arXiv:2512.22546v1 [math.GM] 27 Dec 2025

抛物线上的投影

Francisco J. Arag´on-Artacho*、Heinz H. Bauschke† 和 C´esar L ´opez-Pastor‡

2025年12月30日

摘要

本文给出了投影到二次多项式图像上的投影的显式表达式。这些投影通过考察相关四次多项式的临界点得到，也就是说，考察定义其导数的三次多项式的根。我们还重点讨论待投影点位于抛物线所定义的垂直线上的情形。最后，推导出投影到高维抛物线上的显式公式。

2020年数学主题分类：主要分类 90C25；次要分类 12D10、26C10、90C26

关键词：凸四次多项式、三次方程、三次多项式、二次多项式、投影、根

1 引言

给定一个一般的二次多项式

$$s(x) := \alpha x^2 + \beta x + \gamma, \quad \text{where } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \beta \in \mathbb{R}, \gamma \in \mathbb{R},$$

本文旨在为投影到S上找到一个显式公式，其中S是该二次多项式的图像（而非上图集）：

$$S := \operatorname{gra}(s) := \big\{(x, \alpha x^2 + \beta x + \gamma) \,\big|\, x \in \mathbb{R}\big\}.$$

因此，通过固定一个不属于该图像的任意点

$$(\overline{x}, \overline{y}) \in \mathbb{R}^2 \setminus S, \quad \text{so } \overline{y} \neq s(\overline{x}),$$

*数学，阿利坎特大学，西班牙。电子邮件：francisco.aragon@ua.es
†数学，英属哥伦比亚大学，基洛纳，不列颠哥伦比亚省 V1V 1V7，加拿大。电子邮件：heinz.bauschke@ubc.ca。
‡数学，阿利坎特大学，西班牙。电子邮箱：cesar.lopez@ua.es。

我们希望求解以下优化问题：

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|(x, \alpha x^2 + \beta x + \gamma) - (\overline{x}, \overline{y})\| \\ \text{s.t.} \quad & x \in \mathbb{R}. \end{aligned} \tag{P}$$

这等价于求四次多项式的最小值

$$\begin{aligned} Q(x) &:= \|(x, \alpha x^2 + \beta x + \gamma) - (\overline{x}, \overline{y})\|^2 \\ &= (x - \overline{x})^2 + (\alpha x^2 + \beta x + \gamma - \overline{y})^2 \\ &= \alpha^2 x^4 + \big(2\alpha\beta\big) x^3 + \big(1 + \beta^2 + 2\alpha(\gamma - \overline{y})\big) x^2 + \big(2(\beta(\gamma - \overline{y}) - \overline{x})\big) x + (\gamma - \overline{y})^2 + \overline{x}^2. \end{aligned} \tag{1}$$

利用最优性条件，我们的目标是计算Q 的临界点，并据此确定其全局最小值。由于四次多项式的导数是三次多项式，我们的问题便转化为求解三次多项式的根。这些计算依据了 [1], 中的工作，作者在其中给出了这些根的显式表达式。其主要结果将在下一节概述，我们还将给出一个有用的引理，用于求导数有三个互异实根的四次多项式的极值。

近期， [2]提出了计算到抛物线 $4\mathbf{cy} = \mathbf{x}^2$ 的投影的闭式表达式。用我们的记号表示，这对应于 $\alpha = 1/(4\mathbf{c})$ 和 $\beta = \gamma = 0$，但通过平移图像，可以不失一般性地假设这一特定形式。不过，正如我们在注 3.3 中指出的， [2] 中得到的公式仅适用于空间中的某些点，尤其是投影为单值的点。另一个相关结果是 [1, 定理 7.1], ，作者在其中给出了到抛物线 $\mathbf{h}(\mathbf{x}) = \alpha\|\mathbf{x}\|^2$ 的上图集的投影公式，其中 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ 且 $\alpha > 0$。在第 5 节，我们推导出到这条抛物线图像的投影的闭式表达式，因此也涵盖了上图集内部投影为多值的点。因此，本文的分析更为全面，涵盖并扩展了 [1] 和 [2]中的相关结果。

2 辅助结果

本节包含一些相关结果，这些结果将帮助我们推导关于抛物线投影的主定理。考虑一般的三次多项式

$$f(x) := ax^3 + bx^2 + cx + d, \quad \text{where } a, b, c, d \text{ are in } \mathbb{R} \text{ and } a > 0. \tag{2}$$

注意，$f''(x) = 6ax + 2b$ 恰好有一个零点，即

$$x_0 := \frac{-b}{3a}. \tag{3}$$

变量代换

$$x = z + x_0 \tag{4}$$

可得到众所周知的降次三次方程

$$g(z) := z^3 + pz + q, \quad \text{where} \quad p := \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{and} \quad q := \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}. \tag{5}$$

这里$ag(z) = f(x) = f(z + x_0)$，因此$g$的根恰好是$f$的根平移$x_0$后得到的；即，

$$x \text{ is a root of } f \Leftrightarrow x - x_0 \text{ is a root of } g.$$

因此，要得到f的根，我们只需找出g的根，然后将它们加上x_0。由于变量代换(4) 是线性的，根的重数保持不变。以下 [1] 结果给出了一般三次多项式的根的显式表达式。

事实 2.1 ([1, 推论 3.2])。考虑三次多项式(2)，回顾(3) 和(5)，并设 $\Delta := (p/3)^3 + (q/2)^2$。则以下情况恰有一种成立：

(i) $\boxed{p = 0 \text{ 或 } \Delta > 0}$：则 f 恰有一个实根，且该根为

$$x_0 + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}}. \tag{6}$$

(ii) $\boxed{p < 0 \text{ 且 } \Delta = 0:}$ 则 f 有两个不同的实根：单根为

$$x_s := x_0 + \frac{3q}{p} = x_0 + 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

且二重根为

$$x_d := x_0 - \frac{3q}{2p} = x_0 - \sqrt[3]{\frac{-q}{2}}$$

(iii) $\boxed{\Delta < 0:}$ 则 f 恰有三个实（单）根 $r_0, r_1, r_2,$，其中

$$r_k := x_0 + 2(-p/3)^{1/2} \cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \qquad \theta := \arccos \frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}}, \tag{7}$$

且 $r_1 < r_2 < r_0$。

下面的引理将帮助我们在其导数有三个互异实根时，确定 Q 在 (1)中的全局极小点。

引理 2.2。设 $Q(x)$ 是一个首项系数为 ax^4 且 $a > 0$ 的实四次多项式。假设其导数为

$$f(x) := Q'(x) = 4a(x - r_1)(x - r_2)(x - r_3),$$

其互异实根按 $r_1 < r_2 < r_3$ 的顺序排列。则 r_1 和 r_3 是 Q 的仅有的局部极小值点，而 r_2 是 Q 的仅有的局部极大值点。此外，还有以下结论：

(i) 如果$2r_2 - r_1 - r_3 = 0$，那么 r_1 和 r_3 都是 Q 的唯一全局极小点。

(ii) 如果$2r_2 - r_1 - r_3 < 0$，那么 r_3 是 Q 的唯一全局极小点。
(iii) 如果$2r_2 - r_1 - r_3 > 0$，那么 r_1 是 Q 的唯一全局极小点。

换言之，Q 的全局极小点是从 $\{r_1, r_3\}$ 中取出的、距离 r_2 最远的根所组成的子集。

证明。由于 > 0，我们有：f 在 $]-\infty$ 上为负，$r_1[$，f 在 $]$ 上为正$r_1, r_2[$，f 在 $]$ 上为负$r_2, r_3[$，且f在 $]$ $r3, \infty[$ 上为正。由于$Q' = f$，因此r_1和r_3是Q的局部极小值点，而r_2是Q的局部极大值点，并且Q没有其他临界点。我们有

$$Q(r_2) - Q(r_1) = \int_{r_1}^{r_2} f(x)\,dx = \frac{1}{3}\,a(r_1 + r_2 - 2\,r_3)(r_1 - r_2)^3.$$

该假设 ption $r_1 < r_2 < r_3$ 意味着$Q(r_1)$ $<$、$Q(r_2)$，同样地，$Q(r_3)$ $<$与$Q(r_2)$。同样 e,

$$Q(r_3) - Q(r_1) = \frac{1}{3}\,a(r_1 - 2\,r_2 + r_3)(r_1 - r_3)^3,$$

这就得到了其余的结论。 ■

3 计算投影

由于Q 在(1) 中是一个四次多项式，我们可以利用导数计算其临界点。我们得到三次多项式

$$f(x) := Q'(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d, \tag{8}$$

其中

$$\begin{aligned} a &:= 4\,\alpha^2 > 0, \\ b &:= 6\,\alpha\beta, \\ c &:= 2\,\beta^2 - 4\,\alpha\overline{y} + 4\,\alpha\gamma + 2, \\ d &:= -2\,\beta\overline{y} + 2\,\beta\gamma - 2\,\overline{x}. \end{aligned}$$

回顾引理 2.2，我们关注f的根，因为它们给出了为解决原问题而需要研究的点。现在，让我们定义第 2 节中与f相关的常用关键量：

$$x_0 := \frac{-b}{3a} = -\frac{\beta}{2\,\alpha}$$

and

$$p := \frac{3ac - b^2}{3a^2} \quad \text{and} \quad q := \frac{27a^2d + 2b^3 - 9abc}{27a^3}.$$

幸运的是，这可以简化为

$$p = -\frac{\beta^2 + 4\,\alpha\overline{y} - 4\,\alpha\gamma - 2}{4\,\alpha^2} \quad \text{and} \quad q = -\frac{2\,\alpha\overline{x} + \beta}{4\,\alpha^3}. \tag{9}$$

定理 3.1. 设 $s(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 是一个二次函数，满足 $\alpha \neq 0$。设 $\Delta := (p/3)^3 + (q/2)^2$,其中 p 和 q 由 (9)给出。那么，对于任意 $(x,y) /\in \bar{S} := \mathrm{gra}(s)$，到 S 的投影计算如下

$$P_S(\bar{x},\bar{y}) = \begin{cases} (x_1, s(x_1)) & \text{if } p = 0 \text{ or } \Delta > 0, \\ (x_2, s(x_2)) & \text{if } p < 0 \text{ and } \Delta = 0, \\ \{(x_3^+, s(x_3^+)), (x_3^-, s(x_3^-))\} & \text{if } \Delta < 0 \text{ and } \bar{x} = -\frac{\beta}{2\alpha}, \\ (x_4, s(x_4)) & \text{if } \Delta < 0 \text{ and } q < 0, \\ (x_5, s(x_5)) & \text{if } \Delta < 0 \text{ and } q > 0, \end{cases}$$

其中，x_1, x_2, x_3^+、x_3^-、x_4, x_5 定义如下

$$\begin{aligned} x_1 &:= -\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt[3]{\frac{2\alpha\bar{x}+\beta}{8\alpha^3} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{2\alpha\bar{x}+\beta}{8\alpha^3} + \sqrt{\Delta}}, \\ x_2 &:= -\frac{\beta}{2\,\alpha} + \frac{3\,(2\,\alpha\bar{x}+\beta)}{(\beta^2 + 4\,\alpha\bar{y} - 4\,\alpha\gamma - 2)\alpha}, \\ x_3^{\pm} &:= -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{-p}, \\ x_4 &:= -\frac{\beta}{2\alpha} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\theta/3\right), \\ x_5 &:= -\frac{\beta}{2\alpha} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right), \end{aligned}$$

且 $\theta :=$ 反余弦 $\frac{-q}{2\,(-p/3)^{3/2}}$。

证明。由于 $Q(x)$ 在 (1) 中的极小化点集合包含于 $f(x)$在 (8)中的三次多项式的根集合中，因此第 2 节中介绍的结果对于求解该优化问题至关重要，进而也能求得到 S的投影。接下来，我们将逐一讨论事实 2.1 中的各个情形，以得到投影的显式表达式。

Cas情形 (i)：$p = 0$ 或 $\Delta > 0$。根据 事实 2.1，f 恰有一个实根，其表达式为 y

$$x_1 := -\frac{\beta}{2\alpha} + u_- + u_+, \quad \text{where } u_\pm := \sqrt[3]{\frac{2\,\alpha\bar{x}+\beta}{8\alpha^3} \pm \sqrt{\Delta}}. \tag{10}$$

因此，Q 恰有一个最小化元，因为不存在其他临界点；到S的投影为

$$P_S(\bar{x},\bar{y}) = (x_1, s(x_1)).$$

情形 (ii)：$p < 0$和 $\Delta = 0$。在这种情况下，f 有两个不同的实根：一个二重根 $x_\mathrm{d} := x_0 - \frac{3q}{2p}$和一个单根

$$x_\mathrm{s} := x_0 + \frac{3q}{p} = -\frac{\beta}{2\,\alpha} + \frac{3\,(2\,\alpha\bar{x}+\beta)}{(\beta^2 + 4\,\alpha\bar{y} - 4\,\alpha\gamma - 2)\alpha}.$$

回顾 (8)，我们有 $f(x) = 4\alpha^2(x - x_d)^2(x - x_s)$。由于 f 的符号仅在 x_s 处改变，因此 x_d 不可能是 Q 的局部极小值点。因此，$P_S(x, y) = (x_s, s(x_s))$。

情形（iii）：$\Delta < 0$。这是f 有三个单实根$r_1 < r_2 < r_0$, 的情形，其表达式为

$$r_k := x_0 + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta + 2k\pi}{3}\right), \tag{11}$$

with

$$\theta := \arccos\frac{-q/2}{(-p/3)^{3/2}} = \arccos\frac{3^{3/2}\,\mathrm{sign}(\alpha)(2\,\alpha\bar{x} + \beta)}{(\beta^2 + 4\,\alpha\bar{y} - 4\,\alpha\gamma - 2)^{3/2}} \in]0, \pi[\,. \tag{12}$$

我们在图1中表示这三个根。

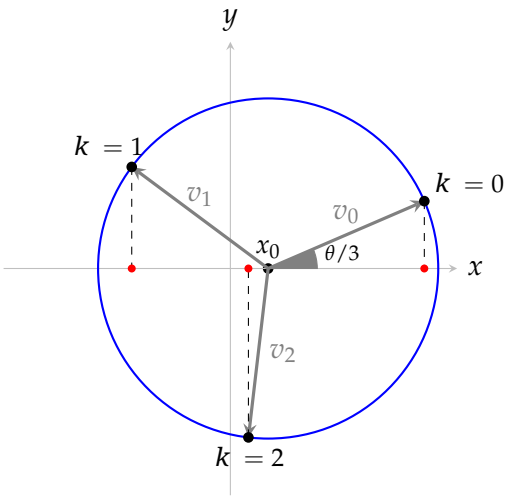


图1：实根的几何表示r_k （红点）见（11）

由引理 2.2可知，r_0 和r_1 是Q的两个局部极小值点，而r_2 是一个局部极大值点。此外，Q 的全局极小点对应于距离中间根最远的根 r_2。因此，我们关心 $2r_2 - r_0 - r_1$的符号。注意到图1中所示的向量 v_0, v_1 和v_2 相加为0，它们的x坐标之和满足

$$\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) + \cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = 0.$$

于是，我们得到如下简化：

$$\frac{2r_2 - r_0 - r_1}{2(-p/3)^{1/2}} = 3\cos\left(\frac{\theta + 4\pi}{3}\right) = 3\sin\left(\frac{\theta - \pi/2}{3}\right).$$

因此，我们需要检查上述正弦是零、负数还是正数。回想一下$0 < \theta < \pi$，检查正弦的符号分别等价于以下条件：$\theta = \pi/2$、 $0 < \theta < \pi/2$或 $\pi/2 < \theta < \pi$。

• 条件 $\theta = \pi/2$ 等价于 $-q/2\,(-p/3)^{3/2} = 0$，即 $q = 0$。在此条件下，Q 的全局极小点为

$$r_0 = x_0 + 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt{-p} =: x_3^+,$$
$$r_1 = x_0 + 2\sqrt{-p/3}\cos\left(\frac{\pi/2 + 2\pi}{3}\right) = -\frac{\beta}{2\alpha} - \sqrt{-p} =: x_3^-.$$

• 条件 $0 < \theta < \pi/2$ 等价于 $0 < (-q/2)/(-p/3)^{3/2} < 1$。然而，根据本情形的假设，$\Delta < 0$ 且 $p < 0$，这直接意味着 $(-q/2)/(-p/3)^{3/2} < 1$始终成立。因此，不等式链 $0 < \theta < \pi/2$仅由 $0 < (-q/2)/(-p/3)^3/2$刻画，即 $q < 0$。在这种情况下，唯一全局极小点为

$$r_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta}{3}\right) =: x_4.$$

• 最后，条件 $\pi/2 < \theta < \pi$ 等价于 $0 > (-q/2)/(-p/3)^{3/2} > -1$，根据与前面类似的论证，这可由 $q > 0$刻画。在这种情况下，唯一全局极小点为

$$r_1 = -\frac{\beta}{2\alpha} + 2\sqrt{\frac{-p}{3}}\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right) =: x_5.$$

综上，当 $\Delta < 0$ 时，投影到 S 由下式给出

$$P_S(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} \{(x_3^+, s(x_3^+)), (x_3^-, s(x_3^-))\} & \text{if } q = 0, \\ (x_4, s(x_4)) & \text{if } q < 0, \\ (x_5, s(x_5)) & \text{if } q > 0. \end{cases}$$

证明至此结束。 ■

定理 3.1中给出的投影计算分为五种互不相交的情形，这些情形对应于事实 2.1 和引理 2.2所给出的情形。不过，这些情形可以归纳为三种。

推论 3.2. 设 $s(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ 是一个满足 $\alpha \neq 0$ 的二次函数。令 $\Delta := (p/3)^3 + (q/2)^2$,，其中 p 和 q 由(9)给出。那么，对于任意$(x,y)\ \overline{/\in} S :=$ 图(s)，到 S 上的投影为

$$P_S(\overline{x}, \overline{y}) = \begin{cases} (z_1, s(z_1)) & \text{if } \Delta \geq 0, \\ \{(z_2^+, s(z_2^+)), (z_2^-, s(z_2^-))\} & \text{if } \Delta < 0 \text{ and } \overline{x} = -\frac{\beta}{2\alpha}, \\ (z_3, s(z_3)) & \text{if } \Delta < 0 \text{ and } \overline{x} \neq -\frac{\beta}{2\alpha}. \end{cases}$$

其中 z_1, z_2^+、z_2^- 和 z_3 定义为

$$z_1 := -\frac{\beta}{2\alpha} + \sqrt[3]{\frac{2\alpha\overline{x} + \beta}{8\alpha^3} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{2\alpha\overline{x} + \beta}{8\alpha^3} + \sqrt{\Delta}},$$

$$z_2^{\pm} := -\frac{\beta}{2\alpha} \pm \sqrt{-p},$$
$$z_3 := -\frac{\beta}{2\alpha} - 2\,\mathrm{sign}(q)\sqrt{-p/3}\cos(\vartheta/3),$$

以及 $\vartheta :=$ 反余弦 $\left| \frac{q}{2\,(-p/3)^{3/2}} \right|$。

证明。这是结合定理 3.1中投影的各种情形得出的结论。事实上，首先注意到，当 $\Delta = 0$时，我们有$p \leq 0$。当$p = 0$时，投影为$(x_1, s(x_1))$。否则，我们处于事实 2.1的情形 (ii)，且由于 $\Delta = 0$,

$$x_2 = x_s = x_0 + \frac{3q}{p} = x_0 + 2\sqrt[3]{\frac{-q}{2}} = \sqrt[3]{\frac{-q}{2} + \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{-q}{2} - \sqrt{\Delta}} = x_1.$$

因此，这两种情形都可以归入合并区域 $\Delta \geq 0$，其中投影为 $(z_1, s(z_1))$，且 $z_1 := x_1$。

现在考虑 $\Delta < 0$ 且$q \neq 0$的情形。下面证明x_4 与x_5 的表达式可以合并为$z_3 := x_0 - 2\mathrm{sign}(q)\sqrt{-p/3}\cos(\vartheta/3)$，其中 $\vartheta := \arccos \left| \frac{q}{2\,(-p/3)^{3/2}} \right|$。为证明这一点，令$w := \frac{q}{2\,(-p/3)^{3/2}}$。一方面，当$q > 0$时，有

$$\cos\left(\frac{\vartheta}{3}\right) = \cos\left(\frac{\arccos(-w)}{3}\right) = \cos\left(\frac{\pi - \arccos(w)}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\theta + 2\pi}{3}\right),$$

由此，$z_3 = x_0 + 2\sqrt{-p/3}\cos\left((\theta + 2\pi)/3\right) = x_5$。另一方面，若$q < 0$，则定理 3.1中的 θ 与 ϑ的值相同，因此$z_3 = x_4$ （因为 $\mathrm{sign}(q) = -1$）。■

图 2 展示了对抛物线$s(x) = 2x^2 + x - 1$ 而言，由前面的分析得到的三个区域。

注 3.3 （与 [2]的联系）。考虑抛物线 $4cy = x^2$，，其中 $c \neq 0$。若$(x, y) \in \mathbb{R}^2$ 是待投影的点，则根据(9) 可得 $p = 4c(2c - y)$ 以及 $q = -8c^2x$。方程 *[2,*方程 （5） *]* 中的投影可通过求解 *[2,* 方程 （4） *]*得到：

$$x^2 = 4c\left(\bar{y} + \frac{2c}{x}(\bar{x} - x)\right).$$

乍看之下，这个方程已经施加了条件 $x \neq 0$，这意味着投影点的 x 坐标不能为零。这样便排除了 x 位于对称轴上的情况，即 $x \neq x_0$，，也特别排除了 $P_S(\bar{x}, \bar{y}) = \{(z_2^{\pm}, s(z_2^{\pm}))\}$ 这一情况，使其不出现在最终表述中。在这一假设下继续推导，前一个方程可化为以下降次三次方程：

$$x^3 + 4c(2c - \bar{y})x - 8c^2\bar{x} = x^3 + px + q = 0.$$

作者声称，该方程有三个不同的根，其中一个为实根，另外两个为共轭复根。然而，根据事实 *2.1*，只有在 $\Delta := (p/3)^3 + (q/2)^2 > 0$ 时才会出现这种情况。事实上，通过计算 $\sqrt{46656c^4x^2 + 4(3p)^3} = 3^3 \cdot 2\sqrt{\Delta}$，这一前提体现在 *[2,* 方程 （5） *]* 中。因此，推论 *3.2* 中的情形 $P_S(\bar{x}, \bar{y}) = (z_3, s(z_3))$ 也被遗漏了。

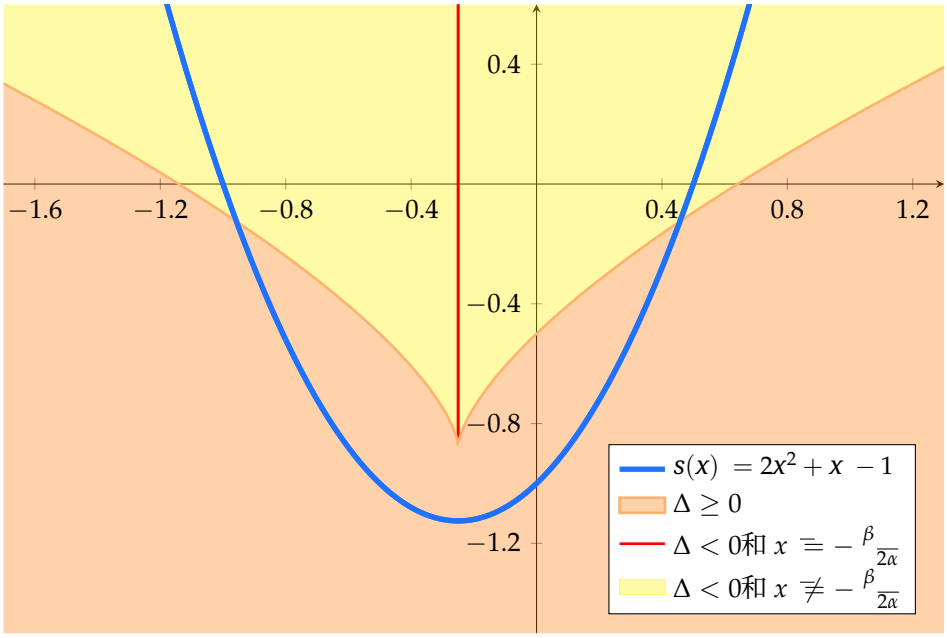


图 2：对于某条特定抛物线，定义投影的三个区域

4 对称轴上的点的投影

现在让我们聚焦于 $q = 0$ 这一情形。根据 (9)，这对应于如下选择

$$\bar{x} = x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha}, \tag{13}$$

也就是说，点 (x,y) 位于垂直线 $x = x_0$, 上，该垂直线的横坐标等于抛物线顶点的横坐标。顶点的 y 坐标可以很容易地计算为

$$s(x_0) = \alpha\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right)^2 + \beta\left(\frac{-\beta}{2\alpha}\right) + \gamma = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}. \tag{14}$$

回顾 Δ 的定义，在假设 $q = 0$ 的条件下，我们得到 $\Delta = (p/3)^3$。因此，$\Delta \geq 0$ 等价于 $p \geq 0$；同样，$\Delta < 0$ 等价于 $p < 0$。根据推论 3.2，以下条件只有在 $q = 0$ 时才可能成立：

- 如果 $p \geq 0$，那么 $Ps(\bar{x}0, y) = (z1, s(z1))$ 是单值的。
- 如果 $p < 0$，那么 $Ps(\bar{x}0, y) = \{(z_2^+, s(z_2^+))、(z_2^-, s(z_2^-))\}$ 是多值的。

我们关注的值为 $p = 0$，它是单值投影与多值投影之间的分界线。由 (9)，解得 y，从而得到

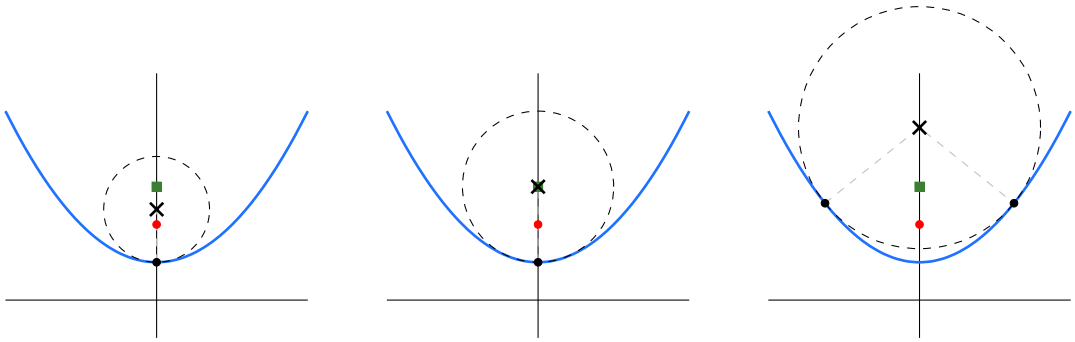
$$\bar{y} = y_0 := \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 2}{4\alpha}. \tag{15}$$

最后，我们回顾一下，抛物线的焦点 是点

$$F := (F_x, F_y) := \left(x_0, s(x_0) + \frac{1}{4\alpha}\right), \tag{16}$$

而准线 是直线 $\mathbb{R} \times \{\gamma - (\beta^2+1)/(4\alpha)\} = \mathbb{R} \times \{s(x_0) - 1/(4\alpha)\}$。

我们在图3 中展示了点(x,y) 相对于(x_0,y_0)的位置不同时，其投影的变化。



(a) $p > 0 \Leftrightarrow y < y_0$　(b) $p = 0 \Leftrightarrow y = y_0$　(c) $p < 0 \Leftrightarrow y > y_0$

图3：点(x,y)（黑色叉号）在对称轴上时，依据其相对于点(x_0,y_0)（绿色方块）的位置，其在抛物线（蓝色）上的投影（以黑点表示）。焦点F 以红点表示，准线为水平轴。

命题4.1。 设 (x_0,y_0) 如 (13) 和 (15)所示。则

(i) 点 (x_0,y_0) 是顶点 $(x_0,s(x_0))$ 关于焦点的反射；特别地，$y_0 = 2F_y - s(x_0)$。(ii) $|y_0 - s(x_0)|$ 是曲线 S 在 (x_0,y_0)处的曲率半径。

证明。对于 x 分量，结论显然。对于 y 分量，只需合并 (14)、(15)和(16)。

$$2F_y - s(x_0) = s(x_0) + \frac{1}{2\alpha} = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha} + \frac{1}{2\alpha} = \frac{4\alpha\gamma - \beta^2 + 2}{4\alpha} = y_0.$$

现在，由于 S 由函数 $s(x)$给出，我们计算在 x_0 处的曲率半径，得到

$$\left|\frac{(1+s'(x_0)^2)^{3/2}}{s''(x_0)}\right| = \left|\frac{(1+0)^{3/2}}{2\alpha}\right| = \frac{1}{2|\alpha|}.$$

因此，注意到 $y_0 - s(x_0) = 2(F_y - s(x_0)) = 1/(2\alpha)$。证明至此完成 . ■

5 投影到高维抛物线

考虑函数

$$t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \mathbf{x} \mapsto \alpha\|\mathbf{x}\|^2, \quad \text{where } \alpha \neq 0.$$

接下来给出投影到其图像上的表达式

$$T := \operatorname{gra}(t) := \left\{(\mathbf{x}, \alpha\|\mathbf{x}\|^2) \;\middle|\; \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n\right\}$$

如下。

定理 5.1。 令 $t(\mathbf{x}) = \alpha\|\mathbf{x}\|^2$ 对于 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$，其中 $\alpha > 0$。任取 $(\mathbf{x}, y) \notin T := \operatorname{gra}(t)$，并令

$$\Delta := \frac{(1 - 2\alpha\overline{y})^3}{216\alpha^6} + \frac{\|\overline{\mathbf{x}}\|^2}{16\alpha^4}.$$

则 $(\mathbf{x}, y)$ 到 T 上的投影为

$$P_T(\overline{\mathbf{x}}, \overline{y}) = \begin{cases} (\mathbf{0}, 0) & \text{if } \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \text{ and } \Delta \geq 0, \\ \left\{(\mathbf{w}, t(\mathbf{w})) \;\middle|\; \|\mathbf{w}\| = \sqrt{(1/\alpha)\overline{y} - 1/(2\alpha^2)}\right\} & \text{if } \overline{\mathbf{x}} = \mathbf{0} \text{ and } \Delta < 0, \\ (\mathbf{w}_1, t(\mathbf{w}_1)) & \text{if } \overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \text{ and } \Delta \geq 0, \\ (\mathbf{w}_2, t(\mathbf{w}_2)) & \text{if } \overline{\mathbf{x}} \neq \mathbf{0} \text{ and } \Delta < 0, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{w}_i := (w_i / \|\mathbf{x}\|)\mathbf{x}$，其中

$$w_1 := \sqrt[3]{\frac{\|\overline{\mathbf{x}}\|}{4\alpha^2} - \sqrt{\Delta}} + \sqrt[3]{\frac{\|\overline{\mathbf{x}}\|}{4\alpha^2} + \sqrt{\Delta}},$$
$$w_2 := 2\sqrt{\frac{2\alpha\overline{y} - 1}{6\alpha^2}}\cos(\vartheta/3),$$

且 $\vartheta :=$ 反余弦 $\left(\frac{3\sqrt{6}}{2}\alpha\|\mathbf{x}\|/(2\alpha y - 1)^{3/2}\right)$。

证明。要计算投影，我们必须求解优化问题

$$\begin{aligned} \text{Min} \quad & \|(\mathbf{x}, \alpha\|\mathbf{x}\|^2) - (\overline{\mathbf{x}}, \overline{y})\| \\ \text{s.t.} \quad & \mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \end{aligned}$$

因此，我们关注于最小化函数

$$g(\mathbf{x}) := \|(\mathbf{x}, \alpha\|\mathbf{x}\|^2) - (\overline{\mathbf{x}}, \overline{y})\|^2 = \|\mathbf{x} - \overline{\mathbf{x}}\|^2 + (\alpha\|\mathbf{x}\|^2 - \overline{y})^2.$$

最小化元 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}^n$ 必须满足 g

$$\nabla g(\mathbf{w}) = 2(\mathbf{w} - \overline{\mathbf{x}}) + 4\alpha(\alpha\|\mathbf{w}\|^2 - \overline{y})\mathbf{w} = \mathbf{0},$$

也就是说，

$$(2\alpha^2\|\mathbf{w}\|^2 + 1 - 2\alpha\bar{y})\mathbf{w} = \bar{\mathbf{x}}. \tag{17}$$

让我们考虑两种情况：

- 如果 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$，那么 $\mathbf{w} = \mathbf{0}$ 或 $2\alpha^2\|\mathbf{w}\|^2 + 1 - 2\alpha y = 0$。后一种情况给出方程 $\|\mathbf{w}\|^2 = (1/\alpha)y - 1/(2\alpha^2)$，这要求 $2\alpha y - 1 \geq 0$（或者，等价地，$\Delta \leq 0$）。由于 $g(\mathbf{w}) = y/\alpha - 1/(4\alpha^2) \leq y^2 = g(0)$，函数 g 的最小值在任意满足 $\|\mathbf{w}\| = \sqrt{(1/\alpha)y - 1/(2\alpha^2)}$ 的 $\mathbf{w} \in \mathbb{R}n$ 处取得（当 $\Delta < 0$ 时），否则在 $(0, 0)$ 处取得。

- 如果 $\mathbf{x} \neq 0$，根据 (17) 可以写成 $\mathbf{w} = \mu \frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\mathbf{x}\|}$。因此，我们需要求出使 μ 最小的值

$$g\left(\mu\frac{\bar{\mathbf{x}}}{\|\bar{\mathbf{x}}\|}\right) = (\mu - \|\bar{\mathbf{x}}\|)^2 + (\alpha\mu^2 - \bar{y})^2,$$

这对应于求点 $(\|\mathbf{x}\|, y) \in \mathbb{R}^2$ 在抛物线 $s(x) = \alpha x^2$ 上的投影。可以利用 推论 3.2 计算，由此可得相应表达式。 ■

在 图 4 中，我们展示了 $n = 2$ 时点到抛物线的投影。左图中，黑点的投影是多值的（红色圆圈）。右图中，投影是唯一的一个（红色）点。

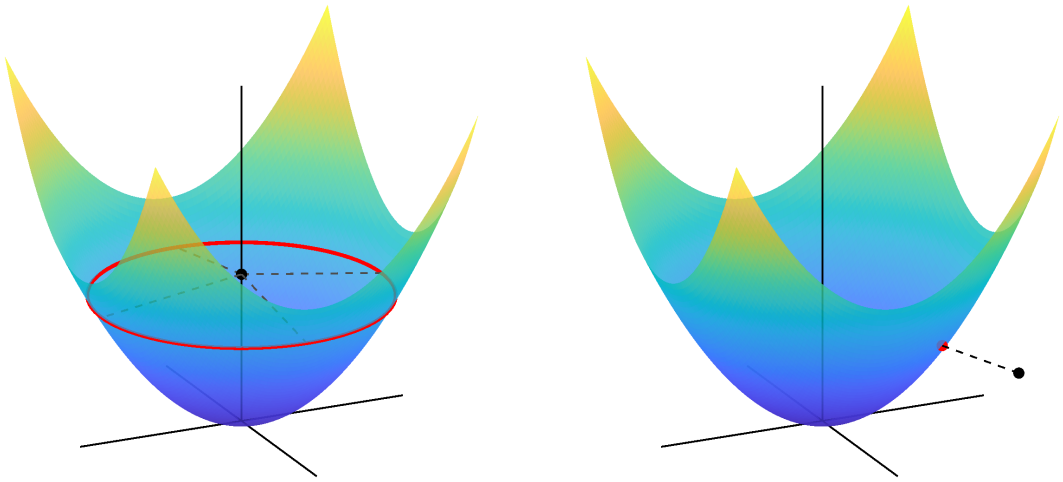


图 4：多值投影（左）和单值投影（右）

致谢

FJAA 和 CLP 部分获得了由欧洲区域发展基金／欧盟资助的 PID2022-136399NB-C21 号拨款，以及 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 的资助。HHB 的研究获得了加拿大自然科学与工程研究委员会的资助。CLP 获得了由 MICIU/AEI/10.13039/501100011033 资助的 PREP2022- 000118 号拨款，以及“欧洲社会基金投资于你的未来”项目的资助。

参考文献

[1] H.H. Bauschke、M. Krishan Lal 和 X. Wang：实系数三次多项式的实根与优化，《凸分析杂志》**32**（2025年），第 1 期，119–144。[2] C.C. Chou：二维中点到抛物线距离的闭式通解，《国际计算机科学与数学杂志》**15**（2022年），第 2 期，132–141。