arXiv:2512.22325v1 [math.GM] 26 Dec 2025

二次相位 Dunkl 变换：基本性质、平移算子、卷积乘积与海森堡不确定性原理

Ahmed Saoudi

沙特阿拉伯阿尔阿尔北部边疆大学理学院数学系 电子邮箱：
ahmed.saoudi@ipeim.rnu.tn

摘要

本文介绍并研究二次相位 Dunkl 变换，这是一种定义在实数轴上的新型积分变换，由五个实数 $(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$ 和一个重数参数 $\mu \geq -1/2$ 参数化。我们定义该变换并确立其基本性质，包括连续性、黎曼–勒贝格引理、线性、缩放性质，以及最重要的可逆性定理和相应的 Parseval/Plancherel 公式。我们证明，通过对参数作适当的特化，这种新型二次相位积分型变换可推广一大类已知变换，例如二次相位 Fourier-Bessel 变换、二次相位傅里叶变换、线性正则 Dunkl 变换、分数阶 Dunkl 变换和经典 Dunkl 变换。此外，我们还引入并研究相应的二次相位 Dunkl 平移算子和卷积结构，证明其基本性质及 Young 不等式。最后，我们为二次相位 Dunkl 变换建立了一种新的 Heisenberg 型不确定性原理，将经典不确定性原理推广到一大类积分型变换。

关键词。二次相位 Dunkl 变换；二次相位 Dunkl 平移算子；二次相位 Dunkl 卷积乘积；海森堡不确定性原理。

数学主题分类。主要分类 47G10；次要分类 42B10。

1 引言

傅里叶变换在调和分析、信号处理和数理物理中发挥着核心作用，为在频域分析函数提供了不可或缺的工具。然而，现代应用日益复杂，尤其是在光学、量子力学和非平稳信号分析领域，这促使人们开发出更灵活的变换，以适应各种

物理和数学情境。这一演进过程催生了经典傅里叶变换的众多推广形式，每种形式都旨在解决特定局限，或纳入额外的自由度。

在这些推广形式中，二次相位傅里叶变换已成为一种尤其强大且灵活的扩展。该变换由 Castro 等人于2018 [6, 7], 提出，包含五个实参数，可对变换的相位结构进行更精细的控制，从而能够更有效地分析啁啾型信号和具有二次相位变化的系统。函数 $f \in L^1(\mathbb{R})$ 的二次相位傅里叶变换定义如下:

$$\mathcal{Q}_{d,e}^{a,b,c}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \mathcal{K}_{d,e}^{a,b,c}(w,v) f(v) dv,$$

其中，核定义为:

$$\mathcal{K}_{d,e}^{a,b,c}(w,v) = \exp\left\{-i(av^2 + cw^2 + bwv + dv + ew)\right\}. \tag{1.1}$$

参数 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$，具有显著的灵活性，使二次相位傅里叶变换能够将许多经典变换作为特殊情形涵盖在内:

- 当 $a = c = d = e = 0$ 且 $b = 1$ 时，我们便得到经典傅里叶变换。
- 当 $d = e = 0$、 $a = c = -\cot\frac{\theta}{2}$、 $b = \csc\theta$（其中 $\theta \neq n\pi$、 $n \in \mathbb{Z}$）时，二次相位傅里叶变换（乘以 $\sqrt{1 - i\cot\theta}$）可化为分数阶傅里叶变换 [19],

$$\mathscr{F}^{\alpha}[f](\omega) = \int_{\mathbb{R}} f(v) \mathcal{K}_{\alpha}(w,v) dv,$$

其中，核 $\mathcal{K}_{\alpha}(w, v)$ 定义为

$$\mathcal{K}_{\theta}(w,v) = \begin{cases} \sqrt{\frac{1-i\cot\theta}{2\pi}} \exp\left\{\frac{i}{2}(w^2+v^2)\cot\theta - iwv\csc\theta\right\}, & \theta \neq k\pi \\ \delta(v-w), & \theta = 2k\pi \\ \delta(v+w), & \theta = (2k+1)\pi. \end{cases} \tag{1.2}$$

- 若 $d = e = 0$、 $b \neq 0$，且在变换 $a \mapsto -a/2b$、 $b \mapsto 1/b$ 和 $c \mapsto -c/2b$ 下，则二次相位傅里叶变换（放大 $\frac{1}{\sqrt{ib}}$ 倍）可化为线性正则变换 [3]

$$\mathcal{L}[f](w) = \frac{1}{\sqrt{2\pi ib}} \int_{\mathbb{R}} f(v) \exp\left\{\frac{i(av^2 - 2wv + cw^2)}{2b}\right\} dv. \tag{1.3}$$

二次相位傅里叶变换是近年来加入积分变换类别的一种变换，涵盖傅里叶变换、分数阶傅里叶变换和线性正则变换等多种信号处理工具 [34, 35, 36]。

二次相位傅里叶变换尤其以其额外的自由度而著称，这些自由度提升了其在时频分析应用中的性能 [41]。

二次相位傅里叶变换已在多种框架中得到发展和研究，包括小波变换 [22, 33, 37], 不确定性原理 [4, 5, 35], 四元数域 [1, 2, 13, 17, 40, 41], 八元数域 [18, 39], 短时二次相位框架 [1, 17, 34], Stockwell 域 [8, 13], 贝塞尔框架 [32], 傅里叶–雅可比框架 [31], 雅可比 Dunkl 框架 [30] 以及汉克尔框架 [21, 27, 28]。

尽管取得了这些进展，二次相位傅里叶变换仍是在传统的欧几里得框架中运作，未能考虑具有底层对称性或权函数的系统。这一局限促使我们开展本研究，提出二次相位 Dunkl 变换这一新颖的推广，将二次相位傅里叶变换的参数化相位结构与反射群相关的 Dunkl 算子的丰富理论框架有机结合。这种统一提供了一种强大的分析工具，能够处理加权函数空间中的二次相位变化和对称结构。

Dunkl 变换是傅里叶变换在有限反射群作用下不变的空间上的推广，近年来已广泛应用于多元特殊函数、量子物理以及微分差分方程的研究。在二次相位傅里叶变换框架中引入 Dunkl 算子，可得到一种变换，它既将经典二次相位傅里叶变换和 Dunkl 变换作为特例涵盖在内，也为加权空间中具有反射对称性的信号与系统分析提供了新的可能性。

本文介绍并研究依赖于五个实参数 a, b, c, d, e 以及重数函数 $\mu \geq -1/2$ 的二次相位 Dunkl 变换，其中 $b \neq 0$。实数轴上的可积函数f 的二次相位 Dunkl 变换为

$$\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) = \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}} \int_{\mathbb{R}} \Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v) f(v) |v|^{2\mu+1} dv,$$

其中 $\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)$ 表示二次相位 Dunkl 核，定义如下：

$$\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v) = e^{-i(av^2+cw^2+dv+ew)} E_\mu(-iw/b, v),$$

其中 $E_\mu(w,v)$ 是由关系式（2.1）给出的 Dunkl 核。

二次相位 Dunkl 变换为调和分析中一大类积分变换提供了统一框架。通过对参数 a、b、c、d、e 以及重数参数 μ 作适当选择，它可以化为众多著名的变换。例如，它涵盖二次相位傅里叶-贝塞尔变换、线性正则 Dunkl 变换和分数阶 Dunkl 变换。此外，在 $\mu = -1/2$ 的情况下，它还原为经典二次相位傅里叶变换及其特例，例如线性正则变换、分数阶傅里叶变换和标准傅里叶变换。另外，Dunkl 变换和 Dunkl 型菲涅耳变换也都是其特殊实例。这种多功能性展现了二次相位 Dunkl 变换在衔接傅里叶变换各种推广形式方面的变革性力量。

本文建立了二次相位 Dunkl 变换的完整理论，确立了其基本性质，包括有界性、连续性以及用经典 Dunkl 变换表示的直接表达式。我们还证明了黎曼–勒贝格结论、反演公式和 Parseval/Plancherel 恒等式。这些结果证实，二次相位 Dunkl 变换在 $L^2_\mu(\mathbb{R})$ 上充当酉算子。此外，我们引入了与该变换相关的平移算子和卷积算子，并验证了它们的主要结构性质以及 Young 型不等式。随后，我们获得了二次相位 Dunkl 变换的 Heisenberg 型不确定性原理，将经典不确定性原理推广到了这一更一般的框架。

本文结构安排如下。第2节回顾 Dunkl 变换及相关特殊函数的一些必要预备知识。第3节介绍二次相位 Dunkl 变换，考察其基本性质，并详述其特殊情形。第4节定义并研究相应的二次相位 Dunkl 平移算子。第5节讨论相应的卷积乘积及其主要性质。最后，第6节为二次相位 Dunkl 变换建立 Heisenberg 型不确定性原理。

2 预备知识

本文中，我们采用以下记号并考虑以下函数空间。

- $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$：表示定义在 $\mathbb{R}$ 上且在无穷远处趋于零的连续函数空间 ，该空间配备一致收敛拓扑。
- $L^p_\mu(\mathbb{R})$ 表示由满足以下条件的可测函数 f 在 $\mathbb{R}$ 上构成的勒贝格空间

$$\begin{aligned}\|f\|_{\mu,p} &= \left(\int_{\mathbb{R}} |f(v)|^p |v|^{2\mu+1} dv\right)^{\frac{1}{p}} < \infty, \quad \text{if } 1 \le p < \infty \\ \|f\|_{\mu,\infty} &= \sup_{v\in\mathbb{R}} \operatorname{ess} |f(v)| < \infty, \quad \text{if } p = \infty,\end{aligned}$$

  其配备由范数 $\|\cdot\|_{\mu,p}$定义的拓扑，其中 $\mu \ge -1/2$。

- $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 表示在 $\mathbb{R}$ 上快速衰减的函数所构成的施瓦茨空间。

对于 $\mu \ge -1/2$，与反射群 $\mathbb{Z}_2$ 在 $\mathbb{R}$ 上的相关微分-差分算子 Λ_μ 定义为

$$\Lambda_\mu f(v) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}v} f(v) + \frac{2\mu+1}{2v}[f(v) - f(v)],$$

称为与反射群$\mathbb{Z}_2$相关、指标为 $\mu + 1/2$ 的 $\mathbb{R}$ 上的 Dunkl 算子，参见 [19,20]。

对于 $\mu \ge -1/2$ 和 $w \in \mathbb{C}$，初值问题

$$\begin{cases}\Lambda_\mu f(v) = w f(v), \quad v \in \mathbb{R}, \\ f(0) = 1,\end{cases}$$

存在唯一解，记为 $E_\mu(w,\ v)$，称为经典 Dunkl 算子的核（参见 [26]）

$$E_\mu(iw,v)=j_\mu(wv)+\frac{iwv}{2(\mu+1)}j_{\mu+1}(wv), \tag{2.1}$$

其中 j_μ 表示归一化球贝塞尔函数

$$j_\mu(w):=2^\mu\Gamma(\mu+1)\frac{J_\mu(w)}{w^\mu}=\Gamma(\mu+1)\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{(-1)^n(w/2)^{2n}}{n!\Gamma(n+\mu+1)}, \tag{2.2}$$

常数 c_μ 定义为

$$c_\mu=\frac{1}{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+1)}. \tag{2.3}$$

这里，J_μ 表示经典贝塞尔函数（参见 [38]）。

注意，该核具有以下重要性质 s.
对于 $w,\ v\in\mathbb{C}$，我们有 $E_\mu(w,\ v)=E_\mu(v,\ w)$; $E_\mu(w,\ 0)=1$ 且

$$|E_\mu(iw,v)|\le 1.$$

对于 $f\in L^1_\mu(\mathbb{R})$，Dunkl 变换 $\mathcal{D}_\mu$ 由下式给出

$$\mathcal{D}_\mu[f](w)=c_\mu\int_{\mathbb{R}}E_\mu(-iw,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv.$$

I接下来，我们陈述 Dunkl 变换的一些基本性质 .

定理2.1. *1.* 对于所有满足 $\mathcal{D}_\mu f\ \in\ L^1_\mu(\mathbb{R})$的 $f\ \in\ L^1_\mu(\mathbb{R})$，*Dunkl* 变换的反演公式为

$$f(v)=c_\mu\int_{\mathbb{R}}E_\mu(iw,v)f(w)|w|^{2\mu+1}dw.$$

2. 对于所有 $f,g\in L^2_\mu(\mathbb{R})$，*Dunkl* 变换的 *Parseval* 公式为

$$\int_{\mathbb{R}}f(v)\overline{g(v)}|v|^{2\mu+1}dv=\int_{\mathbb{R}}\mathcal{D}_\mu[f](w)\overline{\mathcal{D}_\mu[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw.$$

3. 对于所有 $f\in L^2_\mu(\mathbb{R})$，*Dunkl* 变换的普朗歇雷公式为

$$\int_{\mathbb{R}}|f(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv=\int_{\mathbb{R}}\left|\mathcal{D}_\mu[f](w)\right|^2|w|^{2\mu+1}dw.$$

3 二次相位 Dunkl 变换的基本性质

我们在本节开头介绍了二次相位 Dunkl 变换的定义，并使用五个实参数 (a, b, c, d, e) 和重数函数 $\mu \geq -1/2$ 陈述了它的特例。

接下来，我们推导了它的基本性质，包括可逆性和 Parseval 公式。

定义 3.1. 我们将实数轴上可积函数 f 的二次相位 *Dunkl* 变换定义为

$$\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f](w) = \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}} \int_{\mathbb{R}} \Psi_{d,e,\mu}^{a,b,c}(w,v) f(v) |v|^{2\mu+1} dv, \tag{3.1}$$

其中 $\Psi^{a,b,d\,e^{c}}{}_{,,\mu}(w,v)$ 表示二次相位 *Dunkl* 核，其定义如下：

$$\Psi_{d,e,\mu}^{a,b,c}(w,v) = e^{-i(av^2+cw^2+dv+ew)} E_\mu(-iw/b, v), \tag{3.2}$$

其中 $E_\mu(w,v)$ 是由关系式（2.1）给出的 *Dunkl* 核。

特例

适当选取参数 a，b，c，d，e 以及重数函数 μ，二次相位 Dunkl 变换（3.1）可化为若干已知的积分变换，如下所示：

- 二次相位 Dunkl 变换的偶部化简为由 [32]定义的二次相位 Fourier-Bessel 变换：

$$\mathcal{B}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f](w) = \frac{2c_\mu}{(ib)^{\mu+1}} \int_0^\infty \mathcal{J}_{d,e,\mu}^{a,b,c}(w,v) f(v) v^{2\mu+1} dv, \quad b \neq 0, \tag{3.3}$$

其中 $\mathcal{J}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}{}_{,\ ,\ \mu}(w,\ v)$ 表示二次相位 Fourier-Bessel 核，其定义如下：

$$\mathcal{J}_{d,e,\mu}^{a,b,c}(w,v) = e^{-i(av^2+cw^2+dv+ew)} j_\mu\left(wv/b\right), \tag{3.4}$$

其中 j_μ 是归一化球贝塞尔函数，由关系式（2.2）给出。

- 若 $a = d = 1$、$c = \tau$ 和 $c = e = 0$，则二次相位 Dunkl 变换可化为 Rösler 定义的一维 Dunkl 型菲涅耳变换 [25]

$$\mathcal{D}_\mu^\tau(f)(w) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Gamma(\mu+1)(2i\tau)^{\mu+1}} \displaystyle\int_{\mathbb{R}} e^{\frac{i}{2\tau}\left(w^2+v^2\right)} E_\mu(-iw/\tau, v) f(v) |v|^{2\mu+1} dv, & \tau \neq 0 \\ f(x), & \tau = 0. \end{cases}$$

• 若 $d=e=0$、 $b\neq 0$，并经过变换 $a\mapsto -a/2b$ 和 $c\mapsto -c/2b$，我们得到一维线性正则 Dunkl 变换 [16, 29]

$$\mathcal{L}_{\mu}^{\mathcal{D}}[f](w)=\frac{c_{\mu}}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{K}_{\mu}(w,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv,\quad b\neq 0, \tag{3.5}$$

其中， $\mathcal{K}_{\mu}(w,\ v)$ 表示由下式定义的线性典范Dunkl核

$$\mathcal{K}_{\mu}(w,v)=e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}v^2+\frac{d}{b}w^2\right)}E_{\mu}(iw,v), \tag{3.6}$$

且 $E_{\mu}(w,\ v)$ 是由关系式（2.1）给出的 Dunkl 核。

• 若 $d=e=0$、 $b\neq 0$，且在变换 $a\mapsto -a/2b$ 和 $c\mapsto -c/2b$下，则二次相位 Dunkl 变换的偶部化简为由 [9, 20]定义的线性典范傅里叶-贝塞尔变换

$$\mathcal{L}_{\mu}^{\mathcal{B}}[f](w)=\frac{2c_{\mu}}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\mathscr{K}_{\mu}(w,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv,\quad b\neq 0, \tag{3.7}$$

其中， E_{μ}^{M}(w, v) 表示由 b 定义的线性典范傅里叶-贝塞尔核 y

$$\mathscr{K}_{\mu}(w,v)=e^{\frac{i}{2}\left(\frac{a}{b}v^2+\frac{d}{b}w^2\right)}j_{\mu}\left(wv/b\right). \tag{3.8}$$

• 若 $d=e=0$、 $a=c=$ 余切$_2{}^{\theta}$， $b=$正弦 θ(其中 $\theta\neq n\pi$、 $n\in\mathbb{Z}$)，则二次相位 Dunkl 变换化简为分数阶 Dunkl 变换（除去由 Ghazouani等人定义的常数模为一因子 $\left(e^{i\theta}\right)^{\mu+1}$ [14, 15]:

$$\mathcal{D}_{\mu}^{\theta}f(w)=\begin{cases}A_{\mu,\theta}\displaystyle\int_{\mathbb{R}}e^{\frac{i}{2}\left(v^2+w^2\right)\cot\alpha}E_{\mu}\left(\frac{-iw}{\sin(\theta)},v\right)f(v)|v|^{2\mu+1}dv, & \pi\in\mathbb{R}-n\pi\mathbb{Z}\\ f(w), & \theta=2n\pi\\ f(-w), & \theta=(2n+1)\pi,\end{cases}$$

其中 $A_{\mu,\ \theta}=\frac{e^{i(\mu+1)(\hat{\theta}\pi/2-(\theta-2n\pi))}}{\Gamma\quad\underline{\qquad\qquad\mu+1\ \ (\mu+1)(2|正弦\ \theta|)}}$， $n\in\mathbb{Z}$ 以及 ˆ $\theta=sgn$(正弦 θ)。

• 若 $a=c=d=e=0$ 且 $b=1$，则二次相位 Dunkl 变换可化简为 Dunkl 变换 [10, 11, 12]:

$$\mathcal{D}_{\mu}f(x)=\frac{1}{2^{\mu+1}\Gamma(\mu+1)}\int_{\mathbb{R}}f(x)E_{\mu}(-ix,y)|y|^{2\mu+1}dy.$$

• 若 $\mu=-1/2$，则在变换 $b\mapsto 1/b$下，二次相位 Dunkl 变换可化简为由 [7] 定义的二次相位傅里叶变换

$$\mathcal{Q}_{d,e}^{a,b,c}[f](w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\mathbb{R}}\mathcal{K}_{d,e}^{a,b,c}(w,v)f(v)dv, \tag{3.9}$$

其中 $\mathcal{K}^{a,\ b,\ d\,e}{}^{c}{}_{,}(w,\ v)$ 表示二次相位傅里叶核，其定义见（1.1）。

•若 $\mu=-\frac{1}{2}$、 $d=e=0$、 $b\neq 0$，则在变换 $a\mapsto -a/2b$和 $c\mapsto -c/2b$下，二次相位 Dunkl（由 $\frac{1}{\sqrt{ib}}$放大）可化简为线性正则变换 [3] —

$$\mathcal{L}[f](w)=\frac{1}{\sqrt{2\pi ib}}\int_{\mathbb{R}} f(v)\exp\left\{\frac{i(av^2-2ww+cw^2)}{2b}\right\}dv. \tag{3.10}$$

•若 $\mu=-\frac{1}{2}$, $d=e=0$, $a=c=-\text{余切}_2{}^{\theta}$, $b=$余割 θ（其中 $\theta\neq n\pi$, $n\in\mathbb{Z}$），则二次相位傅里叶变换（乘以 $\sqrt{1-i}$余切 θ）可化简为分数阶傅里叶变换，

$$\mathscr{F}^{\theta}[f](\omega)=\int_{\mathbb{R}} f(v)\mathcal{K}_{\theta}(w,v)dv,$$

其中核 $\mathcal{K}_{\theta}(w,v)$ 由式（1.2）给出。

•若 $\mu=-\frac{1}{2}$, $a=c=d=e=0$且 $b=1$，则二次相位傅里叶变换可化简为经典傅里叶变换，其表达式为

$$\mathcal{F}(f)(\xi)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)e^{-ix\xi}dx.$$

引理 3.2。 设 a,b,c,d,e 为五个实参数，满足 $b\neq 0$ 且 $\mu\geq -1/2$。则对所有 $v,w\in\mathbb{R}$，有：

1. 二次相位 *Dunkl* 核有界，且有

$$\left|\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)\right|\leq 1. \tag{3.11}$$

2. $\overline{\Psi^{a,b,d,e,\mu}(w,v)}=\Psi^{-c,-b,-e,-d,\mu}(w,v)$。

证明。 对于 a，b，c，d，$e\in\mathbb{R}$，满足 $b\neq 0$ 且 $\mu\geq -1/2$。

1. 我们有

$$\begin{aligned}\left|\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)\right| &= \left|e^{-i(av^2+cw^2+dv+ew)}E_{\mu}(-iw/b,v)\right|\\ &\leq \left|E_{\mu}(-iw/b,v)\right|.\end{aligned}$$

根据 [23, 推论 5.4],，我们可推得

$$\left|\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)\right|\leq 1.$$

2. 证明显而易见。

□

定理 3.3。 设 a、b、c、d、$e\in\mathbb{R}$ 满足 $b\neq 0$、 $\mu\geq -1/2$。

1. 若 f 是属于 $L^1_\mu(\mathbb{R})$ 的函数，则映射 $w \mapsto \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)$ 在实数轴上连续，并且有

$$\left|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\right| \leq \frac{c_\mu}{|ib|^{\mu+1}}\|f\|_{\mu,1}. \tag{3.12}$$

2. 二次相位 *Dunkl* 变换可用经典 *Dunkl* 变换表示。对于任意函数 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，二次相位 *Dunkl* 变换可表示为

$$\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) = \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}e^{-i(cw^2+ew)}\mathcal{D}_\mu(h)(w/b), \tag{3.13}$$

其中 $h(v) = e^{-i(av^2+dv)}f(v)$。

证明。我们取 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，使得 $b \neq 0, \mu \geq -1/2$。

1. 设 f 是 $L^1_\mu(\mathbb{R})$ 中的函数。由于映射 $w \mapsto E_\mu(iw, v)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，我们推得

$$w \mapsto \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)$$

对于每个 $x \in \mathbb{R}$，其在实数轴上也是连续映射。此外，

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\right| &= \left|\frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv\right| \\
&\leq \frac{c_\mu}{|ib|^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\left|\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)f(v)\right||v|^{2\mu+1}dv \\
&\leq \frac{c_\mu}{|ib|^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}|f(v)|\,|v|^{2\mu+1}dv \\
&\leq \frac{c_\mu}{|ib|^{\mu+1}}\|f\|_{\mu,1}.
\end{aligned}$$

2. 设 f 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 中的一个函数，则有

$$\begin{aligned}
\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) &= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv \\
&= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i(av^2+cw^2+dv+ew)}E_\mu(-iw/b,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv \\
&= \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}e^{-i(cw^2+ew)}\left[c_\mu\int_{\mathbb{R}}E_\mu(-iw/b,v)e^{-i(av^2+dv)}f(v)|v|^{2\mu+1}dv\right] \\
&= \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}e^{-i(cw^2+ew)}\mathcal{D}_\mu(h)(w/b),
\end{aligned}$$

其中 $h(v) = e^{-i(av^2+dv)}f(v)$。

□

命题 3.4。（关于二次相位 *Dunkl* 变换的黎曼–勒贝格引理）设 a, b, c, d, e 为五个实参数，使得 $b \neq 0$ 且 $\mu \geq -1/2$。对于每个 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R})$，二次相位 *Dunkl* 变换 $\mathcal{D}^{a,b,d\,e^{c}}_{,,\mu}[f]$ 属于 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ 并满足

$$\left\|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right\|_\infty \leq \frac{c_\mu}{|b|^{\mu+1}}\|f\|_{\mu,1}. \tag{3.14}$$

证明。设 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R})$。根据定理3.3的第一个断言，我们知道变换 $\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[f]$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续，并且有界于 $\frac{c_\mu}{|b|^{\mu+1}}\|f\|_{\mu,\ 1}$。 ——

为证明其在无穷远处趋于零，我们首先考虑 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$的情形。利用定理 3.3 中建立的 Dunkl 变换与二次相位 Dunkl 变换之间的关系（3.3）：

$$\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) = \frac{1}{(ib)^{\mu+1}} e^{-i(cw^2+ew)}\mathcal{D}_\mu(h)(w/b),$$

其中 $h(v) = e^{-i(av^2+dv)}f(v)$。由于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，可得 $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$。根据 Dunkl 变换的经典黎曼–勒贝格引理，我们有 $\mathcal{D}_\mu(h) \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$。复合 $\mathcal{D}_\mu(h)(-iw/b)$以及乘以连续有界函数 $e^{-i(cw^2+ew)}$ 均保持在无穷远处趋于零的性质。因此，对于 $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$，有 $\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[f] \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$。

现在，对于一般的 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R})$，设 $\{f_n\} \subset \mathcal{S}(\mathbb{R})$ 是一个满足 $\|f_n - f\|_{\mu,\ 1} \to 0$ 当 $n \to \infty$ 时的序列。由一致估计（3.14），可得：

$$\left\|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f_n] - \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right\|_\infty \leq \frac{c_\mu}{|b|^{\mu+1}}\|f_n - f\|_{\mu,1} \to 0.$$

由于 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$ 中函数的一致极限也属于 $\mathcal{C}_0(\mathbb{R})$，因此我们得出 $\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[f] \in \mathcal{C}_0(\mathbb{R})$，证明完毕。 □

命题 3.5。设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$, $\mu \geq -1/2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 和 $k \in \mathbb{R}_+$。对于每个 $f, g \in L^1_\mu(\mathbb{R})$，二次相位 *Dunkl* 变换具有以下性质：

1. 线性：$\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[\alpha f + \beta g](w) = \alpha\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[f](w) + \beta\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\,e^{c}}_{,\ ,\ \mu}[g](w)$。

2. ***Scaling***: $\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](kw) = \frac{1}{k^{2\mu+2}}\mathcal{D}^{a',b,c'}_{d',e',\mu}[f_k](w)$, *with* $a' = \frac{a}{k^2}$, $c' = ck^2$, $d' = \frac{d}{k}$, $e' = ek$ *and* $f_k(v) = f(v/k)$.

证明。设 $f, g \in L^1_\mu(\mathbb{R})$, $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，满足 $b \neq 0$, $\mu \geq -1/2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 且 $k \in \mathbb{R}_+$。

1. **线性：**

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[\alpha f+\beta g](w) &= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)[\alpha f+\beta g](v)|v|^{2\mu+1}dv\\ &= \frac{\alpha c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv\\ &\quad+\frac{\beta c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,v)g(v)|v|^{2\mu+1}dv\\ &= \alpha\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)+\beta\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w).\end{aligned}$$

2. **缩放：** 我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](kw) &= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(kw,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv\\ &= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i(av^2+c(kw)^2+dv+e(kw))}E_\mu(-i(kw)/b,v)f(v)|v|^{2\mu+1}dv.\end{aligned}$$

我们进行变量替换 $v=u/k$，得到：

- $dv=du/k$
- $|v|^{2\mu+1}=|u/k|^{2\mu+1}=|u|^{2\mu+1}/k^{2\mu+1}$
- $av^2=a(u/k)^2=(a/k^2)u^2$
- $dv=d(u/k)=(d/k)u$
- $f(v)=f(u/k)=f_k(u)$

对于 Dunkl 核，我们有：

$$\begin{aligned}E_\mu(-i(kw)/b,u/k) &= j_\mu\left(\frac{(kw)(u/k)}{b}\right)+\frac{-i(kw)(u/k)}{2(\mu+1)b}j_{\mu+1}\left(\frac{(kw)(u/k)}{b}\right)\\ &= j_\mu\left(\frac{wu}{b}\right)+\frac{-iwu}{2(\mu+1)b}j_{\mu+1}\left(\frac{wu}{b}\right)=E_\mu(-iw/b,u)\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](kw) &= \frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\left(\frac{a}{k^2}u^2+ck^2w^2+\frac{d}{k}u+ekw\right)}E_\mu(-iw/b,u)f_k(u)\frac{|u|^{2\mu+1}}{k^{2\mu+1}}\frac{du}{k}\\ &= \frac{1}{k^{2\mu+2}}\frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}e^{-i\left(a'u^2+c'w^2+d'u+e'w\right)}E_\mu(-iw/b,u)f_k(u)|u|^{2\mu+1}du\\ &= \frac{1}{k^{2\mu+2}}\mathcal{D}^{a',b,c'}_{d',e',\mu}[f_k](w),\end{aligned}$$

其中 $a'=a/k^2$、 $c'=ck^2$、 $d'=d/k$、 $e'=ek$ 和 $f_k(v)=f(v/k)$。

□

定理 3.6。（可逆性）设 a、b、c、d、$e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$，且 $\mu \geq -1/2$。设 f 是属于 $L^1_\mu(\mathbb{R})$ 的函数，并且 $\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\ e^{\ c}}_{,,\mu}[f]$ 属于 $L^1_\mu(\mathbb{R})$。那么，二次相位 *Dunkl* 变换的逆变换为

$$\begin{aligned} f(v) &= \left(\mathcal{D}^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}\left(\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right)(w)\right)(v) \\ &= \frac{c_\mu}{(-ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}} \Psi^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}(v,w)\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)|w|^{2\mu+1}dw. \end{aligned} \tag{3.15}$$

证明。设 f 为属于 $L^1_\mu(\mathbb{R})$ 的函数，使得 $\mathcal{D}^{a,\ b,\ d\ e^{\ c}}_{,\ ,\ \mu}[f] \in L^1_\mu(\mathbb{R})$。则有

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}\left(\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right)(w)\right)(v) &= \frac{c_\mu}{(-ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}} \Psi^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}(v,w)\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)|w|^{2\mu+1}dw \\ &= \frac{c_\mu}{(-ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}} \Psi^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}(v,w) \\ &\quad \times\left[\frac{c_\mu}{(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}} \Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,u)f(u)|u|^{2\mu+1}du\right]|w|^{2\mu+1}dw. \end{aligned}$$

根据富比尼定理，我们可以交换积分次序，得到

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}\left(\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right)(w)\right)(v) &= \frac{c_\mu^2}{(-ib)^{\mu+1}(ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \Psi^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}(v,w)\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,u) \\ &\quad \times f(u)|u|^{2\mu+1}|w|^{2\mu+1}dudw. \end{aligned}$$

通过计算核函数的乘积，我们得到

$$\begin{aligned} \Psi^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}(v,w)\Psi^{a,b,c}_{d,e,\mu}(w,u) &= e^{i(cw^2+av^2+ew+dv)}E_\mu(iw/b,v) \\ &\quad \times e^{-i(au^2+cw^2+du+ew)}E_\mu(-iw/b,u) \\ &= e^{i(av^2+dv)}e^{-i(au^2+du)}E_\mu(iw/b,v)E_\mu(-iw/b,u). \end{aligned}$$

因此，我们有

$$\begin{aligned} \left(\mathcal{D}^{-c,-b,-a}_{-e,-d,\mu}\left(\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\right)(w)\right)(v) &= \frac{c_\mu^2}{(-ib)^{\mu+1}(ib)^{\mu+1}}e^{i(av^2+dv)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(au^2+du)}f(u)|u|^{2\mu+1} \\ &\quad \times\left[\int_{\mathbb{R}} E_\mu(iw/b,v)E_\mu(-iw/b,u)|w|^{2\mu+1}dw\right]du. \end{aligned}$$

进行变量替换 $z = wb^{-1}$，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{-e,-d,\mu}^{-c,-b,-a}\left(\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f]\right)(w)\right)(v) &= c_\mu^2 e^{i(av^2+dv)}\int_{\mathbb{R}} e^{-i(au^2+du)}f(u)|u|^{2\mu+1}\\ &\quad\times\left[\int_{\mathbb{R}} E_\mu(iz,v)E_\mu(-iz,u)|z|^{2\mu+1}dz\right]du\\ &= c_\mu e^{i(av^2+dv)}\int_{\mathbb{R}} E_\mu(iz,v)|z|^{2\mu+1}\\ &\quad\times\left[c_\mu\int_{\mathbb{R}} e^{-i(au^2+du)}f(u)E_\mu(-iz,u)|u|^{2\mu+1}du\right]dz\\ &= c_\mu e^{i(av^2+dv)}\int_{\mathbb{R}} E_\mu(iz,v)\mathcal{D}_\mu g(z)|z|^{2\mu+1}dz,\end{aligned}$$

其中 $g(u) = e^{-i(au^2+du)}f(u)$。

因此，我们得到

$$\begin{aligned}\left(\mathcal{D}_{-e,-d,\mu}^{-c,-b,-a}\left(\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f]\right)(w)\right)(v) &= e^{i(av^2+dv)}\left[\mathcal{D}_\mu^{-1}\left(\mathcal{D}_\mu g\right)(v)\right]\\ &= e^{i(av^2+dv)}\left[\mathcal{D}_\mu\left(\mathcal{D}_\mu g\right)(-v)\right]\\ &= e^{i(av^2+dv)}\left[e^{-i(av^2+dv)}f(v)\right]\\ &= f(v).\end{aligned}$$

这证实了二次相位 Dunkl 变换是可逆的，其逆变换为

$$\mathcal{D}_{-e,-d,\mu}^{-c,-b,-a}\circ\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c} = \mathrm{id}.$$

□

现在，我们陈述并证明二次相位 Dunkl 变换的 Parseval 公式。

定理 3.7（Parseval 公式）。设 a、b、c、d、$e\in\mathbb{R}$、$\mu\geq -1/2$ 和 f 以及 g 是属于 L_μ^2（$\mathbb{R}$）的两个函数，则有

$$\int_{\mathbb{R}} f(v)\overline{g(v)}|v|^{2\mu+1}dv = \int_{\mathbb{R}}\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f](w)\overline{\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw. \tag{3.16}$$

证明。设 f 和 g 是 L_μ^2（$\mathbb{R}$）中的两个函数。根据 Dunkl 变换与二次相位 Dunkl 变换之间的关系（3.13），我们有

$$\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[f](w) = \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}e^{-i(cw^2+ew)}\mathcal{D}_\mu(f_1)(w/b),$$

其中 $f_1(v) = e^{-i(av^2+dv)}f(v)$，并且

$$\overline{\mathcal{D}_{d,e,\mu}^{a,b,c}[g](w)} = \frac{1}{(-ib)^{\mu+1}}e^{i(cw^2+ew)}\overline{\mathcal{D}_\mu(g_1)(w/b)},$$

其中 $g_1(v) = e^{-i(av^2+dv)}g(v)$，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw &= \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}\frac{1}{(-ib)^{\mu+1}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_\mu(f_1)(w/b)\\ &\quad\times\overline{\mathcal{D}_\mu(g_1)(w/b)}|w|^{2\mu+1}dw\\ &= \frac{1}{|b|^{2\mu+2}}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_\mu(f_1)(w/b)\overline{\mathcal{D}_\mu(g_1)(w/b)}|w|^{2\mu+1}dw.\end{aligned}$$

进行变量替换 ($z = wb^{-1}$) 后，我们得到

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}_\mu(f_1)(z)\overline{\mathcal{D}_\mu(g_1)(z)}|z|^{2\mu+1}dz.$$

根据 Dunkl 变换的 Plancherel 定理，我们得到

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw &= \int_{\mathbb{R}} f_1(z)\overline{g_1(z)}|z|^{2\mu+1}dz\\ &= \int_{\mathbb{R}} e^{-i(az^2+dz)}f(z)\overline{e^{-i(az^2+dz)}g(z)}|z|^{2\mu+1}dz\\ &= \int_{\mathbb{R}} f(z)\overline{g(z)}|z|^{2\mu+1}dz\end{aligned}$$

这就得到了所需的恒等性，从而完成证明。 □

推论 3.8. 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$, $\mu \geq -1/2$，且 f 是属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 的函数，则有

$$\|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\|_{\mu,2} = \|f\|_{\mu,2}.$$

定理 3.9. 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$, $\mu \geq -1/2$。若 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}) \cap L^2_\mu(\mathbb{R})$，则其二次相位 *Dunkl* 变换 $\mathcal{D}^{a,b,d\,e^{c}}_{,,\mu}[f]$ 属于 $L^2_\mu(\mathbb{R})$，并且有

$$\|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f]\|_{\mu,2} = \|f\|_{\mu,2}. \tag{3.17}$$

证明。设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$, $\mu \geq -1/2$。根据推论 3.8 以及 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R})$ 中的稠密性，我们得到一个唯一的连续算子 $\mathbb{D}^{a,b,d\,e^{c}}_{,,\mu}[f]$，定义在 $L^2_\mu(\mathbb{R})$ 上，并且在 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 上与 $\mathcal{D}^{a,b,d\,e^{c}}_{,,\mu}[f]$ 一致。设 f 和 g 是 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$中的两个函数，则有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw\\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw.\end{aligned}$$

因此，由于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ 在 $L^2_\mu(\mathbb{R})$ 中稠密，对于所有属于 $L^2_\mu(\mathbb{R})$ 的 f 和 g，我们有，

$$\int_{\mathbb{R}} \mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw = \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw.$$

现在，假设 f 是 $L^1_\mu(\mathbb{R})\cap L^2_\mu(\mathbb{R})$ 的一个元素，且 g 属于 $\mathcal{S}(\mathbb{R})$。那么，我们有

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw &= \int_{\mathbb{R}} \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw \\ &= \int_{\mathbb{R}} \mathbb{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)\overline{\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[g](w)}|w|^{2\mu+1}dw.\end{aligned}$$

因此，$\mathcal{D}^{a,b,d\,e^{-1},c}_{,,\mu}[f] = \mathbb{D}^{a,b,d\,e^{-1},c}_{,,\mu}[f]$，几乎处处成立，这就证明了对于所有 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R}) \cap L^2_\mu(\mathbb{R})$，其二次相位 Dunkl 变换 $\mathcal{D}^{a,b,d\,e^{-1},c}_{,,\mu}[f]$ 属于 $L^2_\mu(\mathbb{R})$。恒等式 (3.17) 则由推论 3.8 得出。 □

4 二次相位 Dunkl 平移

本节将引入二次相位 Dunkl 平移，并阐述其基本性质。首先，让我们回顾 Dunkl 平移的定义。

定义 4.1 (Dunkl 平移)。 与 *Dunkl* 变换相关联的平移算子定义为

$$\tau_{v,\mu}[f](w) = \int_{\mathbb{R}} f(\kappa)\mathcal{W}_\mu(w,v,\kappa)|\kappa|^{2\mu+1}d\kappa, \tag{4.1}$$

其中，$\mathcal{W}_\mu(w,v,\kappa)$ 表示 *Dunkl* 平移的核。它是关于三个变量的非负对称函数，紧支撑于 κ，其定义为

$$\mathcal{W}_\mu = \frac{1}{2}\left\{1-\sigma_{w,v,\kappa}+\sigma_{\kappa,w,v}+\sigma_{\kappa,v,w}\right\} K_\mu(|w|,|v|,|\kappa|), \tag{4.2}$$

with

$$\sigma_{w,v,\kappa} = \frac{w^2+v^2-\kappa^2}{2wv}, \qquad w,v\in\mathbb{R}^*,$$

并且 $K_\mu(w,v,\kappa)$ 对所有 $w,v,\kappa>0$ 均有定义，如下所示

$$K_\mu(w,v,\kappa) = \begin{cases} \dfrac{2^{1-2\mu}\Gamma(\mu+1)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\mu+1/2)} & \dfrac{[((w+v)^2-\kappa^2)(\kappa^2-(w-v)^2)]^{\mu-1/2}}{(wv\kappa)^{2\mu}}, \\ & \textit{if } |w-v|<\kappa<w+v, \\ 0, & \textit{otherwise.}\end{cases}$$

Dunkl 平移具有以下性质。

命题 4.2。 *1.* 对于所有 $f \in L^p_\mu(\mathbb{R})$ $1 \le p \le \infty$、$\mu \ge -1/2$，以及任意 w、$v \in \mathbb{R}$，我们有

$$\tau_{v,\mu} f(w) = \tau_{w,\mu} f(v),$$

and

$$\|\tau_{v,\mu} f\|_{\mu,p} \le 4 \|f\|_{\mu,p}.$$

2. 若 $f \in L^1_\mu(\mathbb{R})$，且 $v \in \mathbb{R}$，则有

$$\mathcal{D}_\mu \left(\tau_{v,\mu} f\right)(w) = E_\mu(iw, v) \left(\mathcal{D}_\mu f\right)(w).$$

定义 4.3 (二次相位 Dunkl 平移**)**。 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，其中 $b \neq 0$，且 $\mu > -1/2$。对于 $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$，我们将二次相位 *Dunkl* 平移算子定义为

$$\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](v) = \int_{\mathbb{R}} f(\kappa) \mathcal{W}^{a,b,d}_\mu(w, v, \kappa) e^{i(a\kappa^2 + d\kappa)} |\kappa|^{2\mu+1} d\kappa, \tag{4.3}$$

其中 $\mathcal{W}^{a,b,d}_\mu(w, v, \kappa)$ 是二次相位 *Dunkl* 平移算子的核，如下所示

$$\mathcal{W}^{a,b,d}_\mu(w, v, \kappa) = \mathcal{W}_\mu(w, v, \kappa) e^{-i\left[a(w^2+v^2+\kappa^2)+d(w+v+\kappa)\right]},$$

其中 $\mathcal{W}_\mu(w, v, \kappa)$ 由关系式 *(4.2)* 给出。

性质 4.4。 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，满足 $b \neq 0$，且 $\mu > -1/2$。对于所有 $f, g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ 以及 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$，二次相位 *Fourier–Bessel* 平移算子满足以下性质。

1. 恒等性：$\tau^{a,b,d}_{0,\mu}[f](v) = f(v)$。 *2.* 对称性：$\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](v) = \tau^{a,b,d}_{v,\mu}[f](w)$。 *3.* 线性：$\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[\alpha f + \beta g](v) = \alpha \tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](v) + \beta \tau^{a,b,d}_{w,\mu}[g](v)$。

下面，我们证明对于所有 $p \in [1, \infty]$，二次相位平移算子从 $L^p_\mu(\mathbb{R}_+)$ 映射到其自身的连续性。

命题 4.5。 对于每个属于 $L^p_\mu(\mathbb{R})$ 的函数 h，$p \in [1, \infty]$ 和 $s \in [0, \infty)$，函数 $\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f]$ 属于 $L^p_\mu(\mathbb{R})$，并且有

$$\|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f]\|_{\mu,p} \le 4 \|f\|_{\mu,p}. \tag{4.4}$$

证明。 对于 $p = 1$ 和 ∞，证明显然成立。现在假设 $p \in (1, \infty)$ 且 f属于 $L^p_\mu(\mathbb{R}_+)$。根据二次相位 Dunkl 平移算子的定义（4.3），我们有

$$\begin{aligned}\left|\tau_{w,\mu}^{a,b,d}[f](v)\right| &= \left|\int_{\mathbb{R}} f(\kappa)\mathcal{W}_{\mu}^{a,b,d}(w,v,\kappa)e^{au^2+du}|\kappa|^{2\mu+1}d\kappa\right| \\ &\leq \int_{\mathbb{R}} |f(\kappa)|\left|\mathcal{W}_{\mu}^{a,b,d}(w,v,\kappa)\right||\kappa|^{2\mu+1}d\kappa, \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(\kappa)|\left|\mathcal{W}_{\mu}(w,v,\kappa)e^{-i\left[a(w^2+v^2+\kappa^2)+d(w+v+\kappa)\right]}\right||\kappa|^{2\mu+1}d\kappa \\ &= \int_{\mathbb{R}} |f(\kappa)|\left|\mathcal{W}_{\mu}(w,v,\kappa)\right||\kappa|^{2\mu+1}d\kappa.\end{aligned}$$

根据赫尔德不等式以及以下事实

$$\int_{\mathbb{R}} \mathcal{W}_{\mu}(w,v,\kappa)\ |\kappa|^{2\mu+1}d\kappa;\leq 4,$$

我们得到

$$\|\tau_{w,\mu}^{a,b,d}[f]\|_{\mu,p} \leq 4\|f\|_{\mu,p}.$$

□

5 二次相位 Dunkl 卷积

本节介绍与二次相位 Dunkl 变换相关的卷积乘积，并探讨其基本性质。

定义 5.1. 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$，且 $\mu > -1/2$。对于 $f, g \in L_{\mu}^{1}(\mathbb{R})$，我们将与二次相位 *Dunkl* 变换相关的卷积乘积定义如下

$$f \star g(w) = \int_{\mathbb{R}} \tau_{w,\mu}^{a,b,d}[f](-v)g(v)e^{i(av^2+dv)}|v|^{2\mu+1}dv, \tag{5.1}$$

其中 $\tau_{w}^{a,\ b\ d,,\mu}[f]$ 是由关系式（4.3）给出的与二次相位 Dunkl 变换相关的平移算子。

二次相位 Dunkl 卷积乘积具有以下基本性质。

性质 5.2。设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，其中 $b \neq 0$, $\mu > -1/2$ 且 $f, g, \upsilon \in L_{\mu}^{1}$（$\mathbb{R}$），则二次相位 *Dunkl* 卷积乘积满足以下性质：

1. 交换性：$f \star g = g \star f$。
2. 结合性：$(f \star g) \star h = f \star (g \star h)$。

下面，我们介绍二次相位 Dunkl 卷积乘积的 Young 不等式。

命题 5.3. 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，使得 $b \neq 0$，且 $\mu > -1/2$。假设$1 \leq p, q, r \leq \infty$和 $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r} + 1$。若 $f \in L^p_\mu(\mathbb{R})$且 $g \in L^q_\mu(\mathbb{R})$，则 $f \star g \in L^r_\mu(\mathbb{R})$，并且下列不等式成立

$$\|f \star g\|_{\mu,r} \leq 4\|f\|_{\mu,p}\|g\|_{\mu,q}.$$

特别地，若 $f, g \in L^1_\mu(\mathbb{R})$，则二次相位 *Dunkl* 卷积乘积$h \star g$几乎处处定义于 $\mathbb{R}$，且属于 $L^1_\mu(\mathbb{R})$。

证明。设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$，其中 $b \neq 0$，且 $\mu > -1/2$。我们有

$$\left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)g(v)e^{i(av^2+dv)}\right| = \left(\left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |g(v)|^q\right)^{\frac{1}{r}} \left(\left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}} \left(|g(v)|^q\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{q}}.$$

因此,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)e^{i(av^2+dv)}g(v)\right| |v|^{2\mu+1}dv &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |g(v)|^q |v|^{2\mu+1}dv\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |v|^{2\mu+1}dv\right)^{\frac{r-p}{rp}} \\ &\times \left(\int_{\mathbb{R}} |g(v)|^q |v|^{2\mu+1}dv\right)^{\frac{r-q}{rq}}.\end{aligned}$$

根据不等式（4.4），我们得到

$$\begin{aligned}|f \star g(t)|^r &\leq \left\|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f]\right\|^{r-p}_{\mu,p} \|g\|^{r-q}_{\mu,q} \int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |g(v)|^q |v|^{2\mu+1}dv \\ &\leq 4^{r-p}\|f\|^{r-p}_{\mu,p}\|g\|^{r-q}_{\mu,q} \int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |g(v)|^q |v|^{2\mu+1}dv.\end{aligned}$$

由此可得,

$$\begin{aligned}\|f \star g\|^r_{\mu,r} &\leq 4^{r-p}\|f\|^{r-p}_{\mu,p}\|g\|^{r-q}_{\mu,q} \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{w,\mu}[f](-v)\right|^p |g(v)|^q |v|^{2\mu+1}dv|w|^{2\mu+1}dw \\ &\leq 4^{r-p}\|f\|^{r-p}_{\mu,p}\|g\|^{r-q}_{\mu,q} \int_{\mathbb{R}} |g(v)|^q \int_{\mathbb{R}} \left|\tau^{a,b,d}_{v,\mu}[f](-w)\right|^p |w|^{2\mu+1}dw|v|^{2\mu+1}dv \\ &\leq \|f\|^{r-p}_{\mu,p}\|g\|^{r-q}_{\mu,q}\|f\|^p_{\mu,p}\|g\|^q_{\mu,q} \\ &\leq \|f\|^r_{\mu,p}\|g\|^r_{\mu,q}.\end{aligned}$$

从而完成证明。 □

6 二次相位 Dunkl 变换的海森堡不确定性原理

本节致力于研究二次相位 Dunkl 变换的 Heisenberg 不确定性原理。为此，我们首先陈述 Rosler 提出的 Dunkl 变换的 Heisenberg 不确定性原理 [24, 定理 1。1]。

定理6.1 (Dunkl 变换的海森堡不确定性原理 [24])。 设 f 是属于 $L^2_\mu(\mathbb{R})$的函数。则有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2|g(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2|\mathcal{D}_\mu[g](w)|^2|w|^{2\mu+1}dw\right) \geq (\mu+\tfrac{1}{2})^2\left(\int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)^2. \tag{6.1}$$

现在，我们介绍二次相位 Dunkl 变换的 Heisenberg 不确定性原理。

定理6.2 (二次相位 Dunkl 变换的海森堡不确定性原理)。 设 $a, b, c, d, e \in \mathbb{R}$ 满足 $b \neq 0$, $\mu > -1/2$ ，且 f 是属于 $L^2_\mu(\mathbb{R})$的函数。则有

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2|f(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2|\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)|^2|w|^{2\mu+1}dw\right) \geq |b|^2(\mu+\tfrac{1}{2})^2\left(\int_{\mathbb{R}} |f(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)^2. \tag{6.2}$$

证明。 根据定理 3.13中建立的 Dunkl 变换与二次相位 Dunkl 变换之间的关系（3.3）：

$$\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) = \frac{1}{(ib)^{\mu+1}}e^{-i(cw^2+ew)}\mathcal{D}_\mu[g]\left(\frac{w}{b}\right). \tag{6.3}$$

其中

$$g(v) = f(v)e^{-i(av^2+dv)}.$$

因此，将标准Dunkl变换的海森堡不等式应用于函数 g，可得

$$\left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2|g(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)\left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2|\mathcal{D}_\mu[g](w)|^2|w|^{2\mu+1}dw\right) \geq (\mu+\tfrac{1}{2})^2\left(\int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv\right)^2. \tag{6.4}$$

由于 $|g(v)| = |f(v)|$，因此我们有

$$I_1 = \int_{\mathbb{R}} |g(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv = \int_{\mathbb{R}} |f(v)|^2|v|^{2\mu+1}dv.$$

因此，我们得到

$$I_2 = \int_{\mathbb{R}} |v|^2 |g(v)|^2 |v|^{2\mu+1} dv = \int_{\mathbb{R}} |v|^2 |f(v)|^2 |v|^{2\mu+1} dv. \tag{6.5}$$

我们将不等式（6.4）右侧的第二个积分记为

$$I_3 = \int_{\mathbb{R}} |w|^2 |\mathcal{D}_\mu[g](w)|^2 |w|^{2\mu+1} dw.$$

并作代换 $w = u/b$，得到

$$I_3 = \frac{1}{b^{2\mu+4}} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \left| \mathcal{D}_\mu[g]\left(\frac{u}{b}\right) \right|^2 |u|^{2\mu+1} du.$$

对等式（6.3）两边取绝对值，得到

$$\left| \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) \right| = \frac{1}{|b|^{\mu+1}} \left| \mathcal{D}_\mu[g]\left(\frac{w}{b}\right) \right|,$$

将其代入 I_3的表达式，得到

$$I_3 = \frac{1}{b^2} \int_{\mathbb{R}} |u|^2 \left| \mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w) \right|^2 |u|^{2\mu+1} du.$$

重新整理 I_1、I_2 和 I_3 的表达式，得到所需结果

$$\begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}} |v|^2 |f(v)|^2 |v|^{2\mu+1} dv \right) \left(\int_{\mathbb{R}} |w|^2 |\mathcal{D}^{a,b,c}_{d,e,\mu}[f](w)|^2 |w|^{2\mu+1} dw \right) \\ &\geq \quad |b|^2 (\mu + \tfrac{1}{2})^2 \left(\int_{\mathbb{R}} |f(v)|^2 |v|^{2\mu+1} dv \right)^2. \end{aligned}$$

至此，证明完成。 □

结论

本文引入了二次相位 Dunkl 变换，这是一种综合性的积分变换，通过五个实参数和一个重数函数，将多种经典与现代变换统一起来，包括 Dunkl 变换、分数阶 Dunkl 变换、线性正则变换和二次相位 Fourier 变换。

我们确立了其有界性、连续性以及通过经典 Dunkl 变换得到的显式表示等基本性质。主要结果包括 Riemann–Lebesgue 引理、反演定理和帕塞瓦尔/普朗歇尔公式，从而证实二次相位 Dunkl 变换在$L^2_\mu(\mathbb{R})$上是一个定义良好的酉算子。

此外，我们还引入了相应的平移算子和卷积算子，证明了它们的基本性质以及一个 Young 型不等式。最后，我们为二次相位 Dunkl 变换推导出了一个 Heisenberg 型不确定性原理，将经典不确定性原理推广到了这一更广泛的框架中。

总之，二次相位 Dunkl 变换是调和分析领域的一项重要进展，它在参数化相位变换与 Dunkl 理论之间架起了桥梁，同时为理论数学和应用数学提供了更大的灵活性。

未来工作

在本文奠定的基础上，我们目前正在进一步研究二次相位 Dunkl 变换的相关方面。我们的研究重点是推导定性和定量的不确定性原理，旨在改进本文提出的海森堡型不等式。与此同时，我们正在发展**二次相位小波 Dunkl 变换**理论。对于这一新变换，我们正系统地研究其核心性质，包括相关的不确定性原理、时频局部化算子的行为、小波系统的构造以及小波乘子的分析。一个核心目标是在这一扩展框架内建立 Calderón 型再生公式，从而进一步巩固其在多尺度分析和信号处理应用中的实用价值。

利益冲突声明

作者未报告任何潜在利益冲突。

参考文献

[1] O. Ahmad 和 A. A. Dar。短时双四元数二次相位傅里叶变换。*J. Franklin Inst.*，362(9):22，2025年。编号/期号 107709。

[2] M. Y. Bhat、O. A. Alamri 和 A. H. Dar。四元数二次相位域中的一种新型小波变换。*Int. J. Wavelets Multiresolut. Inf. Process.*，22(4):25，2024年。编号/期号 2450002。

[3] A. Bultheel 和 H. Martínez-Sulbaran。分数阶傅里叶变换和线性正则变换理论的最新进展。*Bull. Belg. Math. Soc. -Simon Stevin*，13(5):971–1005，2006年。

[4] L. P. Castro 和 R. C. Guerra。与二次相位小波变换相关的不确定性原理和积分方程。*Math. Methods Appl. Sci.*，46(16):16574–16595，2023年。

[5] L. P. Castro 和 R. C. Guerra。多维二次相位傅里叶变换及其不确定性原理。*Constr. Math. Anal.*，8(1):15–34，2025年。

[6] L. P.Castro, M. R. Haque, M. M. Murshed, S. Saitoh, and N. M. Tuan. 二次傅里叶变换. *Ann. Funct. Anal.*, 5(1):10–23, 2014年.

[7] L. P. Castro, L. T. Minh, and N. M. Tuan. 二次相位傅里叶积分算子的新卷积及其应用. *Mediterr. J. Math.*, 15(1):17, 2018年. Id/No 13.[8] A. H. Dar and M. Y. Bhat. 基于卷积的二次相位 Stockwell 变换：理论与不确定性关系. *Multimedia Tools and Applications*, 83(7):20117–20147, 2024年.[9] L. Dhaouadi, J. Sahbani, and A. Fitouhi. 与典范傅里叶-贝塞尔变换相关的调和分析. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 32(4):290– 315, 2021.[10] C. F. Dunkl. 与反射群相关的微分-差分算子.*Trans. Am. Math. Soc.*, 311(1):167–183, 1989.[11] C. F. Dunkl. 具有反射群不变性的积分核. *Can. J. Math.*, 43(6):1213–1227, 1991.[12] C. F. Dunkl. 与有限反射群相关的汉克尔变换. *Contemp.Math.*, 138(1):123–138, 1992.[13] A. Gargouri. 四元数情形下新型二次相位傅里叶 S 变换及其相关的不确定性原理. *Demonstr. Math.*, 57:14, 2024年. Id/No 20240077.[14] S. Ghazouani and F. Bouzaffour. Dunkl 变换的一个分数幂. *Bull.Math. Anal. Appl.*, 6(3):1–30, 2014年.[15] S. Ghazouani and F. Bouzeffour. 实数轴上 Dunkl 变换分数幂的海森堡不确定性原理. *J. Comput. Appl. Math.*, 294:151– 176, 2016.[16] S. Ghazouani, E. A. Soltani, and A. Fitouhi. 与 Dunkl 变换相关的统一积分变换类. *J. Math. Anal. Appl.*, 449(2):1797–1849, 2017.[17] B. Gupta and A. K. Verma. 短时四元数二次相位傅里叶变换及其不确定性原理. *Adv. Appl. Clifford Algebr.*, 34(3):29, 2024年. Id/No 28.[18] M. Kumar and Bhawna. 八元数二次相位傅里叶变换：不等式、不确定性原理及示例. *J. Inequal. Appl.*, 2024:52, 2024年. Id/No 134.[19] A. C. McBride and F. H. Kerr. 关于 Namias 分数阶傅里叶变换. *IMAJ. Appl. Math.*, 39(2):159–175, 1987.[20] H. B. Mohamed and A. Saoudi. 线性典范傅里叶-贝塞尔小波变换：性质与不等式. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 35(4):270– 290, 2024年.

[21] A. Prasad、T. Kumar 和 A. Kumar。关于一对二次相位 Hankel 变换的卷积。*Rev. R. Acad. Cienc. Exactas Fís. Nat., Ser. A Mat.,RACSAM*，114(3):15，2020。编号 150。[22] A. Prasad 和 P. B. Sharma。二次相位 Fourier 小波变换。*Math. Methods Appl. Sci.*，43(4):1953–1969，2020。[23] M. Rösler。Dunkl 交织算子的正性。*Duke Math. J.*，98(3):445–463，1999。[24] M. Rösler。Dunkl 变换的不确定性原理。*Bull. Aust. Math.Soc.*，59(3):353–360，1999。[25] M. Rösler。与 Calogero 型抽象量子模型相关的单参数半群。载于无限维调和分析。第二届日德研讨会论文集，京都大学，日本，*1999*年*9*月*20–24*日，第290–305页。班贝格：D. u. M. Gräbner，2000年。[26] M. Rösler。Dunkl 算子：理论与应用。载于正交多项式与特殊函数。暑期学校讲义，鲁汶，比利时，*2002*年*8*月*12–16*日，第93–135页。柏林：施普林格，2003年。[27] C. Roy、T. Kumar、A. Prasad 和 G. K. Jha。与一对二次相位 Hankel 变换相关的伪微分算子。*J. Pseudo-Differ. Oper. Appl.*，16(1):26，2025年。编号 5。[28] C. Roy、T. Kumar、A. Prasad 和 G. K. Jha。与二次相位 Hankel 变换相关的小波变换。*National Academy Science Letters*，48(1):65–71，2025年。[29] A. Saoudi。线性正则 Dunkl 变换的 Hardy 型定理。*ComplexAnal. Oper. Theory*，18(3):10，2024 年。编号 57。[30] A. Saoudi。关于二次相位 Jacobi Dunkl 变换的调和分析。已提交，2025年。[31] A. Saoudi。关于二次相位 Fourier–Jacobi 变换。已提交，2025年。[32] A. Saoudi。二次相位 Fourier-Bessel 变换。已提交，2025年。[33] F. A. Shah 和 W. Z. Lone。二次相位小波变换及其在广义微分方程中的应用。*Math. Methods Appl. Sci.*，45(3):1153–1175，2022年。[34] F. A. Shah、W. Z. Lone 和 A. Y. Tantary。短时二次相位傅里叶变换。*Optik*，245:167689，2021年。[35] F. A. Shah、K. S. Nisar、W. Z. Lone 和 A. Y. Tantary。二次相位 Fourier 变换的不确定性原理。*Math. Methods Appl. Sci.*，44(13):10416–10431，2021年。

[36] F. A. Shah 和 A. Y. Tantary。与二次相位傅里叶变换相关的采样与乘法滤波。*Signal, Image and Video Processing*，17(5):1745–1752，2023年。[37]P. B. Sharma。二次相位正交小波。格鲁吉亚数学杂志，30(4):593–602，2023年。[38] G. N. Watson。贝塞尔函数理论论著。剑桥，英格兰：剑桥大学出版社；纽约：麦克米伦公司；vi，804页。（1944年），1944年。[39] M. Younus Bhat 和 A. Hamid Dar。八元数域中的短时二次相位傅里叶变换分析。*Math. Methods Appl. Sci.*，48(14):13781–13798，2025年。[40] M. Younus Bhat 和 A. Hamid Dar。迈向四元数二次相位傅里叶变换。*Math. Methods Appl. Sci.*，48(10):10234–10253，2025年。[41] M. Zayed、A. H. Dar 和 M. Y. Bhat。离散四元数二次相位傅里叶变换。*Complex Anal. Oper. Theory*，19(3):22，2025年。编号 53。