类似于误差函数的新特殊函数，并给出其累积分布函数的近似精确闭式，形式涉及第一类切比雪夫多项式和误差函数。此外，我们还利用帕德逼近给出其级数表示。我们展示了令人信服的数值证据，表明这些逼近多项式在均方范数意义下的精度为 10^{-6}。类似的方法也可应用于其他概率分布，例如麦克斯韦–玻尔兹曼分布和正态分布；我们展示了该方法在这两种分布中的应用。

1 引言

误差函数积分见式（1），广泛应用于各种领域，通常出现在重积分问题中，其中被积函数包含自变量平方的指数函数；应用示例包括原子物理学、天体物理学和统计分析。我们想到要对这类函数 $f(x)$ 进行积分，以求得其原函数 $g(x)$。式（1）给出了一个例子，其中它是与正态分布相关的两个分布的幂，如下所示：[1]，使得 $f(x) = e^{-x^2}$，且 $g(x) = \text{erf}(x)$：

$$I(a) = \int_0^a \left(e^{-x^2}\right) \text{erf}(x)\, dx. \tag{1}$$

函数 $\text{erf}(x)$ 称为误差函数，其定义见式（2）：

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt = \text{erf}(x). \tag{2}$$

1.1 $\int_0^a \left(e^{-x^2}\right) \text{erf}(x)\, dx$ 在某些取值范围内的数值逼近

现在，如果我们确实需要在某个数值范围内用简单的表达式表示 $I(a)$，有一些方法可以得到各种近似。这个函数非常好。它以极快的速度趋近于其在 ∞ 处的极限。

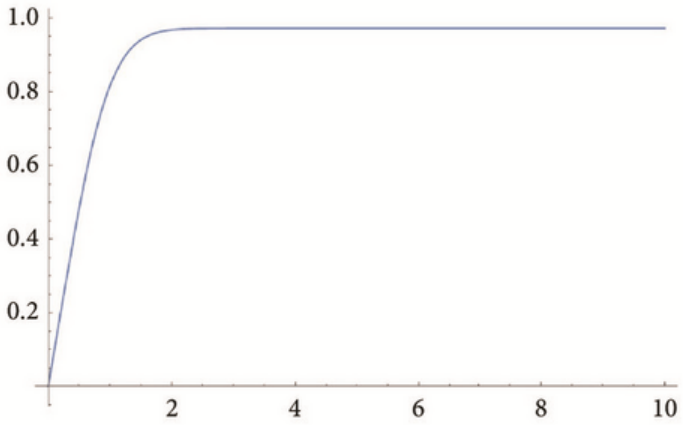

图1： I条件下a($a \in [0, 10]$)的图像。

因此（取决于我们所需的精度），我们可以很容易地取 $I(a) = I(\infty)$，其中 $a > a_0$ 的 a_0 大约为 3 或 4。Mathematica 给出了前 100 位数字：

$$\begin{aligned} I(\infty) = 0.&97210699276917859315107 7 \\ &87544239117555427218338556990 0 \\ &97229104084418887599582200334106782184012587 34 \cdots \end{aligned} \tag{3}$$

现在，当 a较小时，我们该怎么做?

该函数　性质非常好；我们只需使用在 $a = 0$处的泰勒展开。第一项如下：

$$I(a) \approx a. \tag{4}$$

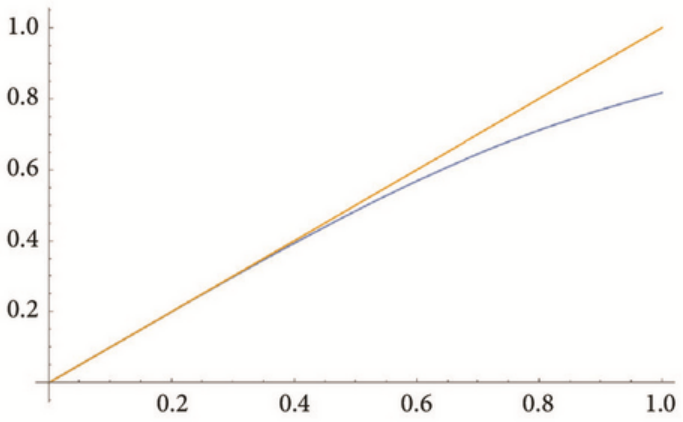

图2：使用泰勒展开对 $a \in [0, 1]$ 情况下的 $I(a)$进行近似。

证明很简单。泰勒级数如下所示：

$$I(a) = I(0) + I'(0)a + \frac{I''(0)}{2!}a^2 + \frac{I^{(3)}(0)}{3!}a^3 + \cdots \tag{5}$$

我们可以看到如下内容：

$$I(0) = 0, \qquad I'(0) = e^{-a^2}\,\mathrm{erf}(a)\big|_{a=0} = 1. \tag{6}$$

现在，让我们通过计算高阶导数来求得更好的近似：

$$I''(a) = \left(e^{-a^2}\,\mathrm{erf}(a)\right)' = -\frac{2}{\sqrt{\pi}}\,a e^{-a^2}\,(\mathrm{erf}(a)+1)\left(\sqrt{\pi}e^{a^2}\,\mathrm{erf}(a)+a\right), \qquad I''(0)=0. \tag{7}$$

我们使用 Mathematica 作为捷径，但如果记住这一点，手算也很容易：

$$\mathrm{erf}'(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2}.$$

我们得到

$$I^{(3)}(0)=0, \qquad I^{(4)}(0) = -\frac{12}{\sqrt{\pi}}. \tag{8}$$

因此，我们的下一个近似如下：

$$I(a) \approx a - \frac{1}{2\sqrt{\pi}}a^4. \tag{9}$$

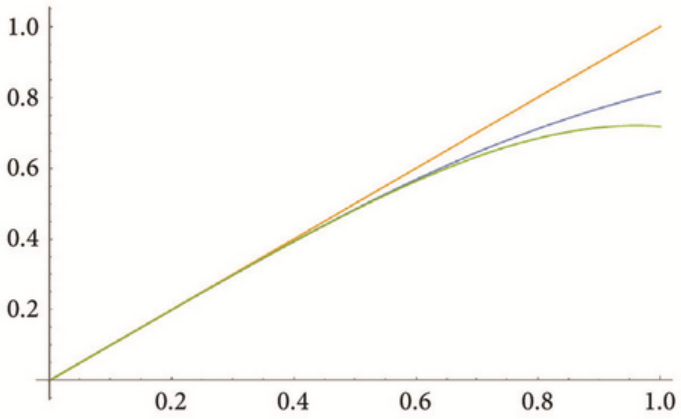

图3： $I(a)$及其两种近似的图像。

近似函数 [2] 的另一种方法是使用其导数：

$$\frac{dI}{da} = e^{-a^2}\,\mathrm{erf}(a). \tag{10}$$

但这是一个常微分方程，可以通过数值方法求解。
例如，下面给出了步长为 h 的简单显式欧拉格式：

$$\frac{I(a+h)-I(a)}{h} = e^{-a^2}\,\mathrm{erf}(a), \qquad I(a+h) = I(a) + h\,e^{-a^2}\,\mathrm{erf}(a). \tag{11}$$

我们可以使用初值 $I(0)=0$。
对于 $h=1/10$，我们得到以下结果（红点），并与精确函数（蓝线）进行比较).

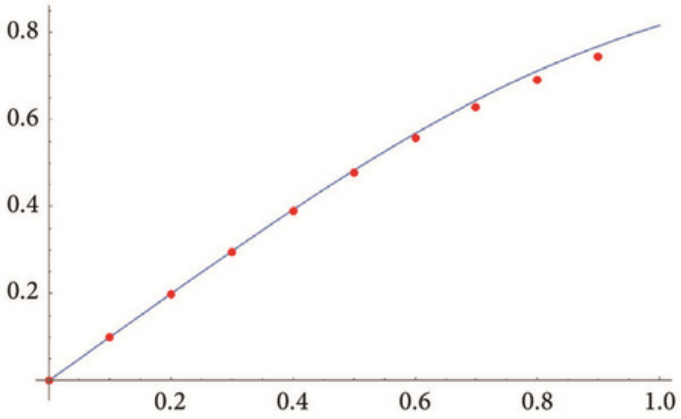

图4：步长为 $h = 1/10$时的简单显式欧拉格式。

对于 $h = 1/50$ ，请参见下一幅图。

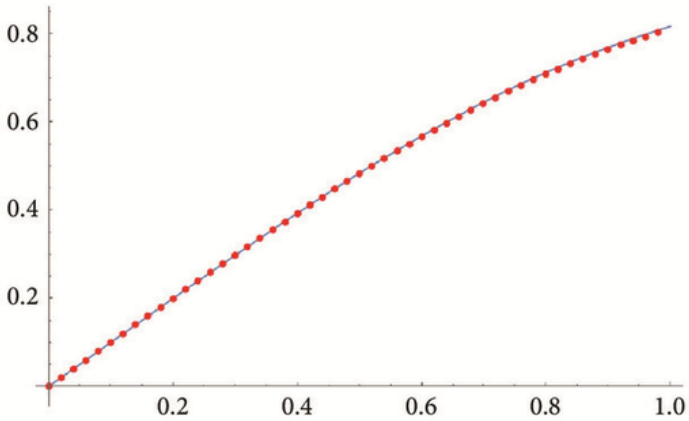

图5：步长为 $h = 1/50$时的简单显式欧拉格式。

这种方法可以作为数值积分的良好替代方案 [3] （当然，具体取决于上下文和应用场景）。现在我们来展示该函数与其他标准特殊函数（误差函数积分） [4] 之间的关系，以及它在误差函数和正态分布累积分布函数中的应用。函数（1）可用于求解一些复杂积分的值，这些积分的结果在任何标准特殊函数参考资料中都查不到，而且也无法通过 Wolfram Alpha 获得，例如，

$$\int_0^{+\infty} e^{x^2}\left(1 - 2\Phi(x\sqrt{2})\right) dx, \tag{12}$$

其中 $\Phi(x) = (1/\sqrt{2\pi}) \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz$。它是正态分布的累积分布函数；如果有人被要求求出这个积分的值，他会感到困惑，因为它非常复杂；他可能无法判断它是否收敛；即使是最好的计算工具 Wolfram Alpha，也无法识别出 Φ 是正态累积分布，因此无法得到这个积分的值。让我们使用 (1) 计算 (12)，并由此得出结论：它们的值相同，且是同一个函数和同一个积分。

表示误差函数与累积密度函数之间关系的著名公式，见 (2)，定义如下：

$$\operatorname{Erf}(x) = 2\big(\Phi(x\sqrt{2}) - \Phi(0)\big) = 2\Big(\Phi(x\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\Big) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1. \tag{13}$$

通过下面的简短证明，很容易验证它对每个实数都成立。

证明。 根据定义，误差函数

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, dt. \tag{14}$$

令 $t^2 = z^2/2$，可得 $t = z/\sqrt{2}$（因为 t 非负），于是 $dt = dz/\sqrt{2}$。端点 $t = 0$ 和 $t = x$ 变为 $z = 0$ 和 $z = x\sqrt{2}$。要将所得积分转化为看起来像累积分布函数（CDF）的形式，必须将其表示为下限为 $-\infty$ 的积分；因此

$$\operatorname{Erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{x\sqrt{2}} e^{-z^2/2}\, dz = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x\sqrt{2}} e^{-z^2/2}\, dz - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{0} e^{-z^2/2}\, dz\right). \tag{15}$$

右侧的两个积分都是标准正态分布的累积分布函数的值：

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-z^2/2}\, dz. \tag{16}$$

具体而言，

$$\operatorname{Erf}(x) = 2\big(\Phi(x\sqrt{2}) - \Phi(0)\big) = 2\Big(\Phi(x\sqrt{2}) - \frac{1}{2}\Big) = 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1. \tag{17}$$

现在，由于（18）式的左侧具有已知值，即为 $0.97210699\cdots$，因此右侧也等于 $0.97210699\cdots$；于是我们得到了如下恒等式：

$$\int_0^a \left(e^{-x^2}\right) \operatorname{Erf}(x)\, dx = \int_0^a e^{x^2} \big(1 - 2\Phi(x\sqrt{2})\big)\, dx. \tag{18}$$

现在我们将（1）式中定义的函数称为

$$T(x) = \int_0^x \left(e^{-t^2}\right) \operatorname{erf}(t)\, dt$$

因为它不指代任何对象，并且尚不知如何使用标准特殊函数将其解析表示为初等函数，而（18）式的右侧则给出了使用正态分布的累积分布函数表示 $T(x)$ 函数的另一种形式。

引理 1。**1** T（x） $= \int_0^x \left(e^{-t^2}\right)$ 误差函数$(t)\ dt$ 不能用初等函数表示。

证明。这是一个定理 刘维尔 [5], 后来用纯代数方法重新证明了这一点：对于有理函数 f，一个 dg, g 非恒定，则其原函数

$$\int \big[f(x) \exp(g(x))\big]\, dx \tag{19}$$

当且仅当存在某个有理函数 h，使其满足以下微分方程时，才能用初等函数表示：

$$f = h' + hg. \tag{20}$$

现在应用刘维尔定理，可以得出以下常微分方程：

$$1 = h'(x) + h(x)\big(-x^2 \operatorname{erf}(x)\big)$$

其中 $g(x) = -x^2$ 误差函数(x)，且 $f(x) = 1$。这是一个一阶常微分方程。我们使用 Wolfram Alpha 进行计算，得到以下解：

$$\exp\left(\frac{e^{-x^2}\left(e^{x^2}(\sqrt{\pi}x^3 \operatorname{erf}(x) - 1) + x^2 + 1\right)}{3\sqrt{\pi}}\right) \times \left(\exp\left\{\frac{1}{3}\sqrt{\pi}\left(\int_1^x \exp\Big(\frac{1}{3}\Big(t^3(-\operatorname{erf}(t)) - \frac{e^{-t^2}(t^2+1)}{\sqrt{\pi}}\Big)\Big)\, dt - \int_0^1 \exp\Big(\frac{1}{3}\Big(t^3(-\operatorname{erf}(t)) - \frac{e^{-t^2}(t^2+1)}{\sqrt{\pi}}\Big)\Big)\, dt\right)\right\} + 1\right) \tag{21}$$

其中 $h(0) = 1$。实际上，函数 h可以写成如下形式：

$$h(x) = \ell(x)\left[c_1 + \int_x^1 \ell(-\xi)\,d\xi\right]. \tag{22}$$

现在可以清楚地看出，$\ell(x)$ 是一个超越函数，$h(x)$ 表达式右侧定义的积分也是超越函数，因为有理函数的导数仍是有理函数。因此，如果原函数是有理函数，那么原函数所对应的函数就是有理函数。函数 h 仅在 $x = 0$ 处是有理函数，并且由于 $h(x) \neq 0$，两个超越函数之和始终是超越函数。根据有理函数的定义，$h(x)$ 不能称为有理函数；至此我们便完成了证明。

2 求 $T(+\infty)$ 的一种可能方法公式

这里可以给出一种求 $T(+\infty)$ 的可能方法公式，其定义如下：

$$T(+\infty) = \int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\,\mathrm{erf}(x)\right) dx = 0.97210699\cdots. \tag{23}$$

反向符号计算器无法用标准特殊函数表示 $0.97210699\cdots$，但我们尝试用误差函数表示法及超几何函数[6]来表示它；我们有：

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\, x\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right) \tag{24}$$

其中 ${}_1F_1$ 为库默尔合流超几何函数 [6]。现在由式（24）可得：

$$\int_0^{+\infty} \exp\left(-x^2\,\mathrm{erf}(x)\right) dx = \int_0^{+\infty} \exp\left(-\frac{2}{\sqrt{\pi}}x^3\right)\, {}_1F_1\left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; -x^2\right)\, dx. \tag{25}$$

将式（24）代入式（25）的右侧可得

$$\left(\pi^{1/6}\Gamma(4/3)/2^{1/3}\right)\, {}_1F_1\left(0.5; 1.5; -x^2\right).$$

因此，我们可以选取$x = e\sqrt{\pi}$，最终得到：

$$T(+\infty) \sim \frac{\pi^{1/6}\Gamma(4/3)}{2^{1/3}}\, {}_1F_1\left(0.5; 1.5; -\pi e^2\right) = 0.97216864\cdots. \tag{26}$$

```
In[338]:=
α =
  (π^(1/6) Gamma[4/3] / 2^(1/3))^Hypergeometric1F1[0.5,1.5,-E^2 π];
β = NIntegrate[Exp[-x^2 Erf[x]], {x, 0, ∞}];
γ = α;
error = β - γ
Out[340]=
-0.0000616497
```

图6： $T(+\infty)$的误差近似。

Mathematica 给出了式（25）的优美近似，如图6所示。

3 T（x）函数的级数表示

我们可以尝试求出关于 t 的幂级数展开

$$I(t) = \int_0^t \exp\bigl(-x^2 \operatorname{erf}(x)\bigr)\, dx = \sum_{p=1}^{\infty} c_p t^p. \tag{27}$$

系数 $c_p = d_{p-1}/p$由级数展开得到

$$e^{-x^2} \operatorname{erf} x = \sum_{p=0}^{\infty} d_p x^p,$$

从而得到

$$I(t) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p t^p = t - \frac{t^4}{2\sqrt{\pi}} + \frac{t^6}{9\sqrt{\pi}} + \frac{2t^7}{7\pi} - \frac{t^8}{40\sqrt{\pi}} - \frac{4t^9}{27\pi} + \frac{(\pi-28)t^{10}}{210\pi^{3/2}} + O(t^{11}). \tag{28}$$

级数 $I(1) = \sum_{p=1}^{\infty} c_p$ 似乎是收敛的。参见图7。

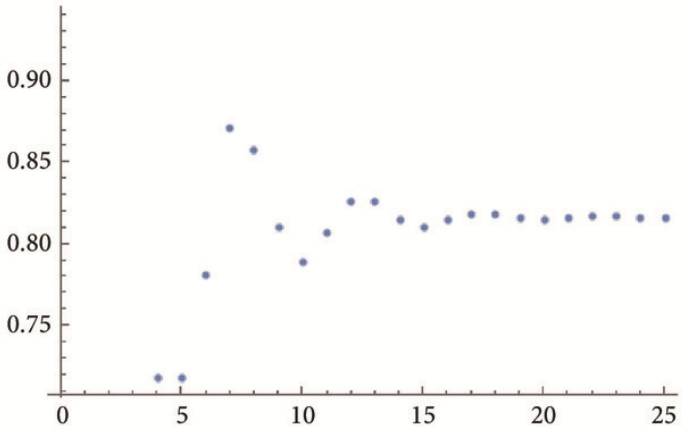

图7：$I_N = \sum_{p=0}^{N} c_p$ 关于 N 的收敛性，直到 $N = 25$。

$I_{25} = 0.8162$ 的值与 $I(1) = 0.816377$ 精确到小数点后三位。对于 $N = 50$，两者可一致到小数点后六位，但这并未给出 n项的幂级数闭式。我们应使用误差函数的近似以及帕德逼近所给出的某些近似，如以下各节所示。

4 n阶导数 $T(x) = \int_0^x e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)\, d\xi$的级数展开

引理4.1 $T(x) = \int_0^x e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)\, d\xi$ 的级数展开由以下恒等式定义：

$$\int_0^x e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \frac{A_{j,\varepsilon}^{k_j}}{k_j!} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{29}$$

其中

$$A_{j,\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{(j-1)/2}}{(j-2)\left(\frac{1}{2}(j-3)\right)!\sqrt{\pi}}, & \textit{if } j \geq 3 \textit{ and } j \textit{ an odd integer}, \\ \varepsilon, & \textit{otherwise } (0 < \varepsilon < 1), \end{cases} \tag{30}$$

这是需要掌握的关键思想。

证明。 假设我们有以下泰勒展开：

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \tag{31}$$

and

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n. \tag{32}$$

于是得到以下标准结果：

$$g(f(x)) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{n} b_k B_{n,k}(a_1, \ldots, a_{n-k+1}) \right) \frac{x^n}{n!}, \tag{33}$$

其中 $B_{n,k}(\cdot)$ 是部分贝尔多项式，其定义如下：

$$\widehat{B}_{m,j}(x_1, x_2, \ldots, x_{m-j+1}) = \sum_{\substack{k_0+k_1+\cdots+k_N=j \\ k_1+2k_2+\cdots+Nk_N=m}} \binom{j}{k_0, k_1, \ldots, k_N} \prod_{i=1}^{N} x_i^{k_i}. \tag{34}$$

要得到 (29) 中定义的 $T(x)$ 的 n 阶导数的级数展开，关键在于对 $g(x) = \exp(-x)$ 和 $f(x) = -x^2$ 误差函数 (x) 进行泰勒展开，以便使用数学中一个重要公式——Bruno–Fadi公式，例如上文利用 (34) 所定义的 (33) 中的公式。众所周知，$\exp(-x)$ 的泰勒展开如下：

$$g(x) = \exp(-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} x^n. \tag{35}$$

读者或许会对 $\operatorname{erf}(x)$ 的泰勒展开感兴趣；我们利用埃尔米特多项式，给出其级数展开的一个简明证明。

引理4.2 误差函数(x) 在每个点 a 处的泰勒展开由以下恒等式给出：

$$\operatorname{erf}_a(x) = e^{-a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(a)}{n!} (x-a)^n, \tag{36}$$

其中 $H_n(a)$ 是次数为 n的埃尔米特多项式。

证明。 $f^{(n)}(a)$ 可以用埃尔米特多项式 H_n 表示：

$$H_0(x) = 1, \quad H_1(x) = 2x, \quad H_2(x) = 4x^2 - 2, \quad H_3(x) = 8x^3 - 12x, \quad H_4(x) = 16x^4 - 48x^2 + 12, \quad H_5(x) = \cdots. \tag{37}$$

我们可以注意到 $H_{2n-1}(0) = 0$，由此得到 e^{-x^2} 在 $a = 0$处的幂级数：

$$e^{-x^2} = 1 - \frac{2}{2!}x^2 + \frac{12}{4!}x^4 - \frac{120}{6!}x^6 + \cdots. \tag{38}$$

乘以 $2/\sqrt{\pi}$后，积分得

$$\operatorname{erf}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{10} - \frac{z^7}{42} + \frac{z^9}{216} - \cdots \right). \tag{39}$$

由于 $\dfrac{d^n}{dx^n} e^{-x^2} = (-1)^n e^{-x^2} H_n(x)$，可以对每个 a 展开泰勒级数：

$$\operatorname{erf}_a(x) = e^{-a^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n H_n(a)}{n!} (x-a)^n. \tag{40}$$

那么我们就完成了。现在，将（40）乘以项 $-x^2$ 后，再将（40）与（35）复合，我们得到 Bruno–Fadi公式，其定义为

$$e^{-x^2} \operatorname{erf}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \frac{A_{j,\varepsilon}^{k_j}}{k_j!} \right) x^n, \tag{41}$$

其中

$$A_{j,\varepsilon} = \begin{cases} \dfrac{2(-1)^{(j-1)/2}}{(j-2)\left(\frac{1}{2}(j-3)\right)!\sqrt{\pi}}, & \text{if } j \geq 3 \text{ and } j \text{ an odd integer,} \\ \varepsilon, & \text{otherwise } (0 < \varepsilon < 1). \end{cases} \tag{42–43}$$

逐项积分该方程可得

$$\int_0^x e^{-\xi^2} \operatorname{erf}(\xi)\, d\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \lim_{\varepsilon \to 0} \left(\sum_{\substack{k_1+2k_2+\cdots+nk_n=n \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \ldots, k_n \geq 0}} \prod_{j=1}^{n} \frac{A_{j,\varepsilon}^{k_j}}{k_j!} \right) \frac{x^{n+1}}{n+1}, \tag{44}$$

由此可得新特殊函数的级数展开。

借助 Mathematica 进行快捷计算，可以证明（44）成立，并且如图8所示， π 的增量也得以展示。我们还可以使用 Mathematica 代码展开新特殊函数 $T(x)$ 的级数，如图9所示。

```
In[70]:= Clear[m];
jthderivative[j_] := If[IntegerQ[1/2 (j - 3)] && j ≥ 3,
  (2 (-1)^(1/2 (j-1)) j!)/((j - 2) Sqrt[π] (1/2 (j - 3))!), 0];
TableForm[Join[{{j, "d^j/dx^j (-x^2 erf(x))"}},
  Table[{j, jthderivative[j]}, {j, 1, 10}]], TableAlignments → Center] //
 TraditionalForm
```

Out[72]//TraditionalForm=

j	$\frac{d^j}{dx^j}(-x^2\operatorname{erf}(x))$
1	0
2	0
3	$-\frac{12}{\sqrt{\pi}}$
4	0
5	$\frac{80}{\sqrt{\pi}}$
6	0
7	$-\frac{1008}{\sqrt{\pi}}$
8	0
9	$\frac{17280}{\sqrt{\pi}}$
10	0

新特殊函数 $T(x)$ 的第 n 阶导数。

```
In[140]:=
Clear[x];
{Sum[coeff[j] * x^j, {j, 0, 12}],
  Normal[Series[Exp[-x^2] Erf[x], {x, 0, 12}]]} // Simplify
```

Out[142]=

$$\left\{\frac{1}{3780\pi^2}\left(3780\pi^2 + 2520x^{12} + 5040\sqrt{\pi}\,x^9(-1+x^2) - 24\pi x^6(-315+210x^2-98x^4+36x^6) + \pi^{3/2}x^3(-7560+2520x^2-756x^4+180x^6-35x^8)\right),\right.$$
$$\left.\frac{1}{3780\pi^2}\left(3780\pi^2 + 2520x^{12} + 5040\sqrt{\pi}\,x^9(-1+x^2) - 24\pi x^6(-315+210x^2-98x^4+36x^6) + \pi^{3/2}x^3(-7560+2520x^2-756x^4+180x^6-35x^8)\right)\right\}$$

新特殊函数 $T(x)$ 在 $x = 0$ 附近的级数展开。

5 使用误差函数近似表示 $\int_{-1}^{1}$ 误差函数$(x)^n\,dx$

我们有如下幂级数

$$e^{-x^2}\,\mathrm{erf}(x) = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k}\,\mathrm{erf}^{(k)}(x)}{k!}, \tag{45}$$

于是，由（45）可得：

$$\int_{-1}^{1} e^{-x^2}\,\mathrm{erf}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{k!}\int_{-1}^{1} x^{2k}\,\mathrm{erf}^{(k)}(x)\,dx. \tag{46}$$

现在，要利用误差函数表达式计算（46）右侧的积分非常困难；因此，我们应采用以下简洁的近似：

$$\big(\mathrm{erf}(x)\big)^2 \approx 1 - e^{-ax^2} \quad \text{with} \quad a = \frac{(1+\pi)^{2/3}}{\log^2(2)}. \tag{47}$$

这里我们可以给出一个简短的证明，说明误差函数平方也可近似为$a = (1+\pi)^{2/3}\log^2(2)$的值。

证明。 我们完全同意

$$F(a) = \int_0^{\infty}\big(\mathrm{erf}(x)^2 - (1-e^{-ax^2})\big)^2\,dx \tag{48}$$

对于 $a \approx 1.23907$ 时取最小值。根据 RIES，这个数似乎更接近

$$a = (1+\pi)^{2/3}\log^2(2) \approx 1.23907 \tag{49}$$

而非 $\pi^2/8 \approx 1.23370$，即使这并不会造成很大的差异（最大误差从 0.006 降至 0.004，积分 $F(a)$ 的值则从 0.00002769 变为 0.00002572 ）。如果我们想寻求更好的近似，可以考虑 log(1 − 误差函数 $(x)^2$) （这肯定会在问题中引入偏差），建立一个帕德逼近，最终得到

$$\mathrm{erf}(x)^2 \approx 1 - \exp\left(-\frac{4}{\pi}\,\frac{1+\alpha x^2}{1+\beta x^2}\,x^2\right) \tag{50}$$

其中

$$\alpha = \frac{10-\pi^2}{5(\pi-3)\pi}, \qquad \beta = \frac{120-60\pi+7\pi^2}{15(\pi-3)\pi}. \tag{51}$$

相应误差函数的值为 1.1568×10^{-7}，也就是说，比采用初始公式时小了近 250 倍；最大误差为 0.00035。

现在我们已准备好近似

$$I_n = \int_{-1}^{1}\big(\mathrm{erf}(x)\big)^{2n}\,dx \tag{52}$$

by

$$J_n = \int_{-1}^{1}\big(1-e^{-ax^2}\big)^n\,dx, \tag{53}$$

对于该式，其 需要进行二项式展开（很容易）。这样就能得到如下结果：

$$J_1 = 2 - \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{a}), \tag{54}$$

$$J_2 = 2 - \frac{2\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{a}) + \frac{\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{2a}), \tag{55}$$

$$J_3 = 2 - \frac{3\sqrt{\pi}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{a}) + \frac{3\sqrt{\pi/2}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{2a}) - \frac{\sqrt{\pi/3}}{\sqrt{a}}\,\mathrm{erf}(\sqrt{3a}). \tag{56}$$

现在很容易得到式（53）中 J_n 的递推关系；我们取 $t=\sqrt{ak}\,x \Rightarrow dx = dt/(\sqrt{ak})$，并推导出 $\mathrm{erf}(\sqrt{ak})$，从而得到以下通式：

$$J_n = 2 + \frac{\sqrt{\pi}}{a}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{\sqrt{k}}\binom{n}{k}\mathrm{erf}(\sqrt{ak}). \tag{57}$$

我们在表1中列出一个简表以供比较；针对这个问题，我们沿用相同的帕德逼近方法，并得到以下近似：

$$I_n = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n {}_2F_1\left(2n, 2n+\tfrac{1}{2}; 2n+\tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{3}\right), \tag{58}$$

$$I_n = \frac{2}{2n+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^n F_1\left(2n+\tfrac{1}{2}; -2n, 2n; 2n+\tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{30}, -\tfrac{3}{10}\right), \tag{59}$$

其中，F_1 是二元阿佩尔超几何函数。

6 使用误差函数近似和帕德逼近多项式，给出 $T(x)$ 函数在 $[-1,1]$ 上的级数表示

回顾

$$I_k = \int_{-1}^{1} x^{2k}\big(\mathrm{erf}(x)\big)^k\,dx \tag{60}$$

当 k 为奇数时，其值为 0。因此，我们需要关注

$$I_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{4k}\big(\mathrm{erf}(x)\big)^{2k}\,dx \tag{61}$$

正如我们在上文第3节中所示，为得到式（57），可以使用以下方法对其进行近似：

$$\big(\mathrm{erf}(x)\big)^2 \approx 1 - e^{-ax^2} \quad \text{with} \quad a = (1+\pi)^{2/3}\log^2(2), \tag{62}$$

令

$$I_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{4k}\big(1-e^{-ax^2}\big)^k\,dx \tag{63}$$

需要使用二项式展开进行展开。因此，在实际应用中，我们面临的问题是

$$J_{n,k} = \int_{-1}^{1} x^{4k}e^{-nax^2}\,dx \tag{64}$$

以及原函数

$$\int x^{4k}e^{-nax^2}\,dx = -\frac{1}{2}x^{4k+1}E_{1/2-2k}(anx^2), \tag{65}$$

其中出现了指数积分函数。利用上下限，可将其化简为

$$J_{n,k} = -E_{1/2-2k}(an) \tag{66}$$

并得到如表2所示的“合理”近似。

另一个近似 可以使用最简单的误差函数帕德逼近 [7] 获得

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}\,(1+x^2/3)} \tag{67}$$

从而得到

$$I_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{4k}\big(\mathrm{erf}(x)\big)^{2k}\,dx = \frac{2}{6k+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^k {}_2F_1\left(2k, 6k+\tfrac{1}{2}; 6k+\tfrac{3}{2}; -\tfrac{1}{3}\right), \tag{68}$$

准确度略低于前一个。继续使用帕德逼近

$$\mathrm{erf}(x) = \frac{2x}{\sqrt{\pi}} - \frac{x^3}{15\sqrt{\pi}}\left(1+\frac{3x^2}{10}\right)^{-1} \tag{69}$$

我们应该得到

$$I_{2k} = \int_{-1}^{1} x^{4k} \big(\operatorname{erf}(x)\big)^{2k}\, dx = \frac{2}{6k+1} \left(\frac{4}{\pi}\right)^{k} F_1\big(6k+\tfrac{1}{2}; -2k, 2k; 6k+\tfrac{3}{2}; \tfrac{1}{30}, -\tfrac{3}{10}\big)\,, \tag{70}$$

其中出现了二元阿佩尔超几何函数。最后，我们得到如下级数表示：

$$I(t) = \int_{-1}^{1} \exp\big(-x^2 \operatorname{erf}(x)\big)\, dx \sim \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k!} I_{2k}. \tag{71}$$

7 利用多项式近似 $T(x)$ 函数

引理7.1 定义如下的函数 f

$$f(x) = T\left(\frac{b+a}{2} + \frac{b-a}{2}x\right), \qquad -1 \le x \le 1 \tag{72}$$

可利用切比雪夫多项式进行近似。

证明. 我们可以使用第一类切比雪夫多项式 [8] 在区间 $[-1,1]$ 上近似函数 f。为此，我们选取某个正整数 n，并通过以下公式定义系数 c_n

$$c_j = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{T_j(x)}{\sqrt{1-x^2}} f(x)\, dx, \qquad j = 0, 1, \ldots, n. \tag{73}$$

那么，多项式

$$P_n(x) = \frac{1}{2} c_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j T_j(x) \tag{74}$$

以可能的最佳方式逼近 $f(x)$。由于

$$T(x) = f\left(\frac{a+b-2x}{a-b}\right) \quad \text{for } a \le x \le b \tag{75}$$

我们可以看到，多项式

$$Q_n(a,b,x) = P_n\left(\frac{a+b-2x}{a-b}\right)$$

是在 $[a,b]$ 上对 $T(x)$ 函数的一个逼近多项式。计算得出

$$\begin{aligned} Q_{11}\Big(0, \frac{3}{2}, x\Big) = {} & 0.0137936039435\, x^{11} - 0.135129528505\, x^{10} + 0.548169602543\, x^9 - 1.16161653976\, x^8 + 1.31691631085\, x^7 \\ & - 0.746480407376\, x^6 + 0.338453415662\, x^5 - 0.370071852413\, x^4 + 0.0133517048763\, x^3 \\ & - 0.00104123958376\, x^2 + 1.00003172454\, x, \end{aligned} \tag{76}$$

and

$$\begin{aligned} Q_{11}\Big(\frac{3}{2}, 3, x\Big) = {} & -0.0000675632422240\, x^{11} + 0.00188305739843\, x^{10} - 0.0239397852528\, x^9 + 0.183255163671\, x^8 \\ & - 0.937675010268\, x^7 + 3.35913844398\, x^6 - 8.55140470408\, x^5 + 15.3046428836\, x^4 \\ & - 18.4622672665\, x^3 + 13.5920479951\, x^2 - 4.69093970289\, x + 1.04191571066. \end{aligned} \tag{77}$$

对于这两种近似，误差都小于 10^{-6}。事实上，数值积分给出

$$\big\|T(x) - Q_{11}(0, \tfrac{3}{2}, x)\big\| = \sqrt{\int_0^{3/2} \big(T(x) - Q_{11}(0, \tfrac{3}{2}, x)\big)^2\, dx} \approx 2.26 \times 10^{-7} \tag{78}$$

and

$$\big\|T(x) - Q_{11}(\tfrac{3}{2}, 3, x)\big\| = \sqrt{\int_{3/2}^{3} \big(T(x) - Q_{11}(\tfrac{3}{2}, 3, x)\big)^2\, dx} \approx 3.66 \times 10^{-10}. \tag{79}$$

因此，我们可以在区间 $[0,3]$上高精度地计算 $T(x)$函数。对于 $x>3$，我们可以使用以下以误差函数表示的近似公式:

$$T(x)\approx\varphi(x)\overset{\text{def}}{=}\int_0^3\exp\bigl(-t^2\,\mathrm{erf}(t)\bigr)\,dt+\frac{\sqrt{\pi}}{2}\bigl(\mathrm{erf}(x)-\mathrm{erf}(3)\bigr),\qquad x\geq 3. \tag{80}$$

$[3,100]$ 上的均方误差为

$$\|T(x)-\varphi(x)\|=\sqrt{\int_3^{100}\bigl(T(x)-\varphi(x)\bigr)^2\,dx}\approx 2.02\times10^{-8}. \tag{81}$$

现在，我们准备介绍如何利用最重要的分布之一——麦克斯韦–玻尔兹曼分布，将 $T(x)$应用于概率和热力学。

8 T（x）在概率中的应用

Let

$$F_{\lambda,\mu}(x)=\int_0^x e^{-\xi^2(\lambda+\mu\,\mathrm{erf}(\xi))}\,d\xi\qquad(\lambda>0). \tag{82}$$

定义

$$c=\int_0^\infty e^{-\xi^2(\lambda+\mu\,\mathrm{erf}(\xi))}\,d\xi \tag{83}$$

并令

$$T_{\lambda,\mu}(x)\overset{\text{def}}{=}c^{-1}F_{\lambda,\mu}(x),\qquad x\geq 0. \tag{84}$$

函数 $T(x)$ 是本文研究的新特殊函数。该函数定义了一个累积分布函数（CDF），其概率密度函数（PDF）为

$$f_{\lambda,\mu}(x)=e^{-x^2(\lambda+\mu\,\mathrm{erf}(x))},\qquad x\geq 0. \tag{85}$$

事实上，我们有

$$T'_{\lambda,\mu}(x)=e^{-x^2(\lambda+\mu\,\mathrm{erf}(x))}>0,\qquad T_{\lambda,\mu}(+\infty)=1. \tag{86}$$

对该函数的方程求导两次，并消去含有误差函数 erf 的项，即可得到不含误差函数 erf 的常微分方程。这给出以下常微分方程:

$$\sqrt{\pi}\,x\,y''(x)=2e^{-x^2}y'(x)\bigl(\sqrt{\pi}e^{x^2}\log(y'(x))-\mu x^3\bigr). \tag{87}$$

令 $\mu=0$，得到常微分方程

$$x\,y''(x)=2y'(x)\log\bigl(y'(x)\bigr) \tag{88}$$

其通解如下:

$$y(x)=\frac{1}{2}e^{-c_1/2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\bigl(e^{c_1/2}x\bigr)+c_2. \tag{89}$$

若将（89）与

$$cF_{\lambda,0}(x)=c\int_0^x e^{-\lambda\xi^2}\,d\xi=\left(\int_0^\infty e^{-\lambda\xi^2}\,d\xi\right)^{-1}\int_0^x e^{-\lambda\xi^2}\,d\xi=\mathrm{erf}(\sqrt{\lambda}x) \tag{90}$$

必有

$$\frac{1}{2}e^{-c_1/2}\sqrt{\pi}\,\mathrm{erfi}\bigl(e^{c_1/2}x\bigr)+c_2=\mathrm{erf}(\sqrt{\lambda}x), \tag{91}$$

因此

$$c_1=i\pi+\log\Bigl(\frac{\pi}{4}\Bigr),\qquad c_2=0. \tag{92}$$

我们已经证明，当 $\mu=0$我们的函数 $T_{\lambda,\,0}(x)$ 在取值为 $\lambda=\pi/4$ 时与误差函数 $\mathrm{erf}(\sqrt{\lambda}x)$ 重合。当 $\mu\neq0$ 我们无法以闭式求得常微分方程 (87) 的解。我们可以尝试用数值方法或其他方法求解。我们的目标是展示如何将新特殊函数$T_{\lambda,\,\mu}(x)$ 应用于概率和物理学。

示例

我们寻找 λ 和 μ，以便通过函数 $y(x) = T_{\lambda,\,\mu}(x)$ 来调整误差函数。为此，我们施加以下条件：

$$\operatorname{erf}(1) = T_{\lambda,\mu}(1), \qquad \operatorname{erf}'(1) = T'_{\lambda,\mu}(1). \tag{93}$$

解这个方程组可得

$$\lambda = 0.1671645, \qquad \mu = 0.8449657. \tag{94}$$

函数$T_{\lambda,\,\mu}(x)$ 转换为

$$T_{\lambda,\mu}(x) = 1.05021 \int_0^x \exp\left(-\xi^2(0.167164 + 0.844966\ \operatorname{erf}(\xi))\right) d\xi. \tag{95}$$

绘制这两个函数，得到如下图像，如图10所示。

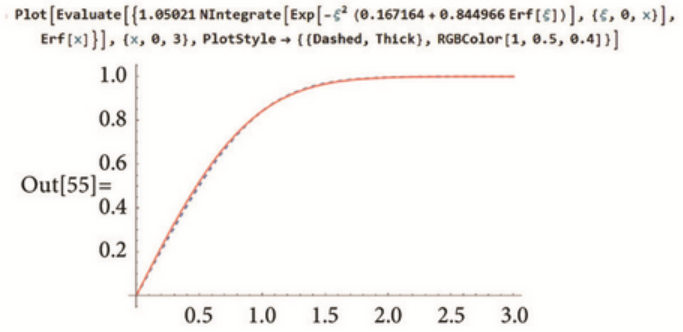

图10：借助新特殊函数调整误差函数。

9 T（x）在热力学中的应用

在物理学（尤其是统计力学）中，麦克斯韦–玻尔兹曼分布是一种以詹姆斯·克拉克·麦克斯韦和路德维希·玻尔兹曼命名的特定概率分布。它最初被定义并用于描述理想气体中的粒子速度：粒子在静止容器内自由运动，彼此之间不发生相互作用，只有在极短暂的碰撞中才会相互交换能量和动量，或与热环境交换能量和动量。在此语境中，“粒子”指气体粒子（原子或分子），并假设粒子系统已达到热力学平衡。这类粒子的能量遵循所谓的麦克斯韦–玻尔兹曼统计，而速度的统计分布则通过将粒子能量等同于动能推导得出。从数学上看，麦克斯韦–玻尔兹曼分布是具有三个自由度的卡方分布（三个自由度对应欧几里得空间中速度矢量的各个分量），其尺度参数表示以与 T/m （温度与粒子质量之比）的平方根成比例的单位衡量的速度；见图 11。

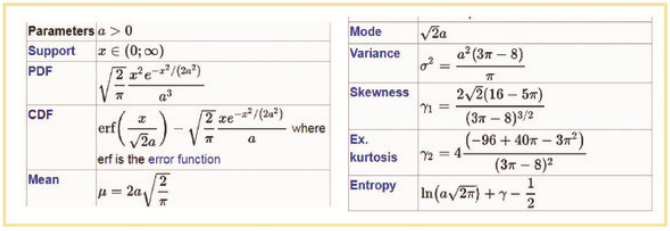

图 11：麦克斯韦–玻尔兹曼分布。

Boltz 的累积分布函数 麦克斯韦–玻尔兹曼分布可通过新特殊函数 $T_{\lambda,\ \mu}(x)$ 近似表示如下 s:

$$\operatorname{erf}\left(\frac{x}{\sqrt{2}a}\right) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right) \approx T_{\lambda,\mu}(x) - \sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{x}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2a^2}\right), \tag{96}$$

其中 $T_{\lambda,\ \mu}(x)$ 是对 $\operatorname{erf}(x/\sqrt{2}a)$ 的一种近似,¯其中参数 λ 和 μ 取决于 a。这种近似可以用与示例 1、图 11 中所展示的方法类似的方式得到。另一方面，当 $0 < a \leq 1$ 时，我们可以近似麦克斯韦–玻尔兹曼分布的累积分布函数，如图 12 所示，其中取值为 $a = 0.75$。

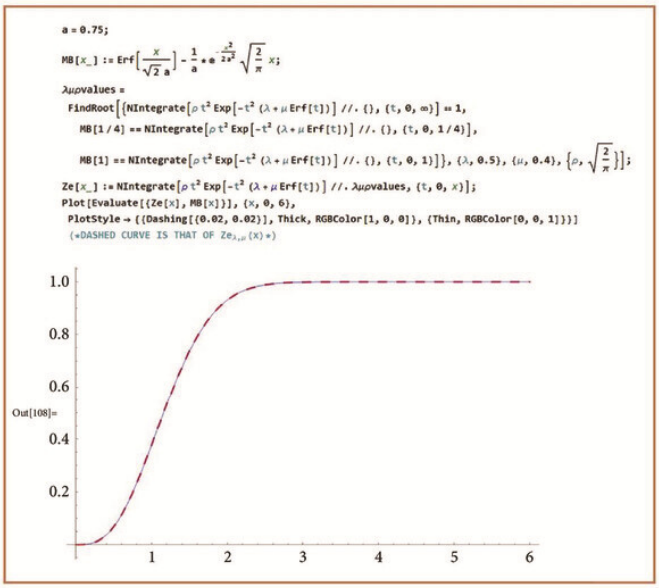

图 12： $a = 0.75$ 时麦克斯韦–玻尔兹曼分布累积分布函数的近似。

最后，这种利用新特殊函数得到的近似表明，它也可用于热力学：在不存在能量相关态密度使分布发生偏斜的情况下，可用它计算平均粒子能量；同时，给定能量的概率表示必须归一化为 1，而如式 (86) 所示，使用我们这个含两个参数的新特殊函数即可满足这一要求。

10 结论

我们研究了一种定义在 $[0, +\infty)$ 上的新概率分布，并使用帕德逼近给出了 $T(x)$ 函数的级数表示。实际上，我们利用切比雪夫多项式和误差函数对该分布的累积分布函数进行了逼近。我们采用的方法适用于逼近其他概率分布的累积分布函数，因为它们的累积分布函数有界，且取值介于 0 和 1 之间。众所周知，切比雪夫多项式是逼近连续函数的最优多项式。另一方面，也可以利用有理切比雪夫逼近来逼近这类函数。这项技术可用于未来的研究。

数据可用性

支持这一新特殊函数的数据是误差函数积分表，该表被列为本文的重要参考资料之一，而该函数在任何关于误差函数积分的标准参考资料中都未曾提及。

利益披露

Zerao ulia Rafik 目前任职于阿尔及利亚巴特纳的 Timgad高中数学系。

利益冲突

本文发表不存在任何利益冲突。

作者贡献

Zeraoulia Rafik、Alvaro H. Salas和David L. Ocampo为同等贡献作者。

致谢

Alvaro H. Salas，来自哥伦比亚的哥伦比亚国立大学，获得了资助/奖励编号283，
http://agenciadenoticias.unal.edu.co/detalle/article/
profesor-de-la-un-gano-premio-scopus-en-el-area-de-matematicas.html。我们衷心感谢David L. Ocampo教授为提升论文质量所作的努力。谨向Alvaro H. Salas教授以及我的父母致以诚挚的问候，并向我的妻子和我的第二颗心——儿子Taha Abd-Aldjalil——致以最诚挚的问候。我们还要感谢来自Stack Exchange Math的Yuriy S和Claude Leibovici，以及来自MathOverflow的Carlo Beenakker教授对本文所作的贡献。

尾注

1. 在数学中，误差函数（也称为高斯误差函数）是一种在概率、统计学和描述扩散的偏微分方程中出现的S形特殊函数（非初等函数）。其定义为Erf(x) $=(2/\sqrt{\pi})\int_0^x e^{-t^2}dt$。当然，它与正态累积分布函数 $\Phi(x) = P(N < x)$ $=(1/\sqrt{2\pi})\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt$ 密切相关（其中 $N \sim N(0,1)$为标准正态分布），关系式为Erf $= 2\Phi(x\sqrt{2}) - 1$。

2. 正态分布的累积分布函数。在概率论和统计学中，实值随机变量 X 的累积分布函数（CDF，也称累积密度函数），或简称 X 的分布函数，在 x 处的取值表示 X 取值小于或等于 x 的概率。如果有一个量 A 随机取某个值，累积密度函数 $F(x)$ 给出 X 小于或等于 x 的概率；也就是说，

$$F(x) = P(A \leq x).$$

对于连续分布，它表示概率密度函数从负无穷到 x 下方的面积。累积分布函数也用于指定多元随机变量的分布。

参考文献

[1] J. L. Teugels 和 B. Sundt，精算科学百科全书，第 1 卷，Wiley，2004 年。[2] N. Mai-Duy 和 T. Tran-Cong，使用径向基函数网络近似函数及其导数，应用数学建模，27(3):197–220，2003 年。[3] T. Suzuki 和 T. Suzuki，求解析函数零点的数值积分误差法，计算与应用数学杂志，152(1–2):493–505，2003 年。[4] E. W. Ng 和 M. Geller，误差函数积分表，美国国家标准局研究杂志，73B:1–20，1969 年。[5] J. Liouville，关于超越函数分类的回忆录续篇，以及不可能用系数的有限显式函数表示某些方程根的论述，纯粹与应用数学杂志，3:523–546，1838 年。[6] 可见 https://arxiv.org/pdf/1702.08438.pdf。[7] A. Khani 和 S. Shahmorad，采用帕德逼近求解非线性弗雷德霍姆积分微分方程的数值解的一种运算方法，*Scientia Iranica*，19(6):1691–1698，2012 年。

[8] H. N. Soloklo 和 M. M. Farsangi，使用和声搜索进行模型降阶的切比雪夫有理函数近似，*Scientia Iranica*，20(3):771–777，2013年。