arXiv:2512.22595v1 [math.AC] 27 Dec 2025

极小自由分解自对偶或最终周期的模

SHINNOSUKE KOSAKA

Abstract. 设 R 为交换诺特局部环。本文从有限生成 R-模的上同调模和 Ext 模出发，研究其极小自由分解的自对偶性和最终周期性。作为应用，我们重新证明了 Dey 的定理。

1. 引言

本文始终假设所有环均为交换诺特环，所有模均为有限生成模。研究模的极小自由分解的结构，是交换代数中最重要的主题之一。本文着重研究这些分解的自对偶性和最终周期性。

设 R 为剩余域为 k 的局部环，且 M R-模。取 M的极小自由分解$F=($ $\cdots \xrightarrow{d_3} F_2 \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to 0)$。对每个整数 $n \geq 0$， d_{n+1}的余核称为 M的第 n个上同调，记作 $\Omega_R^n M$。若 $\operatorname{pd}_R M < \infty$ 且 F与复形 $F^* = (0 \to F_0^* \xrightarrow{d_1^*} F_1^* \xrightarrow{d_2^*} \cdots \xrightarrow{d_{r-1}^*} F_{r-1}^* \xrightarrow{d_r^*} F_r^* \to 0)$同构，其中 $r = \operatorname{pd}_R M$ 且 $(-)^* = \operatorname{Hom}_R(-, R)$，则称 F为自对偶。对于整数 $a > 0$，若存在整数 $n \geq 0$，使得 F 与如下形式的复形同构，则称 F 为最终周期的，周期为 a：

$$\begin{array}{rcccccccccc} (\cdots & \longrightarrow & F_{n+a-1} & \xrightarrow{d_{n+a-1}} & F_{n+a-2} & \xrightarrow{d_{n+a-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_{n+2}} & F_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & F_n \\ & \longrightarrow & F_{n+a-1} & \xrightarrow{d_{n+a-1}} & F_{n+a-2} & \xrightarrow{d_{n+a-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_{n+2}} & F_{n+1} & \xrightarrow{d_{n+1}} & F_n \\ & \xrightarrow{d_n} & F_{n-1} & \xrightarrow{d_{n-1}} & F_{n-2} & \xrightarrow{d_{n-2}} & \cdots & \xrightarrow{d_2} & F_1 & \xrightarrow{d_1} & F_0 \longrightarrow 0). \end{array}$$

这等价于存在一个整数 n，使得 $\Omega_R^n M \cong \Omega_R^{n+a} M$。我们称 M 是全自对偶的，当且仅当它非零且满足：

$$\operatorname{Ext}_R^i(M, R) \cong \begin{cases} M & \text{if } i = \operatorname{grade} M, \\ 0 & \text{if } i \neq \operatorname{grade} M. \end{cases}$$

关于 极小自由分解的自对偶性，我们得到以下定理，这是本文的第一个主要结果。

定理 1.1 (命题 3.1、3.3 和定理 3.5)。 设 R 为一个局部环， M 为一个非零的级为 g 的 R-模，且 F 是 M 的极小自由分解。
(1) 假设 M 具有有限投射维数。那么，当且仅当 M 是全自对偶时， F 是自对偶。此时，对所有整数 $0 \leq i \leq g-1$，都有$(\Omega_R^i M)^* \cong \Omega_R^{g+1-i} M$。(2) 假设存在两个整数 $0 \leq m$、 $n < g$，使得$(\Omega_R^m M)^* \cong \Omega_R^n M$。那么有$m$、 $n \geq 2$，且 $g = \operatorname{pd}_R M = m + n - 1$，并且 F是自对偶的。

令上述定理中的 $M = k$ 取值为……，即可得到 Dey 的一个定理 [4, 定理 1.1]。

推论 1.2 (Dey)。 设 R 是一个局部环，且 $t =$ 深度 $R \geq 3$。若对某个整数$2 \leq i < t$有$(\Omega_R^i k)^* \cong \Omega_R^i k$， 则 R 是正则的，且 $t = 2i - 1$。

关于极小自由分解的最终周期性，我们得到以下定理，这是本文的第二个主要结果。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 13D02, 13H10。*Key words and phrases.* 最终周期的、G-完美模、极小自由分解、自对偶、上同调模。

定理 1.3 (定理 3.8 和 3.9)。 设 R 为一个局部环， M 为一个级为 g 的 *G*-完美 R-模，且 F 是 M 的极小自由分解。令 $N=\operatorname{Ext}^g_R(M,R)$。
(1) 假设 F 是周期为 $a>0$的最终周期模。那么对于所有整数 $i\geq g$ 和 $m\geq \frac{i}{a}$，都有 $(\Omega^i_R N)^*\approx \Omega^{g+ma-i}_R M$。(2) 假设存在两个整数 $i\geq g$和 $j\geq 0$，使得 $i+j>g$且 $(\Omega^i_R N)^*\approx\Omega^j_R M$。那么$F$ 是周期为 $i+j-g$ 的最终周期模。

这里，环 R 上的模 M 若其 Gorenstein 维数等于级数 $\operatorname{grade}_R M$，则称为 *G*-完美 。对于 R-模 M 和 N，如果存在投射 R-模 P,Q 使得 $M\oplus P\cong N\oplus Q$，则记作 $M\approx N$。

令定理 1.3 中的 $M=k$，我们便得到 Dey 的另一个定理 [4, 定理 1.2].

推论 1.4 (Dey)。 设 R 是一个深度为 $t=$ 的局部环 $R\geq 2$。
(1) 若 R 是超曲面且 t 为偶数，则对所有整数 $i\geq t$，都有 $(\Omega^i_R k)^*\cong\Omega^i_R k$。(2) 若对某个整数 $i\geq t$，有 $(\Omega^i_R k)^*\cong\Omega^i_R k$，则 R 是超曲面。

在第 2 节中，我们给出一些全自对偶模的例子，并研究它们的基本性质。在第 3 节中，我们将证明定理 1.1 和 1.3。

2. Totally self-dual modules

在整个 本节中，设 R 为一个环。我们从全自对偶模的定义开始 .

定义 2.1。 设 M 为一个非零的 R-模，其级为 g。若 M 满足以下条件，则称其为全自对偶

$$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)\cong\begin{cases}M & \text{if } i=g,\\ 0 & \text{if } i\neq g.\end{cases}$$

我们陈述全自对偶模的一些基本性质。

引理 2.2。 （1）如果 M 和 N 是具有相同级的全自对偶 R-模，那么 $M\oplus N$ 也是全自对偶的。

（2）设 $R\to S$ 是一个平坦环同态， M 是一个 R-模。如果 M 是全自对偶的且 $M\otimes_R S$ 非零，那么 $M\otimes_R S$ 作为 S-模是全自对偶的。当 R 是局部的且 $R\to S$ 是完备化映射时，反之亦然。

（3）设 M 是一个 R-模，且 $x\in\operatorname{Ann}_R M$ 是一个 R-正则元。那么， M 作为 R-模是全自对偶的，当且仅当 M 作为 $R/(x)$-模是全自对偶的。
（4）设 M 是一个级为 g 的全自对偶 R-模， $x\in R$ 是一个 M-正则元，且满足 $M\neq xM$。那么， M/xM 是一个级为 $g+1$ 的全自对偶 R-模。

证明。 (1) 显然。
(2) 令 $g=$级 M。若 M 是全自对偶的，则有

$$\operatorname{Ext}^i_S(M\otimes_R S,S)\cong\operatorname{Ext}^i_R(M,R)\otimes_R S\cong\begin{cases}M\otimes_R S & \text{if } i=g,\\ 0 & \text{if } i\neq g.\end{cases}$$

因此， $M\otimes_R S$ 是一个 S-模上的全自对偶对象。接下来，我们假设 R 是局部的， $R\to S$ 是完备化映射，且 $M\otimes_R S$ 作为 S-模是全自对偶的。于是得到

$$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)\otimes_R S\cong\operatorname{Ext}^i_S(M\otimes_R S,S)\cong\begin{cases}M\otimes_R S & \text{if } i=g,\\ 0 & \text{if } i\neq g.\end{cases}$$

由 [5, 推论 1.15]， M 是全自对偶的。
(3) 由 [7, 引理 18.2], ，我们有

$$\operatorname{Ext}^i_R(M,R)\cong\begin{cases}\operatorname{Ext}^{i-1}_{R/(x)}(M,R/(x)) & \text{if } i>0,\\ 0 & \text{if } i=0.\end{cases}$$

断言由此得出。

（4）由短正合列 $0 \to M \xrightarrow{x} M \to M/xM \to 0$，我们对每个 i 都得到一个正合列 $\mathrm{Ext}^{i-1}_R(M,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(M/xM,R) \to \mathrm{Ext}^i_R(M,R)$。若 $i \neq g, g+1$，则有 $\mathrm{Ext}^{i-1}_R(M,R) = \mathrm{Ext}^i_R(M,R) = 0$，因此 $\mathrm{Ext}^i_R(M/xM,R) = 0$。此外，还有一个正合列

$$0 \to \mathrm{Ext}^g_R(M/xM,R) \to \mathrm{Ext}^g_R(M,R) \xrightarrow{x} \mathrm{Ext}^g_R(M,R) \to \mathrm{Ext}^{g+1}_R(M/xM,R) \to 0.$$

由于 $\mathrm{Ext}^g_R(M,R) \cong M$ 并且 x 是 M 的正则元，我们可知 $\mathrm{Ext}^g_R(M/xM,R) = 0$，且 $\mathrm{Ext}^{g+1}_R(M/xM,R)$ 同构于 M/xM。因此，M/xM 是一个级为 $g+1$ 的全自对偶 R-模。□

以下是全自对偶模的例子。

例 2.3。(1) 显然，每个非零自由 R-模都是全自对偶的。
(2) 设 R 是一个剩余域为 k 的局部环。那么，当且仅当 k 是 Gorenstein 环时，k 才是全自对偶的，见 [7,定理 18.1]。(3) 设 R 是一个主理想整环。那么，每个非零挠 R-模 M 都具有如下形式：$R/(a_1) \oplus R/(a_2) \oplus \cdots \oplus R/(a_n)$，其中 a_1、a_2、……、a_n 都既非零也非单位。因此，根据引理 2.2 的 (1) 和 (4)，M 是全自对偶的。(4) 设 R 是一个 Gorenstein 局部环，I 是 R 的一个真理想，且 R/I 是 Cohen-Macaulay 模。令 $g = \text{级}\, I = \mathrm{ht}\ I$。那么，对于每个整数 $i \neq g$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(R/I,R) = 0$；并且根据 [2, 定理 3.3.7]，$\mathrm{Ext}^g_R(R/I,R)$ 是 R/I 的典范模。因此，当且仅当 R/I 是 Gorenstein 环时，R/I 才是一个全自对偶 R-模。

接下来，我们从 Gorenstein 维数的角度考察全自对偶模的性质。首先回顾 Gorenstein 维数及相关概念的定义。

定义 2.4。设 M 是一个 R-模。
(1) 若 M 满足以下两个条件，我们称其为全反身的：(a) M 是反身的。也就是说，自然同态 $M \to M^{**}$ 是同构。(b) 对所有正整数 i，均有 $\mathrm{Ext}^i_R(M,R) = \mathrm{Ext}^i_R(M^*,R) = 0$。

(2) M 的*Gorenstein* 维数（或*G*-维数）是以下述模的分解长度的下确界：M 由全反身模构成，记作 $\mathrm{Gdim}_R M$。也就是说，

$$\mathrm{Gdim}_R M := \inf\left\{ n \,\middle|\, \text{存在一个由 } R\text{-模构成的正合列 } 0 \to G_n \to \cdots \to G_0 \to M \to 0,\ \text{使得 } G_0,\ldots,G_n \text{ 均为全反身模。} \right\}.$$

(3) 如果 M 满足 *G*-完美条件，即 $M \neq 0$ 且 $\mathrm{grade}_R M = \mathrm{Gdim}_R M$，则称其为 G-完美的。我们用 $\mathcal{M}_g(R)$ 表示级为 g 的 G- 完美 R- 模范畴。

注意，对于每个非零 R-模 M，不等式 $\mathrm{grade}_R M \leq \mathrm{Gdim}_R M \leq \mathrm{pd}_R M$ 都成立。因此，如果 M 是完美的或全反身的，那么 M 是 G-完美的。

范畴 $\mathcal{M}_g(R)$ 具有如下性质。

命题 2.5。设 $g \geq 0$ 为一个整数。则反变函子 $\mathrm{Ext}^g_R(-,R)$ 在 $\mathcal{M}_g(R)$ 上给出一个对偶。也就是说，对于每个 $M \in \mathcal{M}_g(R)$，以下两个条件成立：
(1) $\mathrm{Ext}^g_R(M,R) \in \mathcal{M}_g(R)$。(2) 存在一个自然同构 $\mathrm{Ext}^g_R(\mathrm{Ext}^g_R(M,R),R) \cong M$。

证明。(1) 这由 [8, 定理 1.8] 得出。
(2) 设 $\boldsymbol{x} = x_1,\ldots,x_g$ 是 $\mathrm{Ann}_R(M) \subset \mathrm{Ann}_R(\mathrm{Ext}^g_R(M,R))$ 中的一个 R-序列。根据 [3, Proposition 2.2.8]，M 是一个全反身的 $R/(\boldsymbol{x})$-模。因此，由 [7, Lemma 18.2]，可得自然同构 $\mathrm{Ext}^g_R(\mathrm{Ext}^g_R(M,R),R) \cong \mathrm{Hom}^{R/(\boldsymbol{x})}(\mathrm{Hom}^{R/(\boldsymbol{x})}(M,R/(\boldsymbol{x})),R/(\boldsymbol{x})) \cong M$。□

下面的命题表明，全自对偶模恰好是 $\mathcal{M}_g(R)$ 中 $\mathrm{Ext}^g_R(-,R)$ 的不动点。

命题 2.6。设 M 是一个级为 g 的非零 R-模。则以下两个条件等价。

(1) M 是全自对偶的。(2) M 是 G-完美的，且 $\mathrm{Ext}^g_R(M,R) \cong M$。

证明。 (1)⇒(2)：根据 [3, 定理 1.2.7], ，只需证明 M 具有有限 G-维数。设 $\boldsymbol{x}=x_1,\dots x_g$ 是 $\mathrm{Ann}_R M$ 中的一个 R-序列。由引理 2.2， M 作为一个 $R/(\boldsymbol{x})$-模是全自对偶的。根据 [3, 命题 2.2.8], ，只需证明 M 作为一个 $R/(\boldsymbol{x})$-模是全反身的。因此，我们可以假设 $g=0$。由于 $M^*=\mathrm{Ext}^0_R(M,R)\cong M$，我们有 $M\cong M^{**}$。因此，由 [3, 命题 1.1.9 (b)]， M 是反身的。此外，我们看到，对所有整数 $i>0$， $\mathrm{Ext}^i_R(M^*,R)\cong\mathrm{Ext}^i_R(M,R)=0$。因此， M 是全反身的。

(2)⇒(1)：由 [3, 定理 1.2.7], 此推论显然。 □

我们以给出几个全自对偶模的更多例子来结束本节。

例 2.7. (1) 设 $f\in R$ 是一个非单位正则元。令 $(-)=(-)\otimes_R R/(f)$。两个大小相同的方阵 (φ,ψ) 称为 f 的矩阵分解，若 $\varphi\psi=\psi\varphi=fE$，其中 E 是单位矩阵。对于 f 的矩阵分解 (φ,ψ)，存在一个周期正合列

$$\cdots\xrightarrow{\overline{\psi}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\psi}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\varphi}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\psi}}\cdots$$

自由 R-模；详情参见 [9, 第 7] 章。令 $M=$余核 $\varphi\cong$余核 φ。对于矩阵 A，我们用 A^T 表示其转置。由于 (φ^T,ψ^T) 也是 f 的矩阵分解，复形

$$\cdots\xrightarrow{\overline{\psi^T}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\varphi^T}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\psi^T}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\varphi^T}}\overline{R}^{\oplus n}\xrightarrow{\overline{\psi^T}}\cdots$$

也是正合的。这意味着 M 是一个全反身 R-模。此外，M 是一个级为 1 的完美 R-模，满足 $\mathrm{Ext}^1_R(M,R)\cong\mathrm{Hom}_R(M,R)\cong$余核 $\varphi^T\cong$余核 $\overline{\varphi}^T$。因此， M 作为一个 R-模（或作为一个 R-模）是全自对偶的，当且仅当余核 φ^T 同构于 M。若 φ^T 与 φ 等价，则满足此条件。当 R 是局部的时，由极小自由分解的唯一性，逆命题也成立。这里，若存在可逆矩阵 α,β 使得 $\alpha\varphi=\psi\beta$，我们就称同尺寸的两个矩阵 φ,ψ 是等价的 。

(2) 设 x 是 R 中的一个元素，满足 $(0:x)=(x)$。那么存在一个正合列 R

$$\cdots\xrightarrow{x}R\xrightarrow{x}R\xrightarrow{x}R\xrightarrow{x}\cdots.$$

按照与 (1) 相同的论证， $R/(x)$ 是一个全自对偶 R-模。

3. Proof of main results

本节中，我们证明主要结果。整个本节中，设 $(R,\mathfrak{m},k)$ 是一个局部环。首先，我们说明全自对偶模与极小自由分解的自对偶性之间的关系。

命题3.1。 设 M 是一个非零的有限投射维数 R-模，且 F 是 M 的一个极小自由分解。那么以下条件等价。

(1) F 是自对偶的。(2)
M 是全自对偶的。

证明。 令 $n=\mathrm{pd}_R M$ 和 $F=(0\to F_n\xrightarrow{d_n}\cdots\xrightarrow{d_1}F_0\to 0)$。

(1)⇒(2)：由于序列

$$0\to F_0^*\xrightarrow{d_1^*}\cdots\xrightarrow{d_n^*}F_n^*\to M\to 0$$

是正合的，我们有

$$\mathrm{Ext}^i_R(M,R)\cong\begin{cases}M & \text{if } i=g,\\ 0 & \text{if } i\neq g.\end{cases}$$

因此， M 是全自对偶的。

(2)⇒(1)：根据全自对偶模的定义，该序列

$$0\to F_0^*\xrightarrow{d_1^*}\cdots\xrightarrow{d_n^*}F_n^*\to M\to 0$$

是正合的。由于 $\mathrm{Im}\ d_i\subset\mathfrak{m}F_{i-1}$，我们得到 $\mathrm{Im}\ d_i^*\subset\mathfrak{m}F_i^*$。因此， $F^*=(0\to F_0^*\xrightarrow{d_1^*}\cdots\xrightarrow{d_n^*}F_n^*\to 0)$ 是 M 的极小自由分解。根据极小自由分解的唯一性， F^* 与 F 同构。□

例3.2。 (1) 设 $\boldsymbol{x}=x_1,\dots,x_n$ 是一个 R-正则序列。那么 $\boldsymbol{x}$ 的 Koszul复形 $\mathrm{K}(\boldsymbol{x})$ 是 $R/(\boldsymbol{x})$ 的极小自由分解。根据 [2, 命题1.6.10], $\mathrm{K}(\boldsymbol{x})$ 是自对偶的。这也可由引理2.2(4)和命题3.1推出。

(2) 根据例2.3(2)和命题3.1，局部环 R 是正则的，当且仅当 k 的极小自由分解是自对偶的。这也可由(1)推出。

接下来，我们证明，具有自对偶极小自由分解的模的上同调满足某些同构关系。

命题3.3。 设 M 是一个非零的 R-模，其级为 g。如果 M 的一个极小自由分解是自对偶的，那么对所有整数 $0\le i\le g-1$，都有 $(\Omega_R^i M)^*\cong\Omega_R^{g+1-i}M$。

证明。 设 $0\to F_g\xrightarrow{d_g}\cdots\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0\to 0$ 是 M 的一个极小自由分解。那么 R-对偶复形 $0\to F_0^*\xrightarrow{d_1^*}F_1^*\xrightarrow{d_2^*}\cdots\xrightarrow{d_g^*}F_g^*\to 0$ 也是 M 的一个极小自由分解。因此，对于每个整数 $0\le i\le g-1$，存在同构 $(\Omega_R^i M)^*\cong$(余核 d_{i+1})$^*\cong$核$(d_{i+1}^*)\cong\Omega_R^{g+1-i}M$。 □

我们考察上述命题的逆命题是否成立。更确切地说，我们提出以下问题。

问题3.4。 设 M 是一个非零的 R模，其级为 g，且 $0\le i\le g-1$ 为一个整数。若存在一个同构 $(\Omega_R^i M)^*\cong\Omega_R^{g+1-i}M$，是否意味着 M的极小自由分解是自对偶的?

下面的定理表明，对于所有整数 $2\le i\le g-1$，问题3.4的答案都是肯定的。

定理 3.5。 设 M 是一个非零的 R模，其级为 g。假设存在两个整数 $0\le m$、$n<g$，使得 $(\Omega_R^m M)^*\cong\Omega_R^n M$。那么有 m、$n\ge 2$，且 $g=\mathrm{pd}_R M=m+n-1$，并且 M 的极小自由分解是自对偶的。

证明。 设 $F=(\cdots\xrightarrow{d_2}F_1\xrightarrow{d_1}F_0\to 0)$ 是 M 的一个极小自由分解。由于对每个整数 $0\le i\le m$，$\mathrm{Ext}_R^i(M,R)=0$，故序列

$$0\to F_0^*\to\cdots\to F_{m-1}^*\to(\Omega_R^m M)^*\to 0$$

是正合列。将这个正合列与正合列拼接，

$$0\to\Omega_R^n M\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0,$$

我们得到一个正合列

$$0\to F_0^*\to\cdots\to F_{m-1}^*\to F_{n-1}\to\cdots\to F_0\to M\to 0.$$

这是 M 的一个极小自由分解。因此， M 的投射维数为 $m+n-1$。由于 m， $n<g\le\mathrm{pd}_R M=m+n-1$，我们有 m， $n\ge 2$。根据 $[6,\text{定理 }43],\Omega_R^m M$ 是反身的。因此，$(\Omega_R^n M)^*\cong((\Omega_R^m M)^*)^*\cong\Omega_R^m M$。我们可以假设 $m\ge n$。根据极小自由分解的唯一性，存在一个正合列的同构

$$(0\to F_0^*\to\cdots\to F_{m-1}^*\to(\Omega_R^m M)^*\to 0)\cong(0\to F_{m+n-1}\to\cdots\to F_n\to\Omega_R^n M\to 0).$$

对这个同构取对偶，我们得到一个正合列的同构

$$(0\to\Omega_R^m M\to F_{m-1}\to\cdots\to F_0)\cong(0\to(\Omega_R^n M)^*\to F_n^*\to\cdots\to F_{m+n-1}^*).$$

由于 $m\ge n$，结合上述两个正合列的同构，我们得出 F 同构于复形 $(0\to F_0^*\xrightarrow{d_1^*}\cdots\xrightarrow{d_n^*}F_n^*\to 0)$，且 $g=\mathrm{pd}_R M$。□

推论的证明 *y 1.2.* 该断言立即由例 3.2(2)和定理 3.5得到。 □

注 3.6. 如果 $i=0$ 或 $i=1$，问题3.4的答案是否定的。在每种情形下我们都有反例。

（该 情形 $i=0$）设 $S=k[\![x,\ y]\!]$ 为域 k上的形式幂级数环。考虑 e 矩阵

$$\varphi=\begin{pmatrix}x^2 & -y\\ 0 & x\end{pmatrix},\quad \psi=\begin{pmatrix}x & y\\ 0 & x^2\end{pmatrix}.$$

那么（φ， ψ）是 x^3 的矩阵分解，余核 $\varphi\cong(x,\ y)/(x^3)$，且余核$\psi\cong(x^2,\ y)/(x^3)$。令$R=S/(x^3)$、 $M=(x,\ y)/(x^3)$以及 $N=(x^2,\ y)/(x^3)$。通过初等变换，我们看到 φ 的转置与 ψ 等价。因此，$\mathrm{Hom}_R(M,\ R)\cong N$。根据例 2.7(1)， M 是一个级为

1 的完美 -模，且 $\mathrm{Ext}^1_S(M,\ S)\ \cong N$。由于 $(\Omega^0_S M)^* = \mathrm{Ext}^0_S(M,\ S)\ = 0 = \Omega^2_S M = \Omega^{1+1-0}_S M,\ \ M$ 满足问题 3.4的假设。假设 M 是一个全自对偶的 S-模。那么 $M \cong N$。与 $S/(x^2,\ y^2)$ 取张量积，得到正合列

$$(S/(x^2,y^2))^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} 0 & -y \\ 0 & x \end{pmatrix}} (S/(x^2,y^2))^{\oplus 2} \longrightarrow M/(x^2,y^2)M \longrightarrow 0\ ,$$

$$(S/(x^2,y^2))^{\oplus 2} \xrightarrow{\begin{pmatrix} x & y \\ 0 & 0 \end{pmatrix}} (S/(x^2,y^2))^{\oplus 2} \longrightarrow N/(x^2,y^2)N \longrightarrow 0\ .$$

因此，$N/(x^2,\ y^2)N \cong k \oplus S/(x^2,\ y^2)$。另一方面，$M/(x^2,\ y^2)M$没有 $S/(x^2,\ y^2)$-自由直和项，因为 xy会消去$(M/(x^2,\ y^2)M)$。这与 M同构于 N的假设相矛盾。因此，M不是一个 S-模的全自对偶。

（情形 $i = 1$）我们沿用上文的记号。令 $R' = R/(y^2) = S/(x^3,\ y^2)$、$M' = M/y^2M$和 $N' = N/y^2N$。由于 y^2是一个 R-正则元，以下序列

$$\cdots \xrightarrow{\psi\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\varphi\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\psi\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\varphi\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\psi\otimes_S R'} \cdots,$$

$$\cdots \xrightarrow{\psi^T\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\varphi^T\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\psi^T\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\varphi^T\otimes_S R'} R'^{\oplus 2} \xrightarrow{\psi^T\otimes_S R'} \cdots,$$

是正合的，$\mathrm{Coker}(\varphi\otimes_S R') \cong M'$，且 $\mathrm{Coker}(\psi\otimes_S R') \cong N'$。因此，$M'$是一个级为2的完美 S-模，且 $\mathrm{Ext}^2_S(M',S)\ \cong \mathrm{Hom}_{R'}(M',R')\ \cong\ N'$。令 $0 \to S^{\oplus c} \to S^{\oplus b} \to S^{\oplus a} \to 0$为 M'的一个极小 S-自由分解。则 $a = \mu_S(M')\ = \mu_{R'}(M')\ = 2$，且 $c = \mu_S(\mathrm{Ext}^2_S(M',S))\ = \mu_{R'}(N')\ = 2$。这里，对于局部环 T上的模 L，$\mu_T(L)$表示 L的极小生成元个数。由于$(\Omega^1_S M')^* \cong S^{\oplus a} = S^{\oplus 2} = S^{\oplus c} \cong \Omega^2_S M' = \Omega^{2+1-1}_S M',\ \ M'$满足问题 3.4的假设。由于$M/(x^2,y^2)M \ncong N/(x^2,y^2)N,\ \ M'$不同构于 N'。因此，M'不是一个S-模的全自对偶。

接下来，我们考察 G-完美模的极小自由分解的最终周期性。下面的引理是证明主要定理的关键。

引理 3.7. 设 M 是一个非零的 R-模，其级为 g，并且对所有非负整数 $i \neq g$，都有 $\mathrm{Ext}^i_R(M,R)\ = 0$，令 $N = \mathrm{Ext}^g_R(M,R)$。则对所有整数 $i \geq g$，都有 $\Omega^g_R N \approx \Omega^i_R((\Omega^i_R M)^*)$。

证明。 设 $F = (\cdots \xrightarrow{d_2} F_1 \xrightarrow{d_1} F_0 \to 0)$ 是 M 的一个极小自由分解。根据假设，存在两个正合列

$$0 \to F_0^* \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_{g-1}^*} F_{g-1}^* \to (\Omega^g_R M)^* \to N \to 0, \tag{1}$$

$$0 \to (\Omega^g_R M)^* \to F_g^* \xrightarrow{d_{g+1}^*} \cdots \xrightarrow{d_{i-1}^*} F_{i-1}^* \to (\Omega^i_R M)^* \to 0. \tag{2}$$

将 (1) 拆分为两个正合列 $0 \to F_0^* \xrightarrow{d_1^*} \cdots \xrightarrow{d_{g-1}^*} F_{g-1}^* \to L \to 0$ 和 $0 \to L \to (\Omega^g_R M)^* \to N \to 0$，我们得到 $\Omega^g_R L = 0$。由马蹄引理，可得一个短正合列 $0 \to \Omega^g_R L \to \Omega^g_R((\Omega^g_R M)^*) \oplus R^{\oplus a} \to \Omega^g_R N \to 0$，其中 $a \geq 0$。于是得到 $\Omega^g_R((\Omega^g_R M)^*) \approx \Omega^g_R N$。

根据 (2)，我们有 $\Omega^{i-g}_R((\Omega^i_R M)^*) \cong (\Omega^g_R M)^*$。由此可得 $\Omega^i_R((\Omega^i_R M)^*) \cong \Omega^g_R(\Omega^{i-g}_R((\Omega^i_R M)^*)) \cong \Omega^g_R((\Omega^g_R M)^*) \approx \Omega^g_R N$。□

以下定理表明，具有最终周期极小自由分解的 G-完美模的上同调满足某种对偶。

定理 3.8。 设 M 是一个级为 g 的 G-完美 R-模，F 是 M 的极小自由分解，并令$N = \mathrm{Ext}^g_R(M,R)$。假设 F最终以周期 $a > 0$ 周期。则对所有整数 $i \geq g$ 和 $m \geq \frac{i}{a}$，有 $(\Omega^i_R N)^* \approx \Omega^{g+ma-i}_R M$。

证明。 根据假设，存在一个整数 $n \geq 0$ 使得 $\Omega^n_R M \cong \Omega^{n+a}_R M$。由引理 2.5 和引理 3.7 可知，$\Omega^i_R((\Omega^i_R N)^*) \approx \Omega^g_R M$。因此，我们有 $\Omega^{n+i}_R((\Omega^i_R N)^*) \approx \Omega^{n+g}_R M \cong \Omega^{n+g+ma}_R M \cong \Omega^{n+i}_R(\Omega^{g+ma-i}_R M)$。由于 $\mathrm{Gdim}_R M = \mathrm{Gdim}_R N = g$ 且 $ma \geq i \geq g,\ \ R$-模 $(\Omega^i_R N)^*$和 $\Omega^{g+ma-i}_R M$是全反身的。由 $[4, \text{引理 } 3.6]$,可得 $(\Omega^i_R N)^* \approx \Omega^{g+ma-i}_R M$。□

我们考察上述定理的逆命题。更准确地说，我们证明如下命题 .

定理 3.9。设 M 是一个级为 g的 *G*-完美 R-模， F 是 M的一个极小自由分解，并令$N = \mathrm{Ext}^g_R(M, R)$。假设存在两个整数 $i \geq g$和 $j \geq 0$，使得 $i + j > g$ 且$(\Omega^i_R N)^* \approx \Omega^j_R M$。那么 F是最终周期的，周期为 $i + j - g$。

证明。由引理 2.5 和引理 3.7，我们有 $\Omega^g_R M \approx \Omega^i_R((\Omega^i_R N)^*) \approx \Omega^{i+j}_R M$。因此，$\Omega^{g+1}_R M \cong \Omega^{i+j+1}_R M = \Omega^{g+1+(i+j-g)}_R$。于是， M 是最终周期的，周期为 $i + j - g$。□

最后，我们证明推论 1.4。为此，我们证明以下引理。

引理 3.10. 设 R 是一个剩余域为 k的局部环。那么， k 的极小自由分解最终周期，当且仅当 R 是一个超曲面。

证明. 假设 k 的极小自由分解最终周期。那么，k 的贝蒂数有界。由 [1,定理 8.1.2]可知， R 是一个超曲面。

假设 R 是一个维数为 d的超曲面。不妨设 R 是完备的。那么， R 同构于环 $S/(f)$，其中 S 是一个正则局部环，且 $f \in S \setminus \{0\}$ 不是单位。由于 $\Omega^d_R k$是极大 Cohen–Macaulay 模，存在 f的一个矩阵分解（φ， ψ），使得 $\mathrm{Coker}\,\varphi \cong \Omega^d_R k$；详情参见 [9, 第 7]章。因此，$\Omega^d_R k$ 的极小自由分解是周期的。由此可得， k 的极小自由分解最终周期。□

推论 *1.4* 的证明。由 [4, 引理 3.2]， R 是 Gorenstein 的。因此， k 是全自对偶的。结论由定理 3.8、3.9 和引理 3.10 得出。□

致谢。作者谨向博士导师 Ryo Takahashi 致谢，感谢他提出许多深思熟虑的问题并进行有益的讨论。作者还感谢 Kaito Kimura、Yuki Mifune 和 Yuya Otake 提供宝贵意见。

References

[1] L. L. Avramov, 《无限自由分解》， *Six lectures on commutative algebra (Bellaterra, 1996)*, 1–118, 数学进展丛书，166, *Birkhäuser, Basel*, 1998。[2] W. Bruns; J. Herzog, 《Cohen–Macaulay环》，修订版，剑桥高等数学研究丛书**39**, *Cambridge University Press Cambridge* 1998 , , .

[3] L. W. Christensen, 《Gorenstein 维数》，数学讲义，1747，施普林格出版社，柏林，2000。[4] S. Dey, 《剩余域的上同调何时自对偶? 》，预印本（2025）， arXiv:2505.15707。[5] G. J. Leuschke; R. Wiegand, 《Cohen–Macaulay表示》，数学调查专著 **181** *American Mathematical , , , . Society Providence RI* 2012

[6] V. Maşek, 《交换诺特环上模的 Gorenstein 维数与挠》， *Comm. Algebra* **20**（2000），第 12 期，5783–5812。

[7] H. Matsumura, 《交换环论》，M. Reid 从日文译出，第二版，剑桥高等数学研究丛书**8**， *Cambridge University Press, Cambridge*, 1989。[8] S. Yassemi; L. Khatami; T. Sharif, 《级与 Gorenstein 维数》， *Comm. Algebra* **29**（2001），第 11 期，5085–5094。[9] Y. Yoshino, 《Cohen–Macaulay环上的 Cohen–Macaulay模》，伦敦数学会讲义丛书，**146**, *London Mathematical Society*, 1990。

Graduate School of Mathematics, Nagoya University, Furocho, Chikusaku, Nagoya 464-8602, Japan
Email address: kosaka.shinnosuke.d2@s.mail.nagoya-u.ac.jp