arXiv:2512.22518v1 [math.CT] 27 Dec 2025

预序集上的模型结构札记

ANDREW SALCH 和 Gunjeet Singh

Abstract. 给定预序 $\mathcal{A}$ 的子集 $\mathcal{C}$，$\mathcal{F}$，我们给出 $\mathcal{A}$ 具有模型范畴结构的充要条件，使得其余纤维对象为 $\mathcal{C}$，纤维对象为 $\mathcal{F}$。我们通过描述预序上的模型结构如何由其纤维对象和余纤维对象，或其纤维替换和余纤维替换（余）单子来确定，给出若干关于预序上模型结构的分类结果。由此得到一种构造方法，以拓扑和拟阵为输入，生成布尔代数上的模型结构。我们进行了若干详细的案例研究，计算了小布尔代数上的所有模型结构，以及它们之间所有的 Bousfield 局部化和余局部化关系。

1. 引言

给定一个范畴 $\mathcal{C}$，我们可能想了解 $\mathcal{C}$ 上所有模型结构的一些情况，也就是说，所有底层范畴为 $\mathcal{C}$ 的模型范畴。对于大多数范畴 $\mathcal{C}$，计算 $\mathcal{C}$ 上的所有模型结构似乎难以实现。

在所有小范畴中，预序[1] 尤其容易研究。因此，将预序视为范畴的“玩具示例”似乎是合理的；在这些示例中，或许可以理解所有模型结构。也许预序上的模型结构等价于某种适当简单或熟悉的代数数据、序理论数据或组合数据，因此可以对其进行分类。

这就是本文所探讨的内容。主要结论如下：

- 满足某个简单且温和条件的预序上的模型结构（即第 1.1 节将定义的意义下的“强”模型结构），等价于一种适当的序理论数据，也就是说，只需指定纤维对象集和余纤维对象集即可。参见定理 C 和推论 D。

- 这些定理使我们能够从拓扑和拟阵构造布尔代数上的模型结构；见第 1.2 节。这是一种新的、或许颇有趣的构造。

Date：2025年12月。[1]下面回顾最基本的概念。预序是一个配备自反、传递二元关系的集合。换句话说，预序就是从偏序集的定义中去掉反对称性后得到的结构。根据一种古老且广为人知的构造，可以把预序 S 视为一个小范畴：令 S 中的元素作为该范畴的对象；若 $X \leq Y$，则令该范畴中的态射集 $\hom_S(X,Y)$ 含有一个元素，否则令 $\hom_S(X,Y)$ 为空。由此可将预序范畴嵌入小范畴范畴。以这种方式由预序得到的小范畴，恰好是每个同态集至多含有一个元素的小范畴。

- 如果要分类预序上的所有模型结构，而不仅仅是“强”模型结构，任务就会更加困难。给定一组候选纤维对象和一组候选余纤维对象，我们给出了预序具有恰好这些（余）纤维对象的模型结构的充要条件（推论 B）。其中只有一个这样的模型结构会是强模型结构，但非强模型结构可能有多个。

- 命题 5.3 证明了，任意预序上的模型结构与该预序上的“分解括号对”之间存在双射。这完全算不上深刻的结果：分解括号对是一种代数性的结构要素，在定义 5.1 中给出了定义；但它们不过是对预序上的模型结构所必须具备内容的直接代数翻译。
- 至少可以肯定，分解括号对的代数形式主义有助于系统地计算固定预序上的所有模型结构（而不仅仅是强模型结构），并可借助计算机辅助完成。我们编写了程序，用于计算小型布尔代数上的所有模型结构。结果在结构上颇有趣，我们将在下文第 1.3 节和第 6 节中报告这些结果。

1.1.具有指定（余）纤维对象的模型结构的存在性。Droz 和 Zakharevich 在 [15], 中研究了底层范畴为预序的模型范畴，并对这类模型范畴给出了一个在 *Quillen* 等价意义下的分类：当且仅当它们的同伦范畴等价时，这样的两个模型范畴才是 Quillen 等价的。相比之下，本文研究的是固定预序上的模型结构，即“严格地”研究，而不是在 Quillen 等价意义下研究。我们证明了一些具有明确计算性质的结果，以及一些更具一般性和概念性的结果。

以下是我们第一个概念性结果的设定。给定预序 $\mathcal{A}$上的一个模型结构，就会得到 $\mathcal{A}$上的纤维化替换单子 F，以及 $\mathcal{A}$上的余纤维替换余单子 C。人们可能希望反过来：从预序 $\mathcal{A}$上的一个单子 F 和一个余单子 C 出发，是否存在 $\mathcal{A}$上的一个模型结构，使其纤维化替换（余）单子分别为 F 和 C? 相关定理如下：

定理 A。（定理 *3.20*）设 $\mathcal{A}$ 是一个双完备预序，F 是 $\mathcal{A}$上的一个单子，C 是 $\mathcal{A}$上的一个余单子。则以下条件等价：

- $\mathcal{A}$ 上存在一个模型结构，其余纤维替换余单子自然同构于 C，其纤维化替换单子自然同构于 F。
- F 和 C 均为幂等的，F 与 C 在同构意义下交换，并且如果 X、Y是 $\mathcal{A}$的元素，满足 $X \leq CY$和 $FX \leq Y$，那么 $FX \leq CY$。

定理 A 的以下推论指出了我们预期该定理可能发挥作用的一种方式：如果我们指定某个假设的双完备预序 $\mathcal{A}$ 上模型结构所需的余纤维对象和纤维对象，那么我们的结果就会准确地告诉我们，为了使 $\mathcal{A}$ 上存在具有这些特定余纤维对象和纤维对象的模型结构，必须满足哪些条件。

推论 B。设 $\mathcal{A}$ 是一个双完备预序，且 $\mathcal{F}$、$\mathcal{C}$ 是 $\mathcal{A}$ 的子集。那么，$\mathcal{A}$ 上存在一个模型结构，其纤维对象恰好是其中的成员

of $\mathcal{F}$，且其余纤维对象恰好是 $\mathcal{C}$ 的成员，当且仅当满足以下所有条件：

(1) $\mathcal{F}$ 和 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$中都对同构封闭。*(2)* $\mathcal{F}$ 是反射的，即对于每个元素 $x \in \mathcal{A}$，x的上界中属于 $\mathcal{F}$ 的那些元素构成的集合有最小元素。*(3)* $\mathcal{C}$ 是余反射的，即对于每个元素 $x \in \mathcal{A}$，x的下界中属于 $\mathcal{C}$ 的那些元素构成的集合有最大元素。*(4)* 如果 $x \in \mathcal{A}$ 、 $f \in \mathcal{F}$ 和 $c \in \mathcal{C}$ 满足条件[2]

- f 是 $\mathcal{F}$ 中所有大于或等于 x 在 $\mathcal{C}$中的每个下界的元素里最小的，

- 和 c 是 $\mathcal{C}$ 中所有小于或等于 x 在 $\mathcal{F}$中的每个上界的元素里最大的，那么 $b \cong c$，即 $b \leq c \leq b$。*(5)* 如果 x、 $y \in \mathcal{A}$ 满足： x 小于或等于 y在 $\mathcal{C}$中的每个下界，且 y 大于或等于 x 在 $\mathcal{F}$中的每个上界，那么 x 在 $\mathcal{F}$ 中的某个上界小于或等于y 在 $\mathcal{C}$中的某个下界。[3]

如果这样的模型结构确实存在于 $\mathcal{A}$ 上，那么它的同伦范畴恰好是 $\mathcal{A}$的子预序集 $\mathcal{F} \cap \mathcal{C}$ 。

假设给定一个双完备范畴 $\mathcal{A}$ ，并且不妨非正式地说，我们掌握了模型结构的某个“部分”：例如，我们得到一个假定的弱等价类，或一个假定的余纤维对象类，等等；我们想知道，在 $\mathcal{A}$上是否确实存在具有指定结构部分的模型结构。按照 Droz 和 Zakharevich [15]的说法，给定的结构部分可扩张为一个模型结构。 [15] 的主要定理指出，不存在可用一阶逻辑表达[4]的必要且充分条件，来判断一个假定的弱等价类 W 是否可扩张为 $\mathcal{A}$上的模型结构。事实上，他们的证明真正关注的是预序上的模型结构：他们构造了预序 $\mathcal{P}$， $\mathcal{P}'$以及 $\mathcal{P}$和 $\mathcal{P}'$的全子范畴 W， W'，使得有序对（$\mathcal{P}$， W）与有序对（$\mathcal{P}'$， W'）满足相同的一阶语句；同时， $\mathcal{P}'$ 存在一个以 W' 为其弱等价类的模型结构，而 $\mathcal{P}$ 则不存在以 W 为其弱等价类的模型结构。因此，Droz 和 Zakharevich 特别证明了，不存在一阶刻画能够判定预序上的一个假定的弱等价类是否可扩张为模型结构。

相比之下，推论 B 给出了一个一阶刻画，说明假定的余纤维对象类和假定的纤维对象类何时能够扩展为预序上的模型结构。

对于我们的下一个结果——定理 C，若模型结构满足以下两个条件，我们就称它为强：

- 如果 $g \circ f$ 是无圈余纤维化，那么 f 是无圈余纤维化，

---

[2]这段迷宫般的表述是一种无需选择的一阶说法，表示反射函子 $F : \mathcal{A} \to \mathcal{F}$ 与余反射函子 $C : \mathcal{A} \to \mathcal{C}$ 在 $\mathcal{A}$ 中相差一个同构而可交换。[3]这段表述是对“若 $a \leq C(b)$ 且 $F(a) \leq b$，则 $F(a) \leq C(b)$.”的一种无需选择的一阶改述。[4]这里，我们（以及 Droz–Zakharevich）所说的“可用一阶逻辑表达”，是指“可通过对元素进行量化来表达（这些元素本身可以是范畴中的对象和/或态射），但不能对集合或函数进行量化”。

- 并且，如果 $g \circ f$ 是无圈纤维化，那么 g 是无圈纤维化。

定理 C. *(定理 3.24)* 设 $\mathcal{A}$ 是有限双完备预序。令 F 为 $\mathcal{A}$ 上的一个单子，令 C 为 $\mathcal{A}$ 上的一个余单子。当且仅当以下条件均满足时，$\mathcal{A}$ 上存在一个强模型结构，其纤维替换单子为 F，其余纤维替换余单子为 C:

- 定理 *A* 中的两个条件。
- 若 $a \leq b$ 且 $Cb \leq Ca$ 且 $Fb \leq Fa$，则 $b \leq a$。

此外，$\mathcal{A}$ 上的强模型结构与满足上述条件的单子-余单子对 (F, C) 的同构类之间存在一个双射。

利用幂等单子（分别地，余单子）的同构类等价于反射的（分别地，余反射的）子范畴这一事实，很容易将定理 C 改述如下:

推论 D。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限双完备预序。令 $\mathcal{F}$、$\mathcal{C}$ 为 $\mathcal{A}$的子集。当且仅当以下所有条件均满足时，$\mathcal{A}$ 上存在一个强模型结构，其纤维对象恰为 $\mathcal{F}$的成员，且其余纤维对象恰为 $\mathcal{C}$的成员:

- 推论 *B* 中的条件。
- 若 $a \leq b$，且 $\mathcal{C}$ 中 b 的某个下界也是 a的下界，同时 $\mathcal{F}$ 中 a 的某个上界也是 b 的上界，则 $b \leq a$。

此外，$\mathcal{A}$上的强模型结构与满足上述条件的 $\mathcal{A}$ 的子集对（$\mathcal{F}$、$\mathcal{C}$）之间存在一一对应关系。

1.2. **由拓扑和拟阵构造的模型结构**。在预序中，布尔代数是一类尤为著名的对象。我们其余的结果都涉及布尔代数上的模型结构。布尔代数的核心例子是幂集：经典结果表明，[36] 每个完备原子布尔代数都是某个集合的幂集，特别地，每个有限布尔代数都是某个集合的幂集。若 S 是一个集合，则其幂集 $\mathcal{P}(S)$ 上的幂等单子与 S中的 Moore 集之间存在一一对应关系；也就是说，后者是 S 的子集所组成的、在任意交下封闭的集合族。S上的 Moore 集中，有两类特别值得关注：S上的拓扑，以及 S上的拟阵。

给定集合 S 上一对适当相容的拓扑 $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$，定理 C 通过将 $\mathcal{T}_1$ （由其闭集给出）视为 S 中的 Moore 集，将 $\mathcal{T}_2$ 视为 S 中的余 Moore 集，并将这些 Moore 集和余 Moore 集转化为 $\mathcal{P}(S)$ 上的幂等单子和幂等余单子，从而在布尔代数 $\mathcal{P}(S)$ 上得到唯一的强模型结构。展开定理 C 的条件，我们得到命题 4.3，其陈述如下。我们用 Cl(U) 表示拓扑 $\mathcal{T}_1$ 中子集 $U \subseteq A$ 的闭包，并用 Int(U) 表示拓扑 $\mathcal{T}_2$ 中 U 的内部。那么，命题 4.3 断言，一对 $(\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2)$ 在 $\mathcal{P}(S)$ 上定义强模型结构，当且仅当满足以下条件:

- Int(Cl(U)) $=$Cl(Int(U)) 对所有 $U \subseteq S$ 均成立，
- 如果 U, V是 X 的子集，且满足 $U \subseteq$Int(V) 和 Cl(U) $\subseteq V$，那么 Cl(U) $\subseteq$Int(V)。
- 若 U，V是 X的子集，满足 $U \subseteq V$且 Cl(U) $=$Cl(V)，并且 Int(U) $=$Int(V)，则 $U = V$。

在 $\mathcal{P}(S)$ 上的该模型结构中，Cl 是纤维化替换，而 Int 是余纤维化替换。该模型结构的同伦范畴是 $\mathcal{P}(S)$ 的子偏序集，由 S 中同时关于拓扑 $\mathcal{T}_1$ 闭且关于拓扑 $\mathcal{T}_2$ 开的那些子集组成。我们将这种由一对拓扑产生的模型结构称为拓扑的。

类似地，给定一对具有相同底集 S 的拟阵[5] $(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$，命题 4.7 精确地告诉我们，何时能在幂集 $\mathcal{P}(S)$上得到相应的强模型结构。记 Cl 为 $\mathcal{M}_1$ 中的闭包算子，也就是说，$\mathrm{Cl}(U)$ 是 $\mathcal{M}_1$ 中所有包含 U 的平坦的交。类似地，记 $\mathrm{Int}(U)$ 为 $\mathcal{M}_2$ 中所有包含 U 的补集的平坦之补集的并。那么，当且仅当满足上述拓扑情形中的相同两个条件时，我们才能在 $\mathcal{P}(S)$ 上得到相应的强模型结构。该模型结构的同伦范畴是 $\mathcal{P}(S)$ 的子偏序集，由满足以下条件的子集U 组成： S 中的 U 是拟阵 $\mathcal{M}_1$ 的平坦，并且 U 也是拟阵 $\mathcal{M}_2^*$ 的对偶拟阵 $\mathcal{M}_2$中的一个回路。我们将这些由拟阵对产生的模型结构称为拟阵的。类似地，由简单拟阵对产生的模型结构，也就是按照 [18], 意义上的“几何”，称为几何的。

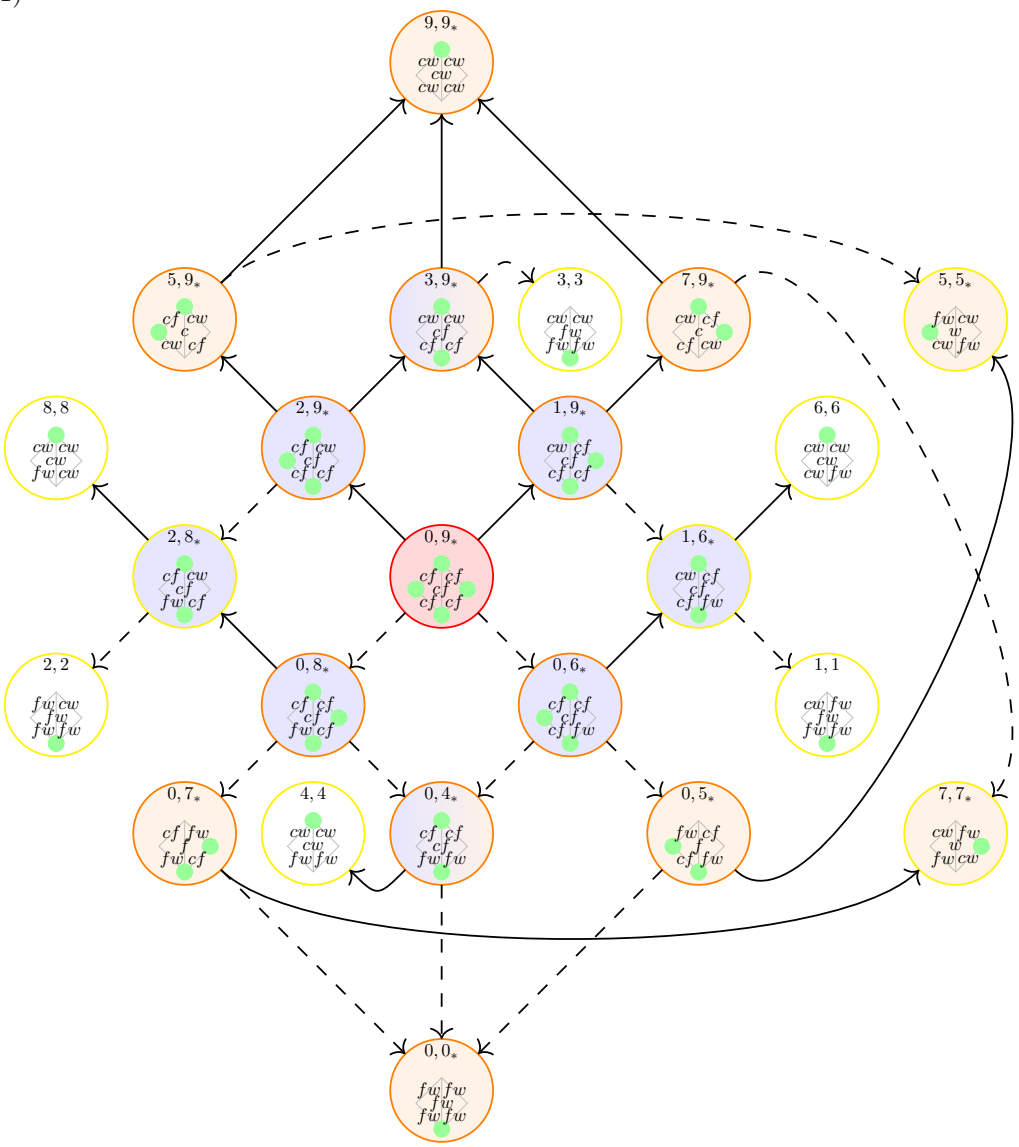
1.3. 小型布尔代数上所有模型结构的案例研究。有了上述结构性结果和构造，我们现在可以对一些小型布尔代数上的所有模型结构进行明确计算（借助计算机），并真正理解我们所研究的对象。我们在第 4.2 节和第 6 节给出这类计算的结果。令 $\mathcal{P}_n$ 表示一个含有 n 个元素的集合的幂集。我们证明：

- 3 个模型结构定义在 $\mathcal{P}_1$ 上。它们全都是拟阵的，因此也都是强的；但除了离散模型结构（即唯一一种仅将同构视为弱等价的模型结构）之外，它们都不是拓扑的，也不是几何的。离散模型结构兼具拓扑性和几何性。
- 23 个模型结构定义在 $\mathcal{P}_2$ 上，其中 17 个是强的，9 个是拓扑的，11 个是拟阵的，还有一个——离散模型结构——是几何的。
- 1026 $\mathcal{P}_3$上的模型结构，其中377个是强模型结构，84个是拓扑的，50个是拟阵的，4个是几何的。

[5]如有需要，请参阅定义 4.5，了解拟阵的定义。

我们的方法所得到的信息远比这些枚举结果详细得多。下面的图示描绘了 $\mathcal{P}_2$上的全部23个模型结构：

(1)



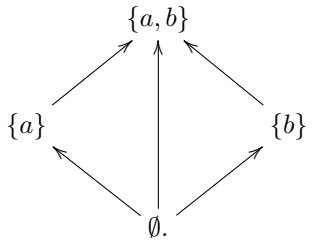
图（1）中的符号如下。

- 在图（1）中，每个圆圈表示一个单独的模型结构。
- 每个圆圈顶部的整数有序对 m，n 表示哪一对分解系统给出了该模型结构。这里采用我们在论文后文的（22）中给出的 $\mathcal{P}_2$ 上（恰好 10 个）分解系统的编号方案。例如，0，9 表示这样的模型结构：其先无圈余纤维化后纤维化分解系统是图（22）中的 0 号，而其先纤维化后无圈纤维化分解系统是图（22）中的 9 号。

• 当且仅当相应的模型结构是强模型结构时，才会在有序对 m，n 下方以右下标形式标出星号。
• 背景颜色的含义如下：– 白色背景表示非强模型结构，– 蓝色背景表示拓扑模型结构（因此也是强模型结构），– 橙色背景表示拟阵模型结构（因此也是强模型结构），– 蓝色和橙色背景表示同时具有拓扑性和拟阵性的模型结构，– 红色背景表示同时具有几何性和拓扑性的模型结构。

• 布尔代数 $\mathcal{P}_2$ 是集合 $\{a,b\}$的幂集。我们可以用图示表示其中的四个元素和五个非恒等态射， $\mathcal{P}_2$ 如下图所示

(2)



在（1）中的每个圆圈内，都标有（2）中图示的缩略版本，以指出哪些态射是余纤维化（c）、弱等价（w）或纤维化（f）；例如，  表示所有映射都是余纤维化的模型结构， $\emptyset \to \{a\}$ 和 $\{b\} \to \{a,b\}$ 也都是纤维化，而$\emptyset \to \{b\}$ 和 $\{a\} \to \{a,b\}$ 也都是弱等价。

• 在每个圆圈中，绿色圆点标出了 $P(\{a,b\})$ 中在相应模型结构下为双纤维的对象。由于预序 $\mathcal{A}$ 上的模型结构的同伦范畴就是包含双纤维对象的全子范畴，绿色圆点因此告诉我们，对于 $P(\{a,b\})$ 上的每个模型结构，其同伦范畴是什么：也就是包含 $P(\{a,b\})$ 中由绿色圆点标出的对象的全子范畴（即子偏序集）。

• 从一个模型结构指向另一个模型结构的实线箭头表示后者是前者的 Bousfield 局部化[6]；虚线箭头表示后者是前者的 Bousfield 余局部化（即“右布斯菲尔德局部化”）。我们只绘制了这样一组最小 的箭头；例如，我们绘制了从 (0,9) 指向 $(1,9)$ 的实线箭头，以及从 (1,9) 指向 $(7,9)$ 的实线箭头，因此无需在它们之间再绘制额外箭头，也可推出模型结构 $(7,9)$ 是模型结构 (0,9) 的 Bousfield 局部化。

[6]回想一下，给定范畴 $\mathcal{A}$ 上的模型结构 $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2$，如果 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 具有相同的余纤维化类（分别为相同的纤维化类），且 $\mathcal{M}_1$ 中的弱等价类包含于 $\mathcal{M}_2$ 的弱等价类中，我们就称 $\mathcal{M}_2$ 是 $\mathcal{M}_1$ 的一个 *Bousfieldlocalization*（分别为 *Bousfield colocalization*）。

- 红圈标出的模型结构（即 (0,9)）是离散模型结构，也就是一种所有映射都是余纤维化和纤维化、且只有恒等映射是弱等价的模型结构。

- 圆圈的颜色表示与离散模型结构的距离，具体如下：离散模型结构用红色圈出。通过对离散模型结构进行一次局部化或一次余局部化所能得到的模型结构用橙色表示。通过长度为 2 的交替 Bousfield 局部化与余局部化序列所能得到的模型结构用黄色表示。对于 $P(\{a,b\})$ 上的模型结构，不存在需要通过长度为 ≥ 3 的局部化与余局部化交替序列才能构造的情形，因此无需使用更多颜色。

给定一个范畴 $\mathcal{A}$，我们可以尝试绘制这样一幅图：其中每个节点对应 $\mathcal{A}$ 上的一种模型结构，同色箭头表示哪些节点是哪些其他节点的 Bousfield 局部化，另一种颜色的箭头则表示哪些节点是哪些其他节点的 Bousfield 余局部化。约在 2014 年，第一作者计算了几个这样的图之后，开始将其称为“Bousfield 箭图”。这个术语首次见于 Corrigan-Salter 的论文 [14]。图（1）是一个 Bousfield 箭图，并添加了若干在布尔代数上的模型结构情形中具有意义的标注。第一作者于 2025年5月发布了 Bousfield 箭图（1） [33] 。2025年11月的预印本 [11] 描述了对同一 Bousfield 箭图的一项独立的部分计算——参见 [11], 中的图 5，其中描绘了部分（但并非全部）Bousfield 局部化和余局部化。

从一个范畴上的模型结构集合的 Bousfield 箭图中，可以读出其中一些结构特征。其中有些结构特征完全不明显。例如，由 (1) 可得这样一个奇特的观察：$\mathcal{P}_2$ 上的每个强模型结构要么是拓扑的，要么是拟阵的（也可能两者兼具）；而 $\{a,b\}$ 上的每个几何模型结构也都是拓扑的（并且是离散的）。我们还看到，$\mathcal{P}_2$ 上的每个模型结构都可以通过反复进行 Bousfield 局部化和余局部化，从离散模型结构得到——事实上，取长度为 2 的序列就足够了，即先进行一次局部化、再进行一次余局部化，或反之[7]。简言之，我们称 $\mathcal{P}_2$ 的 Bousfield 箭图是连通的。

在第 6 节中，我们还给出了 $\mathcal{P}_1$ 和 $\mathcal{P}_3$的 Bousfield 箭图，不过后者只能以高度压缩的形式描绘，因为它有 1026 个顶点。$\mathcal{P}_3$ 的情形开始阐明，$\mathcal{P}_2$ 上的模型结构集合的哪些结构性质只是偶然现象，以及哪些性质或许可以推广到其他布尔代数（或者更广泛地说，其他范畴）上的模型结构：

- 并非每个定义在 $\mathcal{P}_3$ 上的强模型结构都属于拓扑的或拟阵的。

- $\mathcal{P}_3$ 的 Bousfield 箭图并非连通的。在第 6.3 节中，我们说明，离散模型结构所在的连通分支中共有 765 个模型结构，也就是“主分支”。其余

[7]这与近期预印本 [11], 中的一项观察有些重合，尽管两项观察都不能直接由另一项推出。在 [11, 定理 4.10] 中，证明了偏序集 $[m]\times[n+1]$ *whose acyclic fibrations are retractile* 上的每个模型结构（定义 2.3）都可以通过有限序列的 Bousfield 局部化和余局部化，从离散模型结构得到。

261 个模型结构分布在 219 个连通分支中，每个分支的结构都非常简单，详见第 6.3 节。本质上，“所有复杂的部分”都发生在主分支中。

- 有趣的是， $\mathcal{P}_3$ 主分支之外的所有模型结构都不是强模型结构。因此， $\mathcal{P}_3$ 上的所有拓扑模型结构和拟阵模型结构都位于主分支中，也就是说，每个这样的模型结构都可以从离散模型结构出发，经有限次 Bousfield 局部化和余局部化得到。
- 给定范畴 $\mathcal{A}$ 上的一个模型结构 $\mathcal{M}$，我们称从离散模型结构到 $\mathcal{M}$的距离为以离散模型结构为起点、以 $\mathcal{M}$ 为终点的最短 Bousfield 局部化与余局部化链的长度。我们称的 ***Bousfield*** 箭图中主分支的半径为从离散模型结构到 $\mathcal{A}$ 上其他模型结构的有限距离的上确界。根据我们在第 6 节中的计算，我们观察到，对于 $n \in \{1, 2, 3\}$， $\mathcal{P}_n$ 的 Bousfield 箭图中主分支的半径恰好是 n。我们想知道，对于更大的 n，这一结论是否仍然成立。对于 $n = 4$ 的情形，若没有改进的算法，显式计算是无法完成的——参见第 6.1 节中的讨论。

配备幂等（余）单子的布尔代数，常见于模态命题逻辑的代数语义中（参见 [16, chapter 10]，其中有很好的教材式讲解）。第一作者根据本文的结果，为本文撰写了一篇附录，探讨布尔代数上模型结构的模态逻辑诠释。该附录的读者大概是同时对模型范畴和模态逻辑感兴趣的数学家。我们不确定这群数学家中是否有人不在本文作者名单上，因此第一作者决定将该附录作为单独的下载文件[8] 放在其个人网页上，而不将其纳入论文正文。

本文结构如下。第 2 节介绍预序上模型结构的基本性质，并定义可缩回和可切分解系统。主要理论结果见第 3 节，我们将在此证明定理 3.20 和 3.24。第5节从分解–括号对的角度，给出预序上模型结构的一种等价描述。这一定义更适合计算机实现。作为这些结果的应用，我们将在第 4 节介绍有限布尔代数上的拓扑模型结构和拟阵模型结构。最后，第 6 节将介绍有限布尔代数上所有模型结构的 Bousfield 箭图，并记录此类箭图的若干基本观察。

1.4. 此前的相关研究。 以下列举了几篇较早的论文，它们探讨了如何枚举某些预序上的模型结构或分解系统。这些论文都没有采用本文通过（余）纤维替换（余）单子来构造和分类模型结构的方法，也没有像本文一样着重计算布尔代数上的模型结构。因此，尽管研究主题大体上有所重叠，但在方法、结果和所考察的例子方面并无太多重合。

[8] `https://asalch.wayne.edu/modal_appendix_1.pdf`

- Droz 和 Zakharevich 的论文 [15] 第5节对偏序集上的模型结构进行了分类，但仅分类到 Quillen 等价的层次。这里的“分类”是指：给定偏序集 $\mathcal{A}$ 上的模型结构，其 Quillen 等价类由弱等价类确定。因此，若指定哪些子偏序集 $\mathcal{A}$能够成为某个模型结构的弱等价类，就相当于列出了 $\mathcal{A}$上模型结构的 Quillen 等价类。

  借助 Droz–Zakharevich 的结果、Beke 于 2003年发表的预印本 [5], 以及 Jardine 于 2006年发表的论文 [23], ，可以对偏序集上的模型结构进行“原样”分类，也就是说，不考虑 Quillen 等价。给定一个可能成为 $\mathcal{A}$ 上某个模型结构的弱等价类 $\mathcal{W}$，Beke 定理 [5, 命题 2.1], 的一个非常特殊的情形及其对偶表明，存在唯一最小的映射集合 $\mathcal{F}_{min}$（相应地，也存在唯一最大的映射集合 $\mathcal{F}_{max}$），它们是 $\mathcal{A}$ 中的映射，且使得 $\mathcal{A}$ 上存在一个模型结构，其纤维化为 $\mathcal{F}_{min}$ （分别为 $\mathcal{F}_{max}$），弱等价为 $\mathcal{W}$。随后，Jardine 定理（归功于 [23], ，但其中仅有隐含表述；更直接的陈述和讨论见 [26] ）证明，给定 $\mathcal{A}$ 上任意一个分解系统（$\mathcal{L}$, $\mathcal{R}$），其右类 $\mathcal{R}$ 满足 $\mathcal{F}_{min} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}_{max}$，则存在一个（必然唯一的） $\mathcal{A}$ 上的模型结构，其弱等价为 $\mathcal{W}$，纤维化为 $\mathcal{R}$。因此，根据 Droz–Zakharevich、Beke 和 Jardine 的结果， $\mathcal{A}$ 上的每个模型结构都能唯一地表示为一对（$\mathcal{W}$, $\mathcal{R}$），其中 $\mathcal{W}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一个可扩展为模型结构的态射集合，而 $\mathcal{R}$ 是 $\mathcal{A}$ 上一个满足 $\mathcal{F}_{min} \subseteq \mathcal{R} \subseteq \mathcal{F}_{max}$ 的分解系统的右类。

  在本文中，我们采用了 Droz–Zakharevich 的一些结果，尤其是第3.2节的结果。不过，本文关注的是如何根据偏序集 $\mathcal{A}$ 上的余纤维对象和纤维对象来分类模型结构，而非 Droz–Zakharevich–Beke–Jardine 所采用的、依据弱等价和纤维化进行分类的方法。出于某些目的（例如，像我们在第1.2节中所做的那样，从拓扑和拟阵构造模型结构），通过余纤维对象和纤维对象来描述模型结构，比用弱等价来描述方便得多。从技术上说，使用基于弱等价的刻画也更加困难，因为 Droz–Zakharevich 证明了 [15, 定理 A]：无法在一阶逻辑的语言中刻画哪些态射集 $\mathcal{A}$ 是某个模型结构中的弱等价。相比之下，我们的推论 B 是一个一阶刻画，它说明了哪些子集对 $(\mathcal{F}, \mathcal{C})$ 能在 $\mathcal{A}$ 上导出一个模型结构，使 $\mathcal{F}$ 成为纤维对象，并使 $\mathcal{C}$ 成为余纤维对象。

- Mazur–Osorno–Roitzheim–Santhanam–vanNiel–Zapata Castro 的 [25], 预印本，以及 Carnero Bravo–Goyal–Mart´ınez Alberga–Ng–Roitzheim–Tolosa 的 [11], 预印本，都是非常新的作品，发布于本文发表前不到一个月。前者给出了模型结构的分类，类型与 Droz–Zakharevich、Beke 和 Jardine 所提供的分类相同——即按成对的 $(\mathcal{W}, \mathcal{R})$ 进行分类——但提供了更明确、实用的判据，用于确定哪些态射集 $\mathcal{W}$ 和 $\mathcal{R}$ 满足 Droz–Zakharevich–Beke–Jardine 的条件

。后者这篇论文 [11], 着重找出可通过求逆而得到偏序集上模型结构的 Bousfield（余）局部化的最小态射集。这篇论文对四元素布尔代数上的分解系统和模型结构所做的一些明确计算，也见于这两篇预印本。C. Roitzheim（个人通信）认为，值得强调的是，这两篇预印本采用的（余）传递系统视角，与使用分解系统相比，带来了不同的方法论和实用性。

- Stanculescu 的论文 [35]构造了一种具有指定纤维对象的模型结构。本文的主要目标是构造预序上的模型结构，其中纤维对象和余纤维对象均为指定对象。因此，我们的结果解决了一个问题：从一个角度看，它比 [35] 中的问题更难（我们解决的问题需要满足更多约束）；但从另一个角度看，它更简单（我们只研究预序，因而简化了问题背景）。我们在第3.2节中全面讨论了 Stanculescu 的论文 [35], 中的主要构造，以及它与我们构造之间的关系。

- Franchere–Ormsby–Osorno–Qin–Waugh 的论文 [19]研究有限群上的传递系统，它们等价于该群子群格上的弱分解系统。文献 [9] 也阐明了传递系统与有限偏序集上的弱分解系统之间的关系。

- 在 Balchin–Ormsby–Osorno–Roitzheim 的论文 [4]中，他们使用传递系统枚举了有限线性全序 $[n]$ 上的模型结构。
- Balchin–MacBrough–Ormsby 的论文 [3] 重点在于明确识别有限全序 $[n]$ 中属于“Tamari区间”的模型结构。
- Bose–Chih–Housden–Jones–Lewis–Ormsby–Rose 的论文 [10]讨论的是分解系统的枚举，而不是模型结构。我们在第 4.1 节 [10]中介绍的综述材料与其有很大重叠，但本文的新结果与 [10]的结果并不重叠。

- 为避免任何可能的混淆：Raptis 的论文 [31] 讨论的是偏序集范畴上的模型结构，这与单个偏序集（或预序）上的模型结构完全不同，而后者正是本文的主题。

1.5. **致谢**。 第一作者感谢 I. Zakharevich 就论文 [15], 进行交流，感谢 J. Beardsley 就拟阵展开讨论并推荐书籍 [18], ，还感谢 C. Roitzheim 就预印本 [11] 和 [25]进行讨论。第二作者感谢 Joey Beauvais–Feisthauer 对用于统计强模型结构的 Sage脚本提出有益建议。我们使用了韦恩州立大学的高性能计算网格，完成了本文所述的部分计算。

1.6. **约定**。

- 给定某个范畴 $\mathcal{A}$中的一类态射 S，我们遵循 Hovey [22] 的记法，将 Proj(S)（分别地，Inj(S)）表示相对于 S具有左（分别地，右）提升性质的态射类。

- 本文没有使用任何集合论技巧，也没有令人意外之处：我们所说的所有预序，都是数学中的标准意义上的预序。特别是，预序只有一个对象 集合。

- 本文不假设我们的模型范畴具有所有 （小）极限和余极限。相反，我们采用 Quillen 的原始约定 [30]，即模型范畴是一个具有有限极限和余极限的范畴，并配备一个模型结构。

- 我们不沿用 Quillen 在 [30], 中的约定，而是遵循现代约定，假设所有模型结构都是闭的，即，$(cof, we \cap fib)$ 和 $(cof \cap we, fib)$ 各自都是弱分解系统[9]。

- 本文中，范畴 $\mathcal{A}$ 上的模型结构 由一个有序三元组 (cof, we, fib) 构成，其中各项都是收缩封闭的全子范畴 $\mathcal{A}$，并且 $(cof \cap we, fib)$ 和 $(cof, we \cap fib)$ 各自都是弱分解系统，同时 we满足三取二性质。

  因此，按照我们声明的约定，模型范畴是配备了模型结构的有限双完备范畴。需要说明的是，如果我们只写“$\mathcal{A}$ 是一个配备了模型结构的范畴”，并不表示我们断言 $\mathcal{A}$ 具有任何特定的极限或余极限。因此，“配备了模型结构的范畴”弱于“模型范畴”。

- 在本文中，我们将经常讨论预序上的模型结构；这些预序不一定具有所有有限极限或余极限，但至少有一个始对象和一个终对象。为这类结构取一个简短的名称会很方便。我们所说的“模型预序”，是指具有始对象和终对象，且配备了模型结构的预序。

2. Basic observations about model structures on preorders

本节中的所有结果对于撰写过预序上的模型结构相关内容的人来说都是众所周知的，而且每个结果都可通过简短且常规的论证证明，因此我们省略大部分证明。其中一些结果也已知可从预序推广到以偏序集为富集范畴的范畴，by [13]。

2.1. **每个模型预序都会产生一对反射／余反射子范畴**。

命题 2.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个预序。那么，$\mathcal{A}$ 上任何闭模型结构的弱分解系统都是正交分解系统。此外，$\mathcal{A}$ 上任何闭模型结构中的分解在同构意义下都是唯一确定的。因此，在预序上的任何模型结构中，分解系统都是函子性的。

根据命题 2.1，预序上的弱分解系统与正交分解系统并无区别。因此，只要不存在歧义，我们就用“分解系统”一词同时指“弱分解系统”和“正交分解系统”。

[9]回顾一下，范畴 $\mathcal{A}$ 上的 *weak factorization system* 由一对全子范畴（$\mathcal{L}$，$\mathcal{R}$）组成，它们满足：$\mathcal{A}$ 中的每个态射都可以分解为先经过 $\mathcal{L}$ 中的映射，再经过 $\mathcal{R}$ 中的映射；并且 $\mathcal{L}$ =Proj($\mathcal{R}$)，以及 $\mathcal{R}$ =Inj($\mathcal{L}$)。

推论 2.2. 设 $\mathcal{A}$ 是一个配备了分解系统 $(\mathcal{L},\mathcal{R})$的预序。那么， $X \xrightarrow{f} Y$ 属于 $\mathcal{R}$ ，当且仅当将 f 分解为先是 $\mathcal{L}$ 中的映射、再是 $\mathcal{R}$中的映射时， $\mathcal{L}$ 中的映射是一个同构。对偶命题同样成立。

定义 2.3 并非标准定义，但也并非新创：“可缩回的”和“可切割”这两个术语及其相同含义，最早见于 [34]。

定义 2.3。 范畴中一类 $\mathcal{R}$态射称为可缩回的，如果每当$g \circ f$ 属于 $\mathcal{R}$时，态射 f 也属于 $\mathcal{R}$。对偶地，一类 $\mathcal{S}$ 态射称为可切割，如果每当 $g \circ f$ 属于 $\mathcal{S}$时，态射 g 也属于 $\mathcal{S}$。

命题 2.4。 在预序上的任意分解系统$(\mathcal{L},\mathcal{R})$ 中， $\mathcal{R}$ 是可缩回的。对偶地， $\mathcal{L}$ 是可切割的。

给定预序上的一个分解系统（$\mathcal{L}$， $\mathcal{R}$），命题 2.4 说明 $\mathcal{L}$ 是可切割的。然而，$\mathcal{L}$ 是否也可缩回则未必。为这类具有此种性质的分解系统命名会很有用（例如在命题 3.5 和命题 3.7 中）。我们将这类分解系统称为“可缩回的”，如下所述：

定义 2.5。 设 $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ 是某个范畴上的分解系统。若 $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ 满足 $\mathcal{L}$ 可缩回（分别地， $\mathcal{R}$ 可切割），则称其为可缩回的（分别地，称其为可切割的）。

注 2.6。 从模型范畴最初的拓扑学动机出发，我们习惯于认为纤维化应当表现得有些像满射，例如 Serre 纤维化和 Hurewicz 纤维化都是满射。然而，满射（或更一般地，满态射）通常并不可缩回；相反，任意范畴中的单态射 都是可缩回的。因此我们看到，在考虑预序上的模型结构时，我们关于模型结构的拓扑直觉并不能完全适用。

集合范畴上存在一种模型结构，其中余纤维化是满射，所有映射都是弱等价，而纤维化是单射。在这种模型结构中，纤维化是可缩回的。命题 2.4 的一个启示是，在某种特定意义上，预序上的模型结构更像是集合范畴上的这种模型结构，而不是拓扑空间上的 Serre 模型结构。

记号 2.7。 设给定一个配备模型结构的预序 $\mathcal{A}$ 。对于 $\mathcal{A}$ 中的任意态射 $X \xrightarrow{f} Y$，我们将 $\Phi(X,Y)$ 记作 $\mathcal{A}$ 中的元素；该元素在同构意义下唯一，并满足 $X \to \Phi(X,Y) \to Y$是 f 的无环余纤维化后接纤维化分解。此外，我们将 $\Psi(X,Y)$ 记作 $\mathcal{A}$ 中的元素；该元素在同构意义下唯一，并满足 $X \to \Psi(X,Y) \to Y$ 是 f 的余纤维化后接无环纤维化分解。

命题 2.8。 设 $\mathcal{A}$ 是一个配备模型结构的预序。

- 设 $\mathcal{A}$ 具有一个始对象0。那么，对于 $\mathcal{A}$ 的每个余纤维对象 X 以及 $\mathcal{A}$ 中的每个态射 $f\colon\ X \to Y$，对象 $\Psi(X,Y)$ 同构于 $\Psi(0,\ Y)$。此外， $\Psi(0,\ 0)$ 是始对象。

- 对偶地，假设 $\mathcal{A}$ 有一个终对象 1。那么，对于 $\mathcal{A}$ 中的每个纤维对象 Y以及 $\mathcal{A}$ 中的每个态射 $f\colon X \to Y$，对象 $\Phi(X,Y)$ 同构于 $\Phi(X,1)$。此外， $\Phi(1,1)$ 是终对象。

对象 $\Psi(0, X)$ 是 X的余纤维化替换，而 $\Phi(X, 1)$ 是 X的纤维化替换。根据命题 2.1，余纤维化替换是函子，并且在同构意义下良定义；纤维化替换也同样如此。命题 2.9 进一步表明，余纤维化替换和纤维化替换不仅是函子，而且实际上是（余）单子：

命题 2.9。设 $\mathcal{A}$ 是一个模型预序，即一个具有始对象和终对象，并配备了模型结构的预序。那么， $\mathcal{A}$ 上的纤维替换函子 $F: \mathcal{A} \to \mathcal{A}$具有单子结构；其单子结构的任意两种选择 F 彼此同构；并且 F 上的任意单子结构都是幂等的。

推论 2.10。设 $\mathcal{A}$ 是一个模型预序。 $\mathcal{A}$ 中的对象 X 是纤维对象，当且仅当纤维替换单子的单位映射 $\eta(X): X \to FX$ 是同构。

命题 2.11。设 $\mathcal{A}$ 是一个模型预序，且设 $\mathcal{A}$中的 $f: X \to Y$是一个态射。

(1) 如果 Y 是纤维对象，那么 $f: X \to Y$ 是纤维化，当且仅当 X 是纤维对象。*(2)* 如果 X 和 Y 都是双纤维对象（也就是说，既余纤维又纤维），那么 f是弱等价，当且仅当 f 是同构。

命题 2.9 和 2.11 以及推论 2.10 的结论如下（当然，它们的对偶命题也成立）：给定一个模型预序 $\mathcal{A}$，可得到：

- 一个幂等单子 F（纤维化替换），定义在 $\mathcal{A}$ 上，且在同构意义下唯一。
- 因此可得到一个反射的、对同构封闭的[10] 子范畴 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A})$，它由 $\mathcal{A}$纤维对象组成。
- 对偶地，可得到一个幂等余单子 C（余纤维化替换），定义在 $\mathcal{A}$上，且在同构意义下也唯一；因此还可得到一个余反射的、对同构封闭的子范畴 $\mathrm{Cof}(\mathcal{A})$，它由 $\mathcal{A}$ 余纤维对象组成。
- 给定模型结构的同伦范畴恰好是 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) \cap \mathrm{Cof}(\mathcal{A}) \subseteq \mathcal{A}$的交集。

3. Which pairs of (co)reflective subcategories arise from model preorders?

在上一小节中，我们解释了模型预序 $\mathcal{A}$ 如何产生一对 $(\mathrm{Fib}(\mathcal{A}), \mathrm{Cof}(\mathcal{A}))$，其中 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的反射子范畴，而 $\mathrm{Cof}(\mathcal{A})$ 是 $\mathcal{A}$ 的余反射子范畴。本节中，我们研究能否反向进行：也就是说，给定一个具有始对象和终对象的预序 $\mathcal{A}$ 、 $\mathcal{A}$ 的反射子范畴 Fib，以及 $\mathcal{A}$ 的余反射子范畴 Cof，能否在 $\mathcal{A}$ 上找到一个模型结构，使得 $\mathrm{Fib}(\mathcal{A}) = \mathrm{Fib}$ 且 $\mathrm{Cof}(\mathcal{A}) = \mathrm{Cof}$。在定理 3.20 中，我们证明，当且仅当 Fib，Cof 满足两个简单条件，使它们构成一个“相容对”（定义 3.8）时，答案才是“是”。

[10]“对同构封闭”意为“在同构下封闭”。

3.1. **相容对**。我们引入“相容对”这一概念。本小节中的结果确立了相容对的一些基本性质，证明起来相当直接，因此省略证明。

命题 3.1. 设 $\mathcal{A}$ 是一个模型预序。则以下条件均成立：

(1) 设 F、C 分别是 $\mathcal{A}$ 上的纤维替换函子和余纤维化替换函子。那么 F 和 C 在同构意义下可交换。*(2)* 若 X、Y 是 $\mathcal{A}$ 的对象，且满足 $CX \leq FY$，则 $CX \leq FCY$ 和 $CFX \leq FY$。*(3)* 若 X、Y 是 $\mathcal{A}$ 的对象，且满足 $X \leq CY$ 和 $FX \leq Y$，则 $FX \leq CY$。

注 3.2. 若给定一个预序 $\mathcal{A}$，并且我们给定的不是$\mathcal{A}$上的模型结构，而是 $\mathcal{A}$ 上的幂等单子 F 和$\mathcal{A}$上的幂等余单子 C，那么命题 3.1 中的条件之间有如下蕴含关系：条件 2 和 3 联合蕴含条件 1，而条件 1 蕴含条件 2。

命题 3.3。设 $\mathcal{A}$ 是一个模型预序，并设 $f\colon\ V \to W$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射。则以下条件等价：
(1) f 是弱等价。*(2)* $CFf\colon\ CFV \to CFW$ 是同构。*(3)* $FCf\colon\ FCV \to FCW$ 是同构。

命题 3.4。设 $\mathcal{A}$ 是一个具有始对象和终对象、并赋有模型结构的预序，且设 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射。那么，在以下条件中，第一个条件蕴含后两个条件，而后两个条件等价：

(1) f 是无圈纤维化。*(2)* 余单位映射 $\epsilon(Y)\colon\ CY \to Y$ 可分解为先经过无圈纤维化 $CY \to X$，再经过 f。*(3)* Cf 是同构。

在命题 3.5 中以及本小节余下部分，我们继续用 F 表示纤维替换单子，用 C 表示模型预序上的余纤维替换余单子。

命题 3.5。设 $\mathcal{A}$ 为一个模型预序。当且仅当对于 $\mathcal{A}$中的每个映射 f，若 Cf 是同构，则映射 f 是无圈纤维化，$\mathcal{A}$ 具有可截分无圈纤维化。换言之：当且仅当命题 *3.4* 中的三个条件在 $\mathcal{A}$中彼此等价时，$\mathcal{A}$ 具有可截分无圈纤维化。

对偶地，当且仅当对于 $\mathcal{A}$中的每个映射 f，若 Ff 是同构，则映射 f 是无圈余纤维化，$\mathcal{A}$ 具有可缩回无圈余纤维化。

定义 3.6。如果一个模型结构的无圈纤维化是可截分的，且其无圈余纤维化是可缩回的，则该模型结构是强 的。

命题 3.7。设 $\mathcal{A}$ 为一个强模型预序。如果 $f\colon\ X \to Y$ 被 C 逆化，并且也被 F逆化，则 f 是同构。

定义 3.8. 设 $\mathcal{A}$ 是一个预序。我们称 $\mathcal{A}$ 上的一个单子 F 和一个余单子 C 为相容对，如果它们满足命题 *3.1* 中的第一和第三个条件（等价地，满足所有条件）。也就是说：

- F 与 C 在同构意义下可交换，并且
- 若 X、Y是 $\mathcal{A}$中的对象，且 $X \leq CY$和 $FX \leq Y$，则 $FX \leq CY$。

我们称相容对 F、C 为强相容对，如果它满足以下条件：

- 若 $f\colon X \to Y$ 是 $\mathcal{A}$ 中的一个态射，且被 C 和 F逆转，则 f 是一个同构。

命题 3.9. 给定一个模型预序 $\mathcal{A}$，令 F 为 $\mathcal{A}$上的纤维替换单子，令 C 为 $\mathcal{A}$上的余纤维替换余单子，如命题 *2.9* 所述。则$(F$、$C)$ 是一个相容对。如果 $\mathcal{A}$ 上的模型结构是强的，则$(F$、$C)$ 是一个强相容对。

3.2. **由相容对产生的 Droz-Zakharevich 和 Stanculescu 模型结构**。 给定双完备预序 $\mathcal{A}$上的一个相容对 (F, C)，我们旨在构造 $\mathcal{A}$ 上的一个模型结构，使得 F 是纤维替换单子，而 C 是余纤维替换余单子。我们将分步进行：首先考察文献中已有的两种构造——一种由 Droz–Zakharevich [15], 提出，另一种由 Stanculescu [35]提出——它们都是这种 $\mathcal{A}$上模型结构的自然候选。我们将看到，只要 (F, C)是强相容的，这两种模型结构都能满足要求。然而，对于一般的相容对（不一定是强相容对）(F, C)，Droz-Zakharevich（DZ）和 Stanculescu 模型结构的弱等价都恰当，但余纤维化过多。在下一小节中，我们将修改 Stanculescu 模型结构，缩小余纤维化类，从而在 $\mathcal{A}$上构造一个恰好符合所需类型的新模型结构。

首先，我们考虑 DZ 模型结构。Droz 和 Zakharevich 在 [15], 中提供了一种方法（下文的命题 3.14），通过使用“可分解类”和“中心”，构造具有固定弱等价类的模型结构。以下是 [15]中的相关定义：

定义 3.10 ([15])。设 $\mathcal{A}$是一个预序。

- 若 $\mathcal{A}$ 的子范畴 $\mathcal{E}$ 满足以下条件，则称其为可分解的[11] ：对于任意态射 $f \in \mathcal{E}$，若存在某些态射 g 和 h使得 $f = hg$，则 g 和 h 都属于 $\mathcal{E}$。换言之，子范畴 $\mathcal{E}$ 可分解，当且仅当它既可切割又可缩回（定义 *2.3*）。
- 给定 $\mathcal{A}$的一个可分解子范畴 $\mathcal{W}$，与其相关联的中心 $\mathcal{W}$ 是一个函子

$$\chi\colon \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{A}$$

它满足以下性质：
C1: $\chi|_{\mathcal{W}}$ 的像中只包含同构。
C2: 对于所有 $A \in \mathcal{A}$，该图

$$\begin{array}{ccc} A \times \chi(A) & \longrightarrow & \chi(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \cup \chi(A) \end{array}$$

[11]可分解子范畴的一个典型例子是模型预序中的所有弱等价所构成的类。根据命题 2.4，还可得到另一类例子：给定一个配备了分解系统（$\mathcal{L}$，$\mathcal{R}$）的预序，左类 $\mathcal{L}$ 是可缩回的，当且仅当它是可分解的。同样，右类 $\mathcal{R}$ 是可切割的，当且仅当它是可分解的。

都位于 $\mathcal{W}$中。

定义 3.11. 设 $\mathcal{A}$ 是一个具有始对象和终对象的预序。给定 $\mathcal{A}$上的一个相容对 (F, C)，我们采用以下术语：

- $\mathcal{A}$ 中的一个元素 X 称为 C-余纤维 （分别称为 F-纤维），如果映射 $CX \to X$ （分别为 $X \to FX$）是一个同构。
- 如果映射 $X \to Y$ 对所有余域为 C-余纤维的映射都具有右提升性质，则称其为 C-无穷小同伦映射。等价地：若对于 $\mathcal{A}$ 中满足 $CT \leq Y$ 的每个元素 T，都有 $CT \leq X$，则称 $X \to Y$ 是 C-无穷小同伦映射。
- 如果 $FCX \leq X$（分别为 $X \leq FCX$），则称 $\mathcal{A}$ 中的元素 X 为半纤维 （分别为半余纤维）。

给定偏序集 $\mathcal{A}$上的一个中心 χ，Droz–Zakharevich [15]称偏序集中的元素 X 为“半纤维”（分别为“半余纤维”），如果 $\chi(X) \leq X$ （分别为 $X \leq \chi(X)$）。我们将在命题 3.15 中证明，给定预序 $\mathcal{A}$上的一个相容对（F，C），复合 FC 是 $\mathcal{A}$上的一个中心。因此，我们使用的“半纤维”和“半余纤维”这两个术语，是 Droz–Zakharevich 用法的特例。

定义 3.12. 给定一个函子 $\mathcal{F}\colon \mathcal{A} \to \mathcal{B}$，令 $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{A}$ 中被 $\mathcal{F}$ 反转的态射类，即

$$\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \{f \in \mathrm{Mor}(\mathcal{A}) \mid Ff \textit{ is an isomorphism}\}.$$

命题 3.13. 按照定义 *3.11* 中的定义，给定 $\mathcal{A}$ 的一个元素 X，以下条件等价：

(1) X 是半纤维。*(2)* CX 是 F-纤维的。*(3)* 映射 $X \to FX$ 属于 $\mathcal{I}_C$。

证明. 若 X 是半纤维，则 $FCX \leq X$，因此 $CX \leq FCX \cong CFCX \leq CX$，也就是说，$CX$ 是 F-纤维的。反向推导以及与第三个条件的等价性则更容易。□

下面的命题是命题 3.8，出自 [15]。

命题 3.14. 给定有限双完备预序 $\mathcal{A}$ 的一个可分解子范畴 $\mathcal{W}$，以及一个与 $\mathcal{W}$ 相关联的中心 χ，则在 $\mathcal{A}$ 上存在一个模型结构，其弱等价类恰为 $\mathcal{W}$，且其无圈纤维化是那些相对于所有陪域为半余纤维的映射都具有右提升性质的映射。

给定命题 3.14 中的 $\mathcal{A}$、$\mathcal{W}$、χ，我们将命题 3.14 给出的模型结构称为*DZ* 模型结构。很容易看出，在 $\mathcal{A}$上也存在一种具有相同弱等价的“对偶 DZ 模型结构”，但其无圈余纤维化是指对所有定义域为半纤维的映射都具有左提升性质的映射。然而，正如 Droz 和 Zakhrevich 所指出的，他们的构造并非自对偶：对偶 DZ 模型结构中的余纤维化通常与 DZ 模型结构中的余纤维化并不一致，纤维化也是如此。

命题 3.15。 给定有限双完备预序$\mathcal{A}$上的一个相容对(F, C)，复合函子 $FC\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$是与 $\mathcal{I}_{FC}$相关联的中心。因此，在 $\mathcal{A}$ 上存在一个 *DZ* 模型结构，其弱等价集为 $\mathcal{I}_{FC}$，且每个半余纤维对象都是余纤维对象。

证明。从 DZ 模型结构的定义可知，若它存在，则弱等价恰为 $\mathcal{I}_{FC}$，且半余纤维对象都是余纤维对象。因此，我们的任务是证明 DZ 模型结构存在。由命题 3.3 易知 $\mathcal{W}$ 可分解，因此根据命题 3.14，我们只需证明由 $\chi(A) = FC(A)$ 定义的函子 $\chi\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是与 $\mathcal{W} = \mathcal{I}_{FC}$相关联的中心。

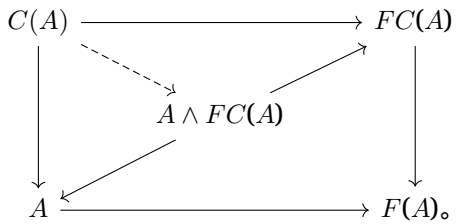
定义 3.10 中的条件 C1 由 χ 满足，这仅仅是因为 $\mathcal{W}$ 的定义方式如此。现在我们只需证明，对于任意对象 $A \in \mathcal{A}$，图表

$$\begin{array}{ccc} A \times FC(A) & \longrightarrow & FC(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ A & \longrightarrow & A \cup FC(A) \end{array}$$

属于 $\mathcal{W}$，也就是说，图表

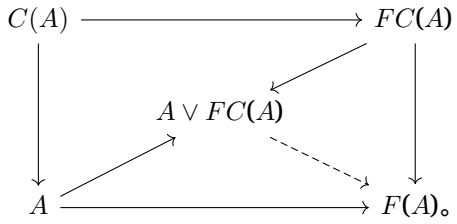
$$\begin{array}{ccc} FC(A \wedge FC(A)) & \longrightarrow & FC(A) \\ \downarrow & & \downarrow \\ FC(A) & \longrightarrow & FC(A \vee FC(A)) \end{array} \tag{3}$$

其中所有映射都必须是同构。为此，考虑定义 3.8 第二条公理的特殊情形，其中 X 是 CA，而 Y 是 $F(A \wedge FC(A))$。$\mathcal{A}$ 中积（即下确界）的泛性质给出了图表中的虚线箭头



因此，$C(A) \leq A \wedge FC(A) \leq F(A \wedge FC(A))$。因此，$C(A) \cong CC(A) \leq CF(A \wedge FC(A))$，即 $X \leq CY$。将函子 F 应用于映射 $CA \to A \wedge FC(A)$，得到 $FX \leq Y$。因此，根据定义 3.8 中的第一和第二条公理，我们有 $FC(A) \leq FC(A \wedge FC(A))$。由于我们处于一个预序中，图 3 中顶部的水平映射因此是一个同构。

我们现在旨在证明，(3) 中右侧的垂直映射在 $\mathcal{A}$ 中也是一个同构。根据余积（即上确界）的泛性质，我们得到一个态射，从而填补交换图中的虚线箭头



我们将 F 应用于所得的不等式

$$C(A \vee FC(A)) \leq A \vee FC(A) \leq F(A), \tag{4}$$

得到 $FC(A \vee FC(A)) \leq FF(A) \cong F(A)$。现在考虑定义 3.8 中第二条公理的情形，其中 $X = C(A \vee FC(A))$ 且 $Y = F(A)$。我们刚刚证明了 $FX \leq Y$。将 C 应用于 (4)，得到 $C(A \vee FC(A)) \cong CC(A \vee FC(A)) \leq CF(A)$，即 $X \leq CY$。因此，定义 3.8 的第一条和第二条公理使我们得到 $FC(A \vee FC(A)) \leq FC(A)$，也就是说，3 中右侧的竖直映射是一个同构。

我们已经证明，交换方块 (3) 中顶部的水平映射和右侧的竖直映射在预序 $\mathcal{A}$ 中是同构。在预序中，所有同构构成一个可分解子范畴，因此 (3) 中的所有映射都是同构，正如所希望的那样。

□

给定预序 $\mathcal{A}$ 上的相容对（F，C），命题 3.13 断言每个 C-余纤维对象都是半余纤维的。如果（F，C）不是强相容对，那么可能并非每个半余纤维对象都是 C-余纤维对象。例如，在二元集合的幂集上，23 个模型结构中恰有三个——即 (1) 中的 (4，4)、(6，6) 和 (8，8)——至少有一个半余纤维对象不是 C-余纤维对象[12]。因此，DZ 模型结构并不能解决我们的问题：其余纤维对象并不恰好是 C-余纤维对象。

接下来我们考虑 [35] 中定义的 Stanculescu 模型结构：

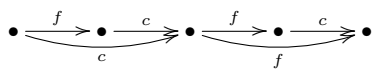
定义 3.16。给定双完备预序 $\mathcal{A}$ 上的相容对（F，C），Stanculescu 模型结构是 $\mathcal{A}$ 上按如下方式定义的模型结构：

- 弱等价的集合是被 FC 反转的态射集合 $\mathcal{I}_{FC}$。
- 无圈余纤维化的集合是 $\mathcal{I}_F$。
- 因此，纤维化的集合是具有相对于 $\mathcal{I}_F$ 的右提升性质的映射集合 $\mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F)$。
- 因此，余纤维化的集合是具有相对于 $\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F)$ 的左提升性质的映射集合 $\mathrm{Proj}(\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F))$。

Stanculescu 的构造更为一般，适用于双完备范畴，而不仅仅是预序。

Stanculescu 表明，Stanculescu 模型结构中的纤维对象恰好是 F-纤维对象。事实上，这正是 Stanculescu 的动机：这也解释了为什么 Stanculescu 关于该模型结构的论文标题是 [35], “构造具有指定纤维对象的模型范畴”。Stanculescu 模型结构的这一性质对我们而言显然是向前迈进了一步，因为我们正试图在 $\mathcal{A}$ 上构造一种模型结构，使其中的纤维对象是 F-纤维对象，同时余纤维对象是 C-余纤维对象。很容易证明，如果 $\mathcal{A}$ 上存在这样的模型结构，那么它的弱等价必定是 $\mathcal{I}_{FC}$。因此

[12]从对（1）的考察可以看出，在 $P(\{a, b\})$ 上的每个模型结构中，要么所有半余纤维对象都是余纤维对象，要么所有半纤维对象都是纤维对象，要么两者皆是。存在 *both* 非纤维的半纤维对象和非余纤维的半余纤维对象的模型预序，其最小例子是全序（含 5 个元素）上的以下模型结构：



其中所有映射都是弱等价，标记为 c 和 f 的映射分别是余纤维化和纤维化，而未画出的映射既不是余纤维化，也不是纤维化。

DZ 模型结构正确地确定了弱等价，而 Stanculescu 模型结构则正确地确定了弱等价和纤维对象。

然而，Stanculescu 模型结构仍然具有太多余纤维对象，无法解决我们的问题：

命题 3.17。 在$\mathcal{A}$ 上的 *Stanculescu* 模型结构中，余纤维元素恰好是半余纤维元素。

证明。 考虑一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ X & \longrightarrow & T \end{array}$$

其中 X 为半余纤维，且 f 为 Stanculescu 无圈纤维化，即 $f \in \mathcal{I}_{FC} \cap$Inj($\mathcal{I}_F$)。由于 $CS \to CT$属于 $\mathcal{I}_F$，它可以沿着 $S \to T$进行提升，即 $CT \leq S$。现在我们有$CX \leq CT \leq S$，因此得到一个交换方块

$$\begin{array}{ccc} CX & \longrightarrow & S \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & T \end{array} \tag{5}$$

其右侧的垂直映射属于 Inj($\mathcal{I}_F$)。由于 X 是半余纤维，根据命题 3.13 的对偶命题，左侧的垂直映射属于 $\mathcal{I}_F$。因此，提升问题 (5) 可解，即 $X \leq S$，从而原提升问题也得到解决。因此， $\mathcal{A}$ 中的每个半余纤维元素也是 Stanculescu 余纤维对象。

反过来：对于 $\mathcal{A}$ 中的任意元素 X ，容易验证 $FCX \to X$ 属于 Inj($\mathcal{I}_F$)，也属于 $\mathcal{I}_{FC}$，因此也属于 $\mathcal{I}_{FC} \cap$Inj($\mathcal{I}_F$)，即它是一个 Stanculescu 无圈纤维化。因此，如果 X 是 Stanculescu 余纤维对象，那么这个提升问题

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & FCX \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & FX \end{array}$$

有解，即 X 是半余纤维。 □

在定义 3.16 之前的讨论中，我们注意到，对于不强相容的相容对， C-余纤维对象可能与半余纤维对象不一致。因此，命题 3.17 表明，Stanculescu 模型结构并非我们所期望的模型结构；在该模型结构中，余纤维对象是 C-余纤维对象，而纤维对象是 F-纤维对象。

3.3. **具有指定纤维对象和余纤维对象的模型结构**。理想情况下，我们希望在 $\mathcal{A}$ 上有一个模型结构，它与 Stanculescu 模型结构具有相同的弱等价，并且其余纤维化是那些不属于 $0 \to X$ （其中 X 非 C-余纤维）的 Stanculescu 余纤维化。换句话说，我们希望简单地从 Stanculescu 模型结构中移除不需要的余纤维化，从而得到某个其他模型结构的余纤维化集合，同时不改变弱等价，也不改变纤维对象，使得所得模型结构中的余纤维对象恰好是

C-余纤维对象。当然，我们并不指望事情能如此简单，因为从某个映射类中移除映射通常根本不是一个性质良好的操作。

令人惊讶的是，这个天真的想法竟然完全行得通，正如所述。令 $\mathcal{Z}$ 表示映射类

$$\mathcal{Z} = \left\{ X \xrightarrow{f} Y \in \mathrm{Proj}\left(\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F)\right) : X \ncong 0, \text{ or } Y \text{ is } C\text{-cofibrant} \right\}.$$

回想一下，给定一个余完备范畴 $\mathcal{A}$，如果态射类 $\mathcal{M}$ 在 $\mathcal{B}$ 中对收缩、复合及超限复合封闭，包含所有同构，并且在推出下稳定，则称其为**余纤维闭** $\mathcal{M}$。对于 $\mathcal{A}$ 上的任意弱分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$，其左类 $\mathcal{L}$ 是余纤维闭的。

如果存在 $\mathcal{A}$ 的一个态射集合 I，使得 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{M}$ 中包含 I的最小余纤维闭态射类，那么余纤维闭态射类 $\mathcal{M}$ 称为**余纤维生成的**。给定局部可呈范畴 $\mathcal{A}$中的余纤维生成类 $\mathcal{M}$，Quillen 小对象论证 [30] 会在 $\mathcal{A}$上构造一个弱分解系统，其左类恰为 $\mathcal{M}$。简要介绍可参见 [1, 第 3] 节；相关结果的直接表述见 [32, 定理 1.]；关于这些思想的完整论述则见 [20] 。

当范畴 $\mathcal{A}$ 是预序时，$\mathcal{A}$ 的小性确保 $\mathcal{A}$ 局部可呈现，并且每个余纤维闭态射类在 $\mathcal{A}$ 中都是余纤维生成的。关键在于，如果我们能证明 $\mathcal{Z}$ 余纤维闭，那么 $\mathcal{Z}$ 就是双完备预序 $\mathcal{A}$ 上某个分解系统的左类，因此 $\mathcal{Z}$ 很可能是 $\mathcal{A}$ 上某个模型结构的余纤维化类。不过，验证 $\mathcal{Z}$ 确实是余纤维闭态射类是初等的：这相当于验证 $\mathrm{Proj}\left(\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F)\right)$ 是余纤维闭态射类（我们知道这一点，因为它是 Stanculescu 模型结构中的余纤维化类），并验证 $\mathcal{C}$ 中 C-余纤维对象构成的类在收缩、推出和序数指标余极限下封闭（前者自动成立，因为 $\mathcal{A}$ 是预序；后两者均成立，因为余反射子范畴在余极限下封闭）。这将是定理 3.19 中在 $\mathcal{A}$ 上构造所需模型结构的关键。我们首先需要一个引理：

引理 3.18. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限完备预序，且 $G : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 是一个函子。设 $\mathcal{M}$ 是 $\mathcal{A}$ 中一个对拉回稳定的态射集合。那么 $\mathcal{I}_G \cap \mathrm{Proj}(\mathcal{I}_G \cap \mathcal{M}) \subseteq \mathrm{Proj}(\mathcal{M})$。

证明。 假设给定一个提升问题

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & S \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \longrightarrow & T \end{array}$$

其中 f 属于 $\mathcal{I}_G \cap \mathrm{Proj}(\mathcal{I}_G \cap \mathcal{M})$，且有 $g \in \mathcal{M}$。由于 $\mathcal{M}$ 在拉回下稳定，映射 $Y \times_T S \to Y$ 属于 $\mathcal{M}$。根据拉回的泛性质，我们有$X \leq Y \times_T S \leq Y$，因此，$GX \to GY$ 是同构这一事实意味着$G(Y \times_T S) \to GY$ 也是同构。因此，提升问题

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \times_T S \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \longrightarrow & T \end{array}$$

可解，即 $Y \leq Y \times_T S$。由于 $Y \times_T S \leq S$ 也成立，原提升问题也得到了解决。□

定理 3.19。 给定双完备预序 $\mathcal{A}$ 上的一个相容对 (F, C) ，在 $\mathcal{A}$ 上存在一个模型结构，其弱等价集为 $\mathcal{I}_{FC}$，余纤维化集为 $\mathcal{Z}$。在该模型结构中， F 是纤维替换单子，而 C 是余纤维替换余单子。

证明。 在所声称存在的模型结构中，无圈余纤维化必为$\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$，因此纤维化必为 Inj($\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$)，进而无圈纤维化必同时等于 Inj($\mathcal{Z}$) （从而恰为对余纤维化具有右提升性质的映射）和 $\mathcal{I}_{FC} \cap$ Inj($\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$)（从而是同时为无圈映射的纤维化）。如果我们能证明等式

$$\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}) = \mathrm{Inj}(\mathcal{Z}), \tag{6}$$

那么该模型结构就存在： $\mathcal{I}_{FC}$ 具有三取二性质，因为它是可分解的；相关的分解系统由小对象论证保证存在，并且 $\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$ 是 $\mathcal{A}$中的余纤维闭类。

我们如下验证等式 (6)。一个方向很容易：包含关系$\mathcal{I}_{FC} \cap$Inj($\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$) $\subseteq$Inj($\mathcal{Z}$)显然可由引理 3.18（的对偶）推出，因为 $\mathcal{Z}$ 在推出下稳定，而这是因为它是一个余纤维闭类。

对于反方向的包含关系：由于 $\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC} \subseteq \mathcal{Z}$，我们有 Inj($\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$) $\supseteq$Inj($\mathcal{Z}$)。我们仍需知道 Inj($\mathcal{Z}$) 也属于 $\mathcal{I}_{FC}$。为此，我们如下论证：给定一个态射 f ： $X \to Y$ ，且它属于 Inj($\mathcal{Z}$)，利用 Stanculescu 模型结构，将 f 分解为一个 Stanculescu 余纤维化 $X \to Y$ ，后接一个 Stanculescu 无圈纤维化 $Y \to Y$。由于 $Y \to Y$属于 $\mathcal{I}_{FC}$，我们只需证明 $X \to Y$ 也属于 $\mathcal{I}_{FC}$。由命题 2.4，映射 $X \to Y$ 属于 Inj($\mathcal{Z}$)。有两种可能：要么 $X \to Y$ 属于 $\mathcal{Z}$，要么不属于。

若 $X \to Y$ 属于 $\mathcal{Z}$： 那么它既属于 $\mathcal{Z}$ ，也属于 Inj($\mathcal{Z}$)，因此它是一个同构；于是 $X \to Y$ 属于 $\mathcal{I}_{FC}$，正如所期望的那样。

若 $X \to Y$ 是不属于 $\mathcal{Z}$： 那么，由于 $X \to Y$ 是一个 Stanculescu 余纤维化，我们有 $X \cong 0$ ，并且 Y 是半余纤维的，但不是 C-余纤维的。另一方面，映射 $0 \to CY$属于 $\mathcal{Z}$，因此提升问题

$$\begin{tikzcd} 0 \arrow[r] \arrow[d] & X \arrow[d] \\ C\tilde{Y} \arrow[r] & \tilde{Y} \end{tikzcd}$$

可解，即 $CY \leq X$。因此 $CX \leq CY \cong CCY \leq CX$，也就是说， $X \to Y$ 属于 $\mathcal{I}_C \subseteq \mathcal{I}_{FC}$。所以 $X \to Y$ 是两个属于 $\mathcal{I}_{FC}$的映射的复合，因此它属于 $\mathcal{I}_{FC}$，正如所期望的那样。

我们得出结论，Inj($\mathcal{Z} \cap \mathcal{I}_{FC}$) $\subseteq$Inj($\mathcal{Z}$)，因此 (6) 两边确实相等。

因此，模型结构存在。现在我们必须验证其余纤维对象和纤维对象是否如所述。从 $\mathcal{Z}$的定义可清楚看出，我们的模型结构中的余纤维对象恰好是 $\mathcal{A}$ 中那些 C-余纤维且在 $\mathcal{A}$上的 Stanculescu 模型结构中也余纤维的成员。根据命题 3.17，Stanculescu 余纤维对象恰好是半余纤维对象；而根据（对偶的）

命题 3.13，每个 C-余纤维对象都是半余纤维对象。因此，我们的模型结构中的余纤维对象就是 C-余纤维对象。

至于我们模型结构中的纤维对象：与 Stanculescu 的模型结构相比，我们的模型结构具有相同的弱等价，且余纤维化不会更多，因此每个 Stanculescu 纤维对象都必定是我们模型结构中的纤维对象。按照设计，Stanculescu 纤维对象恰好就是 F-纤维对象。因此，每个 F-纤维对象都是我们模型结构中的纤维对象。

我们还必须证明反向结论。我们通过逆否命题进行论证：假设$Y \in \mathcal{A}$ 是我们模型结构中的纤维对象，但不是 F-纤维对象。那么，必定存在某个 Stanculescu 无圈余纤维化无法对 $Y \to 1$ 提升。定义域非初始对象的 Stanculescu 无圈余纤维化也都是我们模型结构中的无圈余纤维化，因此唯一的可能是存在一个无解的提升问题

(7)
$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

其中 $0 \to X$ 是 Stanculescu 无圈余纤维化，即 $\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Proj}(\mathcal{I}_{FC} \cap \mathrm{Inj}(\mathcal{I}_F))$ 中的一个态射，且 X 不是 C-余纤维的，而 $Y \to 1$ 是我们模型结构中的一个纤维化。由命题 3.17，X 是半余纤维的，因此有 $X \leq CFX$。由于$0 \to X$和 $X \to CFX$均属于 $\mathcal{I}_{FC}$，映射 $0 \to CFX$ 是我们模型结构中的无圈余纤维化，因此该提升问题

$$\begin{array}{ccc} 0 & \longrightarrow & Y \\ \downarrow & & \downarrow \\ CFX & \longrightarrow & 1 \end{array}$$

有解，即 $CFX \leq Y$。现在我们有 $X \leq CFX \leq Y$，也就是说，提升问题（7）毕竟有解。因此，Stanculescu 的纤维对象在我们的模型结构中都是纤维对象。因此，我们模型结构中的纤维对象恰好是F-纤维对象，正如所期望的那样。□

定理 3.20. 设 $\mathcal{A}$是一个双完备预序。设 C 是 $\mathcal{A}$上的一个幂等余单子，并设 F 是 $\mathcal{A}$ 上的一个幂等单子。那么以下条件等价：

- 存在 $\mathcal{A}$ 上的一个模型结构，其余纤维替换余单子自然同构于 C，且其纤维替换单子自然同构于 F。
- 这对(F, C) 是一个相容对。

证明。 一个方向的蕴含由命题 3.9 给出，另一个方向则由定理 3.19 给出。□

双完备预序上的模型结构通常并不与相容对一一对应。定理 3.20 证明，前一类对象满射到后一类对象。这个满射不一定是单射。下一小节中，我们将表明，如果把范围限制在某个自然的模型结构类（强模型结构）和某个自然的相容对类上，我们就能得到一一对应。

3.4. **正交对**。 接下来，我们要定义正交对。结果将表明（推论 3.25），定义 3.8 中定义的强相容性实际上等价于正交性。

定义 3.21。 如果一个相容对 (F, C) 满足正交条件，是指对于任何形如以下形式的提升问题

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ \downarrow{\scriptstyle f} & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ Y & \longrightarrow & B \end{array} \tag{8}$$

对于 $f \in \mathcal{I}_F$ 以及对于 $g \in \mathcal{I}_C$，都存在一个解（等价地说，存在唯一解）。满足正交条件的相容对将称为正交对。

我们的下一项任务是证明定理 3.24，该定理确立了有限双完备预序 $\mathcal{A}$ 上的正交对（F，C）与 $\mathcal{A}$上的强模型结构之间的一一对应关系。为此，我们需要一些预备结果。其中一个结果是命题 3.22，它表明，给定有限完备预序 $\mathcal{A}$上的幂等单子 F，可以在 $\mathcal{A}$ 上构造一个分解系统，其左类恰好是被该单子反演的态射集合 $\mathcal{I}_F$。这大致是 Cassidy、H´ebert 和 Kelly 的一个古老定理 [12, 推论 3.4] 的特例；不过，Cassidy–H´ebert–Kelly 定理适用于更一般的范畴，而不仅仅是预序；然而，该定理的假设包括对环境范畴的某个集合论假设，即该范畴必须是“有限良完备”的。这意味着该范畴必须有限完备，并且必须存在所有强单态射的交。

在本文中，我们只需要 Cassidy–H´ebert– Kelly 定理的一个适用于预序（而非一般范畴）的版本。在这一一般性层次下，范畴有限良完备这一假设并非必要：只需假设预序有限完备即可。我们的论断如下：

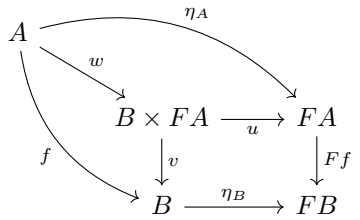
命题 3.22。 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限完备预序。设 $\mathcal{B}$ 是 $\mathcal{A}$的一个对同构封闭反射子范畴。记 $F\colon \mathcal{A} \to \mathcal{A}$ 为反射函子$\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 与包含函子 $\mathcal{B} \to \mathcal{A}$的复合。则 $\mathcal{A}$ 上存在一个分解系统$(\mathcal{L}, \mathcal{R})$，使得 $\mathcal{L} = \mathcal{I}_F$。

我们给出命题 3.22 的一个自成一体的证明，以说明预序有限完备这一假设已足够。不过，我们并不声称这一结果是新的：同一结果以更一般的形式也曾作为命题 1.6 出现在[1]中。

证明。 令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{A}$ 中相对于 $\mathcal{B}$ 中每个态射都具有左提升性质的态射类。容易验证，类 $\mathcal{L}$ 与类 $\mathcal{I}_F$ 相同。令 $\mathcal{R} =$ = Inj($\mathcal{L}$)。

我们必须证明，每个态射 $f\colon X \to Y$ in $\mathcal{A}$ 都可分解为一个属于$\mathcal{L}$ 的态射，后接一个属于 $\mathcal{R}$的态射。为此，考虑下面的交换图

(9)



其中显然的方块是一个拉回方块。我们声称， f 所需的分解就是沿着（9）左侧的分解 $f = v \circ w$ 。由于 $F(f) \in \mathcal{R}$, v是一个属于 $\mathcal{R}$的态射的拉回，因此也属于 $\mathcal{R}$。由于 $A \leq B \times FA \leq FA$，我们有 $FA \cong F(B \times FA)$，即 w属于 $\mathcal{I}_F = \mathcal{L}$，这正是所需的。□

我们并不声称下一个结果是新的。它与 Cassidy–H´ebert–Kelly [12]. 中的推论 3.4 相同，只是我们的假设有所不同。我们假设范畴$\mathcal{A}$ 在 [12, 推论 3.4] 中是有限良完备范畴，即具有所有强单态射之交的有限完备范畴。由于我们额外假设 $\mathcal{A}$ 是一个预序，因此可以将有限良完备性这一假设弱化为有限完备性。

思路如下。设 $\mathcal{A}$ 是一个有限完备预序，令 $RFS(\mathcal{A})$为 $\mathcal{A}$上可缩回分解系统的同构类集合，令 $RRS(\mathcal{A})$为 $\mathcal{A}$的对同构封闭的反射子范畴集合。众所周知，后者与 $\mathcal{A}$ 上的幂等单子集合自然双射（即使 $\mathcal{A}$ 是一般范畴，不一定是预序）。我们断言， $RRS(\mathcal{A})$与 $RFS(\mathcal{A})$也彼此双射。

具体的双射如下。给定 $\mathcal{A}$ 上的一个分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$，若元素 $X \in \mathcal{A}$ $\mathcal{R}$ 满足映射 $X \to 1$ 属于 $\mathcal{R}$，则称其为 $X \in \mathcal{A}$ $\mathcal{R}$-纤维化的 。现在令 $\xi : RFS(\mathcal{A}) \to RRS(\mathcal{A})$ 为这样一个函数：它将可缩回分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ 映射到由 $\mathcal{R}$-纤维化元素组成的 $\mathcal{A}$ 子集。反过来，令$\zeta : RRS(\mathcal{A}) \to RFS(\mathcal{A})$ 为这样一个函数：它将 $\mathcal{A}$ 的反射子范畴 $\mathcal{B}$ 映射到命题 3.22 中构造的分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$，也就是说，$\mathcal{L}$ 是 $\mathcal{A}$ 中被反射函子 $\mathcal{A} \to \mathcal{B}$ 反转的态射集合。对 $\mathcal{L}$ 的这一刻画也清楚地表明，态射类 $\mathcal{L}$ 是可缩回的，即分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ 是可缩回的，正如所声称的那样。

容易验证，函数 ζ 和 ξ 互为逆函数，由此得到以下结果：

定理 3.23。 对于任意有限双完备预序 $\mathcal{A}$，函数$\zeta : RRS(\mathcal{A}) \to RFS(\mathcal{A})$ 和 $\xi : RFS(\mathcal{A}) \to RRS(\mathcal{A})$ 互为逆函数。因此， $\mathcal{A}$ 上的幂等单子与 $\mathcal{A}$上的可缩回分解系统一一对应。

回顾一下，在定义 3.6 中，我们将一种强 模型结构定义为：其无圈纤维化是可切割的，且其无圈余纤维化是可缩回的。等价地说：当且仅当一个模型结构的无圈纤维化和无圈余纤维化是可分解的（定义 3.10）时，该模型结构才是强的。

定理 3.24. 设 $\mathcal{A}$ 是一个有限双完备预序，且 $(F、C)$ 是 $\mathcal{A}$ 上的一对正交类。那么存在 $\mathcal{A}$ 上的一个强模型结构，其无圈纤维化恰好是被 F 反转的态射，而其无圈余纤维化

恰好是被 C 反转的态射。该模型结构的纤维替换单子和余纤维替换余单子分别为 F 和 C。

此外， $\mathcal{A}$上的每个强模型结构都由此构造得到。因此， $\mathcal{A}$上的强模型结构与 $\mathcal{A}$上的正交对的同构类之间存在一一对应。

证明。 对幂等单子 F 应用定理 3.22，得到 $\mathcal{A}$上的分解系统（$\mathcal{L}_F$， $\mathcal{R}_F$）。再应用一次定理 3.22（其对偶形式），对幂等余单子 C得到 $\mathcal{A}$上的分解系统（$\mathcal{L}_C$， $\mathcal{R}_C$）。

我们如下定义 $\mathcal{A}$ 上的模型结构:

- 无圈余纤维化为 $\mathcal{L}_F$，即 $\mathcal{I}_F$。
- 因此，纤维化必须为 $\mathcal{R}_F$，即 Inj($\mathcal{I}_F$)。
- 无圈纤维化将是 $\mathcal{R}_C$，即 $\mathcal{I}_C$。
- 因此，余纤维化必定是 $\mathcal{L}_C$，即 Proj($\mathcal{I}_C$)。
- 因此，弱等价必定恰好是那些可分解为先取 $\mathcal{I}_F$ 中的态射，再取 $\mathcal{I}_C$中的态射之复合的态射。我们将用 W 表示这组态射。

由于 $\mathcal{I}_F$ 和 $\mathcal{I}_C$ 都可分解，因此只要它确实是一个模型结构，它显然就是一个强模型结构。

为验证我们确实在 $\mathcal{A}$上定义了一个模型结构，我们作如下观察:

(1) 包含关系 $\mathcal{L}_F \subseteq \mathcal{L}_C$ 等价于相容对 (F， C) 满足正交条件（定义 3.21）。因此有 $\mathcal{L}_F \subseteq \mathcal{L}_C$，即每个无圈余纤维化确实都是余纤维化。这意味着 $\mathcal{R}_C \subseteq \mathcal{R}_F$，也就是说，每个无圈纤维化也都是纤维化。

(2) 我们断言 $W = \mathcal{I}_{FC}$，也就是说，弱等价恰好是被复合函子 FC 逆转的态射。包含关系 $W \subseteq \mathcal{I}_{FC}$ 显而易见。反过来，给定态射 $X \to Y \in \mathcal{I}_{FC}$，将该态射分解为映射 $X \to X' \in \mathcal{L}_F$，后接映射 $X' \to Y \in \mathcal{R}_F$。由于 $X \to Y$ 被 CF 逆转，且 $\mathcal{I}_{CF}$ 可分解，映射 $X' \to Y$ 也被 CF 逆转。因此 $CX' \to CY \in \mathcal{L}_F$，故在交换方块中存在一个提升

$$\begin{array}{ccc} CX' & \longrightarrow & X' \\ {\scriptstyle \mathcal{L}_F}\downarrow & \nearrow & \downarrow{\scriptstyle \mathcal{R}_F} \\ CY & \longrightarrow & Y. \end{array}$$

由于 $\mathcal{R}_C = \mathcal{I}_C$ 可分解，且 $CY \to Y \in \mathcal{R}_C$ 并可分解为 $CY \to X' \to Y$，映射 $X' \to Y$ 也属于 $\mathcal{R}_C$。

因此，我们已将 $X \to Y$ 分解为映射 $X \to X' \in \mathcal{L}_F$，后接映射 $X' \to Y \in \mathcal{R}_C$，即 $\mathcal{I}_{FC} \subseteq W$，正如所需。

由于 $W = \mathcal{I}_{FC}$ 是可分解的，弱等价满足二取三性质。

(3) 我们必须验证，无圈余纤维化恰好是既为弱等价又为余纤维化的映射，即 $\mathcal{L}_F = \mathcal{I}_{FC} \cap \mathcal{L}_C$。

考虑任意映射 $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{L}_C \cap \mathcal{W}$。我们可以将 f 分解为 $X \xrightarrow{g} Z \xrightarrow{h} Y$，其中 $g \in \mathcal{L}_F$ 且 $h \in \mathcal{R}_C$。根据通常的收缩论证 [22, 引理 1.1。9]， h 是一个同构，因此 $f \in \mathcal{L}_F$，正如所要求的那样。

反之，若 $X \xrightarrow{f} Y \in \mathcal{L}_F$，则 Ff是一个同构，从而 CFf是一个同构，进而 f 是一个弱等价。为验证 f 也属于 $\mathcal{L}_C$，我们必须检查：对于 $\mathcal{R}_C$ 中的每个映射 $A \to B$ （即每个被 C逆的映射 $A \to B$ ），提升问题

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & A \\ \downarrow & \nearrow & \downarrow \\ Y & \longrightarrow & B \end{array}$$

有解。这个解正是由假设（F， C）是一个正交对所保证的。

（4）等式 $\mathcal{R}_F = \mathcal{I}_{FC} \cap \mathcal{R}_C$ 可由与刚才给出的论证对偶的论证证明。

因此，确实可以为每个正交对关联一个强模型结构。反向推导更容易：给定 $\mathcal{A}$ 上的一个强模型结构，记 F为该模型结构的纤维替换单子，记 C 为余纤维替换余单子。利用模型结构具有强性的假设，可以轻松验证，无圈余纤维化的集合恰为 $\mathcal{I}_F$，而无圈纤维化的集合恰为 $\mathcal{C}$。因此，形式为（8）的每个提升问题都有解，也就是说，（F， C）是一个正交对。□

推论 3.25。 有限双完备预序上的一个相容对是正交对，当且仅当它是强相容的。

证明。考虑一个正交对 (F, C)。那么，如果 $X \xrightarrow{f} Y$ 是同时被 F 和 C逆转的映射，以下提升图有解：

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{id_X} & X \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f} \\ Y & \xrightarrow[id_Y]{} & Y \end{array}.$$

因此， f 是一个同构。由此，每个正交对都是强相容的。

反之亦然，因为根据定理 3.24，由强相容对 (F, C)诱导的模型结构的存在性保证了所有形式如 (8) 的提升问题都有解，即对 (F, C)是正交的。□

4. Strong model structures on finite Boolean algebras

4.1. 所有强模型结构都源自 Moore 集合对。在本小节中，我们回顾闭包代数、Moore 集、幂等单子以及幂集上的分解系统之间古老且广为人知的联系（后者相对不那么知名，但仍可由 [12] 推导出来）。这些思想源自那本非凡著作 [16] 的第 10 章。 [10] 也提供了一个较为现代的综述，其中还给出了一些推广。

布尔代数是一类著名的预序：从序理论的角度看，布尔代数的特征恰好是补分配格。布尔代数范畴等价于布尔环范畴 [37], ，也就是说，等价于每个元素都是幂等元的交换环。利用这一代数刻画，很容易证明每个有限布尔代数

作为偏序集，同构于某个有限集X的幂集 $\mathcal{P}(X)$。

因此，根据定理 3.24，有限布尔代数上的强模型结构与有限集的幂集上的正交对一一对应。在幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上的任意正交对 $(F,\ C)$ 中，F 将是$\mathcal{P}(X)$上的幂等单子，而 C 将是 $\mathcal{P}(X)$上的幂等余单子。从序理论的角度看，$\mathcal{P}(X)$上的幂等单子是一个幂等、递增（即 $Y \subseteq Z$ 蕴含$FY \subseteq FZ$）且广延（即 $Y \subseteq FY$）的函数，它将 $\mathcal{P}(X)$映射到 $\mathcal{P}(X)$。在序理论中，这样的函数称为闭包算子。

一个古老而基础的观察是[13]，只要指定 X 上的闭包算子F，也就是指定 X 的哪些子集 Y是“闭的”（即 $Y = FY$），就能确定该闭包算子。由此得到的 X 的闭子集族不一定是某个拓扑的闭集族：空集可能不是闭集，有限个闭集的并也可能不是闭集。不过，至少可以确定这些闭集构成一个*Moore* 集：

定义 4.1。集合 X 的子集族若对任意交封闭，则称为 *Moore* 集。

对偶地，X 的子集族若对任意并封闭，则称为 余 Moore 集 。

由 Moore 集 $\mathcal{U} \subseteq \mathcal{P}(X)$，可以通过令 FY 为所有包含 Y 的闭集（即 $\mathcal{U}$ 的成员）的交，从而恢复 $\mathcal{P}(X)$ 上的幂等单子 F。因此，X 中的 Moore 集与 $\mathcal{P}(X)$ 上的幂等单子构成双射，进而也与 $\mathcal{P}(X)$ 的反射子范畴构成双射，并且（由定理 3.23）也与 $\mathcal{P}(X)$ 上的可缩回分解系统构成双射。对偶地，X 中的余 Moore 集与 $\mathcal{P}(X)$ 上的幂等余单子、余反射子范畴以及可切分解系统构成双射。

4.2. **由拓扑导出的模型结构**。假设 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的反射子范畴，反射函子为 F。那么 $\mathcal{S}$ 从 $\mathcal{P}(X)$ 继承一个偏序关系；在此偏序关系下，$\mathcal{S}$ 是一个格。然而，两个元素的上确界是 $F(A \vee B)$，其中 $A \vee B$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 中的上确界（即 $A \vee B = A \cup B$）。关键在于，$\mathcal{S}$ 中的上确界可能与 $\mathcal{P}(X)$ 中的上确界不一致。因此，尽管 $\mathcal{P}(X)$ 是一个格，$\mathcal{S}$ 也是一个格，且 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子偏序集，但 $\mathcal{S}$ 未必是 $\mathcal{P}(X)$ 的子格!

另一方面，有时 $\mathcal{S}$ 是 $\mathcal{P}(X)$ 的子格。当且仅当相应的 Moore 集对有限并封闭时，才会出现这种情况。我们只需再加上条件：$\mathcal{S}$ 包含最小元 $\emptyset \in \mathcal{P}(X)$，此时所讨论的 Moore 集恰好是 X 上的一个拓扑。这一观察引出了以下定义：

定义 4.2。设 X 是一个集合。若与 X 相关联的 *Moore* 集是 X上的一个拓扑，则反射子范畴 $\mathcal{S}$ *of* $\mathcal{P}(X)$称为 $\mathcal{P}(X)$ 的拓扑子范畴 。等价地：

[13]这似乎可以追溯到 E. H. Moore 1910年出版的著作 [28], ，不过我们不知道这是否就是这一思想的源头。更容易查到的参考资料是 Birkhoff 关于格论的影响深远的著作 [6] 中的第五章。

- 反射子范畴 $\mathcal{S}$ 是拓扑的，当且仅当其反射函子 F 与有限余极限可交换。

- 反射子范畴 $\mathcal{S}$ 是拓扑的，当且仅当 $F(\emptyset) = \emptyset$，并且$F(Y \cup Z) = (FY) \cup (FZ)$对所有 $Y, Z \in \mathcal{P}(X)$成立。

集合 X 若在其幂集 $\mathcal{P}(X)$上装备一个闭包算子，通常称为闭包代数。与之对偶的概念是：在幂集上装备一个内部算子（即幂等余单子）的集合，称为内部代数。显然，布尔代数 $\mathcal{P}(X)$上的模型结构赋予 X 闭包代数结构（通过纤维替换单子），也赋予内部代数结构（通过余纤维替换余单子）。根据定理 3.24， $\mathcal{P}(X)$上的强模型结构与满足相容条件的对(Cl,Int)之间存在一一对应，其中 Cl 是 X上的闭包算子，Int 是 X上的内部算子；这些相容条件等价于单子-余单子对(Cl,Int)的相容性（定义 3.8）和正交性（定义 3.21）。写出这些条件并不困难：

命题 4.3。 设 X 是一个集合。 $\mathcal{P}(X)$ 上的强模型结构与有序对 $(\mathrm{Cl},\mathrm{Int})$构成双射，其中 Cl 是 X上的闭包算子，而 Int 是 X上的内部算子，并满足以下条件：

- 对于 X的每个子集 U，都有 $\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U))$。
- 若 U、V是 X 的子集，且 $U \subseteq \mathrm{Int}(V)$ 且 $\mathrm{Cl}(U) \subseteq V$，则$\mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Int}(V)$。

- 若 U、V是 X 的子集，且 $U \subseteq V$，并且 $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(V)$ 且 $\mathrm{Int}(U) = \mathrm{Int}(V)$，则 $U = V$。

特别地， $\mathcal{P}(X)$上的某些强模型结构可由 X上的一对拓扑 $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2$ 得到；若将拓扑 $\mathcal{T}_1$ 中的闭包算子记为 Cl（通过其闭集给出），将拓扑 $\mathcal{T}_2$中的内部算子记为 Int，则命题 4.3 的条件成立。我们将这类模型结构命名为：

定义 4.4。 $\mathcal{P}(X)$ 上的一个分解系统，如果以这种方式由 X上的某个拓扑导出，就称为拓扑的。类似地，$\mathcal{P}(X)$ 上的一个强模型结构，如果以这种方式由X上的一对拓扑导出，就称为拓扑的 。

我们认为，语境很可能足以避免混淆：定义 4.4 中的布尔代数上的拓扑模型结构，与模型范畴意义下的拓扑模型范畴（即富化于拓扑空间且满足适当公理的模型范畴），如 [17, 定义 VII.4.2]所述。

用 Moore(X) 表示集合 X上的 Moore 集的集合，用 Top(X) 表示 X上的拓扑的集合。根据命题 4.3， $\mathcal{P}(X)$上的强模型结构集合是 Moore(X) $\times$Moore(X)的一个子集。自然会问，Moore(X) $\times$ Moore(X)中有多大部分由这个子集构成；粗略地说，在 X 中随机选取一对 Moore 集，定义出 $\mathcal{P}(X)$上模型结构的可能性有多大？类似地， $\mathcal{P}(X)$上的拓扑模型结构集合是 Top(X) $\times$ Top(X)的一个子集，人们自然会问这个子集有多大。

在这里，我们尝试只针对非常小的集合 X回答这些问题，并且仅采用朴素的方法，通过直接计算来回答。可以使用计算机执行以下操作：

(1) 使用 [21]中所述的深度优先算法，生成 X 上的所有Moore族。(2) 对于 X 上的每个Moore族 $\mathcal{U}$，检查 $\mathcal{U}$ 是否为拓扑。(3) 对于 X上的每一对Moore族有序对$(\mathcal{U},\ \mathcal{V})$，考虑有序对$(\mathcal{U},\ \mathcal{V}^{\mathrm{op}})$，其中 $\mathcal{V}^{\mathrm{op}}$ 是 X 中与 $\mathcal{V}$对偶的co-Moore族。检查$(\mathcal{U},\ \mathcal{V}^{\mathrm{op}})$是否满足命题 4.3的条件，从而在 $\mathcal{P}(X)$上定义一个强模型结构。(4) 与上一步相同，但 $\mathcal{U},\ \mathcal{V}$ 均取自 X上的拓扑列表。

我们在 Sage 中实现了上述过程， [38], 可在 https://github.com/Gunjeet-Singh/Generating-compatible-monad-comonad-pairs 获取，得到以下计数结果:

(10)

基数 of X	数量 Moore X中的族	数量 拓扑 on X	数量 强模型 结构 在 $\mathcal{P}(X)$ 上	数量 拓扑的 模型结构 在 $\mathcal{P}(X)$ 上
1	2	1	3	1
2	7	4	17	9
3	61	29	377	84
4	2480	355	127866	1295

按经典研究，第二列和第三列分别统计有限集上的 Moore 集和拓扑；例如 [29, A102896,A000798]。其他列似乎此前尚未计算过，而且这些数值与组合学中熟悉的数列之间并无明显联系。

强模型结构的数量与 Moore(X) ×Moore(X) 的大小之比，以及拓扑模型结构的数量与 Top(X)×Top(X) 的大小之比，如下所示:

(11)

X的基数	强模型 结构，如% （Moore）^{2}的	拓扑模型 结构，如 强模型结构的百分比 模型结构
1	33.33%	33.33%
2	34.69%	52.94%
3	10.14%	22.29%
4	2.08%	1.01%

很自然会猜想，随着有限集 X 的大小趋于 ∞，这两个比率都会趋于零，但我们尚未尝试寻找证明。

4.3. 由几何与拟阵产生的模型结构。 X 中的 Moore 集与 $\mathcal{P}$（X）中的可缩回分解系统一一对应，详见第 4.1 节。在数学中，最常见的 Moore 集类型是拓扑。然而，拓扑并不是唯一受到关注和研究的 Moore 集类型：特别是，在拟阵的几种等价定义中，有一种定义将拟阵视为一种特殊的 Moore 集。具有下文将定义的“简单”性质（定义 4.5）的拟阵称为“几何”，并在射影几何的组合方法中进行研究。

在本小节中，我们将用 Moore 集回顾拟阵和几何的定义，并说明适当的拟阵与几何对如何在有限布尔代数上产生模型结构。

定义 4.5. 拟阵 是集合 X 上满足以下两个条件的 *Moore* 集。在这些条件中，我们用 $\mathrm{Cl}(A)$ 表示给定 *Moore* 集中子集 A 的闭包。

> **有限性性质：** 若对于某个元素 $x \in X$ 和某个子集 $A \subseteq X$，有 $x \in \mathrm{Cl}(A)$，则对于 X 的某个有限子集 B，有 $x \in \mathrm{Cl}(B)$。**交换性质：** 若 x、$y \in X$、$A \subseteq X$ 和 $x \notin \mathrm{Cl}(A)$，且 $x \in \mathrm{Cl}(A \cup \{y\})$，则 $y \in \mathrm{Cl}(A \cup \{x\})$。

拟阵中的闭集有时称为子空间 或平坦。

如果一个拟阵还满足简单性条件，则称为简单拟阵 或几何：

> **简单性性质：** $\mathrm{Cl}(\emptyset) = \emptyset$，并且对于每个 $x \in X$，都有 $\mathrm{Cl}(\{x\}) = \{x\}$。

如果集合 X 至少有两个元素，那么条件 $\mathbf{Cl}(\emptyset) = \emptyset$ 可由其余条件推出，因此可以省略。如果 X 也有限，那么有限性性质自然自动满足，也可以省略。

Faure 和 Fr¨olicher 所著的书 [18] 是介绍这些思想的优秀教材。尤其是，第 3 章 [18] 以 Moore 集合的方式讨论了拟阵。若想简要了解拟阵的重要性及其应用，可参阅 E. Katz 关于代数几何关联的论文 [24]，以及 Biss 的论文 [7] 中各定理陈述之前的导言材料，了解其与代数拓扑的关联。（如 [27] 和 [8] 所指出的，新结果 [7]，存在众所周知的问题。尽管如此， [7] 开篇的阐述性内容仍然信息丰富、引人入胜，而且文笔相当出色。）

命题 4.6。 设 X 为一个集合。那么，以 X 为底集的拟阵全体可以嵌入到幂集 $\mathcal{P}(X)$上的可缩回分解系统全体中。与拟阵 $\mathcal{M}$ 相关联的分解系统 $(\mathcal{L}, \mathcal{R})$ 定义如下：令 $\mathcal{L}$ 为 $\mathcal{P}(V)$ 中所有满足 $\mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(V)$的映射 $U \subseteq V$构成的集合。

作为命题 4.3 的推论，我们有：

命题 4.7。 设 X 为一个集合。假设 $\mathcal{M}_1$、$\mathcal{M}_2$ 是以 X为底集的拟阵。用 Cl 表示 $\mathcal{M}_1$中的闭包算子，用 Int表示 $\mathcal{M}_2$中的内部算子，即 $\mathrm{Int}(U) = c(\mathrm{Cl}_2(cU))$，其中 c表示补运算，而 Cl_2是 $\mathcal{M}_2$的闭包算子。则以下条件等价：

- 存在幂集 $\mathcal{P}(X)$上的强模型结构，其纤维对象恰为拟阵 $\mathcal{M}_1$中的闭集，余纤维对象恰为拟阵 $\mathcal{M}_2$中闭集的补集。
- 幂集 $\mathcal{P}(X)$ 上存在唯一的强模型结构，其纤维对象恰好是拟阵 $\mathcal{M}_1$中的闭集，而其余纤维对象恰好是拟阵$\mathcal{M}_2$中闭集的补集。

- 以下条件均成立：

$$\mathrm{Cl}(\mathrm{Int}(U)) = \mathrm{Int}(\mathrm{Cl}(U)) \text{ for all } U \subseteq X,$$
$$\text{if } U \subseteq \mathrm{Int}(V) \text{ and } \mathrm{Cl}(U) \subseteq V, \text{then } \mathrm{Cl}(U) \subseteq \mathrm{Int}(V), \text{ and}$$
$$\text{if } U \subseteq V \text{ and } \mathrm{Cl}(U) = \mathrm{Cl}(V) \text{ and } \mathrm{Int}(U) = \mathrm{Int}(V), \text{then } U = V.$$

定义 4.8。布尔代数上的分解系统称为拟阵的（分别称为几何的），若它可由一个拟阵（分别为一个几何） $\mathcal{M}$ 通过命题 *4.6* 中的构造得到。同样，布尔代数上的模型结构称为拟阵的（分别称为几何的），若它可由一对有序拟阵（分别为一对几何）$(\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2)$通过命题 *4.7* 中的构造得到。

5. 一般的预序上的模型结构

由定理 3.24 可知，有限双完备预序 $\mathcal{A}$ 上的强模型结构的数据，完全由一个幂等单子和一个幂等余单子在 $\mathcal{A}$ 上的选取所决定，并且它们满足相容条件（定义 3.8）和正交条件（定义 3.21）。自然会问，是否存在某种类似的“代数”结构，能够描述 $\mathcal{A}$上一切模型结构的一般情形，而不只是强模型结构。确实，这种代数描述是可能的：我们称之为分解括号对。它并不深奥——事实上，这种代数结构与模型结构的数据显然等价——然而，通过这种代数结构来指定模型结构，对我们在第 6 节中描述的计算机计算很有用。

定义 5.1。设 $\mathcal{A}$ 是一个预序，并令$\mathrm{Rels}(\mathcal{A})$表示由 $\mathcal{A}$ 的对象构成的有序对 (X, Y) 的集合，其中 $X \leq Y$。

- 我们称 $\mathcal{A}$ 上的一个分解括号为满足以下四条公理的函数 $\Phi : \mathrm{Rels}(\mathcal{A}) \to \mathcal{A}$:

$$X \leq \Phi(X,Y) \leq Y, \tag{12}$$
$$\text{if } X \leq Y \text{ and } \Phi(X,Y) \leq Z, \text{ then } \Phi(\Phi(X,Y),Z) \cong \Phi(X,Z), \tag{13}$$
$$\text{if } Y \leq Z \text{ and } X \leq \Phi(Y,Z), \text{ then } \Phi(X,\Phi(Y,Z)) \cong \Phi(X,Z), \tag{14}$$
$$\text{if } W \leq \Phi(Y,Z) \text{ and } \Phi(W,X) \leq Z, \text{ then } \Phi(W,X) \leq \Phi(Y,Z). \tag{15}$$

- 我们称 $\mathcal{A}$ 上的一个分解括号对为满足以下五条公理的 $\mathcal{A}$ 上的分解括号的有序对 Φ, Ψ ：

$$\text{if } X \leq Y, \text{ then } \Psi(X, \Phi(X,Y)) \cong \Phi(X,Y), \tag{16}$$
$$\text{if } X \leq Y, \text{ then } \Phi(\Psi(X,Y), Y) \cong \Psi(X,Y), \tag{17}$$
$$\text{if } X \leq Y \leq Z, \text{ then } \Phi(\Psi(X,Y), \Phi(Y,Z)) \cong \Psi(\Psi(X,Y), \Phi(Y,Z)), \tag{18}$$

(19) 若 $X \leq Y \leq Z$ 且 $\Phi(\Psi(X,Y)\ \Psi(Y,Z)) \cong \Psi(\Psi(X,Y)\ \Psi(Y,Z))$，则 $\Phi(Y,$ $\Psi(Y,Z)) \cong \Psi(Y,Z)$；若 $X \leq Y \leq Z$ 且 $\Phi(\Phi(X,Y)\ \Phi(Y,Z)) \cong \Psi(\Phi(X,Y)\ \Phi$

(20) $(Y,Z))$，则 $\Psi(\Phi(X,Y)\ Y) \cong \Phi(X,Y)$。

定义—命题 5.2。给定预序 $\mathcal{A}$ 上的分解括号对 Φ, Ψ ，其中有始对象 0 和终对象 1，其相容对

由 $\mathcal{A}$ 上由 $F(X) = \Phi(X, 1)$ 给出的单子 F，以及 $\mathcal{A}$ 上由 $C(X) = \Psi(0, X)$给出的余单子 C 组成。

证明。 我们应当检查 F，C 确实是一个相容对。我们依次检查定义 3.8 中的公理：

- $FCX = \Phi(\Psi(0, X), 1) \cong \Psi(0, \Phi(X, 1)) = CFX$，因此 F在同构意义下与 C 可交换。
- 如果 X，Y是 $\mathcal{A}$中的对象，且 $X \leq CY$和 $FX \leq Y$，那么 $X \leq CY =\Psi(0, Y)$ 以及 $\Phi(X, 1) = FX \leq Y$，因此 $FX = \Phi(X, 1) \leq \Psi(0, Y) = CY$，如所要求。

□

命题 5.3。 预序 $\mathcal{A}$上的分解括号的同构类与 $\mathcal{A}$上的分解系统之间存在双射。同样地，预序 $\mathcal{A}$ 上的分解括号对的同构类与 $\mathcal{A}$上的模型结构之间存在双射。

证明。给定一个分解系统（$\mathcal{L}, \mathcal{R}$），我们可以通过令 $\Phi(X, Y)$ 为 $\mathcal{A}$ 中适合于分解 $X \leq \Phi(X, Y) \leq Y$ 且满足 $X \leq \Phi(X, Y)$ 属于 $\mathcal{L}$、并且 $\Phi(X, Y) \leq Y$ 属于 $\mathcal{R}$ 的“那个”（在同构意义下唯一的）元素，得到 $\mathcal{A}$ 上的分解括号 Φ 。反过来，也就是说，从分解括号 Φ 出发，我们声称，通过令 $\mathcal{L}$ 为所有满足 $\Phi(X, Y) \cong Y$ 的态射$X \leq Y$所成的集合，并令 $\mathcal{R}$ 为所有满足 $X \cong \Phi(X, Y)$ 的态射 $X \leq Y$ 所成的集合，就能得到一个分解系统（$\mathcal{L}, \mathcal{R}$）。

验证定义 5.1 中的公理是例行性的。由此我们得出结论：分解括号等价于分解系统。

$\mathcal{A}$ 上的模型结构由一对分解系统（$cof, fib\ we$）和（$cof\ we, fib$）给出，它们满足以下几个公理：

- $cof\ we \subseteq cof$,
- $fib\ we \subseteq fib$,
- 而弱等价——这里指满足 $\Phi(X, Z) = \Psi(X, Z)$ 的映射 $X \leq Z$，也就是说，能够分解为复合 $X \leq Y \leq Z$，且满足 $X \leq Y$ 属于 $cof\ we$ 、$Y \leq Z$ 属于$fib\ we$的映射 $X \leq Z$——满足三取二公理。

现在，我们将这些公理与定义 5.1 中分解括号对的定义所列出的公理进行比较：

- 公理 (16) 等价于包含关系 $cof\ we \subseteq cof$，而公理 (17) 等价于 $fib\ we \subseteq fib$。

- 公理 (18) 等价于如下陈述：当将形如 $\bullet \xrightarrow{fib\ we} \bullet \xrightarrow{cof\ we} \bullet$ 的复合分解为形如 $\bullet \xrightarrow{cof} \bullet \xrightarrow{fib\ we} \bullet$的复合（分别地，形如 $\bullet \xrightarrow{cof\ we} \bullet \xrightarrow{fib} \bullet$的复合）时，剩余的$cof$ 映射也属于 $cof\ we$ （分别地，剩余的 fib 映射也属于$fib\ we$）。这又等价于弱等价对复合封闭，而这是三取二公理的一部分。

- 公理 (19) 等价于以下条件：给定一个形如 $\bullet \xrightarrow{fib\ we} \bullet \xrightarrow{cof} \bullet$ 的复合，若它是弱等价，则标记为 cof 的映射也属于 $cof\ we$。类似地，公理 (20) 等价于以下条件：给定一个形如 $\bullet \xrightarrow{fib} \bullet \xrightarrow{cof\ we} \bullet$ 的复合，若它是弱等价，

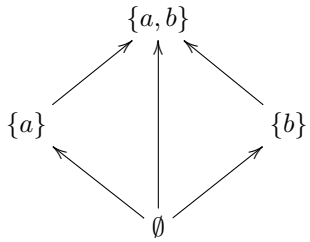
则标记为 fib 的映射也属于 $fib\,we$。这两条公理与 (18) 一起，等价于弱等价满足二取三公理。

□

6. Explicit examples

6.1. 的幂集 $\{a,b\}$。任何含有四个元素的布尔代数都同构于幂集 $P(\{a,b\})$。下图表示将 $P(\{a,b\})$ 视为范畴时的所有对象和所有非恒等态射：

(21)

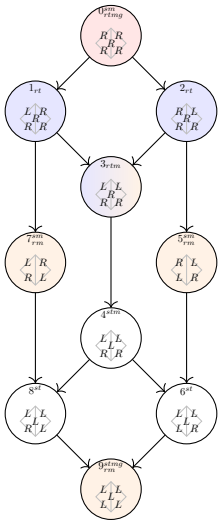


记号 6.1。为了简洁地描述范畴 $P(\{a,b\})$上的分解系统和模型结构，使用这个图的微型版本并加上适当标记会很方便。为了简洁地描述 $P(\{a,b\})$上的分解系统$(\mathcal{L},\mathcal{R})$，我们将画出图 *(21)* 的微型版本，并在属于 $\mathcal{L}$ 的每个态射上方标记一个 L，并在每个态射上方标记一个 R

$_R{}_L$属于 $\mathcal{R}$。例如，图示 $^L{}_R$ 表示 $P(\{a,b\})$上的分解系统，其中 $\emptyset \to \{a\}$ 和 $\{b\} \to \{a,b\}$ 属于 $\mathcal{L}$，而 $\emptyset \to \{b\}$ 和$\{a\} \to \{a,b\}$ 属于 $\mathcal{R}$，并且 $\emptyset \to \{a,b\}$ 既不属于 $\mathcal{L}$ 也不属于 $\mathcal{R}$。

采用这一记号约定后，下图展示了 $P(\{a,b\})$ 上全部十个分解系统（另见 [11], 中的例 1.8，其中也展示了这十个分解系统）：

(22)



图（22）是利用命题 5.3，并编写程序[14]对 $P(\{a,b\})$ 上的所有分解括号进行穷举计算而得到的。图（22）中的每个圆圈代表一个分解括号，也就是一个分解系统。每个圆圈顶部的数字只是一个索引号，方便我们在本节后文中引用 $P(\{a,b\})$ 上的分解系统，

例如，将“分解系统 5”写作分解系统 $^{R\ L}_{L\ R}$。

数字旁的下标 r 表示该分解系统是可缩回的，其含义见定义 2.3。类似地，下标 t 标记每个拓扑的分解系统（定义 4.4）。下标 m 标记每个由底集为 $\{a,b\}$ 的拟阵产生的分解系统，而 g 标记每个由底集为 $\{a,b\}$ 的几何产生的分解系统，具体见定义 4.8。由于我们认为这是一种有用的可视化方式，因此还将这些信息通过圆形的背景颜色体现出来：

- 白色背景表示不可缩回的分解系统，
- 蓝色背景表示拓扑的分解系统（因而也是可缩回的），即由 $\{a,b\}$ 上的一个拓扑产生的分解系统，
- 橙色背景表示一个拟阵的分解系统（因此也是可缩回的），即它源自一个底集为 $\{a,b\}$ 的拟阵，
- 蓝色与橙色混合背景表示一个兼具拓扑性和拟阵性的分解系统，

而红色背景则表示一个几何的（因此也是拟阵的）且具有拓扑性的分解系统。

我们用上标表示对偶概念：上标 s 标记每个可切割的分解系统，而上标 t,m,g 则分别标记其对偶源自一个拓扑、一个拟阵或一个几何的分解系统，且底集为 $\{a,b\}$。

从分解系统 $(\mathcal{L},\mathcal{R})$ 到分解系统 $(\mathcal{L}',\mathcal{R}')$ 的箭头表示后者是前者的**局部化**，即我们有一个包含关系 $\mathcal{R}'\subseteq\mathcal{R}$。等价地（利用命题 5.3），用分解括号表示：分解括号 Ψ 是分解括号 Φ 的局部化，当且仅当对于每一对 X,Y，若 $X\leq Y$，则有 $\Phi(\Psi(X,Y)\ Y)\cong\Psi(X,Y)$。

观察 6.2。这一点并非先验地显而易见，而是计算得出的结论：$\{a,b\}$ 上的每个可缩回分解系统要么是拓扑的，要么是拟阵的（也可能二者兼具）；并且 $\{a,b\}$ 上的每个几何分解系统也都是拓扑的。

观察 6.3。图（22）中存在显而易见的对称性。一般来说，如果我们画出布尔代数 $P(\{a_1,\ldots,a_n\})$ 上分解系统的箭图，对称群 Σ_n 通过置换 $P(\{a_1,\ldots,a_n\})$ 的元素作用于箭图，而循环群 C_2 也通过以下方式作用于箭图：

[14]本文中这项及之后所有计算所用的计算机代码均以 Sage [38], 编写，可在 `https://asalch.wayne.edu/model_structures_1.tar` 免费获取。许多计算也应当可以使用 Balchin 的 ninfty 软件 [2], 完成，但并非全部都可以：例如，对于四元素布尔代数，ninfty 肯定没有现成的功能来找出所有拟阵模型结构（它们在（1）中以橙色圆圈标出），因为拟阵模型结构是本文新提出的一种构造。

它在 $P(\{a_1,\ldots,a_n\})$上的作用将 $\{a_1,\ldots,a_n\}$ 的每个子集映射为其补集。这些作用彼此可交换。前一种作用保持局部化不变，并造成了图（22）中显而易见的左右对称性。另一方面，后一种作用反转局部化，并造成了图（22）中显而易见的上下对称性。

有了图（22），通过以下算法找出$P(\{a,b\})$ 上的所有模型结构——或者说，找出任意有限偏序集上的所有模型结构，都不难：

(1) 列出 $P(\{a,b\})$ 上所有满足 Ψ 是 Φ 的局部化的分解括号对 (Φ,Ψ)。查看图（22）可知，这样的分解括号对恰有 44 对。(2) 对每一对这样的分解括号对 (Φ,Ψ)，检查其是否满足定义 5.1 中分解括号对定义所列的公理。接着，命题 5.3 告诉我们，每一对这样的分解括号对都对应于$P(\{a,b\})$ 上的一种模型结构，反之亦然。

我们两次执行了这一过程：一次使用计算机，通过我们编写的 Sage脚本完成，该脚本可在 https://asalch.wayne.edu/model_structures_1.tar 获取；另一次则完全手动进行，以确保得到相同的结果。我们的计算机软件[15] 所用的算法相当朴素：

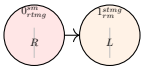
(1) 通过遍历所有可能的函数 $P(\{a,b\}) \to P(\{a,b\}) \times P(\{a,b\})$，计算 $P(\{a,b\})$ 上的分解括号集合（定义 5.1），检查每个给定函数是否满足分解括号的公理；若满足，则将其添加到列表中。由此得到 $P(\{a,b\})$ 上所有分解括号的列表。(2) 列出 $P(\{a,b\})$ 上分解括号列表中各成员组成的有序对，然后遍历这些有序对，检查每个有序对是否满足分解括号对的公理；若满足，则将其添加到另一个列表中。由此得到 $P(\{a,b\})$ 上所有分解括号对的列表，也就是说，根据命题 5.3，得到 $P(\{a,b\})$ 上所有模型结构的列表。(3) 遍历分解括号对列表，检查每一对是否具有各种感兴趣的性质：强、拓扑的、拟阵的，等等。(4) 列出分解括号对列表中各成员组成的有序对，然后对列表中的每一对，检查第二对是否是第一对的 Bousfield 局部化。对 Bousfield 余局部化进行同样的检查。

计算结果表明，$P(\{a,b\})$上恰有 23 个模型结构，其中 17 个是强模型结构，9 个是拓扑模型结构，11 个是拟阵模型结构，1 个是几何模型结构。它们如论文前文的 (1) 所示。

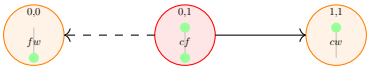
6.2. **幂集** $\{a\}$。 采用上一小节确立的约定，很容易求出其上的分解系统箭图

[15]我们用于实现该算法的软件，在二元集合的幂集上只需运行几秒钟。在三元集合的幂集上，使用韦恩州立大学的高性能计算网格运行，大约耗时一天半。在四元集合的幂集上，该算法效率太低，任何计算机都无法运行。困难完全在于第一步。与其他步骤相比，这一步的计算成本高出极多。

$P(\{a\})$。只有两个分解系统：



$P(\{a\})$ 上的两个分解系统都是可缩回且可切割的。 $P(\{a\})$ 上也只有三种模型结构：

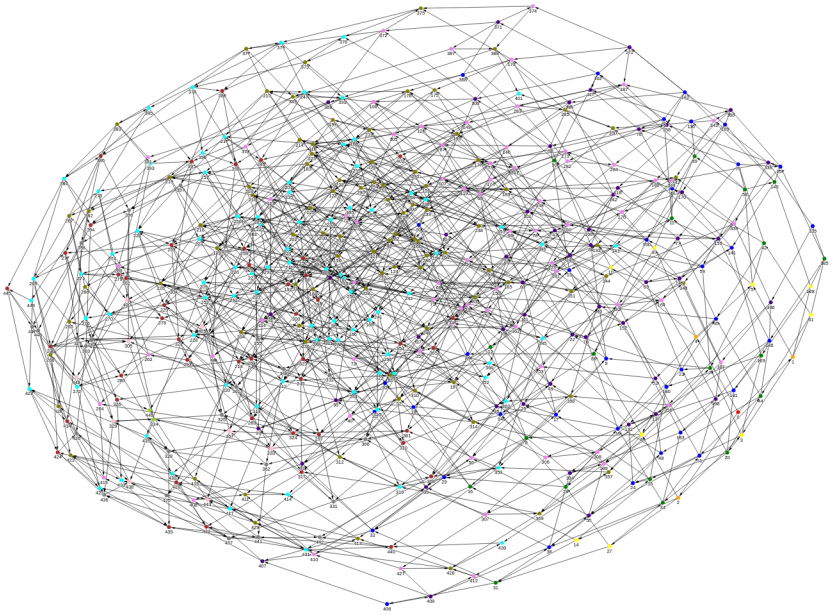


$P(\{a\})$ 上的三种模型结构都是定义 3.6 意义下的强模型结构。

6.3. **的幂集**。使用第 6.1 节中描述的相同算法，我们计算得出， $P(\{a,b,c\})$ 上有 450 个分解系统和 1026 种模型结构。本小节将详细讨论所有这类分解系统的集合以及所有这类模型结构的集合，因为据我们所知，迄今为止，这是同类例子中最详尽的一个完整实例；我们认为，在文献中记录这种非平凡情形下的各种结构特征是有价值的。

$P(\{a,b,c\})$ 上的分解系统如下：

(23)



由于版面空间有限，图（23）几乎难以辨认，实属无奈。因此，我们用文字描述图（23）中的一些重要结构。分解系统按照与“离散”分解系统的距离着色；也就是说，该分解系统为 $(\mathcal{L}、\ \mathcal{R})$，其中 $\mathcal{R}$ 由所有映射组成，而 $\mathcal{L}$ 由所有同构组成。我们称一个分解系统具有与离散模型结构的距离 n ，如果它可以通过一系列 $\mathcal{L}$非平凡局部化从离散模型结构得到，但不能通过一系列 非平凡局部化得到。

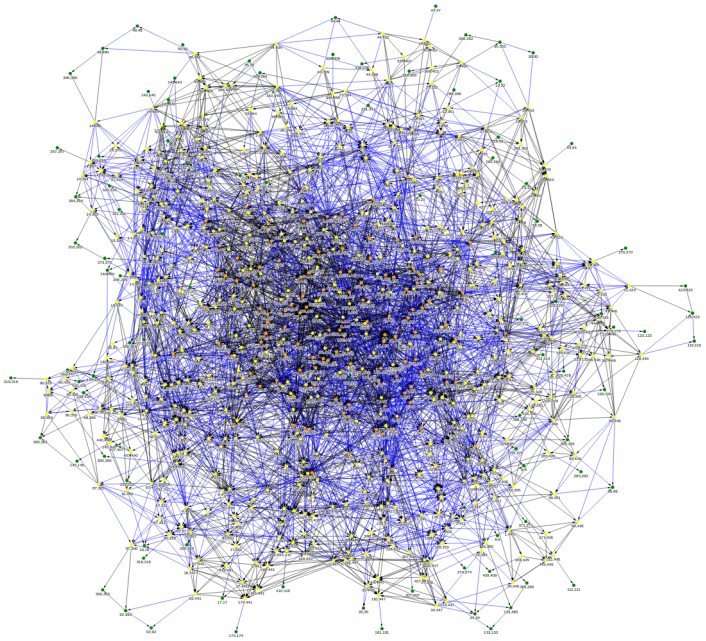
通过一系列 n 非平凡局部化得到的模型结构，但不能通过一系列 $n+1$ 非平凡局部化得到。着色如下：

- 离散分解系统标为红色。
- 与离散模型结构距离为 1 的分解系统标为橙色。共有三个。
- 与离散模型结构距离为 2 的分解系统标为黄色。共有九个。
- 这个序列会继续下去，直到我们到达离散模型结构的距离 12；此后便不再有其他分解系统。

我们将颜色代码以及各颜色对应的分解系统数量列表如下：

与离散分解系统的距离	颜色	事实系统数量
0	red	1
1	橙色	3
2	黄色	9
3	绿色	19
4	blue	36
5	靛蓝色	51
6	紫罗兰色	70
7	橄榄色	90
8	cyan	86
9	棕色	46
10	gray	28
11	pink	9
12	黄绿色	2

现在来看模型结构：在 $P(\{a,b,c\})$ 上的 1026 个模型结构中，有 765 个与离散模型结构处于同一个连通分支中。这 765 个模型结构如下：



(24)

同样，由于篇幅限制，图（24）不可避免地几乎无法阅读，因此我们用文字描述它最重要的特征。

- 离散模型结构标为红色。
- 从离散模型结构出发，距离为 1 的模型结构有 120 个，标为橙色。
- 从离散模型结构出发，距离为 2 的模型结构有 542 个，标为黄色。
- 从离散模型结构出发，距离为 3 的模型结构有 102 个，标为绿色。

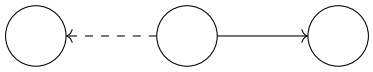
需要说明的是，当我们说某个模型结构“与离散模型结构的距离为 n ”时，我们的意思是，可以通过一个长度为 n、由 Bousfield 局部化和余局部化交替组成的序列，从离散模型结构到达该模型结构。并非 $P(\{a,b\})$ 上的每个模型结构都有相对于离散模型结构的明确定义的距离，因为并非每个模型结构都能通过 Bousfield 局部化和余局部化序列从离散模型结构到达。我们将明确定义了相对于离散模型结构的距离的模型结构集合称为主分支，

观察 6.4。事实证明，在 $P(\{a,b\})$ 上，任何在主分支中具有局部化或余局部化的模型结构，本身已经位于主分支中。或许可以对此事实给出某种先验论证；我们之所以知道这一点，只是因为计算了全部 1026 个模型结构以及它们之间局部化和余局部化的关系。我们还要强调，$P(\{a,b,c\})$ 上的模型结构箭图并不连通：从离散模型结构出发，无法通过反复进行局部化和余局部化得到 $P(\{a,b,c\})$ 上的每一种模型结构。这与 $P(\{a,b\})$ 和 $P(\{a\})$ 的情况形成对照；根据第 6.1 节中的计算，

以及第 6.2 节中的计算，我们看到，从离散模型结构出发，通过反复进行局部化和余局部化，确实能够得到任意模型结构。

本小节其余部分将进一步简要讨论 $P(\{a,b,c\})$ 上的模型结构，其中一些观察暗示了将模型结构推广到更大的布尔代数上的可能性。

除了主分支中的 765 个模型结构外，还有 21 个形如

(25) 

$P(\{a,b\})$ 上其余的 198 个模型结构都是孤立的，也就是说，其余每个模型结构都不是任何其他模型结构的局部化或余局部化，并且不存在非平凡的局部化或余局部化。

有趣的是，这些孤立的模型结构没有一个是强模型结构；此外，形如 (25) 的 21 个连通分支中的模型结构也都不是强模型结构。也就是说，$P(\{a,b,c\})$ 上的每个强模型结构都可以从离散模型结构出发，通过反复进行 Bousfield 局部化和余局部化得到。

在主分支中的 $P(\{a,b,c\})$ 上的 765 个模型结构中，

- 84是拓扑的（因此也是强的），
- 50是拟阵的（因此也是强的）
- 4 是几何的（因此也是拟阵的和强的），
- 252 是强的，但不是拓扑的，也不是拟阵的（因此也不是几何的），
- 和 388 不是强的。

这些数字相加不等于 765，因为它们之间存在重叠。具体而言，有 9 种模型结构既是拓扑的，也是拟阵的。其中恰有一种——离散模型结构——也是几何的。

如上所述，主分支中 $P(\{a,b,c\})$ 上的所有模型结构与离散模型结构的距离均为 ≤ 3。有趣的是，所有强模型结构与离散模型结构的距离均为 ≤ 2，而同时具有拓扑性和拟阵性的模型结构与离散模型结构的距离均为 ≤ 1。

References

[1] Ji˘r´ı Ad´amek、Horst Herrlich、Ji˘r´ı Rosick´y 和 Walter Tholen。弱分解系统与拓扑函子。第10卷，第237–249页。2002年。献给 Heinrich Kleisli 教授七十寿辰的论文集（弗里堡，2000年）。[2] Scott Balchin。nipfty：同伦组合学软件包。*arXiv:2504.01003* 2025 *arXiv preprint*，.[3] Scott Balchin、Ethan MacBrough 和 Kyle Ormsby。复合封闭预模型结构与 Kreweras 格。 *European J. Combin.*, 116：论文编号103879，22页，2024。[4] Scott Balchin、Kyle Ormsby、Ang´elica M. Osorno 和 Constanze Roitzheim。有限全序上的模型结构。 *Math. Z.*, 304(3)：论文编号40，35页，2023年。[5] Tibor Beke。余纤维化的选择有多（不）唯一？ *unpublished preprint available on the Web* 2003，，.
[6] Garrett Birkhoff。 *Lattice theory* 1967 *American Mathematical Society Colloquium Publications*，第XXV卷，出自《》。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，第三版，。[7] Daniel K. Biss。拟阵格拉斯曼流形的同伦型。 *Ann. of Math. (2)*, 158 3 929( ): –952, 2003年。

[8] Daniel K. Biss。关于“拟阵格拉斯曼流形的同伦型”的勘误。

Ann. of , ( ): . [9] *Math. (2)* 170 1 493, 2009

Andrew J. Blumberg、Michael A. Hill、Kyle Ormsby、Ang´elica M. Osorno 和 Constanze Roitzheim。同伦组合学。 *Notices Amer. Math. Soc.*, 71(2):260–266, 2024。[10] Jishnu Bose、Tien Chih、Hannah Housden、Legrand Jones II、Chloe Lewis、Kyle Ormsby 和 Millie Rose。格上分解系统的组合学。 *arXiv preprintarXiv:2503.22883*, 2025年。[11] Andr´es Carnero Bravo、Shuchita Goyal、Sof´ıa Mart´ınez Alberga、Cherry Ng、Constanze Roitzheim 和 Daniel Tolosa。格上的左、右 Bousfield 局部化。 *arXiv preprint arXiv:2511.07952* 2025 , .[12] C. Cassidy、M. H´ebert 和 G. M. Kelly。反射子范畴、局部化与分解系统。 *J. Austral. Math. Soc. Ser. A*, 38(3):287–329, 1985。[13] Maria Manuel Clementino 和 Ignacio L´opez Franco。有序结构中的松弛正交分解。 *Theory Appl. Categ.*, 35：论文编号36，1379–1423，2020年。[14] Bruce R. Corrigan-Salter。模型范畴的右去局部化。 *Theory Appl. Categ.*, 31：论文编号17，462–476，2016年。[15] Jean-Marie Droz 和 Inna Zakharevich。扩展为模型结构并非一阶性质。 *New York J. Math.*, 27:319–348, 2021年。[16] J. Michael Dunn 和 Gary M. Hardegree。 *Algebraic methods in philosophical logic*，第41卷，出自 *Oxford Logic Guides*。克拉伦登出版社、牛津大学出版社，纽约，2001年。牛津科学出版物。[17] A. D. Elmendorf、I. Kriz、M. A. Mandell 和 J. P. May。

Rings modules and algebras , , , 第卷，出自《》。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1997年。附录由 M. Cole 撰写。[18] Claude-Alain Faure 和 Alfred Fr ¨ olicher。《》，第卷，出自《》。克吕维尔学术出版社，多德雷赫特，。[19] Evan E. Franchere、Kyle Ormsby、Ang´elica M. Osorno、Weihang Qin 和 Riley Waugh。传递系统格通过弱分解系统的自对偶性。 *Homology Homotopy Appl.* 24 2 115 134, 2022 , ( ): – . [20] Richard Garner。理解小对象论证。 *Appl. Categ. Structures*, 17 3 247( ): –285, 2009年。[21] Akira Higuchi。闭包算子格。 *Discrete Mathematics*, 179(1–3):267–272, 1998年。[22] Mark Hovey。 *Model categories*，第63卷，出自 *Mathematical Surveys and Monographs*。美国数学会，罗德岛州普罗维登斯，1999年。[23] J. F. Jardine。单纯预层的中间模型结构。 *Canad. Math. Bull.*, 49 3 407 413, 2006 ( ): – . [24] Eric Katz。面向代数几何学家的拟阵理论。载于 *Nonarchimedean and tropical geometry*，西蒙斯研讨会，第435–517页。Springer，2016年。[25] Kristen Mazur、Ang´elica M. Osorno、Constanze Roitzheim、Rekha Santhanam、Danika Van Niel 和 Valentina Zapata Castro。有限偏序集上模型结构的刻画。 *arXiv preprint arXiv:2511.06151*, 2025年。[26] Mike Shulman。中间模型结构。 `https://ncatlab.org/nlab/show/intermediate+model+structure` 2014 1 , 七月。修订版。

[27] N. Mnev。关于 D.K. Biss 的论文《拟阵格拉斯曼流形的同伦型》和《定向拟阵、复流形以及 BU 的组合模型》。 *arXiv preprintarXiv:0709.1291*, 2007年。[28] Eliakim Hastings Moore。 *Introduction to a form of general analysis*，第2卷。耶鲁大学出版社，1910年。[29] OEIS基金会。在线整数数列百科全书，2025年。电子版发布于 `http://oeis.org`。[30] Daniel G. Quillen。 *Homotopical algebra*。《数学讲义》第43号。Springer-Verlag，柏林—纽约，1967年。[31] George Raptis。偏序集的同伦论。 *Homology Homotopy Appl.*, 12(2):211–230, 2010年。[32] Ji˘r´ı Rosick´y。可达范畴与同伦论。 *Lecture notes, available on the Web, https://www.math.muni.cz/ rosicky/papers/homacc3.pdf* 2007 , .[33] Andrew Salch。哪些范畴上的所有模型结构都可以确定？MathOverflow。
U
R
L:
h
t
t
p
s://
m
athoverflow.net/questions/462305/categories-on-which-one-can-determine-all-model-structures/492141#492141（版本：2025年5月5日）。

[34] Andrew Salch. 相对同调代数与 Waldhausen

K *Homology Homotopy* -理

Appl. 20 1 87 116, 2018
论。 , ( ): – 。 [35] Alexandru E. Stanculescu. 构造具有指定纤维对象的模型范畴。
Theory Appl. Categ., 29:第 23 期，635–653，2014.[36] M. H. Stone. 布尔代数的表示理论。
Trans. Amer. Math. Soc., 40 1 37( ): –111，1936。[37] Marshall H Stone. 布尔代数理论在环理论中的归属。 *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.*, 21(2):103，1935。[38] Sage 开发者。 *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 9.5)*，2024。 `https://www.sagemath.org`。