arXiv:2512.22622v1 [cs.DM] 27 Dec 2025

加权图中的罗马支配

Martín Cera[a*] Pedro García-Vázquez[a†] Juan Carlos Valenzuela-Tripodoro[b‡]

2025年12月30日

[a] 塞维利亚大学应用数学系 I，西班牙[b] 加的斯大学数学系，阿尔赫西拉斯校区，西班牙

摘要

对于一个（无权）图 $G=(V,E)$，罗马支配函数是一个函数f：$V\to\{0,1,2\}$，满足：每个顶点 $u\in V$若有 $f(u)=0$，则至少有一个邻点$v\in V$满足 $f(v)=2$。罗马支配函数 f 在 G 上的最小权重 $\sum_{v\in V}f(v)$称为 G 的罗马支配数，记作 $\gamma_R(G)$。由一个图 $G=(V,E)$及一个正实值权函数 $w:V\to\mathrm{R}^{>0}$ 构成的对象称为加权图，记作 $(G;w)$。罗马支配函数 f 在 G 上的最小权重 $\sum_{v\in V}f(v)w(v)$称为 G的加权罗马支配数，记作 $\gamma_{wR}(G)$。无权图的支配数和罗马支配数已得到广泛研究，尤其是其在生物信息学和计算生物学中的应用。然而，用于模拟生物分子结构的图通常需要赋予权重，才能具有生物学意义。本文开启了对加权图中加权罗马支配数的研究。我们首先为这一参数建立若干界，并给出多种可实现性结果。此外，我们确定了若干著名图族的精确值，并证明加权罗马支配数与加权图的差分等价。

关键词： 罗马支配；加权图；差分

1 引言

（非加权）图 G 是一个有序对（V，E），其中 V 是顶点集合，$E\subseteq V\times V$ 是边集合；边是这些顶点之间的连接，通常表示为顶点对。图 $G=$（V，E）与正实值权函数 w：$V\to\mathbf{R}^{>0}$ 一起称为顶点加权图，或简称加权图，记作（$G;w$）。

*电子邮箱：mcera@us.es ORCID：0000-0002-3343-736X

†电子邮箱：pgvazquez@us.es ORCID：0000-0001-9208-9409

‡电子邮箱：jcarlos.valenzuela@uca.es ORCID：0000-0002-6830-492X

图论凭借其卓越的能力，能够以结构化、数学化的方式对任意网络进行建模，因此已成为多个学科中用途广泛且不可或缺的工具。这种抽象过程有助于研究人员深入理解系统的行为、评估其运行能力，并构建鲁棒的预测模型。为此，首先必须将实际挑战表述为一个形式化的数学问题，重点分析连通性、中心性或鲁棒性等特定图参数。

在大多数现实场景中，网络的组成部分及其相互连接并非均一。它们具有内在属性，这些属性决定了整个系统的动态特性。在化学和分子生物学中，分子内的原子具有不同的质量和电负性 [18, 20] ，这些因素会影响分子稳定性和反应性。将蛋白质建模为图时，节点代表氨基酸，边权重是表征它们之间物理距离或相互作用强度的重要指标 [2,11]。这些空间信息对于理解蛋白质折叠和酶功能至关重要。在通信网络中，与连接只有“开”或“关”两种状态的简单图不同，现实的数字网络还取决于带宽 [7], 时延 [22], 和吞吐量 [4]。为边赋予权重，可以让工程师对通过特定路径传输数据的成本进行建模，这是现代互联网路由协议的基础。

尽管图论取得了长足进展，并已广泛应用于复杂网络领域，但当前大量理论研究仍基于对无权图的研究。虽然这类模型在数学上十分优雅，但在应用于现实世界网络固有的异质性时，其适用范围往往有限。将所有连接一视同仁的模型，可能会忽略关键瓶颈，或无法识别资源受限环境中的最高效路径。

从无权图论过渡到加权图论，并非简单的直接翻译任务。一些基本性质并不容易推广。然而，其他性质展现出显著的韧性，可以通过先进的数学框架加以调整。

在无权图的语境下，最受研究且应用最广泛的主题之一是图的支配（见 [13]）。在最简单的形式中，支配集是节点的一个子集，使得网络中的每个节点要么属于该集合，要么与该集合中的至少一个成员相邻。在加权互连网络中，挑战转变为寻找最小权支配集。这具有深远的影响，例如，在生态学中，可以确定必须加以保护的关键栖息地斑块，从而确保物种在破碎化景观中的存续 [3]；在通信领域，当我们希望优化传感器或服务器的部署，以最低的基础设施成本确保网络的全面覆盖时，同样具有重要意义 [16]。

罗马支配是图论中图的支配领域里最引人入胜、研究最广泛的变体之一。不同于经典支配只需一个节点覆盖其邻点，罗马支配引入了战略冗余的概念。这一模型不只是寻求覆盖；它还确保提供保护的节点在调配资源援助其他节点后，仍能保持自身的

完整性和功能。这个概念源于君士坦丁大帝提出的一项军事防御策略，旨在保护4世纪的罗马帝国。君士坦丁下令，除非有第二支军团留守原驻地进行防守，否则任何军团都不得离开当前位置，前往援助遭受攻击的邻近地区。用数学术语来说，这个问题由 Stewart 于1990年形式化，Cockayne 等人则引入了图的罗马支配概念。对于非赋权图$G=(V,E)$，罗马支配函数（简称 RDF）定义为函数 $f\colon V\to\{0,1,2\}$，使得每个满足$f(u)=0$的顶点 $u\in V$，至少与一个满足 $f(v)=2$的顶点 $v\in V$相邻。换言之，每个 RDF 都会根据赋予的标签，将顶点划分为三个集合（V_0,V_1,V_2）：V_2 是具有最大资源容量的顶点子集。 V_1 是拥有足够资源保护自身、但无法援助他人的顶点子集。 V_0 则是自身没有资源的顶点子集。若要受到保护或保障，这些顶点必须至少与 V_2中的一个顶点相邻。目标是找到一个 RDF，以尽可能低的成本保护整个图。罗马支配对于资源调动和服务连续性至关重要的系统具有重要意义，例如服务器架构、数据中心、应急物流、公共安全项目，尤其是系统生物学和疫情控制。在这些领域中，罗马支配可用于识别代谢网络或蛋白质相互作用网络中的控制节点。如果药物必须作用于某条生物通路，罗马支配有助于选出干预点，确保细胞系统即使在外部压力或基因突变的情况下仍保持稳定。已有多项研究致力于探究这一参数及其若干变体的性质（例如参见 [1,5,10,14,15,21]）。

本文研究加权图的罗马支配数。首先，我们建立了一个以经典支配数表示的正式上界。此外，我们推导并证明了若干一般界，并证明这些界是最优的。最后，我们确定了若干基本图族中该参数的精确值，为网络拓扑与设计中的未来应用提供了精确参考。

2 定义与术语

本文中仅考虑无向简单图，且不含环或重边。除非另有说明，术语和定义均遵循参考文献 [6, 12, 13] 。

（非加权）图 G 是一个序偶（V， E），其中 V是顶点集， $E\subseteq V\times V$是边集；边是这些顶点之间的连接，通常表示为顶点对。图 G 中顶点 $u\in V$的邻域为 $N(u)=\{v\in V:(u,\ v)\in E\}$。 u 的闭邻域为 $N[u]=N(u)\cup\{u\}$。

图 $G=(V,\ E)$ 与正实值权函数 $w\colon V\to\mathbf{R}^{>0}$ 一起称为

顶点加权图，或简称加权图，记作 $(G; w)$。给定加权图 $(G; w)$ 和子集 $S \subseteq V$， S 的权重为 $w(S) = \sum_{v \in S} w(v)$。 G 的阶为 $|V(G)|$，而 G 的权重为 $w(G) = w(V(G))$。满足 $w(G) = |V|$ 的加权图 $(G; w)$ 称为规范化加权图。对于每个顶点 $v \in V(G)$， v 的加权度定义为 $d_w(v) = {}^{w}(N(v))\, w(v)$。此外，令 $\delta_w(G) = \min_{v \in V}\{d_w(v)\}$ 和 $\Delta_w(G) = \max_{v \in V}\{d_w(v)\}$ 分别表示 G 的最小和最大加权度。由~~—S~~诱导的 G 的子图记作 $G[S]$，其顶点集为 S，边由 G 中连接 S 两个顶点的所有边组成。类似地，由 S 诱导的 $(G; w)$ 的子图也记作 $G[S]$，是加权图 $(G[S]; w)$。在这种情况下，顶点集和边集的定义与无权情形相同，权函数限制在 $w : S \to \mathrm{R}^{>0}$ 上。若顶点子集 $S \subseteq V$ 中任意两个顶点都不相邻，则称其为独立的。

阶为 n 的加权完全图，记作 $(K_n; w)$，是一种任意两个不同顶点都相邻的加权图。需要注意的是，与无权图不同，加权完全图并非唯一。事实上，每个权函数 w 都定义了一个不同的加权完全图。

给定图 $G = (V, E)$（加权图 $(G; w)$），每个顶点 $v \in V$ 支配自身及其每个邻点。我们称子集 $D \subseteq V$ 为 G 的支配集（加权支配集），如果 $V - D$ 中的每个顶点都是 D 中某个顶点的邻点；也就是说，如果 $N[D] = V$。 G 的支配集的最小基数称为 G 的**支配数**，记作 $\gamma(G)$。 G 的加权支配集的最小权重称为 G 的**加权支配数**，记作 $\gamma_w(G)$。

在图 $G : (V, E)$（加权图 $(G; w)$），罗马支配函数（简称 RDF）（加权罗马支配函数，简称 wRDF）是一个映射$f : V \longrightarrow \{0, 1, 2\}$，满足如下条件：每个满足 $f(u) = 0$的顶点 u，都必须与至少一个满足 $f(v) = 2$的顶点 v 相邻。RDF（加权罗马支配函数）的总权重为 $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)$（wRDF 的总权重为 $f(V) = \sum_{u \in V} f(u)w(u)$）。 G （加权图 $(G; w)$）上所有 RDF（加权罗马支配函数）中的最小权重称为 G 的**罗马支配数** （加权图 $(G; w)$ 的**加权罗马支配数**），记作 $\gamma_R(G)$（$\gamma_{wR}(G)$）。

3 加权罗马支配数的一般界

我们首先根据加权支配数，建立加权罗马支配数的上界和下界。

定理 3.1. 对于每个加权图 (G, w)，可得 $\gamma_w(G) \le \gamma_{wR}(G) \le 2\gamma_w(G)$。

证明。 首先，我们证明 $\gamma_w(G) \le \gamma_{wR}(G)$。设 f 为一个 γ_{wR}-函数，并考虑关联划分 (V_0, V_1, V_2)。由于 V_0 中的每个顶点在

V_2中至少有一个强邻点，因此我们可以确保 $D = V_1 \cup V_2$ 是 $(G; w)$ 上的加权支配集；

$$\begin{aligned}\gamma_w(G) \le w(D) &= \sum_{u\in V_1} w(u) + \sum_{u\in V_2} w(u) \le \sum_{u\in V_1} w(u) + 2\sum_{u\in V_2} w(u)\\ &= \sum_{i=0}^{2}\sum_{u\in V_i} f(u)w(u) = f(V) = \gamma_{wR}(G).\end{aligned}$$

其次，我们证明 $\gamma_{wR}(G) \le 2\gamma_w(G)$。令 D 为 $(G; w)$ 的一个 $\gamma_w(G)$-集，并考虑函数 $f: V \to \{0, 1, 2\}$，其定义为：若 $u \in D$，则 $f(u) = 2$；否则 $f(u) = 0$。显然，f 是 $(G; w)$ 上的一个加权罗马支配函数。因此，我们得到：$\gamma_{wR}(G) \le f(V) = \sum_{u\in D} 2w(u) = 2w(D) = 2\gamma_w(G)$。 □

接下来，我们考察满足等式 $\gamma_w = \gamma_{wR}$ 的加权图类。在此之前，我们先给出如下必要注记。

注 3.2。设 $f = (V_0, V_1, V_2)$ 是 $(G; w)$ 上的一个 γ_{wR}-函数。若选取 f 使得 V_1 的基数最小，则 V_1 是 $(G; w)$ 中的一个独立集。

证明。令 $f = (V_0, V_1, V_2)$ 为一个使 $|V_1|$ 最小的 γ_{wR}-函数。为用矛盾证明该性质，假设存在一条边 (u, v)，连接 V_1 中的两个顶点。不失一般性，我们可以假设 $w(u) \le w(v)$。接着定义一个新函数 $g: V \to \{0, 1, 2\}$ 如下：对所有 $z \in V \setminus \{u, v\}$，令 $g(u) = 2$，$g(v) = 0$，且 $g(z) = f(z)$。由于 u 被赋值为 2，它自身受支配，并且也支配 v。因此，g 是一个加权罗马支配函数，其关联划分为 $(V_0 \cup \{v\}, V_1 \setminus \{u, v\}, V_2 \cup \{u\})$。$g$ 的总权重满足 $g(V) = f(V) + w(u) - w(v) \le f(V)$。然而，这与 $|V_1|$ 在 f 中的最小性矛盾。因此，不存在这样的边 (u, v)，这意味着 V_1 是一个独立集。

□

现在我们刻画使 γ_{wR}定理 3.1 中所确立的下界得以达到的加权图类。

定理 3.3。设$(G; w)$ 是一个阶为 n 的加权图。当且仅当 G 是空图 K_n 时，等式 $\gamma_w(G) = \gamma_{wR}(G)$成立。

证明。若 (G, w) 没有边，则唯一的加权支配集是 $D = V$，因此 $w(V) = \gamma_w(G)$。此外，(G, w) 上唯一的 γ_{wR}-函数 f 定义为对所有 $v \in V$，$f(v) = 1$，其权重为 $\gamma_{wR}(G) = f(V) = w(V) = \gamma_w(G)$。现在，假设 $\gamma_w(G) = \gamma_{wR}(G)$。根据注 3.2，只需证明 (G, w) 上唯一的 γ_{wR}-函数是对所有 $v \in V$，$f(v) = 1$。设 f 是 G 上的一个 γ_{wR}-函数，并考虑其关联划分 (V_0, V_1, V_2)。我们旨在证明 $V_1 = V$。由于每个满足 $f(u) = 0$ 的顶点 u 都必须与至少一个满足 $f(v) = 2$ 的顶点 v 相邻，因此可知 $V_1 \cup V_2$ 是一个加权

支配集 $(G,\ w)$。于是

$$\begin{aligned}\gamma_{wR}(G)=\gamma_w(G) &\leq w(V_1\cup V_2)=\sum_{u\in V_1}w(u)+\sum_{u\in V_2}w(u)\\ &\leq \sum_{u\in V_1}w(u)+2\sum_{u\in V_2}w(u)=\sum_{i=0}^{2}\sum_{u\in V_i}f(u)w(u)=f(V)=\gamma_{wR}(G),\end{aligned}$$

因此

$$\sum_{u\in V_2}w(u)=0. \tag{1}$$

这意味着 $V_2=\emptyset$，从而 $V_0=\emptyset$。因此，$V=V_1$，证毕。

□

下面的定理给出了 γ_{wR} 关于图权重和最大加权度 Δ_w的上界。文献 [9] 给出了加权支配数的一个类似上界。

定理 3.4。设 $(G;w)$ 是一个非平凡赋权图。那么

$$\gamma_{wR}(G)\geq\left\lceil\frac{2w(G)}{\Delta_w+1}\right\rceil.$$

证明。由于 $(G;w)$ 是非平凡的，设 $v^*\in V$ 是一个顶点，使得 $w(v^*)=\min\{w(v):\ v\in V,\ N(v)\neq\emptyset\}$。由此可得 $w(N(v^*))\geq w(v^*)$，因此 $\Delta_w\geq 1$。设 $f:(G;\ w)\to\{0,1,2\}$是一个具有关联划分 (V_0,V_1,V_2) 的 γ_{wR}-函数。对于任意 $u\in V_2$，我们注意到$\sum_{v\in N(u)\cap V_0}w(v)\leq w(N(u))\leq\Delta_w w(u)$。对所有 $u\in V_2$ 求和，得到:

$$\sum_{u\in V_2}\left(\sum_{v\in N(u)\cap V_0}w(v)\right)\leq\Delta_w\sum_{u\in V_2}w(u). \tag{2}$$

由此，根据（2）可得

$$\begin{aligned}(\Delta_w+1)\gamma_{wR}(G) &= (\Delta_w+1)\sum_{u\in V_1}w(u)+(\Delta_w+1)\sum_{u\in V_2}2w(u)\\ &\geq (\Delta_w+1)\sum_{u\in V_1}w(u)+2\sum_{u\in V_2}w(u)+2\sum_{u\in V_2}\left(\sum_{v\in N(u)\cap V_0}w(v)\right)\\ &\geq 2\sum_{u\in V_1}w(u)+2\sum_{u\in V_2}w(u)+2\sum_{v\in V_0}w(v)\\ &= 2w(G).\end{aligned}$$

因此，$\gamma_{wR}(G)\geq\left\lceil\frac{2w(G)}{\Delta_w+1}\right\rceil$，证明至此完成。

□

对于无权图，已有证明表明 [8]，其中 $\gamma_R\geq\frac{2n}{\Delta+1}$，$n$ 表示图的阶，而 Δ 表示图的最大度。定理3.4 给出的界是这一结果的赋权推广。事实上，若一个阶为 n 的加权图$(G;\ w)$ 是规范化的，则 $w(G)=n$。因此，定理3.4 推出$\gamma_{wR}(G)\geq\frac{2n}{\Delta_w+1}$。

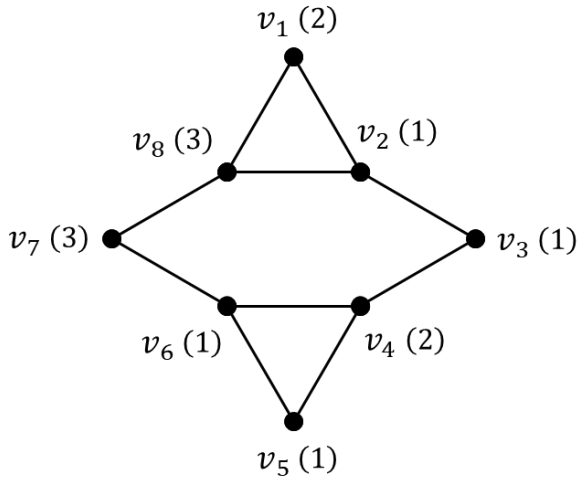


图 1：达到定理上界的一个例子 3.4 。

定理 3.4 的上界是紧的，如图 1 所示的加权图 $(G; w)$ 即可说明这一点。事实上，$\gamma_{wR}(G) = 4$，而函数 $f: (G; w) \to \{0, 1, 2\}$，定义为$f(v_2) = f(v_6) = 2$且 $f(v_i) = 0$（其中 $i \notin \{1, 6\}$），是一个 γ_{wR}-函数。此外，根据顶点权重（括号中所示），有 $\Delta_w = 6$ 且 $w(G) = 14$。因此，以下等式成立：$\gamma_{wR}(G) = {}^{2w}(G)\,{}_{\Delta_w+1}$。还有一些加权图族也能达到定理 3.4 的上界，我们将在下一节中看到。——

以下命题确立了与 γ_{wR}-函数关联的划分的若干性质。

命题 3.5。 设 $(G; w)$ 为一个加权图，且 f 是一个 γ_{wR}-函数，其关联划分为 (V_0, V_1, V_2)。则以下断言成立：

(a) 若 $u, v \in V_1$ 相邻，则 $w(u) = w(v)$。

(b) G 的边均不连接 V_1 中的顶点与 V_2中的顶点。

(c) V_2 是导出子图 $G[V_0 \cup V_2]$的一个 γ_w-集。

证明。 (a) 不失一般性，假设 $w(u) \leq w(v)$。考虑函数g： $V \to \{0, 1, 2\}$，其定义为 $g(u) = 2$，$g(v) = 0$，且对所有 $z \in V \setminus \{u, v\}$，$g(z) = f(z)$。显然，$g$ 是 $(G; w)$ 上的加权罗马支配函数。其权重为

$$g(V) = f(V) - (w(u) + w(v)) + 2w(u) = f(V) + w(u) - w(v) \leq f(V).$$

由于 f 是一个 γ_{wR}-函数，为避免与 f的最优性产生矛盾，必有 $w(u) = w(v)$。

(b) 反设存在一条边连接 $u \in V_1$ 和 $v \in V_2$。令 $f(u) = 0$，并保持所有其他值不变，由此得到 $(G; w)$ 上一个权重严格小于 f 的新加权罗马支配函数，这与 f 的最优性矛盾。

(c) 由于每个顶点 $u \in V_0$ 在 V_2 中至少有一个邻点，因此 V_2 是导出子图 $G[V_0 \cup V_2]$ 的加权支配集。假设 V_2 不是 γ_w 的 $G[V_0 \cup V_2]$。那么，存在一个加权支配集 $D \subseteq V_0 \cup V_2$，使得 $w(D) < w(V_2)$。在这种情况下，我们定义一个新函数 $g\colon V \to \{0,1,2\}$ 如下：若 $v \in D$，则 $g(v) = 2$；若 $v \in V_1$，则 $g(v) = 1$；否则，$g(v) = 0$。这个函数 g 是 $(G; w)$ 上的一个加权罗马支配函数，其关联划分为 $((V_0 \cup V_2) \setminus D,\ V_1,\ D)$。然而，其权重满足：

$$g(V) = 2w(D) + w(V_1) < 2w(V_2) + w(V_1) = f(V),$$

这与 f 作为 γ_{wR}-函数的最优性相矛盾。 □

接下来，我们将给出一个充要条件，判定一个非平凡赋权图的 γ_{wR} 是否等于其权重。在此之前，我们需要证明任意两个邻点的权重必须相同。

引理 3.6. 设 $(G; w)$ 是一个非平凡赋权图。假设 $\gamma_{wR}(G) = w(G)$，且 f 是定义在 $(G; w)$ 上的一个 γ_{wR}-函数，其关联划分为 (V_0, V_1, V_2)。则以下断言成立：

(i) 对每个 $u \in V_2$, $w(u) = \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v)$。

(ii) V_2 是一个独立集。

(iii) 若 $u \in V_2$ 和 $v \in V_0$ 相邻，则边 (u, v) 是$(G; w)$的一个连通分量。

证明。(*i*) 假设存在 $u \in V_2$，使得 $w(u) \neq \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v)$，从而导致矛盾。

情形 1：假设 $w(u) < \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v)$。定义一个函数 $g\colon V \to \{0,1,2\}$，满足$g(u) = 2$，$g(v) = 0$，对所有 $v \in N(u) \cap V_0$，而在其他情况下 $g(v) = 1$。显然，g是 $(G; w)$ 上的加权罗马支配函数。然而，它的权重满足：

$$\begin{aligned} g(V) &= \sum_{v \in V \setminus (N(u) \cap V_0 \cup \{u\})} w(v) + 2w(u) \\ &< \sum_{v \in V \setminus (N(u) \cap V_0 \cup \{u\})} w(v) + w(u) + \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v) = w(G) \end{aligned}$$

这与假设 $\gamma_{wR}(G) = w(G)$ 矛盾。

情形 2：假设 $w(u) > \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v)$。在这种情形下，我们有：

$$\begin{aligned} w(G) = f(V) &= \sum_{v \in V \setminus (N(u) \cap V_0 \cup \{u\})} f(v)w(v) + 2w(u) \\ &> \sum_{v \in V \setminus (N(u) \cap V_0 \cup \{u\})} f(v)w(v) + w(u) + \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v) = g(V). \end{aligned}$$

这意味着 $g(V) < f(V)$，这与 f 是一个 γ_{wR}-函数这一事实相矛盾。

因此，对每个 $u \in V_2$，都必须满足 $w(u) = \sum_{v \in N(u) \cap V_0} w(v)$。

(*ii*) 若 $u, v \in V_2$ 相邻，则对所有 $z \in N(v) \cap V_0$，我们可以重新赋值：$g(v) = 0$ 和 $g(z) = 1$。由于 u 支配 v，g 仍然是一个加权罗马支配函数。由条目 (*i*)，我们知道 $\sum_{z \in N(v) \cap V_0} w(z) = w(v)$。因此，$g(V) = f(V) - 2w(v) + \sum_{z \in N(v) \cap V_0} w(z) = f(V) - w(v) < w(G)$，这就产生了矛盾。因此，$V_2$ 必须是一个独立集。

(*iii*) 设 $u \in V_2$ 和 $v \in V_0$ 是相邻顶点。由命题 3.5 及条目 (*ii*)，可得 $N(u) \subseteq V_0$。由条目 (*i*)，我们有如下恒等式：

$$w(u) = \sum_{z \in N(u)} w(z), \tag{3}$$

这尤其意味着：

$$w(u) \geq w(v). \tag{4}$$

令 $g\colon V \to \{0, 1, 2\}$ 为由 $g(u) = 0$, $g(v) = 2$, $g(z) = 1$ 对所有$z \in N(u) \setminus \{v\}$定义的函数，并在其他情况下令 $g(z) = f(z)$。容易验证，g是 $(G; w)$ 上的加权罗马支配函数。根据等式 (3) 和 (4)，我们得到：

$$\begin{aligned}
\gamma_{wR}(G) = f(V) &= \sum_{z \in V \setminus N[u]} f(z)w(z) + 2w(u) \\
&= \sum_{z \in V \setminus N[u]} g(z)w(z) + w(u) + \sum_{z \in N(u)} w(z) \\
&= \sum_{z \in V \setminus N[u]} g(z)w(z) + (w(u) - w(v)) + \sum_{z \in N(u)} g(z)w(z) \\
&= g(V) + w(u) - w(v) \\
&\geq g(V) \geq \gamma_{wR}(G).
\end{aligned}$$

这一连串不等式表明 $w(u) = w(v)$；根据 (3)，只有当 $N(u) = \{v\}$时，这才有可能。此外，由于 $g(V) = f(V)$，函数 g也是一个 γ_{wR}-函数，且$g(v) = 2$，并且 $g(u) = 0$。对 v 应用相同的推理可得 $N(v) = \{u\}$。因此，连接 V_2 和 V_0 的每条边都是一个连通分量。

□

定理 3.7. 设 $(G; w)$ 是一个非平凡赋权图。则 $\gamma_{wR}(G) \leq w(G)$。等号成立当且仅当 G 的每个连通分量都是一个孤立顶点或一条单边 (x_i, y_i)，满足 $w(x_i) = w(y_i)$。

证明。显然，$\gamma_{wR}(G) \leq w(G)$，因为由 $f(v) = 1$定义的函数 $f\colon V \to \{0, 1, 2\}$ 对所有 $v \in V$ 均为加权罗马支配函数，其权重为 $\omega(f) = \sum_{v \in V} w(v) = w(G)$。假设 G 的每个连通分量要么是孤立顶点，要么是单边。令边的集合为 $E = \{\{x_1, y_1\}, \ldots, \{x_r, y_r\}\}$，孤立顶点的集合为 Z，使得$V = X \cup Y \cup Z$，其中 $X = \{x_1, \ldots, x_r\}$ 且 $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$。由对所有 i，$w(x_i) = w(y_i)$，可直接得出 $\gamma_{wR}(G) = w(G)$。

反之，假设 $\gamma_{wR}(G) = w(G)$，并令 f 为一个关联划分为（V_0、V_1、V_2）的 γ_{wR}函数。根据加权罗马支配的定义，V_1 中的顶点都不能与

中的顶点相邻 V_2；否则，将顶点 $v \in V_1$ 的 $f(v) = 0$ 重新赋值，将得到一个权重更小的加权罗马支配函数，这与假设矛盾。此外，根据引理 3.6，我们可推知每个顶点至多有一个邻点，并且任意两个相邻顶点的权重必定相同。证明完毕。

□

作为定理 3.7的推论，我们为加权图及其补图的加权罗马支配数之和建立一个 Nordhaus–Gaddum 型不等式。

命题 3.8。 设$(G; w)$ 是一个有 $n \geq 3$ 个顶点的加权图，且$(G; w)$和$(G; w)$ 均非平凡。那么，

$$4 \min_{v \in V}\{w(v)\} \leq \gamma_{wR}(G) + \gamma_{wR}(\overline{G}) < w(G) + w(\overline{G}).$$

证明。设 f是 $(G; w)$ 上使 V_1的基数最小的一个 γ_{wR}-函数。由于 $(G; w)$ 是一个非平凡图，它至少含有一条边。这意味着 $V_2 \neq \emptyset$，因此 $\gamma_{wR}(G) = \omega(f) \geq 2\min_{v \in V}\{w(v)\}$。对补图应用相同的推理，可得 $\gamma_{wR}(G) \geq 2\min_{v \in V}\{w(v)\}$。将这两个下界相加，便得到第一个不等式。对于上界，定理 3.7 给出 $\gamma_{wR}(G) \leq w(G)$ 和$\gamma_{wR}(G) \leq w(G)$。根据同一定理，只有当 G 的每个连通分量都是孤立顶点或孤立边时，等式 $\gamma_{wR}(G) = w(G)$ 才成立。关键在于，图及其补图不可能同时具有这种结构。因此，至少有一个不等式是严格的：要么 $\gamma_{wR}(G) < w(G)$，要么 $\gamma_{wR}(G) < w(G)$。由此可得：

$$\gamma_{wR}(G) + \gamma_{wR}(\overline{G}) < w(G) + w(\overline{G}).$$

□

由于 $w(G) = w(\overline{G})$，命题 3.8 中的上界可以等价地表示为 $\gamma_{wR}(G) + \gamma_{wR}(G) < 2w(G)$。

4 若干图族的加权罗马支配数

本节将确定完全图和完全二部图的加权罗马支配数。此外，我们还将给出加权圈中该参数的近似值。

以下结果是定理 3.4的直接推论。

推论 4.1. 对于一个阶为 $n \geq 2$ 的完全加权图 $(K_n; w)$,

$$\gamma_{wR}(K_n) = 2\min\{w(v) : v \in V\}.$$

证明。设 $u^* \in V$ 是一个顶点，使得 $w(u^*) = \min\{w(v) : v \in V\}$。我们将证明 $\gamma_{wR}(K_n) = 2w(u^*)$。首先，考虑由 $f(u^*) = 2$ 和对所有 $v \in V \setminus \{u^*\}$，$f(v) = 0$ 定义的函数 $f: V \to \{0, 1, 2\}$。显然，f 是一个加权罗马支配函数，因为 u^* 与 K_n 中所有其他顶点都相邻。此函数的权重为 $f(V) = 2w(u^*)$，这意味着 $\gamma_{wR}(K_n) \leq 2w(u^*)$。为建立下界，设 Δ_w 为加权最大度。对于完全图，$\Delta_w = {}^{w(K_n)-w(u^*)}\, w(u^*)$。应用定理 3.4，可得：

$$\gamma_{wR}(K_n) \geq \frac{2w(K_n)}{\Delta_w + 1} = \frac{2w(K_n)}{\frac{w(K_n)}{w(u^*)}} = 2w(u^*).$$

结合这两个不等式，我们得出 $\gamma_{wR}(K_n) = 2w(u^*)$。 □

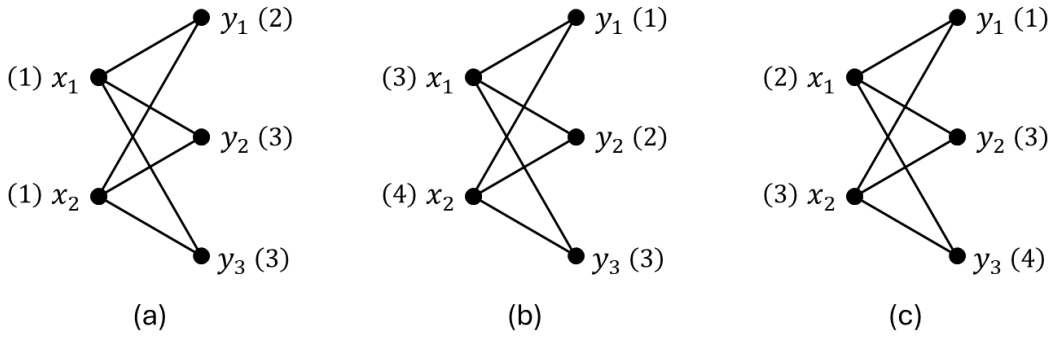


图 2：根据顶点权重分布采取的三种不同策略

一般而言，即使仅考虑众所周知的加权图族，要获得 γ_{wR} 参数精确值的闭式表达式也是一项颇具挑战的任务。在经典的无权情形下，对于完全二部图 $K_{2,r}$，罗马支配的最优策略是给划分中基数为二的顶点赋予 $\{1, 2\}$ 中的标签。然而，在加权情形下，这一策略可能并非最优，因为顶点权重可能会使另一种取值分布更为有利（见图 2）。事实上，图 2 中的示例展示了最优加权罗马支配函数（wRDF）如何适应不同的权重分布。在图 (a) 中，对于 $j = 1, 2, 3$，最优 wRDF 赋值为 $f(x_1) = 2$，$f(x_2) = 1$，以及 $f(y_j) = 0$。在图 (b) 中，对于 $i = 1, 2$，最优赋值为 $f(x_i) = 0$；对于 $j = 2, 3$，则赋值为 $f(y_1) = 2$ 和 $f(y_j) = 1$。在图 (c) 中，对于 $j = 2, 3$，将 $f(x_1) = f(y_1) = 2$ 和 $f(x_2) = f(y_j) = 0$ 赋值，即可达到最小权重。

以下命题给出了完全二部加权图的加权罗马支配数的精确值。该值由两个顶点类的总权重以及每个顶点类中的最小顶点权重表示。

命题 4.2. 设 $(K_{s,\ t}, w)$ 是一个完全二部加权图，其顶点类为 $X = \{x_1, \ldots, x_s\}$ 和 $Y = \{y_1, \ldots, y_t\}$，其中 $s \leq t$。假设顶点按权重非递减的顺序排列，使得 $w(x_i) \leq w(x_{i+1})$ 且 $w(y_j) \leq w(y_{j+1})$。那么：

(i) If $s = 1$, *then* $\gamma_{wR}(K_{1,t}) = \min\{2w(x_1), w(y_1) + w(Y)\}$.

(ii) 若 $s \geq 2$，则 $\gamma_{wR}(K_{s,\ t}) = \min\{w(x_1) + w(X)\ w(y_1) + w(Y),\ 2(w(x_1) + w(y_1))\}$.

证明。令 $f = (V_0,\ V_1,\ V_2)$ 为 γ_{wR} 上的一个 $K_{s,\ t}$ 函数，使 $|V_1|$ 最小。由于 $w(x_i) \leq w(x_{i+1})$ 且 $w(y_j) \leq w(y_{j+1})$，不妨设标签按非递增顺序分配；即 $f(x_i) \geq f(x_{i+1})$ 且 $f(y_j) \geq f(y_{j+1})$。

根据备注 3.2，集合 V_1 必须完全包含于 X 或 Y中。此外，命题3.5 表明，V_1 和 V_2 中的顶点不能相邻。鉴于 f 的选取使 $|V_1|$最小，这些条件意味着 $f(x_1) \neq 1$和 $f(y_1) \neq 1$。事实上，如果某个顶点被赋予标签 1，则任何标签为 2 的顶点都必须被置于同一个分部类中，以避免相邻；然而，这种配置将与备注 3.2 或 $|V_1|$的最小性相矛盾。

(i) 情形 $s = 1$：若 $f(x_1) = 0$，则 x_1 必须受 Y支配，这要求对于所有 $j = 2, \ldots, t$，$f(y_1) = 2$且 $f(y_j) = 1$。另一方面，若 $f(x_1) = 2$，则 Y中的所有顶点都已受支配，因此对于所有 j，$f(y_j) = 0$。由此可得：

$$\gamma_{wR}(K_{1,t}) = \min\{2w(x_1), w(y_1) + w(Y)\}.$$

(ii) 情形 $s \geq 2$：我们考察 $f(x_1)$ 和 $f(y_1)$ 的可能赋值。若 $f(x_1) = 0$，则 x_1 必须受 Y 支配。最优选择为 $f(y_1) = 2$。为确保当 $f(x_i) = 0$ 时所有 x_i 都受支配，对于 $j = 2, \ldots, t$，必须有 $f(y_j) = 1$。若 $f(x_1) = 2$，则 Y中的所有顶点都受支配。对于 X $(i \geq 2)$ 中剩余的顶点，存在两种子情形：

- 它们被赋予标签 1，这意味着 $f(y_1) = 0$ （以保持不相邻 y 于 V_1 和 V_2之间）。
- 它们被赋予标签 0，这要求 $f(y_1) = 2$ 以确保它们受到支配。

由此可得：

$$\gamma_{wR}(K_{s,t}) = \min\{w(x_1) + w(X), w(y_1) + w(Y), 2(w(x_1) + w(y_1))\},$$

证明至此完成。 □

阶为 n 的无权圈 C_n 的罗马支配数众所周知，且易于确定；具体而言，$\gamma_R(C_n) = \lceil \frac{2n}{3} \rceil$。然而，当为顶点赋予权重后，问题便变得复杂得多。在下述定理中，我们根据圈的总权重给出加权罗马支配数的一个上界。此外，对于 $n \neq 0$ (模 3) 的情形，我们将证明，当且仅当所有顶点的权重均匀分布时，该上界能够取到。

定理 4.3。设 (C_n, w) 是一个阶为 $n \geq 3$ 的加权圈，并设 $k = \lfloor n/3 \rfloor$。则：

$$\gamma_{wR}(C_n) \leq \left(1 - \frac{k}{n}\right) w(C_n).$$

证明。 将该加权圈记为 C_n：$u_1, u_2, \ldots, u_n, u_1$。我们根据 n 除以 3 的余数，分三种情形分析这个问题。

情形 *1*： $n = 3k$。对每个 $m \in \{1, \ldots, n\}$，定义函数 f_m：$V \to \{0, 1, 2\}$ 为 ：

$$f_m(u_{(m+3i) \pmod n}) = 2 \quad \text{for } i = 0, \ldots, k-1,$$

并且 $f_m(v) = 0$ 在其他情况下。每个 f_m 都是C_n上的加权罗马支配函数（wRDF）。将所有此类函数的权重相加，得到：

$$n \cdot \gamma_{wR}(C_n) \leq \sum_{m=1}^{n} f_m(V) = 2k \sum_{j=1}^{n} w(u_j) = 2k w(C_n). \tag{5}$$

由此可得 $\gamma_{wR}(C_n) \leq \frac{2k}{n} w(C_n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) w(C_n)$。

情形 *2*： $n = 3k + 1$。对每个 $m \in \{1, \ldots, n\}$，定义 f_m：$V \to \{0, 1, 2\}$ 为：

$$f_m(u_m) = 1, \quad f_m(u_{(m+2+3i) \pmod n}) = 2 \quad \text{for } i = 0, \ldots, k-1,$$

并且 $f_m(v) = 0$ 在其他情况下。由于每个 f_m 都是 C_n上的加权罗马支配函数，我们有：

$$n \cdot \gamma_{wR}(C_n) \leq \sum_{m=1}^{n} f_m(V) = (2k+1) \sum_{j=1}^{n} w(u_j) = (2k+1) w(C_n). \tag{6}$$

因此， $\gamma_{wR}(C_n) \leq \frac{2k+1}{n} w(C_n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) w(C_n)$。

情形 *3*： $n = 3k + 2$。对于每个 $m \in \{1, \ldots, n\}$，定义 f_m： $V \to \{0, 1, 2\}$ 如下：

$$f_m(u_{(m+3i) \pmod n}) = 2 \quad \text{for } i = 0, \ldots, k,$$

且在其他情况下 $f_m(v) = 0$。显然， $\{f_m : m = 1, \ldots\ldots, n\}$ 是 C_n 上的一组加权罗马支配函数，这意味着：

$$n \cdot \gamma_{wR}(C_n) \leq \sum_{m=1}^{n} f_m(V) = 2(k+1) \sum_{j=1}^{n} w(u_j) = (2k+2) w(C_n). \tag{7}$$

因此， $\gamma_{wR}(C_n) \leq \frac{2k+2}{n} w(C_n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) w(C_n)$。 □

定理 4.4。 设 n、$k \geq 1$ 为整数，满足对于 $\ell \in \{1, 2\}$ 有 $n = 3k + \ell$。设 (C_n, w) 为一个阶为 n的加权圈。那么，

$$\gamma_{wR}(C_n) = \left(1 - \frac{k}{n}\right) w(C_n)$$

if 当且仅当所有顶点的权重相等（即， w 是一个常权函数 *).*

证明。 将加权圈记为 C_n： u_1， u_2，……， u_n， u_1。若所有顶点权重都相等，设为 $w(u_i) = p$ ，其中某个常数为 $p > 0$，则可以将 $(C_n, w \equiv p)$ 视为由 p 缩放的无权圈 C'_n。在这种情形下，$\gamma_{wR}(C_n) = \gamma_R(C'_n)p = \lceil \frac{2n}{3} \rceil p = (2k + \ell)p$。 —

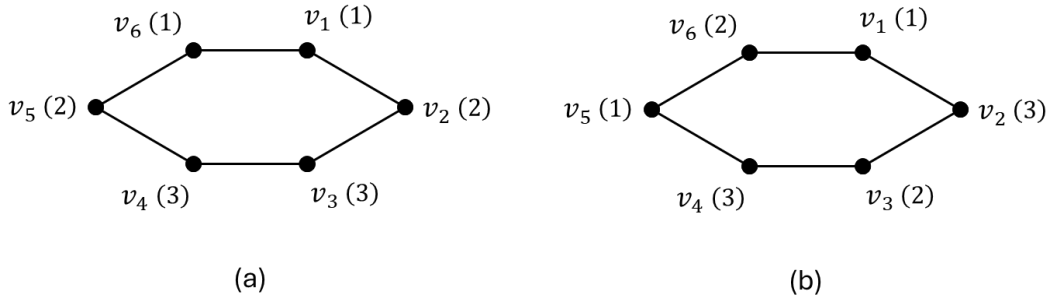
现在，我们来证明逆命题。假设 $\gamma_{wR}(C_n) = (1 - \frac{k}{n}) w(C_n)$。在此假设下，定理4.3 中的所有不等式都变为等式——具体来说，如果6，则是（

$n = 3k + 1$；如果 7，则是（ $n = 3k + 2$。因此，集合 $\{f_m : m = 1、\ldots\ldots、 n\}$ 中的每个函数都是一个 $\gamma_{wR}(C_n)$-函数。恒等式集合 n $\{f_m(V) = \gamma_{wR}(C_n)\}_{m=1}^{n}$ 可以表示为如下形式的线性方程组：$\mathbf{Aw}$ $=\mathbf{b}$，其中：

$$\mathbf{w} = \begin{pmatrix} w(u_1) \\ w(u_2) \\ \vdots \\ w(u_n) \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} \gamma_{wR}(C_n) \\ \gamma_{wR}(C_n) \\ \vdots \\ \gamma_{wR}(C_n) \end{pmatrix},$$

且$\mathbf{A}$ 是一个循环矩阵，其各行对应于每个 f_m所赋予的标签。具体而言，每行的元素由函数 f_m的构造中定义的标签 $\{0, 1, 2\}$ 确定。根据 Rouché-Frobenius 定理，只要 $\mathbf{rank(A)} = n$（即$\mathbf{A}$ 是非奇异的），该线性方程组就有唯一解。我们注意到，$\mathbf{A}$ 每一行元素之和为常数：当 $n = 3k+1$时等于 $2k+1$，当 $n = 3k+2$时等于 $2k+2$。由于向量$\mathbf{b}$ 也是常数向量，因此对于所有 $i = 1,\ldots, n$， $w(u_i)$ $= {}^{w}{}_{(C_n)\,n}$都是该方程组的一个解。鉴于矩阵是非奇异的，这就是唯一解，这意味着所有顶点权重都相等，从而完成证明。——

□



Fig图 3：加权六边形的两个例子，其中定理 4.3 中的等式成立 .

定理 4.4 的证明中所用的推理可以推广到情形 $n = 3k$ ，以说明 $\gamma_{wR}(C_n) = \frac{2}{3}w(C_n)$ 并不一定意味着所有顶点权重都相等。这是因为，由定理 4.3 中的公式 (5) 推导出的线性方程组 $\{f_m(V)$ $=\gamma_{wR}(C_n)\}_{m=1}^{n}$所对应的循环矩阵，其秩严格小于 n。具体而言，对于 $n = 3k$，该矩阵的秩为 3（对于 $n > 3$）。因此，当 $n = 3k$ 时，存在无穷多个加权图，使得定理 4.3 中的界达到等号。图 3 展示了这一点：图中给出了两个总权重相同、但顶点权重分布不同的加权六边形（$(C_6; w)$），二者都满足定理 4.3 中的等式。

5 加权图的加权罗马支配数与差分

无权图的差分概念最早由 [17], 提出，随后被应用于社交网络中的信息扩散研究。对于无权图 $G=(V,\ E)$ 以及子集 $S\subseteq V$，的差分 S 定义为$\partial(S)=|B(S)|-|S|$，其中 $B(S)$ 表示 $V\setminus S$ 中至少与 S中的一个顶点相邻的顶点集合。图 的差分 G 定义如下:

$$\partial(G)=\max\{\partial(S):S\subseteq V\}$$

若子集 $S\subseteq V$ 满足 $\partial(S)=\partial(G)$，则称其为 ∂-集（或差分集）。

这一概念自然地推广到加权图。对于加权图 (G,w) 及其子集 $S\subseteq V,\ S$ 的差分定义为:

$$\partial(S)=w(B(S))-w(S)$$

其中 $w(X)=\sum_{v\in X}w(v)$。类似地，(G,w) 的差分定义为 $\partial(G)=\max\{\partial(S):S\subseteq V\}$。

以下定理建立了加权图的加权罗马支配数与差分之间的关系。

定理 5.1。 设$(G;W))$ 为一个加权图。则 $\gamma_{wR}(G)=w(G)-\partial(G)$。

证明。 令 f 为一个 $\gamma_{wR}(G)$-函数，其关联划分为 (V_0,V_1,V_2)。令$S=V_2$，我们观察到 $B(S)=V_0$ 且 $V_1=V\setminus(S\cup B(S))$。因此，我们有:

$$\begin{aligned}\gamma_{wR}(G)&=2w(V_2)+w(V_1)\\&=w(V_2)+w(V_0)-\partial(V_2)+w(V_1)\\&=w(G)-\partial(V_2)\\&\geq w(G)-\max\{\partial(S):S\subseteq V\}\\&=w(G)-\partial(G).\end{aligned}$$

为证明反向不等式，取子集 $S^*\subseteq V$，使得 $\partial(G)=\partial(S^*)$。我们定义函数 g: $V\to\{0,1,2\}$ 如下: 若 $v\in S^*$，则 $g(v)=2$；若 $v\in B(S^*)$，则 $g(v)=0$；否则， $g(v)=1$。由于 g 是一个加权罗马支配函数，因此:

$$\begin{aligned}\gamma_{wR}(G)\leq g(V)&=2w(S^*)+w(V\setminus(S^*\cup B(S^*)))\\&=w(S^*)+w(B(S^*))-\partial(S^*)+w(V\setminus(S^*\cup B(S^*)))\\&=w(G)-\partial(S^*)\\&=w(G)-\partial(G).\end{aligned}$$

因此，我们得出结论: $\gamma_{wR}(G)=w(G)-\partial(G)$。 □

6 讨论

尽管关于无权图的研究十分广泛，但其在现实世界网络中的应用往往有限。现实世界中的结构通常由相关性各异的兴趣点构成，用带有顶点权重的图来建模更为准确。本文开启了对加权图中加权罗马支配的研究。具体而言，我们根据总权重、最大加权度和加权支配数等图不变量，为加权罗马支配数建立了若干界。

此外，我们还确定了 γ_{wR} 特定图族的精确值，包括完全加权图、完全二部加权图和加权圈。最后，我们建立了加权罗马支配数与加权图的差分之间的基本关系。

作为本研究的延续，我们提出以下研究方向：

- 根据最小加权度 δ_w，为 γ_{wR} 建立新的下界。
- 在定理5.1的基础上，进一步改进本文提出的一般界。

作者贡献声明

所有作者对本研究的贡献均相同。

利益冲突

作者声明不存在利益冲突。

数据可用性

本研究未使用任何数据。

参考文献

[1] Almulhim, A,; Al Subaiei, B.; Mondal. S.R. 关于罗马2-支配的综述。数学**2024年**, *12, 17*。DOI:10.3390/math12172771

[2]Álvarez, M.A.; Yan, Ch. 用于功能预测的新型蛋白质图模型 计算生物学与化学**2012年**, *37*, 6–10。DOI：10.1016/j.compbiolchem.2012.01.003

[3]Bergsten, A.; Bodin, O.;Ecke, F. 伐木主导景观中的保护区——将不同保护级别与竞争-定殖权衡相结合的连通性分析。《生物保护》**2013年**，*160*，279–288。DOI: 10.1016/j.biocon.2013.01.016

[4]Birand, B; Chudnovsky, M.; Ries, B.; Seymour, P.; Zussman, G.; Zwols, Y. 通过局部汇聚和图论分析贪心极大调度的性能。《*IEEE-ACM*网络汇刊》**2012年**，*20, 1*，163–176。DOI: 10.1109/TNET.2011.2157831

[5] Brezovnik, S.; Zerovnik, J. 圈上的圈笛卡尔积的罗马支配。《数学》**2025年**，*13, 15*。DOI:10.3390/math13152351

[6] Chartrand, G.; Jordon, H.; Vatter, V.; Zhang, P. 图与有向图，第7版；Chapman and Hall：伦敦，英国，2024年。ISBN: 978-1032606989

[7]Cheng, Y.L.; Jiang, H.; Wang, F.; Hua, Y.; Feng, D.; Guo, W.Z.; Wu, Y.X. 高效利用高带宽网络实现快速图计算。《IEEE并行与分布式系统汇刊》《*IEEE*并行与分布式系统汇刊》 **2019年**, *30, 5*, 1170–1183. DOI: 10.1109/TPDS.2018.2875084[8] Cockayne, E.J.; Dreyer, P.A.; Hedetniemi, S.M.; Hedetniemi, S.T. 图的罗马支配。《离散数学》 **2004年**, *278*, 11–22. DOI:10.1016/j.disc.2003.06.004[9] Dankelmann, P.; Rautenbach, D.; Volkmann, L. 加权支配，《组合数学与组合计算杂志》**2003年**, *45*, 195–207.[10] Favaron, O.; Karami, H.; Khoeilar, R.; Sheikholeslami, S.M. 关于图的罗马支配数。《离散数学》 **2009年**, *309, 10*, 3447–3451. DOI: 10.1016/j.disc.2008.09.043[11]Gaci, O. 氨基酸相互作用网络中的社区结构描述。《跨学科科学：计算生命科学》**2011年**, *3*, 50–56. DOI: 10.1007/s12539-011-0061-1[12] Gross, J.L; Yellen, J.; Zhang, P. 《图论手册》，第二版；CRC出版社：2013年。ISBN-13: 978-1439880180.[13] Haynes, T.W.; Hedetniemi, S.T.; Henning, M.A.图的支配：核心概念；施普林格数学专著：2023年。ISBN: 978-3-031-09495-8. DOI: 10.1007/978-3-031-09496-5[14] Henning, M.A. 罗马树的刻画。《数学讨论：图论》 **2002年**,*22, 2*, 325–334. DOI: 10.7151/dmgt.1178[15] Henning, M.A. 抵御多重攻击的罗马帝国。《离散数学》**2003年**,*271, 1–3*, 101–115. DOI: 10.1016/S0012-365X(03)00040-2

[16] Kanli, A.; Berberler, Z.N.O.基础设施网络中的差分。*RAIRO*-运筹学**2021**, *55*, S1249–S1259. DOI: 10.1051/ro/2020032[17] Mashburn, J.L.; Haynes, T.W.; Hedetniemi, S.M.; Hedetniemi, S.T.; Slater, P.J. 图中的差分。*Utilitas Mathematica* **2006**, *69*, 43–54. [18]Nitta, K.H. 支化链分子的拓扑特征与摩尔质量分布。大分子理论与模拟**2021**, *30, 3*. DOI: 10.1002/mats.202000080[19]Stewart, I. 保卫罗马帝国！*Sci. Amer.* **1999**, *281, 6*, 136–139. DOI: 10.1038/scientificamerican1299-136[20] Sukharev, Y.N.; Nekrasov, Y.S.; Molgachova, N.S.; Tepfer, E.E. 质谱信息的计算机处理与解释。VIII——ariadna系统。有机质谱**1991**,*26, 9*, 770–776. DOI: 10.1002/oms.1210260913[21] Xueliang, F.; Yuansheng, Y.; Baoqi, J. 正则图中的罗马支配。《离散数学》**2009年***309, 6*, 1528–1537. DOI: 10.1016/j.disc.2008.03.006[22] Zheng, S.Y.; Ren, Z.Y.; Cheng, W.C.; Zhang, H.L. 运用图论最小化将依赖感知型SFC嵌入MEC网络的时延。2021年IEEE全球通信大会（GLOBECOM），西班牙马德里，2021年12月7日至11日。DOI: 10.1109/GLOBECOM46510.2021.9685945