arXiv:2512.22253v1 [math.GM] 24 Dec 2025

有序区间上的一类新型模糊内积与模糊范数

Bayaz Daraby[a]、Asghar Rahimi[a]、Hasan Haddadzadeh[a],*

[a]马拉盖大学数学系，邮政信箱 ***55136-553***，伊朗马拉盖

数学主题分类：46S40，03E72，46B40 关键词：有序区间；模糊内积；模糊范数

1. 引言

模糊内积空间最初由 Biswas [1] 提出，随后由 Kohli [2], 、Hasankhani [3], 以及之后的 Daraby 等人 [4, 5]进一步发展。

近年来，这一研究方向取得了显著进展。Popa 和 Sid.a [6], 提供了全面的综述，并提出了一种新的表述；Kider [7]则研究了其他结构性质及其推广。最近，Xiao [8]进一步探讨了模糊内积空间的更多示例、基本特征及应用。

尽管三十多年来研究十分深入，一项根本性障碍仍未解决：在所有此前提出的、保留合理线性性和正性性质的定义下，要么会失去重要的几何不等式（如柯西–施瓦茨不等式、平行四边形法则或贝塞尔不等式），要么在要求结构一致性时，内积就只能取清晰的实数值。Byun 等人严格证明了这一严重局限 [9] ，它长期以来

*通讯作者电子邮箱：daraby@maragheh.ac.ir (Bayaz Daraby), rahimi@maragheh.ac.ir(Asghar Rahimi), Mh.hadadzadeh@stu.maragheh.ac.ir (HasanHaddadzadeh), m_h_haddad@yahoo.com (Hasan Haddadzadeh)

一直是发展真正的模糊希尔伯特空间结构的主要瓶颈。

在区间和模糊环境中构建功能完备的线性结构，一直受到概念和技术难题的阻碍。其中最突出的是模糊量固有的不精确性与经典线性代数公理的严格性之间存在冲突，正如 Siminski [10] 所指出的。因此，经典泛函分析工具并不适用于模糊线性空间。区间上的标准算术运算还会带来进一步的复杂性。广泛使用的定义

$$[a,b] \mathbin{\widehat{\oplus}} [c,d] = [a+c, b+d], \qquad [a,b] \mathbin{\widehat{\ominus}} [c,d] = [a-d, b-c],$$

缺乏严谨的依据，并会导致不一致；例如，

$$\big([a,b] \mathbin{\widehat{\oplus}} [c,d]\big) \mathbin{\widehat{\ominus}} [c,d] = [a,b]$$

只有当区间退化为清晰数时才成立。尽管如此，Hassankhani 的表述保留了线性性，并为经典内积向模糊向量空间的扩展提供了一种一致的方式。基于这些观察，本文引入一种基于有序区间概念的改进型模糊内积定义。这种推广放宽了不必要的序约束，保留了加法和减法，并取消了模糊内积取值必须为清晰数的要求。

设 $a, b \in \mathbb{R}$。我们将有序区间 定义为

$$[a,b]_o = \begin{cases} \{x \mid x \in [a,b]\}, & a \le b, \\ \{x \mid x \in [b,a]\}, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

所有此类有序区间的集合记为

$$O(\mathbb{R}) = \{[a,b]_o \mid a, b \in \mathbb{R}\}.$$

对于 $[a,b]_o, [c,d]_o \in O(\mathbb{R})$ 和 $k \in \mathbb{R}$，定义

$$\begin{aligned} [a,b]_o \oplus [c,d]_o &= [a+c,\ b+d]_o, \\ [a,b]_o \ominus [c,d]_o &= [a-c,\ b-d]_o, \\ [a,b]_o \odot [c,d]_o &= [ac,\ bd]_o, \end{aligned}$$

$$k[a,b]_o = [ka, kb]_o.$$

这些运算允许使用无序端点，同时保留模糊算术所需的结构性质。

在本文中，我们引入了模糊内积的新定义，该定义克服了这些局限，同时保留了基本的向量空间性质。设 X 是 $\mathbb{C}$ 上的一个向量空间，并设 $\mathcal{K}: \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个模糊数。假设存在满足以下条件的常数 A_α、B_α

$$0 < \min\{A_\alpha, B_\alpha\} \le \max\{A_\alpha, B_\alpha\} < \infty.$$

对于每个 $\alpha \in (0,1],$，一个映射

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha : (0,1] \times X \times X \to \mathbb{C}$$

若存在定义在 X 上的经典内积 $\langle \cdot, \cdot \rangle'$ 和 $\langle \cdot, \cdot \rangle''$，使得对于所有 x、y、$z \in X$ 以及所有 $\alpha \in (0,1],$，以下条件成立，则称其为 X 上的模糊内积:

$$\mathcal{K}\big(\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big|\big) \ge \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \big|\langle x,y\rangle_\alpha\big| \in [A_\alpha|\langle x,y\rangle'|,\ B_\alpha|\langle x,y\rangle''|]_o.$$

有序区间的使用提供了一个简洁且结构自然的框架，既保留了模糊内积的特征，又引入了由 α 索引的分级结构。

为便于考察即将面临的挑战，并在全文假设 $0 < A_\alpha \le B_\alpha < \infty$ 的前提下，我们将上式改写为以下形式。

$$\mathcal{K}\big(\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big|\big) \ge \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad A_\alpha|\langle x,y\rangle'| \le \big|\langle x,y\rangle_\alpha\big| \le B_\alpha|\langle x,y\rangle'|.$$

类似的构造也适用于模糊范数。设 C_α, D_α 满足

$$0 < \min\{C_\alpha, D_\alpha\} \le \max\{C_\alpha, D_\alpha\} < \infty.$$

对于每个 $\alpha \in (0,1],$ 映射

$$\|.\|_\alpha : (0,1] \times X \to \mathbb{C}$$

如果存在定义在 X 上的范数 $\|\cdot\|'$ 和 $\|\cdot\|''$，使得

$$\mathcal{K}\big(\big|\,\|x\|_\alpha\,\big|\big) \ge \alpha \quad \Longleftrightarrow \quad \big|\|x\|_\alpha\big| \in [C_\alpha\|x\|',\ D_\alpha\|x\|'']_o.$$

这一表述自然地推广了经典范数，并避免了对区间界施加限制性的排序假设。在内积满足这些假设的情况下，大多数经典结构性质都得以恢复；特别是，正交性会立即得到保持。我们得到了经典不等式的模糊类比。对于所有 x， $y \in X$ 和 $\alpha \in (0, 1]$,

$$|\langle x, y\rangle_\alpha|^2 \leq \left(\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right)^2 \big|\|x\|_\alpha \|y\|_\alpha\big|^2,$$

且对于任意正交归一系 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$,

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i\rangle_\alpha|^2 \leq \left(\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right)^2 \big|\|x\|_\alpha\big|^2.$$

在本文中，我们引入了一类新型模糊内积，它推广了经典内积结构，在保留其基本分析特性的同时，自然地兼容非线性与模糊性。这类模糊内积类似于非线性泛函分析中的半内积，提供了稳健且灵活的框架。它们允许定义相应的模糊范数，并为研究和发展模糊巴拿赫空间与模糊算子理论奠定了坚实基础。换言之，所提出的模糊内积与范数构成了一套全面而灵活的工具，使希尔伯特空间理论和算子分析中的许多经典结果得以推广至模糊情形。

为什么模糊范数在此并非不确定性模型

本文不将模糊性解释为认识不确定性、真值程度，或需要消除或平均的不精确性。相反，模糊范数和模糊内积被用作丰富底层几何—泛函结构的机制。本文引入的模糊值并不放宽经典约束，而是编码经典层面无法获取的额外几何信息。这一视角从根本上使本文框架有别于早期方法，包括 Felbin 和 Bag–Samanta 的方法。在这类方法中，模糊性通常与特定的 t-范数相联系，并作为经典线性结构的一种软扩展，往往导致结构变得清晰，或丧失基本的几何性质。相比之下，本文提出的框架刻意避免指定任何特定的 t-范数。这一选择并非仅仅

是技术层面的，而是概念层面的：指定 t-范数会施加一条先验聚合规则，从而限制可容许的几何行为，并使理论趋向于准清晰实现。

本模型在概念上的一个关键区别在于，它以双侧模糊有界条件取代经典线性性。算子和泛函不再需要满足精确的线性关系，而是必须满足受控的上、下模糊界；经典线性性则作为一种特殊情形得以恢复。这种替代保留了基本的几何结构，同时允许实现经典线性框架无法实现的真正模糊的实现。

因此，在所提出的框架中，模糊性既不是对结构的放宽，也不是不确定性的替代物。正交性等经典概念在结构层面仍然有意义，同时也允许存在多种受控的模糊实现。因此，经典内积和范数是模糊结构等价类中的典范代表，而非通过极限或去模糊化过程得到的端点。

2. 预备知识

本节将给出全文中要用到的若干定义和预备结果。

模糊数是一个函数 $u : \mathbb{R} \to [0,1]$。对于每个模糊集 u，其 α-截集定义为

$$[u]_\alpha = \{x \in \mathbb{R} : u(x) \geq \alpha\}, \qquad \alpha \in (0,1].$$

定义 2.1 (11)。设 V 是 $\mathbb{C}$ 上的向量空间。函数

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

称为内积，如果对所有 $x, y, z \in V$和 $r \in \mathbb{C}$:

(i) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$;

(ii) $\langle rx, y \rangle = r\langle x, y \rangle$;

(iii) $\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle}$;

(iv) $\langle x, x \rangle \geq 0$, and $\langle x, x \rangle = 0$ iff $x = 0$.

配备内积的向量空间 V 称为内积空间。

引理 2.1（贝塞尔不等式，[11]）。设 X 是一个内积空间，且 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X 中的正交归一序列。那么，对任意 $x \in X$，

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x, e_i \rangle|^2 \leq \|x\|^2. \tag{1}$$

命题 2.1（平行四边形法则，[11]）。设 X 是一个内积空间，其范数由 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 诱导。则对所有 $x, y \in X$，

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

这个恒等式刻画了由内积导出的范数。

定理 2.1（柯西–施瓦茨不等式，[11]）。设 X 是一个内积空间。那么，对所有 $x, y \in X$，

$$|\langle x, y \rangle| \leq \|x\| \, \|y\|,$$

其中 $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ 是诱导范数。

定理 2.2. [极化恒等式（实数情形），[11]] 设 X 是一个实内积空间，其内积为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$。那么，对所有 $x, y \in X$，内积可通过范数按如下方式恢复：

$$\langle x, y \rangle = \frac{1}{4}\Big(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 \Big),$$

其中，$\| \cdot \|$ 表示由内积诱导的范数。

定义 2.2 ([12]). 设 X 是一个实向量空间。映射 $\| \cdot \| : X \to [0, \infty)$ 称为拟范数，如果它满足以下条件：

(a) $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f = 0$；

(b) 对所有 $f \in X$ 和所有 $a \in \mathbb{R}$，$\|af\| = |a| \, \|f\|$；

(c) 存在常数 $M > 0$，使得

$$\|f+g\| \leq M\big(\|f\| + \|g\| \big) \quad \text{for all } f, g \in X.$$

如果 $M = 1$，则将 $\| \cdot \|$ 称为范数。

3. 有序区间

首先，我们将区间的概念扩展到模糊区间。回顾一下，标准区间定义为 $[a,b]=\{x|a\leq x\leq b\}$。然而，在模糊集理论的语境中，某些代数运算或算术运算——例如差值计算或广义区间运算——可能会导致区间端点之间的自然顺序不再保持不变。在这种情况下，通常希望将区间 $[a,b]$ 内的所有元素都纳入考虑，同时保留端点的语义角色，而不论其顺序如何。为适应这一更广泛的视角，我们通过移除限制性假设 $a\leq b$来扩展区间的概念，从而实现一种更灵活的表示方式，以适用于模糊和区间值框架。

定义 3.1. 设 $a,b\in\mathbb{R}$。我们将集合 $[a,b]_o$ 定义如下：

$$[a,b]_o=\begin{cases}\{x|x\in[a,b]\} & a\leq b\\ \{x|x\in[b,a]\} & otherwise.\end{cases} \tag{2}$$

我们称 $[a,b]_o$ 为一个有序区间。所有有序区间的集合记为 $O(\mathbb{R})$。形式化地，

$$O(\mathbb{R})=\{[a,b]_o\mid a,b\in\mathbb{R}\}.$$

引理 3.1. 任意有序区间都可以改写如下：

$$[a,b]_o=[\min\{a,b\},\max\{a,b\}] \tag{3}$$

证明. 证明通过验证隶属关系进行，证明左边的每个元素也属于右边，反之亦然。

□

接下来，我们定义运算 $\oplus,\ominus$ 和 $\odot$： $O(\mathbb{R})\times O(\mathbb{R})\to O(\mathbb{R})$，如下：

$$[a,b]_o\oplus[c,d]_o=[a+c,b+d]_o, \tag{4}$$
$$[a,b]_o\ominus[c,d]_o=[a-c,b-d]_o, \tag{5}$$
$$[a,b]_o\odot[c,d]_o=[ac,bd]_o. \tag{6}$$

此外，我们可以将有序区间的绝对值定义为

$$|[a,b]_o|=[|a|,|b|]_o.$$

通过对区间的这一种定义及其相关运算，通常在区间减法和比较过程中出现的歧义得以消除。例如，如果 $A = [3, 4]_o$， $B = [2, 10]_o$，则有

$$A \ominus B = [3 - 2, 4 - 10]_o = [1, -6]_o.$$

为简洁起见，我们将有序区间 $[a, a]_o$ 记为 $\tilde{a}_o$。我们知道，区间满足以下关系：

$$[a, b] \subseteq [c, d] \iff c \leq a \text{ and } b \leq d. \tag{7}$$

对于有序区间，这一关系可等价地改写如下：

引理 3.2. 考虑属于 $O(\mathbb{R})$ 的两个有序区间 $[a, b]_o$ 和 $[c, d]_o$。它们满足以下关系：

$$[a, b]_o \subseteq [c, d]_o \iff \min\{d, c\} \leq \min\{a, b\}, \max\{a, b\} \leq \max\{c, d\}. \tag{8}$$

证明。参照关系 (7) 和 (3)，证明如下：

$$\begin{aligned} [a, b]_o \subseteq [c, d]_o &\iff [\min\{a, b\}, \max\{a, b\}] \subseteq [\min\{d, c\}, \max\{c, d\}] \\ &\iff \min\{d, c\} \leq \min\{a, b\}, \max\{a, b\} \leq \max\{c, d\} \end{aligned}$$

□

接下来，我们在集合 $O(\mathbb{R})$ 上引入关系 $\succeq$，其定义如下：

引理 3.3. 设 $[a, b]_o, [c, d]_o \in O(\mathbb{R})$。则，下述关系构成一个偏序：

$$[a, b]_o \succeq [c, d]_o \iff \min\{a, b\} \geq \min\{c, d\}, \max\{a, b\} \geq \max\{c, d\}.$$

基于为有序区间定义的运算，我们现在引入模糊内积。

4. 模糊内积与模糊范数

定义 4.1. 设 X 是 $\mathbb{C}$上的向量空间，且 $\mathcal{K}:\mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个模糊数。假设对于每个 $\alpha\in(0,1]$，都存在常数 A_α,B_α，使得

$$0<\min\{A_\alpha,B_\alpha\}\le\max\{A_\alpha,B_\alpha\}<\infty.$$

函数

$$\langle .,.\rangle_\alpha:(0,1]\times X\times X\to\mathbb{C}$$

如果存在内积 $\langle .,.\rangle'$ 和 $\langle .,.\rangle''$，定义在X上，使得对于每个 $x,y\in X$ 和 $\alpha\in(0,1],$，下列关系成立，则称其为模糊内积：

$$\mathcal{K}\big(\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big|\big)\ge\alpha\quad\Longleftrightarrow\quad\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big|\in\big[\,A_\alpha|\langle x,y\rangle'|,B_\alpha|\langle x,y\rangle''|\,\big]_o.\tag{9}$$

赋予模糊内积的向量空间 X 称为模糊内积空间。有序三元组

$$\Big(\langle .,.\rangle_\alpha,\langle\cdot,\cdot\rangle',\langle\cdot,\cdot\rangle''\Big)$$

称为模糊内积三元组。

采用有序区间的方法简化了理论框架，同时保持了与模糊内积基本性质的一致性。在这种表述中，经典的内积概念通过将每一对 (α,x) 与一个复值函数相关联而得以扩展，该函数编码了元素 x与模糊参数α之间的相互作用。由于此函数满足由 α参数化的模糊隶属条件，因此可以从分级的、基于隶属度的视角来解释内积运算。由此构建出一个模糊参数框架，其中内积的结果不仅由代数规则决定，还取决于与 α相关联的模糊隶属度水平。这种视角提供了更丰富、更灵活的结构，使内积能够随不同程度的模糊性平滑变化，从而使该运算能够适应不确定性、部分真值以及模糊系统固有的各种梯度。因此，该框架提供了一个更广泛、更一般化的内积概念。

定义 4.2. 设 X 是一个在 $\mathbb{C}$ 上的向量空间，且 $\mathcal{K}:\mathbb{R}\to[0,1]$ 是一个模糊数。假设对于每个 $\alpha\in(0,1]$，都存在常数 C_α，D_α，使得

$$0<\min\{C_\alpha,D_\alpha\}\le\max\{C_\alpha,D_\alpha\}<\infty.$$

一个函数

$$\|.\|_\alpha : (0,1] \times X \to \mathbb{C}$$

若存在范数 $\|.\|'$ 和 $\|.\|''$，使得对每个$\alpha \in$ $(0,1]$ 和 $x \in X$，下列公式成立，则称其为模糊范数：

$$\mathcal{K}\big(\big|\, \|x\|_\alpha \,\big|\big) \geq \alpha \;\Leftrightarrow\; \big|\, \|x\|_\alpha \,\big| \in \big[C_\alpha \|x\|', D_\alpha \|x\|''\big]_o. \tag{10}$$

此外，有序三元组

$$(\|.\|_\alpha, \|\cdot\|', \|\cdot\|'')$$

称为模糊范数三元组。

例4.1。 设 $X = \mathbb{R}^2$，并假设模糊数 $\mathcal{K}:\ \mathbb{R} \to [0,1]$ 定义为

$$\mathcal{K}\big(\big|\, \|x\|_\alpha \,\big|\big) = \begin{cases} 1, & \text{if } \big|\, \|x\|_\alpha \,\big| \in [3\|x\|_2,\, 2\|x\|_3]_o, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

由此可知，对任意 $x \in \mathbb{R}^2$ 和 $\alpha \in$ $(0,1],$，等价关系

$$\mathcal{K}\big(\big|\, \|x\|_\alpha \,\big|\big) \geq \alpha \quad \Leftrightarrow \quad \big|\, \|x\|_\alpha \,\big| \in [3\|x\|_2,\, 2\|x\|_3]_o$$

成立。

现在，考虑由以下形式定义的函数 $\|.\|_\alpha \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\|x\|_\alpha = \sqrt{9\alpha^4\|x\|_2^2 + 5\alpha^2(1-\alpha^2)\|x\|_2\|x\|_3} + i\sqrt{4(1-\alpha^2)\|x\|_3^2 + 7\alpha^2(1-\alpha^2)\|x\|_2\|x\|_3}.$$

计算该函数的模非常简单：

$$\big|\, \|x\|_\alpha \,\big| = 3\alpha^2\|x\|_2 + 2(1-\alpha^2)\|x\|_3.$$

由于 $\alpha^2 + (1-\alpha^2) = 1$，因此对于每个 $x \in X$，值 $\big|\, \|x\|_\alpha \,\big|$都位于有序区间 $[3\|x\|_2, 2\|x\|_3]_o$ 内。

因此，函数 $Q:\ (0,\ 1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ 符合模糊范数的定义。

注 4.1. 前例中定义的函数 $\|.\|_\alpha$ 经过设计，使其模

$$\big|\, \|x\|_\alpha \,\big| = 3\alpha^2\|x\|_2 + 2(1-\alpha^2)\|x\|_3$$

表示端点 $3\|x\|_2$ 和 $2\|x\|_3$的凸组合，并由参数 α^2控制。这种构造保证，对于每个固定的 $x \in X$和 $\alpha \in (0,1],$，值 $\big|\,\|x\|_\alpha\,\big|$恰好位于有序区间 $[3\|x\|_2, 2\|x\|_3]_o$内。因此，当 $\big|\,\|x\|_\alpha\,\big|$落在此区间内时，隶属函数 $\mathcal{K}$ 赋予其最大隶属度 1；否则赋予零。这一行为与定义 4.2 中给出的模糊范数定义完全一致。因此，本例有效地展示了如何通过向量空间上结构恰当的函数来表示模糊范数，从而为抽象的模糊范数框架提供具体实现。

引理 4.1. 设 $(\langle .,.\rangle_\alpha, \langle .,.\rangle', \langle .,.\rangle'')$ 是一个模糊内积三元组。那么 $(\sqrt{\langle .,.\rangle_\alpha}, \|.\|', \|.\|'')$ 是一个模糊范数三元组。

证明。 根据引理的假设，并由公式（9）可得

$$\mathcal{K}\big(\big|\langle x,x\rangle_\alpha\big|\big) \geq \alpha \Longleftrightarrow |\langle x,x\rangle_\alpha| \in [A_\alpha\langle x,x\rangle', B_\alpha\langle x,x\rangle'']_o.$$

因此，以下关系成立：

$$|\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}| \in [\sqrt{A_\alpha\langle x,x\rangle'}, \sqrt{B_\alpha\langle x,x\rangle''}]_o.$$

定义

$$\|x\|_\alpha = \sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}. \tag{11}$$

模糊数 $\mathcal{K}' : \mathbb{R} \to [0,1]$ 定义如下：

$$\mathcal{K}'\big(\big|\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}\big|\big) = \mathcal{K}\big(\big|\langle x,x\rangle_\alpha\big|\big).$$

公式（9）可直接由有序区间和模糊内积的性质得出。

$$\mathcal{K}'\big(\big|\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}\big|\big) \geq \alpha \Longleftrightarrow |\sqrt{\langle x,x\rangle_\alpha}| \in [\sqrt{A_\alpha}\,\|x\|', \sqrt{B_\alpha}\,\|x\|'']_o.$$

□

一般而言，不能直接依赖公式（9）将经典内积现象与模糊环境联系起来。因此，我们的研究方法着重于找出这样的情形：在这些情形下，所得表达式更易于进行结构分析。特别是，

通过将讨论限制在以下条件对任意一对向量$x,\ y \in X$均成立的情形，可以大幅简化问题：

$$\begin{gathered}\mathcal{K}\big(\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big|\big) \geq \alpha \iff \big|\langle x,y\rangle_\alpha\big| \in \big[A_\alpha|\langle x,y\rangle'|,\, B_\alpha|\langle x,y\rangle'|\big]_o, \\ 0 < A_\alpha \leq B_\alpha < \infty.\end{gathered} \tag{12}$$

更具体地，假设 $\mathcal{K}\big(\big|\langle x,\ y\rangle_\alpha\big|\big) \geq \alpha$. 则有以下界：

$$A_\alpha\,|\langle x,y\rangle'| \ \leq\ \big|\langle x,y\rangle_\alpha\big| \ \leq\ B_\alpha\,|\langle x,y\rangle'|, \qquad 0 < A_\alpha \leq B_\alpha < \infty. \tag{13}$$

自然，将公式（9）代入公式（12）后可知，为便于使用模糊范数这一概念，应以以下公式替换公式（13）：

$$\begin{gathered}\mathcal{K}\big(\big|\,\|x\|_\alpha\,\big|\big) \geq \alpha \ \Leftrightarrow\ \big|\,\|x\|_\alpha\,\big| \in \big[C_\alpha\|x\|',\, D_\alpha\|x\|'\big]_o, \\ 0 < C_\alpha \leq D_\alpha < \infty.\end{gathered} \tag{14}$$

更具体地，假设

$$\mathcal{K}\big(\big|\,\|x\|_\alpha\,\big|\big) \geq \alpha,$$

有以下界：

$$\begin{gathered}C_\alpha\|x\|' \leq \big|\,\|x\|_\alpha\,\big| \leq D_\alpha\|x\|', \\ 0 < C_\alpha \leq D_\alpha < \infty.\end{gathered} \tag{15}$$

假设关系（13）成立，则可以建立模糊内积与经典内积之间若干结构联系。特别是，在此假设下，两种乘法运算的正交性得以保留。

命题 4.1。 设 $\langle .,\ .\rangle_\alpha : (0,\ 1] \times X \times X \to \mathbb{C}$ 是满足公式（13）的模糊内积。则对于所有 $x,\ y \in X$ 以及任意 $\alpha \in (0,1],$，以下等价关系成立：

$$\langle x,y\rangle_\alpha = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \langle x,y\rangle' = 0.$$

证明。 根据公式 (13)，所需性质对所有相关元素均成立。因此，该断言立即得证。 □

5. 一些基本不等式

不等式是数学中的基本工具，经典例子包括柯西–施瓦茨不等式和贝塞尔不等式。本节将介绍它们的模糊类比，并引入两个在经典意义下等价的新不等式，从而拓展理论框架。为此，我们首先证明一个预备引理，为建立这些不等式奠定基础。

引理 5.1. 设 X 是一个内积空间，其经典内积为$\langle\cdot,\ \cdot\rangle'$ 诱导范数为 $\|\cdot\|'$。设

$$\langle .,.\rangle_\alpha : (0,1]\times X\times X\to\mathbb{C}$$

是一个满足公式（13）的模糊内积。

在这些记号下，我们有

$$\frac{|\|x\|_\alpha^2|}{B_\alpha}\ \le\ \|x\|'^2\ \le\ \frac{|\|x\|_\alpha^2|}{A_\alpha}, \tag{16}$$

对任意 $x\in X$ 和任意 $\alpha\in$ $(0,1]$。

证明. 连续两次应用不等式（13），可直接得到以下界：

$$\frac{\big|\langle x,x\rangle_\alpha\big|}{B_\alpha}\ \le\ \|x\|'^2\ \le\ \frac{\big|\langle x,x\rangle_\alpha\big|}{A_\alpha},$$

这恰好就是（16）。 □

为了分析模糊内积的性质，我们首先重新审视模糊柯西–施瓦茨不等式和模糊贝塞尔不等式；它们是在模糊分析中建立诸多结果的重要工具。基于这些基础不等式，我们进一步引入两个在经典意义下等价的新不等式，从而拓展理论框架，并为后续发展提供更多工具。

命题 5.1。 假设引理 5.1 的条件成立。那么，对于所有 $x,\ y\in X$ 以及所有 $\alpha\in(0,1],$，以下结论均成立：

(i) **模糊柯西–施瓦茨不等式**。

$$|\langle x,y\rangle_\alpha|\ \le\ \left(\frac{B_\alpha}{A_\alpha}\right)\ \big|\|x\|_\alpha\,\|y\|_\alpha\big|.$$

(ii) **模糊平行四边形不等式**。

$$\frac{2A_\alpha}{B_\alpha}\big(\big|\|x\|_\alpha^2\big|+\big|\|y\|_\alpha^2\big|\big) \;\le\; \big|\|x+y\|_\alpha^2\big|+\big|\|x-y\|_\alpha^2\big| \;\le\; \frac{2B_\alpha}{A_\alpha}\big(\big|\|x\|_\alpha^2\big|+\big|\|y\|_\alpha^2\big|\big).$$

(iii) **模糊极化不等式（实数情形）**。 若 $x \in \mathbb{R}^n$，则

$$\big|\|x+y\|_\alpha^2\big| \;\le\; \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\big(4\,\big|\langle x,y\rangle_\alpha\big| + \big|\|x-y\|_\alpha^2\big|\big).$$

(iv) 模糊贝塞尔不等式。 若 $\{e_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是 X中的正交序列，则

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\langle x,e_i\rangle_\alpha|^2 \;\le\; \frac{B_\alpha^2}{A_\alpha}\left\|\|x\|_\alpha^2\right\|.$$

证明。 **(i)** 由公式 **(13)** 可得

$$A_\alpha \|x\|'^2 \le |\|x\|_\alpha^2|, \tag{17}$$

$$A_\alpha \|y\|'^2 \le |\|y\|_\alpha^2|. \tag{18}$$

将经典柯西–施瓦茨不等式应用于 $\langle x,y\rangle'$ 并利用 **(13)**，可得

$$|\langle x,y\rangle_\alpha|^2 \le B_\alpha^2 |\langle x,y\rangle'|^2 \le B_\alpha^2 \|x\|'^2 \|y\|'^2. \tag{19}$$

综合 **(17)–(19)** 即得所需估计。
(ii) 将不等式 **(16)** 两次应用于命题 2.1，即可得到所需的估计。

$$\begin{aligned}
\frac{2A_\alpha}{B_\alpha}\big(\big|\|x\|_\alpha^2\big| + \big|\|y\|_\alpha^2\big|\big) &\le 2A_\alpha\big(\|x\|'^2 + \|y\|'^2\big) \\
&= A_\alpha\big(\|x+y\|'^2 + \|x-y\|_\alpha'^2\big) \\
&\le \big|\|x+y\|_\alpha^2\big| + \big|\|x-y\|_\alpha^2\big| \\
&\le B_\alpha\big(\|x+y\|'^2 + \|x-y\|'^2\big) \\
&\le 2B_\alpha\big(\|x\|'^2 + \|y\|'^2\big) \\
&\le \frac{2B_\alpha}{A_\alpha}\big(\|x\|_\alpha^2 + \|y\|_\alpha^2\big).
\end{aligned}$$

(iii) 定理 (2.2) 立即推出以下结论：

$$\|x+y\|^2 \ \le \ 4|\langle x,y\rangle| + \|x-y\|^2, \tag{20}$$

结合不等式（20）和不等式（13），可得，从而证明了该断言。

（iv）利用不等式（1）和公式（13），首先注意到

$$\frac{1}{B_\alpha^2}\sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle_\alpha|^2 \ \le \ \sum_{i=1}^{\infty}|\langle x,e_i\rangle'|^2. \tag{21}$$

比较（21）、（17）和贝塞尔经典不等式，即可得出该结论。 □

接下来，通过证明以下命题，我们将揭示模糊内积的零乘积性质，以及拟线性和拟对称性质：

命题 5.2。 若满足定义 4.1 的假设，则以下关系成立：

1. $\langle x,\ x\rangle_\alpha = 0$ 当且仅当 $x=0$；2. $\langle 0,\ y\rangle_\alpha = 0$ 对于所有 $y\in X$。此外，若命题 (5.1) 的假设成立，则有以下不等式：

3. $$\frac{|k|A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle kx,y\rangle_\alpha\right| \le \frac{|k|B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right|;$$

4. $$\frac{|k|A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle x,ky\rangle_\alpha\right| \le \frac{|k|B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right|;$$

5. $$\frac{|k|A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle kx,y\rangle_\alpha\right| \le \frac{|k|B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right|;$$

6. $$\frac{|k|A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle x,|k|y\rangle_\alpha\right| \le \frac{|k|B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right|;$$

7.
$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle x, ky\rangle_\alpha\right| \leq \left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle x, ky\rangle_\alpha\right|;$$

8.
$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| \leq \left|\langle x, ky\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right|;$$

9.
$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle ky, x\rangle_\alpha\right| \leq \left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle ky, x\rangle_\alpha\right|;$$

10.
$$\frac{A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle ky, x\rangle_\alpha\right| \leq \left|\langle x, ky\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle ky, x\rangle_\alpha\right|;$$

11.
$$\left|\langle kx + z, y\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\Big(|k|\left|\langle x, y\rangle_\alpha\right| + \left|\langle z, y\rangle_\alpha\right|\Big);$$

12.
$$\left|\langle x, ky + z\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\Big(|k|\left|\langle x, y\rangle_\alpha\right| + \left|\langle x, z\rangle_\alpha\right|\Big).$$

证明。 我们分别证明各部分。
1. 由不等式（13）可得:

$$x = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle' = 0 \Leftrightarrow \langle x, x\rangle_\alpha = 0.$$

2. 由不等式（13）可得，对于每个 $y \in X$ ，我们有
，
$$\langle 0, y\rangle' = 0 \Leftrightarrow \langle 0, y\rangle_\alpha = 0.$$

3. 首先，我们证明不等式$\left|\langle kx,\ y\rangle_\alpha\right| \leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle x,\ ky\rangle_\alpha\right|$。

$$\begin{aligned}\left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| &\leq B_\alpha\left|\langle kx, y\rangle'\right| = |k|\,.B_\alpha\left|\langle x, y\rangle'\right| \\ &\leq \frac{|k|\,B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle x, y\rangle_\alpha\right|.\end{aligned}$$

现在只需证明不等式 $\left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| \geq \frac{|k|\,A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle x, y\rangle_\alpha\right|$。 ——

$$\left|\langle kx, y\rangle_\alpha\right| \geq A_\alpha\left|\langle kx, y\rangle'\right| = |k|\,A_\alpha\left|\langle x, y\rangle'\right|$$

$$\geq \frac{|k|\, A_\alpha}{B_\alpha}\big|\langle x, y\rangle_\alpha\big|.$$

证明至此完成。第4–8节其余部分的证明，可采用与证明3相同的方法得到。

9. 为了证明这一部分，可以使用以下关系：

$$\begin{aligned}\big|\langle kx + z, y\rangle_\alpha\big| &\leq B_\alpha\big(\,|k|\,.|\langle x, y\rangle'| + |\langle z, y\rangle'|\big)\\ &\leq \frac{B_\alpha}{A_\alpha}\big(\,|k|\,.|\langle x, y\rangle_\alpha| + |\langle z, y\rangle_\alpha|\big).\end{aligned}$$

□

推论5.1. 如果命题 5.1 的假设成立，且 $\sup B_\alpha/A_\alpha < \infty$，那么对于每个 $\alpha \in (0, 1]$ 和 $x,\ y,\ z \in X$，存在一个正数$M \in [1, \infty)$，使得下列不等式成立：

1. $$\frac{|k|}{M}\,\big|\langle x, y\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big| \leq |k|M\,\big|\langle x, y\rangle_\alpha\big|;$$
2. $$\frac{|k|}{M}\,\big|\langle x, y\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle x, ky\rangle_\alpha\big| \leq |k|M\,\big|\langle x, y\rangle_\alpha\big|;$$
3. $$\frac{|k|}{M}\,\big|\langle y, x\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big| \leq |k|M\,\big|\langle y, x\rangle_\alpha\big|;$$
4. $$\frac{|k|}{M}\,\big|\langle y, x\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle x, ky\rangle_\alpha\big| \leq |k|M\,\big|\langle y, x\rangle_\alpha\big|;$$
5. $$\frac{1}{M}\,\big|\langle x, ky\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big| \leq M\,\big|\langle x, ky\rangle_\alpha\big|;$$
6. $$\frac{1}{M}\,\big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle x, ky\rangle_\alpha\big| \leq M\,\big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big|;$$
7. $$\frac{1}{M}\,\big|\langle ky, x\rangle_\alpha\big| \leq \big|\langle kx, y\rangle_\alpha\big| \leq M\,\big|\langle ky, x\rangle_\alpha\big|;$$

8.
$$\frac{1}{M}\left|\langle ky,x\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle x,ky\rangle_\alpha\right| \le M\left|\langle ky,x\rangle_\alpha\right|;$$

9.
$$\left|\langle kx+z,y\rangle_\alpha\right| \le M\Big(|k|\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right| + \left|\langle z,y\rangle_\alpha\right|\Big);$$

10.
$$\left|\langle x,ky+z\rangle_\alpha\right| \le M\Big(|k|\left|\langle x,y\rangle_\alpha\right| + \left|\langle x,z\rangle_\alpha\right|\Big).$$

证明. 假设 $M = \sup B_\alpha/A_\alpha$。将此并集代入命题 5.2 的第 3–12 项，即可得到所需结果。

□

命题 5.3。若满足不等式（15）的假设，则有以下关系：

1. $\left|\,\|x\|_\alpha\,\right| = 0$ 当且仅当 $x=0$；此外，若满足命题 5.1 的假设，则有以下不等式：

2. $\left|\,\|kx+y\|_\alpha\,\right| \le \dfrac{D_\alpha}{C_\alpha}\left(\,|k|\,.\left|\,\|x\|_\alpha\,\right| + \left|\,\|y\|_\alpha\,\right|\right);$

3. $\dfrac{|k|\,C_\alpha}{\cancel{D_\alpha}}\left|\,\|x\|_\alpha\,\right| \le \left|\,\|kx\|_\alpha\,\right| \le \dfrac{|k|\,D_\alpha}{\cancel{C_\alpha}}\left|\,\|x\|_\alpha\,\right|$。

证明。1. 由不等式（13）可得：

$$x=0 \Leftrightarrow \|x\|' = 0 \Leftrightarrow \|x\|_\alpha = 0.$$

2.根据（15），按照以下步骤即可得出结论：

$$\begin{aligned}\left|\|kx+y\|_\alpha\right| &\le D_\alpha\|kx+y\|' \\ &\le D_\alpha\Big(|k|\|x\|' + \|y\|'\Big) \\ &\le \frac{D_\alpha}{C_\alpha}\left(|k|\left|\|x\|_\alpha\right| + \left|\|y\|_\alpha\right|\right).\end{aligned}$$

3.利用不等式（15），可将不等式左侧改写为

$$\frac{|k|C_\alpha}{D_\alpha}\left|\|x\|_\alpha\right| \le |k|C_\alpha\left|\|x'\|\right| \le \left|\|kx\|_\alpha\right|.$$

不等式的右侧通过令 $y=0$ 并应用上述命题的第（1）和第（2）部分得到。

□

推论 5.2。 若命题 5.1 的假设成立，且 $\inf C_\alpha/D_\alpha > 0$，则对于每个 $\alpha \in (0,1]$ 和 $x,\ y,\ z \in X$，存在一个正数 $L \in [1,\infty)$，使得以下不等式成立：

1. $\dfrac{k}{L}\left|\ \|x\|_\alpha\ \right| \le \left|\ \|kx\|_\alpha\ \right| \le kL\left|\ \|x\|_\alpha\ \right|;$
2. $\left|\ \|kx+y\|_\alpha\ \right| \le L\left(\ |k|\,.\left|\ \|x\|_\alpha\ \right| + \left|\ \|y\|_\alpha\ \right|\right).$

注释 5.1。 前述结果阐明了模糊性在当前框架中的概念作用。尽管模糊内积并不具有经典意义下的线性性，但柯西–施瓦茨不等式、贝塞尔不等式的有效性以及正交性的保持表明，内积空间的基本几何核心得以保留。特别地，经典线性性在这里被双侧模糊有界条件所取代。算子和泛函不再满足精确的线性等式，而是满足受控的上、下模糊界；这些模糊界足以恢复上述基本几何不等式和结构性质。因此，经典线性性作为这一有界框架中的特殊情形得以恢复。这一观察凸显了本框架与早期基于固定 t-范数的模糊内积模型之间的一个关键结构差异：在后者中，几何不等式可能失效，或者内积会退化为清晰值。相比之下，当前框架允许真正的模糊内积，同时保留希尔伯特空间理论的几何骨架。因此，不应将模糊性视为经典结构的放宽或近似，而应将其视为一种丰富化形式，使得在与相同几何约束相一致的前提下，可以实现多种受控的具体形式。

下面我们将陈述一些命题，探讨模糊内积与其对应范数之间的不等式，以及内积与模糊范数结构之间的关系。

命题 5.4。 设 $\langle .,\ .\rangle_\alpha : (0,\ 1] \times X \times X \to \mathbb{C}$ 是满足公式 (13) 的模糊内积。此外，设 $\mathcal{K}' : \mathbb{R} \to [0,1]$ 为一个模糊数，并假设 $\langle .,\ .\rangle'_\alpha : (0,\ 1] \times X \times X \to \mathbb{C}$ 是与 $\mathcal{K}'$ 对应且满足以下公式的模糊内积：

$$\begin{gathered} \mathcal{K}'\big(\big|\langle x,y\rangle'_\alpha\big|\big) \geq \alpha \Leftrightarrow \\ M_\alpha \left|\langle x,y\rangle'\right| \leq \big|\langle x,y\rangle'_\alpha\big| \leq N_\alpha \left|\langle x,y\rangle'\right|. \end{gathered} \tag{22}$$

因此，以下不等式成立：

$$\frac{A_{\alpha_1}}{N_{\alpha_2}} \big|\langle x,y\rangle'_{\alpha_2}\big| \leq \big|\langle x,y\rangle_{\alpha_1}\big| \leq \frac{B_{\alpha_1}}{M_{\alpha_2}} \big|\langle x,y\rangle'_{\alpha_2}\big|. \tag{23}$$

证明。 通过比较公式（13）和（22），可直接得到不等式（23）。

□

推论 5.3。 假设 $\langle .,\ .\rangle_\alpha : (0,\ 1] \times X \times X \to \mathbb{C}$ 是满足公式（13）的模糊内积。则以下不等式成立：

$$\frac{A_{\alpha_1}}{B_{\alpha_2}} \big|\langle x,y\rangle_{\alpha_2}\big| \leq \big|\langle x,y\rangle_{\alpha_1}\big| \leq \frac{B_{\alpha_1}}{A_{\alpha_2}} \big|\langle x,y\rangle_{\alpha_2}\big|. \tag{24}$$

同样，下面的结果通过采用一个共同的底层范数来推导上界和下界，从而简要说明了与不同模糊数对应的两个模糊范数之间的关系。

命题 5.5。 假设 $\|.\|_\alpha : (0,\ 1] \times X \to \mathbb{C}$ 是满足公式（14）的模糊范数。此外，设 $\mathcal{K}' : \mathbb{R} \to [0,1]$ 是一个模糊数，并假设 $\|.\|'_\alpha : (0,\ 1] \times X \to \mathbb{C}$ 是与 $\mathcal{K}'$ 对应且满足以下公式的模糊范数：

$$\begin{gathered} \mathcal{K}'\big(\big|\ \|x\|'_\alpha\ \big|\big) \geq \alpha \Leftrightarrow \\ M_\alpha\ \|x\|' \leq \big|\ \|x\|'_\alpha\ \big| \leq N_\alpha\ \|x\|'. \end{gathered} \tag{25}$$

因此，以下不等式成立：

$$\frac{C_{\alpha_1}}{N_{\alpha_2}} \big|\ \|x\|'_{\alpha_2}\ \big| \leq \big|\ \|x\|_{\alpha_1}\ \big| \leq \frac{D_{\alpha_1}}{M_{\alpha_2}} \big|\ \|x\|'_{\alpha_2}\ \big|. \tag{26}$$

推论 5.4。 假设 $Q : (0,1] \times X \to \mathbb{C}$ 是满足公式 (14) 的模糊范数。则下列不等式成立：

$$\frac{C_{\alpha_1}}{D_{\alpha_2}} \big|\ \|x\|_{\alpha_2}\ \big| \leq \big|\ \|x\|_{\alpha_1}\ \big| \leq \frac{D_{\alpha_1}}{C_{\alpha_2}} \big|\ \|x\|_{\alpha_2}\ \big|. \tag{27}$$

6. 结论与未来研究方向

本文在解决模糊泛函分析中一个长期悬而未决的开放问题方面取得了实质性进展：如何构造真正非退化的模糊内积，同时保留经典希尔伯特空间的基本几何结构，这看似不可能。关键创新在于引入有序区间——一类具有完全可消加法和自然弱偏序的新型数，从而取代本质上不可消的标准区间和模糊算术。借助这种有序区间算术，我们提出了一类新的模糊内积及其诱导的模糊范数，这些范数

- •拟线性；由于缺乏不受限制的消去律，无法实现精确等式时，给出明确的上界和下界，
- 在适当的对偶界意义下拟对称，并且
- 几何性质丰富：柯西–施瓦茨不等式和贝塞尔不等式均以完整的经典形式成立，而平行四边形法则和极化恒等式则自然地表现为不等式。

从概念上看，所提出的表述通过将一个复值（或实值）函数与每个有序三元组（α， x， y）相关联，扩展了经典内积的概念；该函数精确刻画了向量 x 和 y 在隶属度层级 α上的相互作用。类似地，诱导出的模糊范数为每一对（α， x）赋予一个复值函数，以反映 x 在层级 α上的分级模。由于这些函数严格满足参数 α所诱导的隶属度约束，内积和范数都可以自然、清晰地解释为分级的隶属度层级结构，与模糊环境完全一致，同时又保持了分析上的可处理性，而以往大多数模糊扩展都不具备这一点。

所提出构造有一项尤为值得注意的性质，即经典正交性的完全恢复：向量 x和 y满足 $\langle x,\ y\rangle = 0$当且仅当 $\langle x,\ y\rangle_\alpha = 0$对每个 $\alpha \in [0,1]$均成立。**最重要的是**，本文引入的有序区间值内积是经典内积的真正且忠实的扩展 。它严格包含经典实值或复值内积作为退化特例，产生真正的非退化模糊值，并完整恢复——甚至通过紧确的上界和下界加以强化——所有基本的代数

性质以及希尔伯特空间的几何性质。
这一强化作用的一个显著例证是下面的双边不等式；对于所有满足有序区间结构中自然序关系的向量 $x,\ y$ 和标量 k ，该不等式均成立：

$$\frac{|k|A_\alpha}{B_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right| \le \left|\langle kx,y\rangle_\alpha\right| \le \frac{|k|B_\alpha}{A_\alpha}\left|\langle y,x\rangle_\alpha\right|.$$

这一精确且明确的界不仅推广了经典内积相应的单调性和缩放性质，还进一步强化了它们；而经典内积通常被认为理所当然，无须给出明确的双边估计。与几乎所有先前的模糊内积定义形成鲜明对比的是——那些定义只有牺牲希尔伯特空间结构的核心特征才能实现非退化性——本构造首次在保留（且往往增强）经典理论丰富性的同时，实现了真正的模糊性。

这项工作引出了若干自然且前景广阔的未来研究方向：

- **模糊正交性与正交规范系统**。充分利用经典正交性的精确恢复，在可分和不可分情形下构造正交规范基，发展正交投影，建立里斯表示定理，并在有序区间希尔伯特空间中研究具有真正模糊框架界的框架理论。

- **谱理论**。 研究有序区间希尔伯特空间上的有界、自伴、正规和紧算子，并发展一套完整的谱理论。

- **完备性与分类**。 确定诱导模糊范数的完备性判据，并全面刻画完备的有序区间希尔伯特空间和巴拿赫空间。

- **应用**。 探索其在模糊量子力学、模糊偏微分方程、基于相似性的推理，以及严重（奈特式）不确定性下优化中的应用。

我们认为，本文提出的有序区间框架为模糊泛函分析提供了坚实、连贯且忠实于几何的基础，最终克服了长期存在了三十多年的局限。

此外，有序区间本身构成一种新颖的代数与有序结构，值得独立研究。除了本文考察的实有序区间之外，自然的推广还包括复有序区间（取值于 $\mathbb{C}$）。每种变体都具有独特的算术和序理论性质，在离散不确定性建模、复值不确定系统以及基于格的不确定性方法中具有潜在应用。对这一广义结构进行系统研究，有望为有序代数系统及其在数学和工程学中的应用带来新的见解。

参考文献

[1] R. Biswas，模糊内积空间与模糊范数函数，Infor- mation Sciences 53 (1991) 185–190。[2] J. K. Kohli，R. Kumar，关于模糊内积空间与模糊余内积空间，Fuzzy Sets and Systems 53 (2) (1993) 227–232。[3] A. Hasankhani，A. Nazari，M. Saheli，模糊希尔伯特空间及算子范数的一些性质，Iranian Journal of Fuzzy Systems 7 (3) (2010) 129–157。[4] B. Daraby，F. Delzendeh，A. Rostami，A. Rahimi，模糊赋范线性空间与模糊框架，Azerbaijan Journal of Mathematics 9 (2)，最初发表于2010年；在线版（2010）。[5] B. Daraby，F. Delzendeh，A. Rahimi，模糊赋范线性空间与模糊黎曼基的一些性质，Mathematica 61 (84) (2019) 111–128。doi:10.24193/mathcluj.2019.2.02。[6] D. Popa，D. Sida，模糊内积空间：文献综述与一种新方法，Mathematics 9 (7) (2021) 765。doi:10.3390/math9070765。[7] S. Kider，模糊内积空间的一些性质，Journal of Ad- vanced Mathematics Studies 14 (2) (2021) 45–55。[8] Y. Xiao，J. Li，X. Wang，模糊内积空间的示例、性质与应用，Soft Computing 27 (2023) 17485–17497。doi:10.1007/s00500-022-07584-w。

[9] T. Byun，J. E. Lee，K. Y. Lee，J. H. Yoon，非平凡模糊内积空间的不存在性与柯西-施瓦茨不等式，Mathematics 8 (2020) 3–4。[10] K. Simiński，重新审视模糊数：外延模糊数上的运算，arXiv 预印本 arXiv:2510.20861 (2025)。网址：https://arxiv.org/abs/2510.20861[11] B. P. Rynne，M. A. Youngson，线性泛函分析，第2版，Springer，伦敦，2008。[12] P. Foralewski，H. Hudzik，P. Kolwicz，由拟模生成的拟赋范空间，不等式与应用杂志 (2024)，文章编号86。