arXiv:2512.22718v1 [math.AG] 27 Dec 2025

复兴理论与反常层

Mikhail Kapranov、Yan Soibelman

2025年12月30日

谨以此文献给我们的朋友马克西姆·孔采维奇，祝贺他六十岁生日

摘要

我们提出一种基于研究复直线上的反常层的重求和理论观点，这些反常层带有关于加性卷积的代数结构。具体而言，我们将 J. Écalle 最初引入的外代数导数概念推广到反常层的框架中，并研究其在层论卷积下的行为。完整的重求和理论需要将反常层的概念推广（目前尚未实现），以允许奇点集无限且可能稠密。我们探讨定义此类对象的可能途径，并介绍一些可能的实例，它们来自上同调霍尔代数、墙穿越结构和陈-西蒙斯理论。

目录

0 引言 **2**

1 反常层 及其傅里叶变换 4

1.1 动机：博雷尔求和与博雷尔平面.4 1.2 黎曼曲面上的反常层.7 1.3 $\mathbb{C}$ 上的（局部化）反常层.10 1.4 反常层的傅里叶变换及其斯托克斯数据.13 1.5 Lefschetz perverse层及其傅里叶变换.15

2 反常层的 Alién 导数：初等理论 **17**

2.1 局部化反常层的加性卷积与傅里叶变换 . . . . 17 2.2 带避让的直线传输与 alien 输运. 21 2.3 反常层的外来导数与 Stokes 自同构 26

3 复兴理论：反常层范畴**中的卷积代数**($\mathbb{C}$) **34**
3.1 总体纲领.34 3.2 一个有限性示例：带势箭图的 COHA.37 3.3 簇反常层与墙穿越结构.39 3.4 陈-西蒙斯理论中的反常层.41

> 睡梦中充满奇迹！出于一种奇异的任性，我曾将不规则的植物逐出这些景象。
>
> ——夏尔·波德莱尔，巴黎之梦

0 引言

J. ´Écalle [9] 开创的复苏函数理论，研究“由发散级数给出”的解析函数，并通过其博雷尔变换（形式傅里叶–拉普拉斯变换）的奇点来考察它们（相关讨论见下文 §1.1）。与任何一种傅里叶变换一样，这一过程将乘法转化为加性卷积。随后，复苏分析通过使用涉及卷积的方程，以及博雷尔变换后函数的单值化数据（外代数导数）来展开。

本文旨在借助反常层的概念，为重求和理论提出一种更具概念性的观点。众所周知，卷积或傅里叶变换等运算可以在层论层面上定义；当函数被视为相关层的截面时，这些运算在一定程度上与相应的函数解析运算相吻合。因此，将反常层的语言引入复苏分析是一个自然而然的想法，希望借此获得更清晰的概念认识。

简而言之，我们的提议是考虑 $\mathbb{C}$ 上带有关于卷积的代数结构的反常层（更多详情见 §3.1）。利用这一结构，可以写出复苏方程，其未知量是这类“复苏反常层”的截面；当这些截面被实现为实际的解析函数时，就会出现经典例子。但原则上，我们也可以用更抽象的方式构造复苏反常层，这与构造不一定嵌入 $\mathbb{C}$ 的域扩张颇为相似：通过添加代数方程的根来构造。

早在 1985 年，B. Malgrange [26] 就以佐藤干夫的微函数理论阐释了重求和形式。他的主要观察是，这一形式中无处不在的“奇点”（或“奇异部分”）不过是微函数的同义词。现在，复平面 $\mathbb{C}$ 上一个反常层的消失循环空间，与相应的全纯正规 D 模 [12]的微函数解空间相同。

因此，研究反常层及其消失循环，是重求和理论的自然概念框架。

然而，要将复兴理论真正应用起来，就必须扩展反常层理论，以适应复苏函数通常具有的多值性。这些函数通常有无限多个、甚至稠密的奇点。也就是说，在任何一个“分支”上，奇点当然是离散的，但绕过每个奇点都会进入一个新的分支，而新分支上又会有新的奇点，等等。这种行为称为“无尽解析延拓”。

本文并不试图沿这一方向推广反常层理论。相反，我们发展了一种类似复兴理论的形式体系，其中采用反常层在 $\mathbb{C}$ 上的标准概念（即只有有限多个奇点）。仅此便足以让我们在层论语境下凸显许多熟悉的特征，例如通过博雷尔平面中的皮卡-勒夫舍茨型公式来诠释斯托克斯数据。此外，在这一受限语境下，或许已经可以给出一些“复苏反常层”的例子，例如 §3.2 中的上同调霍尔代数版本。

在我们的讨论中，范畴 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C})$ 发挥着特殊作用。它是将 $\overline{\mathbf{Perv}}(\mathbb{C})$（即 $\mathbb{C}$上所有反常层构成的阿贝尔范畴）对（平移后的）常值层 [13]构成的 Serre子范畴局部化后得到的。$\mathbf{Perv}(\mathbb{C})$ 中的对象具有定义良好的“隧穿数据”，由消失循环空间 $\Phi_a,\ a\in\mathbb{C}$ 以及传输映射 $m_{ab}(\gamma)$ 组成：$\Phi_a\to\Phi_b$，这些数据对应于连接 a与 b的各种路径γ。

已知 [20, 10]，$\mathbf{Perv}(\mathbb{C})$ 可以重新嵌入 $\overline{\mathbf{Perv}}(\mathbb{C})$，作为由满足 $H^\bullet(\mathbb{C},\ \mathcal{F})=0$的反常层 $\mathcal{F}$构成的子范畴 $\mathbf{Perv}^0(\mathbb{C})$。利用这一实现 [10]，最容易定义加性卷积 $\mathcal{F}*\mathcal{G}$。我们的“玩具版复苏形式体系”可以视为对张量范畴 $(\mathbf{Perv}(\mathbb{C}),\ *)$的坦纳卡伽罗瓦群的进一步研究；该群在 [10]中已有定义并得到研究。因此，我们更想强调的是，完整的复苏形式体系只不过是对一种更一般的反常层概念进行类似研究，而这一概念尚待严格定义（见下文 §3.1）。我们计划在未来的工作中进一步讨论这一问题。

本文由三章组成。在第1章中，我们回顾 $\mathbb{C}$ 上的反常层的基础理论（具有有限个奇点），重点介绍我们所需的特征。作为动机，§1.1阐释了博雷尔求和的一般框架，以及由此产生的“双平面学说”：原平面承载由发散级数给出的函数，而在博雷尔平面上一切则变得更加拓扑化。在§1.2中，我们回顾基本定义，并着重介绍反常层背景下的Picard-Lefschetz 公式（命题1.2.8）。在§1.3中，我们介绍反常层以及局部化范畴 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C},\ A)$中对象的盖尔范德-麦克弗森-维洛嫩分类；在该范畴中，常值层被因子化掉，但消失循环和传输映射仍然保留。§1.4解释反常层的傅里叶变换。此处我们主要遵循 [17]。在§1.5中，我们讨论 $\mathbb{C}$ 上一类特殊的反常层示例，它们与复代数簇上的正则函数 $S:X\to\mathbb{C}$ 相关。我们称其为***Lefschetz*** 层 $\mathcal{L}_S$。$\mathcal{L}_S$ 的傅里叶变换可以看作与 S相关的指数积分的一种范畴化。

在第2章中，我们逐步构建 $\mathbb{C}$ 上的反常层所具有的、最能使人联想到复苏形式体系的特征。在此基础上，我们将在 [17],中给出的直线传输分析从奇点集合 A 处于线性一般位置的情形推广到任意情形，即区间 $[a,\ b]$，$a,\ b \in A$ 可以包含中间点的情形。在§2.1中，我们讨论 $\mathbb{C}$上的反常层的加性卷积。受经典复苏形式体系的启发，我们在§2.2中考察修改直线传输的各种方式，以避开中间点。外来导数的公式在这一背景下自然出现，它们是此类修正传输的某些线性组合。在§2.3中，我们更系统地研究外来导数；同时解释它们与傅里叶变换的 Stokes 自同构之间的关系。

在最后的第3章中，我们将讨论如何将我们的方法应用于实际的复兴理论问题。本章更具推测性。我们首先在 §3.1 概述研究反常层的总体纲领，这些反常层在卷积运算下构成代数，并着重指出一般情形下存在的困难。随后，我们讨论几类可能的例子：§3.2 中与箭图的上同调霍尔代数（又称 COHA）相关的例子，§3.3 中与墙穿越结构相关联的“簇反常层”，以及 §3.4 中与复 Chern–Simons 泛函相关联的 Lefschetz 层。

致谢。M.K. 的研究得到世界顶级国际研究中心倡议（WPI 倡议）、日本文部科学省、日本以及日本学术振兴会科研费项目 20H01794 的支持。Y.S. 的工作部分得到西蒙斯基金会项目 MP-TSM- 00001658、美国国家科学基金会项目 2401518、高等科学研究所休假教授职位以及欧洲研究委员会项目“Renew Quantum”的支持。

我们谨向 A. Soibelman 致以谢意，感谢他为《引言》校正了英语。

1 反常层及其傅里叶变换

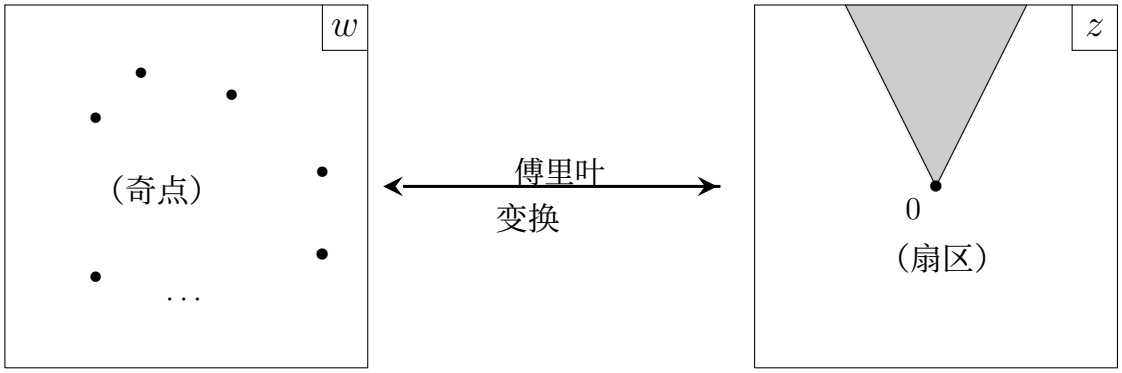
1.1 动机：博雷尔求和与博雷尔平面

著名的发散级数博雷尔求和过程，可以看作复域中傅里叶变换的一种应用。它连接了复平面的两个副本 $\mathbb{C}$，二者宽泛地说是“通过傅里叶变换”相关联的：

- 原始的（“不规则”）平面 $\mathbb{C}_z$，其坐标（“大参数”）为 z，我们在其中研究 ∞附近可能发散的形式幂级数：

$$\widehat{f}(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{z^{n+1}} \tag{1.1.1}$$

这类级数通常满足在 8 处不正则的线性微分方程，处处发散，但可作为各种有趣解析解的渐近展开



扇区。量子力学中关于普朗克常数 $\hbar$ 的渐近级数在此通过令 $z = 1/\hbar$ 得以实现。

- 对偶平面（博雷尔平面或“正则”平面） $\mathbb{C}_w$ ，其坐标为 w 。我们在此研究（或获得）具有正则奇点的微分方程的解，这些解由 w 中的收敛级数给出，表示多值函数，因此可以进行拓扑分析。现代的做法是使用反常层的语言。

在形式层面上，对级数 **(1.1.1)** 进行博雷尔求和（若可行），首先要利用恒等式逐项对该级数作傅里叶变换（这是 z^α 傅里叶变换一般公式的一个特例）

$$\mathrm{FT}\left(\frac{1}{z^{n+1}}\right) = \frac{w^n}{n!}.$$

这就得到了经博雷尔变换后的级数

$$\widehat{f}^B(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} w^n$$

它更有可能收敛。在理想情况下，它具有非零的收敛半径，并可延拓为一个解析函数 $f^B(w)$ “定义在整个 $\mathbb{C}_w$上”，但也可能是多值的，并带有$\widehat{}$奇点等。随后，对原级数 $f(z)$ 求和的方案 $f(z)$，可通过对 $\widehat{f}^B(w)$进行逆[1] 傅里叶（拉普拉斯）变换得到：

$$f(z) := \int_0^\infty f^B(w) e^{-zw} dw.$$

由于 $f^B(w)$ 的奇点，可能存在多个彼此不等价且可行的积分路径选择，从而导致博雷尔和出现歧义；如果级数是发散的，这也就不足为奇了。

[1]那种把 $w^n/n!$ 送回 $1/z^{n+1}$ 的类型

从概念层面来说，博雷尔求和方法可以说是将非正则数据[2] 表示为正则对象的傅里叶变换。这种方法之所以成功，是因为在许多实际应用场景中，这种表示都是可行的。作为正则对象的傅里叶变换的微分方程构成了一个相当特殊的类别。

[2]这里我们以更广义的方式理解“非正则”一词，其含义包括但不限于微分方程及满足这些方程的函数。

1.2 黎曼曲面上的反常层

A 一般性。 我们固定一个基域 k。设 X 为一个复解析流形。我们用 $\mathbf{LS}(X)$ 表示 X上取值于（不一定有限维的）k向量空间的局部系统范畴。

设 $\mathcal{S}$ X是一个局部有限的复惠特尼分层。因此，每个分层 $S \in \mathcal{S}$ 都是一个复子流形；我们将嵌入记为 $i_S : S \to X$ 。闭包 S 一般是一个奇异复空间。我们用 $D^b(X, \mathcal{S})$ 表示 X 上有界的 $\mathcal{S}$-可构造层复形的三角范畴。根据定义， $\mathcal{F}$ 的 $\mathcal{S}$-可构造性意味着每个上同调层 $H^i(\mathcal{F})$都是 $\mathcal{S}$-可构造的。也就是说，每个 $i_S^* H^q(\mathcal{F}) = H^q(i_S^* \mathcal{F})$都是 $\mathbf{LS}(S)$中的一个对象。

我们用 $\mathbf{Perv}(X, \mathcal{S}) \subset D^b(X, \mathcal{S})$ 表示 X 上相对于 $\mathcal{S}$光滑的、取值于k向量空间的反常层所构成的阿贝尔范畴。具体而言，$\mathbf{Perv}(X, \mathcal{S})$ 由满足以下性质的复形 $\mathcal{F} \in D^b(X, \mathcal{S})$ 组成：

(1) 对每个分层 $S \in \mathcal{S}_A$，我们有 $H^q(i_S^* \mathcal{F}) = 0$，对于 $q > -\dim_{\mathbb{C}} S$。

(2) 对每个分层 $S \in \mathcal{S}_A$，我们有 $H^q(i_S^! \mathcal{F}) = 0$，对于 $q < -\dim_{\mathbb{C}} S$。

例如，若 $\mathcal{L} \in \mathbf{LS}(X)$ 是一个局部系统，则 $\mathcal{L}[\dim X]$，也就是说， $\mathcal{L}$置于次数 $(-\dim\ X)$，是反常层，且属于 $\mathbf{Perv}(X,\ \varnothing)$。

注 1.2.1。 在 [17]中，我们对鸽巢条件采用了不同的规范化方式，因此次数 0 的局部系统被视为反常层。在本文后文引用 [17] 时，这一区别很容易处理，故不再特别说明。

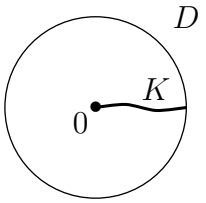
B 邻近环与消失环。 从现在起，我们假设 $\dim_{\mathbb{C}} X = 1$，因此 X 是一条复曲线（黎曼曲面，可能非紧）。此时， X 的分层 $\mathcal{S}$ 由一个离散子集 $A \subset X$ 给出，因此各分层是 A 的元素以及补集 $X \backslash A$。在这种情况下，我们用记号 $\mathbf{Perv}(X,\ A)$ 表示 $\mathbf{Perv}(X,\ \mathcal{S})$。定义蕴含，对于任意 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(X,\ A)$，限制 $\mathcal{F}|_{C \backslash A}$ 拟同构于一个次数为 -1 的局部系统（不一定是有限秩），并且对于 $q \neq -1$，0，有 $H^q(\mathcal{F}) = 0$。

例1.2.2。设 $X = D = \{|z| < 1\}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，且 $A = \{0\}$。在这种情况下，经典结果表明 [12] ，$\mathbf{Perv}(D,\ 0)$ 等价于由以下图表构成的范畴

$$\Phi \underset{v}{\overset{u}{\rightleftarrows}} \Psi$$

其中的k-向量空间之间由线性映射构成，且满足 $T_\Psi := \mathrm{Id}_\Psi - uv$ 是同构（或者等价地，满足 $T_\Phi = \mathrm{Id}_\Phi - vu$ 是同构）。

更准确地说，参见 [12] [17, 命题 1.1。6], 上述等价取决于对一条径向切割 $K \subset D$的选择；这是一条从 0 出发并终止于边界 ∂D上的简单曲线。给定这样一条K， K-支撑的超上同调层$H_K^q(\mathcal{F})$在 $q \neq 0$上为 0，而层 $H_K^0(\mathcal{F})$在



K 关于将 K 分为 $\{0\}$ 和 $K-\{0\}$的分层是可构造的，与 $\mathcal{F}$ 相关的空间 Φ和 Ψ 可由其茎得到:

$$\Phi = (\underline{H}^0_K(\mathcal{F}))_0, \quad \Psi = (\underline{H}^0_K(\mathcal{F}))_\varepsilon,\ \forall \varepsilon \in K\backslash\{0\},$$

而映射 u: $\Phi \to \Psi$是 $H^0_K(\mathcal{F})$的泛化映射。定义 $v:\ \underline{\Psi} \to \Phi$，请参见 [12] 以及[17, Prop. 1.1.6] 之后的讨论。空间 Φ 和 Ψ 分别称为 $\mathcal{F}$ 在 0 处（沿 K方向）的消失循环和邻近圈空间。还要注意， Ψ 与局部系统 $(\mathcal{F}[-1])|_{D\backslash\{0\}}$ 在任意 $\varepsilon \in K-\{0\}$ 处的茎相同（因此称为"邻近圈"）。

更一般地，对于黎曼曲面 X 及其上的一点 $a \in X$，我们用 $S^1_a = S^1_a(X)$ 表示 a处的方向圆。如果 K 是一条以 a为端点的光滑简单曲线，则用 $\mathbf{dir}_a(K) \in S^1_a$表示 K 在 a处的方向。如果 $A \subset X$ 是离散的，且 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(X,\ A)$，那么在任意$a \in A$ 附近的一个小圆盘内，我们都有例 1.2.2所述的情形。特别是， $\mathcal{F}$ 在 a处的消失圈和邻近圈向量空间取决于切口的方向，因此自然构成 S^1_w上的局部系统，记作 $\mathbf{\Phi}_w(\mathcal{F})$和 $\mathbf{\Psi}_w(\mathcal{F})$。因此我们有函子

$$\mathbf{\Phi}_a, \mathbf{\Psi}_a : \mathrm{Perv}(X, A) \longrightarrow \mathrm{LS}(S^1_a). \tag{1.2.3}$$

复平面传输映射。我们现在回顾[17, §1.1] 中的曲线传输映射的构造。设 $\mathbf{dim}_{\mathbb{C}}(X) = 1$，且 $A \subset X$ 是离散的。设 α 是 X 中的一条连接两个不同点 $a,\ b \in A$ 的简单分段光滑弧，并且不经过 A 中的任何其他元素，见图1。我们赋予 α 从 a 到 b的定向。

将 α 视为 X中的闭子集，我们得到 α 上的层 $H^0_\alpha(\mathcal{F})$，它在开弧 $\alpha - \{a,\ b\}$上是常值的。

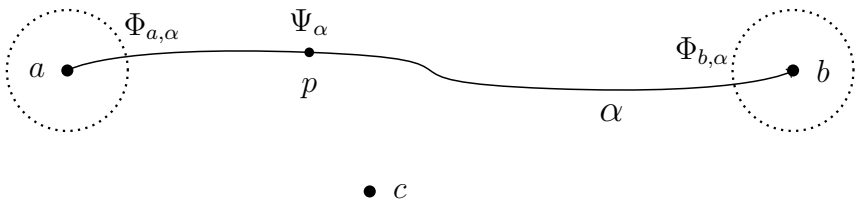


图1：传输映射。

它在 a 和 b 处的茎分别是 $\Phi_{a,\ \alpha}$, $\Phi_{b,\ \alpha}$ 处的消失循环空间，对应于 $\mathcal{F}$ 在 a 处或沿 α方向在 b处的情形；而它在 $\alpha\backslash\{a,\ b\}$ 上的限制是开区间上的局部系统；特别地，这个局部系统的所有茎都可以典范地识别；我们将它们的公共值记为Ψ_α。因此我们有以下映射

$$\Phi_{a,\alpha} \underset{v_{a,\alpha}}{\overset{u_{a,\alpha}}{\rightleftarrows}} \Psi_\alpha \underset{v_{b,\alpha}}{\overset{u_{b,\alpha}}{\leftrightarrows}} \Phi_{b,\alpha}, \tag{1.2.4}$$

由 $\mathcal{F}$ 在 a和 b附近的小圆盘上的描述得到，并使用 γ 作为切口 K的选取。我们定义沿 α 的传输映射如下:

$$m_{ab}(\alpha) = m_{ab}^{\mathcal{F}}(\alpha) := v_{b,\alpha} \circ u_{a,\alpha} : \Phi_{a,\alpha} \longrightarrow \Phi_{b,\alpha}. \tag{1.2.5}$$

D 传输的 Picard-Lefschetz 恒等式。映射 $m_{ab}(\alpha)$的构造纯粹是拓扑性的，因此在 α 发生不经过 A中其他元素的同痕变形时保持不变。更准确地说， [17, §1.1C], 设$(\alpha_t)_{t\in[0,\ 1]}$ 是从 a 到 b的一族路径的容许同痕，即一参数连续族的简单弧$(\alpha_t)_{t\in[0,\ 1]}$，其中每条弧 α_t 连接a 与 b ，且不经过任何其他 $c \in A$。那么我们有一个交换图:

$$\begin{array}{ccc} \Phi_{a,\alpha_0} & \xrightarrow{m_{ab}(\alpha_0)} & \Phi_{b,\alpha_0} \\ {\scriptstyle t_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t_b} \\ \Phi_{a,\alpha_1} & \xrightarrow{m_{ab}(\alpha_1)} & \Phi_{b,\alpha_1}, \end{array} \tag{1.2.6}$$

其中 t_a 是局部系统 $\mathbf{\Phi}_a$ 在 $S^1_{w_i}$ 上从方向$_a(\alpha_0)$到方向$_a(\alpha_1)$的单值化， t_b也类似。

现在回顾路径穿过复平面中的一个点时会发生什么。也就是说，我们考虑图 2 所示的情形：路径 γ' 从 a 到 c ，并逐渐靠近由 β 从 a到 b 和 α 从 b 到 c构成的复合路径。穿过 b后，路径 γ' 变为 γ。

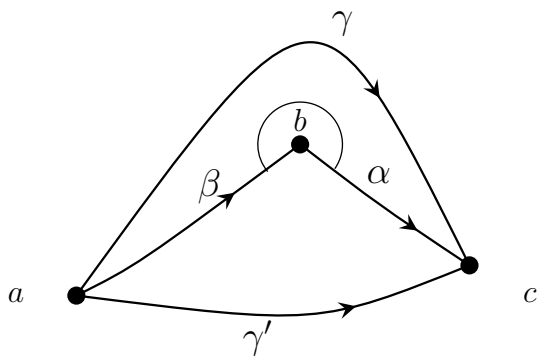


图 2：Picard-Lefschetz 情形。

在这种情况下，我们有如下对应关系

$$\Phi_{a,\gamma} \to \Phi_{a,\beta} \to \Phi_{a,\gamma'}, \quad \Phi_{c,\gamma'} \to \Phi_{c,\alpha} \to \Phi_{c,\gamma}, \quad \Phi_{b,\beta} \to \Phi_{b,\alpha}, \tag{1.2.7}$$

由局部系统 $\mathbf{\Phi}$ 沿方向圆中相应弧线的顺时针单值化给出。因此，经过这些识别后，我们可以假设所讨论的是分别记为 Φ_1, Φ_3 和 Φ_2 的单个向量空间。于是有 [15, Prop.1.8] [17, Prop.1.1.12]:

命题1.2.8（抽象皮卡-勒夫谢茨恒等式）。线性算子 $\Phi_1 \to \Phi_2$ 满足等式:

$$m_{ac}(\gamma') = m_{ac}(\gamma) - m_{bc}(\alpha) m_{ab}(\beta).$$

□

1.3 复平面上的（局部化）反常层

A 范畴 反常层范畴$(X, \overline{A})$。我们先讨论任意黎曼曲面的情形，也就是说，令 X, A 如前所述。令 $\mathrm{LS}(X)$ 表示复平面 X 上的 k-向量空间局部系统范畴。对每个 $\mathcal{L} \in \mathrm{LS}(X)$，平移层 $\mathcal{L}[1]$ 都是反常层范畴 $\mathbf{Perv}(X, A)$ 的对象。显然，这定义了平移范畴 $\mathrm{LS}(X)[1]$ （与 $\mathrm{LS}(X)$ 等同）到反常层范畴 $\mathbf{Perv}(X, A)$ 中的一个嵌入，并使其成为一个 Serre 子范畴，因此我们得到商阿贝尔范畴

$$\overline{\mathrm{Perv}}(X, A) = \mathrm{Perv}(X, A)/(\mathrm{LS}(X)[1]).$$

明确地，$\mathbf{Ob}\ \overline{\mathbf{Perv}}(X, A) = \mathbf{Ob}\ \mathbf{Perv}(X, A)$ 而

$$\mathrm{Hom}_{\overline{\mathrm{Perv}}(X,A)}(\mathcal{F}, \mathcal{G}) = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Perv}(X,A)}(\mathcal{F}, \mathcal{G})/I_{\mathcal{F},\mathcal{G}},$$

其中 $I_{\mathcal{F},\mathcal{G}}$ 是由可分解为$\mathcal{F} \to \mathcal{L}[1] \to \mathcal{G}$ 的态射所构成的子集（实际上是一个k-向量子空间），其中某个 $\mathcal{L} \in \mathrm{LS}(X)$。因此我们有一个函子 $\mathbf{Perv}(X, A) \to \mathbf{Perv}(X, A)$，它在对象上为双射、在态射上为满射。

注意，(1.2.3) 中的第一个函子（而非第二个）在 $\mathrm{LS}(X)[1]$ 上为零，因此可下降为一个函子，我们仍用同一符号表示:

$$\mathbf{\Phi}_a : \overline{\mathrm{Perv}}(X, A) \longrightarrow \mathrm{LS}(S^1_a). \tag{1.3.1}$$

此外，设 γ 是如 §C 中所示连接 $a, b \in A$ 的一条简单路径。(1.2.5) 中的传输映射 $m_{ab}(\alpha)$ 下降为自然变换（也记作 $m_{ab}(\alpha)$），它连接在 $\mathbf{dir}_a(\alpha)$ 和 $\mathbf{dir}_b(\alpha)$上取值的函子 (1.3.1)。这些变换满足变形不变性 (1.2.6) 和 Picard-Lefschetz 恒等式（命题1.2.8）。

B 有限 A的 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$ 和 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$ 的 Gelfand-MacPherson-Vilonen描述。 从现在起，我们假设黎曼曲面 X 是带有坐标 w的复直线 $\mathbb{C}$。我们进一步假设集合 A是有限的。

回顾 [13] 中给出的描述。从拓扑学角度，我们可以用开圆盘 D 替换$\mathbb{C}$，并将其视为闭圆盘 D 的内部，即 $D = D\backslash\partial D$，因此$A = \{a_1.\cdots,\ a_N\} \subset D$。

取一点$\mathbf{v} \in \partial D$。称 (D, A) 的一组简单闭分段光滑弧**v-蜘蛛** $K = \{\gamma_1, \cdots, \gamma_N\}$，使得 γ_i 连接$\mathbf{v}$ 与 a_i，且不同的 γ_i 除$\mathbf{v}$外互不相交，参见图3。

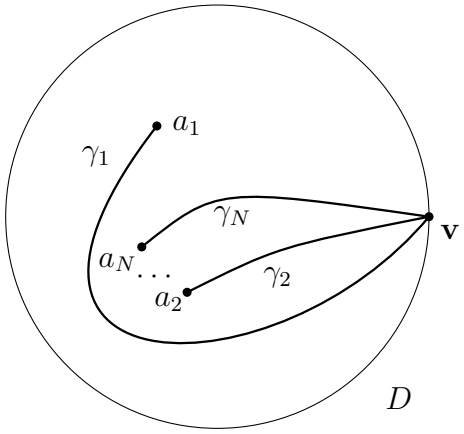
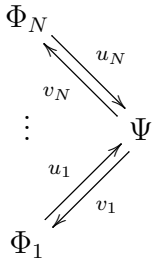


图3：定义 GMV-等价的蜘蛛。

(D, A) 的一只**v-蜘蛛**通过对$\mathbf{v}$ 处各γ_i的斜率（假设互不相同）按顺时针排序，在 A上定义一个全序；我们按此顺序编号为 $A = \{a_1, \cdots, a_N\}$，如图3所示。

De记为有限维**k-向量空间的图表范畴** s



使得对每个 i，$T_{\Phi_i} := \mathrm{Id}_{\Phi_i} - v_i u_i$ 均可逆。这意味着每个$T_{i,\Psi} = \mathrm{Id}_\Psi - u_i v_i$ 也均可逆。

给定一个适用于 $(D$ 的**v-蜘蛛** K，$A)$ 以及 $\mathcal{F} \in$反常层范畴$(D,\ A)$，对于每个 $i = 1,$ $\cdots,\ N$，我们考虑空间 $\Phi_{i,\ K}(\mathcal{F}) = \Phi_{a_i,\ \gamma_i}(\mathcal{F})$，即局部系统 $\mathbf{\Phi}_{a_i}(\mathcal{F})$ 在 $S^1_{a_i}$ 中由 γ_i 的方向所表示的点处的茎。我们还利用沿 γ_i 的单值化，将茎 $\Psi_{\gamma_i}(\mathcal{F})$ 与茎 $\mathcal{F}_{\mathbf{v}}$ 进行认同。这给出一个图表

$$\Theta_K(\mathcal{F}) \ = \ (\Psi(\mathcal{F}), \Phi_{i,K}(\mathcal{F}), u_{i,\gamma_i}, v_{i,\gamma_i}) \ \in \ \mathcal{Q}_N.$$

这里的 u_{a_i,γ_i} 和 v_{a_i,γ_i} 是沿着 γ_i 的典范映射，如 (1.2.5) 中所示。

命题 1.3.2 ([13])。 设 K 是关于 $(D、A)$ 的一个**v**-蜘蛛。函子 Θ_K : 反常层范畴$(D, A) \to \mathcal{Q}_N$ 是一个等价。 □

此外，蜘蛛 K 对每个 $i \neq j$都定义一条路径 α_{ij}^K，它连接 a_i 和 a_j： 先从a_i 到**v** ，再从**v** 到 a_j。

设 $\mathcal{M}_N$ 为一个范畴，其对象是由以下内容构成的图表:

(0) 向量空间 $\Phi_i、\ i = 1、\cdots、\ N$。

(1) 线性算子 m_{ij}： 对所有 $i、\ j$ （包括 $i = j$）给定 $\Phi_i \to \Phi_j$，使得 $\mathrm{Id}_{\Phi_i} - m_{ii}$ 可逆。

给定对象 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(\overline{D、\ A})$ 以及上文所述的蜘蛛 K，我们通过像之前那样设定 $\Phi_i = \Phi_{i、\gamma_i}(\mathcal{F})$，并且

$$m_{ij} = \begin{cases} m_{ij}(\alpha_{ij}^K), & \text{if } i \neq j; \\ \mathrm{Id} - T_i(\mathcal{F}), & \text{if } i = j, \end{cases}$$

命题 1.3.3 ([13])。 函子 Ξ_K： 反常层范畴$(\overline{D、\ A}) \to \mathcal{M}_N$ 是一个等价。 □

备注 1.3.4。 我们可以把点**v** $\in \partial D$ 看作远在无穷远处（“符拉迪沃斯托克”）。如果用 D 作为复平面 $\mathbb{C}$的模型，这种看法就更加自然了。因此，我们有时会把命题 1.3.3 给出的 **Perv** (D, A) 的描述称为符拉迪沃斯托克描述，并将连接 a_i 与 a_j的路径 m_{ij}^K 称为符拉迪沃斯托克路径 。从朴素的“物理”观点来看，这并不是通过路径连接 a_i 与 a_j最自然的方式。

复平面 $\overline{\mathbf{Perv}}(\mathbb{C}, A)$ **中的** $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$。 对于 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$， $\mathbb{C}$关于 $\mathcal{F}$的超上同调 $H^i(\mathbb{C}, \mathcal{F})$ 在 $i \neq -1, 0$ 时消失。令 $\mathbf{Perv}^0(\mathbb{C}, A) \subset \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$ 为由满足 $H^i(\mathbb{C}, \mathcal{F}) = 0$ （对所有 i）的 $\mathcal{F}$构成的全子范畴。以下陈述是对 [13, 20]结果的重新表述。

命题 1.3.5。 ***(a)*** 局部化函子 反常层范畴$(\mathbb{C}, A) \to$ 反常层范畴$(\mathbb{C}, \overline{A})$ 限制为范畴 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A) \to$ 反常层范畴$(\mathbb{C}, A)$之间的一个等价。

(b) 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A)$ 中的每个对象都归约为次数为 (-1) 的单个层。

Proof: **(a)** 在 [13, 命题 2.3] 的证明中，作者构造了一个全嵌入 λ： $\mathcal{M}_N \to \mathcal{Q}_N$，其中 $\mathcal{M}_N$ 是由描述反常层范畴$(\mathbb{C}, A)$ 的图表构成的范畴，根据命题 1.3.3， $\mathcal{Q}_N$ 是由描述反常层范畴 $(\mathbb{C}, A)$ 的图表构成的范畴，根据命题 1.3.2。像 $\mathrm{Im}(\lambda)$ 是 $\mathcal{Q}_N$ 的一个子范畴，在局部化函子 $\mathcal{Q}_N \to \mathcal{M}_N$ 下等价地映射到 $\mathcal{M}_N$。随后根据 λ 的定义直接验证，参见 [20, 定理 2.29]证明的结尾，$\mathrm{Im}(\lambda) =$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A)$。

(b) 这在 [20, 定理 2.29] 证明的第一部分中得到了说明。 □

注 1.3.6. 因此，我们可以用几何方式将提升函子 λ 写成

$$\lambda : \widetilde{\mathrm{Perv}}(\mathbb{C}, A) \xrightarrow{\sim} \mathrm{Perv}^0(\mathbb{C}, A) \subset \mathrm{Perv}(\mathbb{C}, A).$$

根据命题 1.3.3，反常层范畴$(\mathbb{C},\ A)$中的对象由其消失循环 Φ_a 及其间的传输映射确定，但在 A以外的点处没有定义良好的茎；对于实际的反常层，这些茎在 $\mathbb{C}\backslash A$上构成一个（移位的）局部系统。函子 λ 提供了一种优选方式来赋予这样的局部系统。从几何角度解读由 [13] 构造 λ的过程，我们看到该系统的典型茎可与 $\bigoplus_{a\in A}\Phi_a$相识别。

例 1.3.7。设 $a \in A$ 和 $\mathcal{F} = \mathbf{k}_a \in$ 是反常层范畴$(\mathbb{C},\ A)$ 中位于 a处的摩天大楼层。记 $\mathcal{F} \in$反常层范畴$(\mathbb{C},\ A)$中 $\mathcal{F}$的像，则提升 $\lambda(\mathcal{F}) \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C},\ A)$是层 $j_!(\mathbf{k}_{\mathbb{C}\backslash\{a\}})[1]$, 其中$j:\ \mathbb{C}\backslash\{a\} \to \mathbb{C}$ 是嵌入。由于层的正合列，它在反常层范畴$(\mathbb{C},\ A)$ 中与 $\mathcal{F} = \mathbf{k}_a$ 同构

$$0 \to j_!(\underline{\mathbf{k}}_{\mathbb{C}\backslash\{a\}}) \to \underline{\mathbf{k}}_{\mathbb{C}} \to \mathbf{k}_a \to 0$$

给出了一个反常层范畴($\mathbb{C}$中的 A)正合列

$$0 \to \mathbf{k}_a \to j_!(\underline{\mathbf{k}}_{\mathbb{C}\backslash\{a\}})[1] \to \underline{\mathbf{k}}_{\mathbb{C}}[1] \to 0$$

其第三项属于 $\mathrm{LS}(\mathbb{C})[1]$。

1.4 反常层的傅里叶变换及其斯托克斯数据

本节中我们假设$\mathbf{k} = \mathbb{C}$。

A 形式傅里叶变换。设 $D_w = \mathbb{C}\langle w, \partial_w\rangle$ 为 $\mathbb{C}$ 上的多项式微分算子 Weyl 代数， D_w-模 $^{\mathrm{h}} \supset D_w$-模^{hrs} 分别为全纯模和正则奇点全纯 D_w-模所成的范畴。众所周知，解函子（作用于所有全纯模，无论其是否正则奇点）

$$\mathrm{Sol} : D_w\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{h}} \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}), \quad M \mapsto \mathrm{Sol}(M) = \underline{\mathrm{RHom}}_{D_w}(M, \mathcal{O}_{\mathbb{C}})[1]$$

取值于反常层范畴$(\mathbb{C})$。此外，它在 D_w-模^{hrs} 上的限制是一个等价（黎曼–希尔伯特对应）。例如，参见 [27]。因此，任意 $\mathcal{F} \in \mathrm{Perv}(\mathbb{C})$ 都可表示为某个唯一的 $M = M_{\mathcal{F}} \in D_w$-模^{hr}的 $\mathrm{Sol}(M)$ 。

形式傅里叶变换 是同构

$$D_w = \mathbb{C}\langle w, \partial_w\rangle \longrightarrow D_z = \mathbb{C}\langle z, \partial_z\rangle, \quad w \mapsto -\partial_z,\ \partial_w \mapsto z,$$

与解的解析傅里叶变换相匹配。给定 $M \in D_w\text{-}\mathrm{Mod}^{\mathrm{h}}$，其傅里叶变$\widehat{\ }$换 M 相同 M ，但通过上述同构将其视为一个 D_z-模。我们$\widehat{\ }$参见 [27] 了解这一构造的背景。特别地，已知 M 仍然$\widehat{\ }$是全纯的，因此我们得到反常层 $\mathrm{Sol}(M) = \mathrm{RHom}_{D_z}(M,\ \mathcal{O}_{\mathbb{C}})[1]$。

$\widehat{\ }$如果 M 是正则的，那么 M 通常不是正则的。在这种情况下，也已知反常层
$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\mathcal{F} = \mathbf{Sol}(M)$ 的唯一可能奇点是 0，因此我们得到函子（也称为傅里叶变换）

$$\mathrm{FT} : \mathrm{Perv}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{Perv}(\mathbb{C}, 0), \quad \mathcal{F} \mapsto \widehat{\mathcal{F}} := \mathrm{Sol}(\widehat{M_{\mathcal{F}}}). \tag{1.4.1}$$

因此，$\mathbf{FT}(\mathcal{F})$限制到 $\mathbb{C}\backslash\{0\}$上的形式为 $\mathbf{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})[1]$，其中 $\mathbf{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$是 $\mathbb{C}^*$上的一个局部系统，所以我们有函子

$$\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}} : \mathrm{Perv}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{LS}(\mathbb{C}^*).$$

由于 $\mathbb{C}^*$ 与单位圆 $S^1 \subset \mathbb{C}$同伦等价，对于 $\mathbb{C}^*$ 上的任意局部系统 $\mathcal{L}$ ，我们可以谈论其在 ant $\zeta \in S^1$处的茎 $\mathcal{L}_\zeta$ 。此外，对于任意 $a \in \mathbb{C}$， a 处的方向圆 S^1_a 都与这个固定的 S^1相同，因此我们可以将任意 $\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})$ 视为这个 S^1上的局部系统。据此，以下结论成立： [27, Ch.XII] [5, Prop.6.1.4]。

命题 1.4.2. 设 $\mathcal{F}$ ∈反常层范畴$(\mathbb{C})$。我们有一个自然同构

$$\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F}) \simeq \bigoplus_{a\in\mathbb{C}} \mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})$$

S^1上的局部系统。 □

特别地，函子 $\mathbf{FT}_{\mathrm{gen}}$ 通过反常层范畴 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C})$分解,¯这也是考虑这个局部化范畴的原因之一。

Proof: 为便于今后参考，我们概述一下在一般位置的 ζ 下构造命题中同一化的过程。设 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$。一般结果 [6, Th.3.1.1] 将 $\mathbf{FT}(\mathcal{F})$ 在 $\zeta \in S^1$ 处的茎（将其视为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆）表示为带支撑上同调，即

$$\mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta = H^0_{\{\mathrm{Re}(\zeta\overline{w})\geqslant -R\}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}), \quad R \gg 0, \tag{1.4.3}$$

其中 R 足够大，使得平移后的半平面包含 A。对于 $a \in A$，令 $K_a(\zeta) = a + \zeta \cdot \mathbb{R}_+$ 为沿着从 a 出发、方向为 ζ 的半直线，见图 4。

补集的嵌入

$$\mathbb{C}\backslash\ \{\mathrm{Re}(\zeta\overline{w}) \geqslant -R\} \ \hookrightarrow\ \mathbb{C}\backslash\ \bigcup_{a\in A} K_a(\zeta)$$

是一个同伦等价，并且 $\mathcal{F}$ 在这两者上都是局部常值的。因此，我们可以将 (1.4.3) 中的支撑替换为并集 $\bigcup_{a\in A} K_a(\zeta)$。此外，如果 ζ 处于足够一般的位置，那么该并集不相交，因此我们有

$$\mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta \simeq H^0_{\bigsqcup_{a\in A} K_a(\zeta)}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{a\in A} H^0_{K_a(\zeta)}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) = \bigoplus_{a\in A} \Phi_a(\mathcal{F}). \quad \square$$

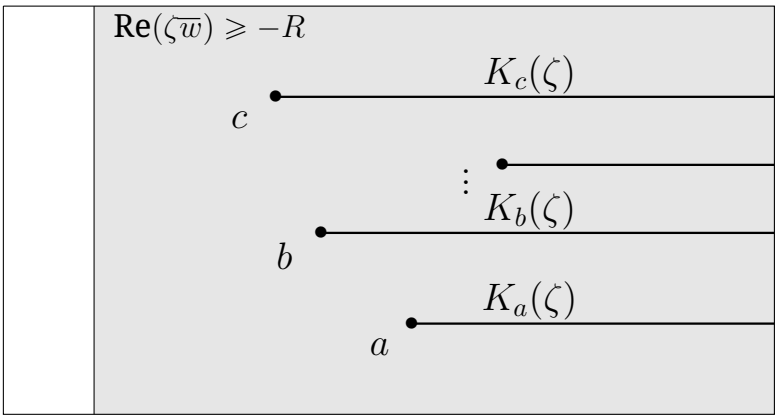


图 4：半直线 $K_a(\zeta)$。此处 $\zeta = 1$。

B 的 Stokes 过滤。由于 M 通常是不正则的，它的解（即 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$的截面）在 ∞附近的扇区中可能呈指数增长。因此，局部系统 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$ 带有额外的*Stokes* 结构，该结构由各个扇区中这种指数增长的数据给出。在我们的情形中，增长至多具有 $e^{\lambda z}$ 的形式，其中 λ 是一个常数。

因此，每个茎 $\mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta$ 都带有由集合 $\mathbb{C}$ 标记的 *Stokes* 过滤 $(\Sigma_\lambda)_{\lambda\in\mathbb{C}}$，其偏序 $\leqslant_\zeta$ 由以下条件给出：若 $\mathrm{Re}(\zeta\lambda) \leqslant \mathrm{Re}(\zeta\mu)$，则 $\lambda \leqslant_\zeta \mu$；也就是说，$e^{\lambda z}$ 在 $z \to \infty\widehat{\ }$ 射线 $\zeta \cdot \mathbb{R}_+$ 上被 $e^{\mu z}$ 支配。子空间 $\Sigma_\lambda\mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta \subset \mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta$ 由 M 的解构成，它们在方向 ζ 上的增长至多为 $e^{\lambda z}$。

命题 1.4.4。对于一般位置的 ζ，我们有

$$\Sigma_\lambda \mathrm{FT}(\mathcal{F})_\zeta = \bigoplus_{\mathrm{Re}(\zeta a) \geqslant -\lambda} \Phi_a(\mathcal{F}).$$

Proof: 这可由将 M 的解表示为实际的傅里叶积分 $g_{i,\ \zeta}(\varphi)(z)$对应于沿半直线 $K_i(\zeta)$ 对 $\varphi \in \Phi_{a_i}(\mathcal{F})$ 的积分得到，如图 4 所示。更多细节见 [27, 第 XII 章] 。g_i 在 $\zeta\infty$ 附近的增长率为 $e^{-a_i z}$ $_\zeta(\varphi)(z)$, $_\zeta(\varphi)(z)$ 。 □

1.5 Lefschetz perverse层及其傅里叶变换

在本节中，我们将k 取为任意域。

A 指数积分作为傅里叶变换。设 X 是一个维数为 n 的光滑复代数簇，且 $S: X \to \mathbb{C}$ 是一个正则函数。给定 X上的正则体积形式 dx，我们可以考虑指数积分

$$I(z) = I(\hbar) = \int_\Gamma e^{\frac{i}{\hbar}S(x)}dx, \quad z = 1/\hbar, \tag{1.5.1}$$

其中 Γ 是 X 中的一个局部有限 n-循环，且积分收敛。我们可以将 $I(z)$视为一个多值函数，其各个分支由 Γ的不同选取标记。

经典地，可以将 $I(z)$ 中的积分分成两个阶段。首先，我们有相对体积形式 $dx/dS,$ ，它是 $\Omega^{n-1}_{X/\mathbb{C}}$ 的一个有理截面，并构成 L_S 上的多值函数

$$L_S(w) = \int_{\Gamma_w \subset S^{-1}(w)} \frac{dx}{dS}$$

其中， Γ_w 是纤维中的一个 $(n-1)$-循环，并通过高斯-马宁联络随 w 变化。于是形式上（假设 Γ 由 Γ_w， $w \in \gamma$ 构成，其中 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个循环）

$$I(z) = \int_\gamma L_S(w) e^{izw} dw$$

是 L_S 的（某个取值下的）傅里叶变换。注意， L_S 是一个尼尔森型函数，满足具有正则奇点的微分方程，因此 $I(\hbar)$ 的所有超越性非平凡部分都来自一维傅里叶变换。

B Lefschetz perverse层。 L_S 的一个层论类比由反常层的集合给出

$$\mathcal{L}_S^i = \underline{H}^i_{\mathrm{perv}}(RS_*(\underline{\mathbf{k}}_X[\dim(X)]), \quad i \in \mathbb{Z}$$

在 $\mathbb{C}$ 上。其中， H^i_{perv} 是关于反常 t-结构取得的次数为 i 的 perverse上同调。我们将尤其关注 $i=0$ 的情形，并简写为 $\mathcal{L}_S = \mathcal{L}_S^0$；对于分次反常层 $\bigoplus_i \mathcal{L}_S^i$，则使用记号 $\mathcal{L}_S^\bullet$。

命题1.5.2。 假设函数 $S : X \to \mathbb{C}$ 只有孤立奇点，并且作为代数簇之间的态射是适当的（因此每个 $S^{-1}(a)$ 都是紧的）。那么：

(a) 若 $a \in \mathbb{C}$ 是 S的非临界值，则 $\mathcal{L}_S[-1]$ 在 w 附近是一个局部系统，其在 a 处的茎可识别为 $H^n(S^{-1}(a), \mathbf{k})$。

(b) 若 a 是临界值，则

$$\Phi_a(\mathcal{L}_S) = \bigoplus_{x \in S^{-1}(a)} \Phi_S(\underline{\mathbf{k}}_X[\dim(X)])_x$$

是 a上方各临界点处 S 的经典（*Lefschetz*）消失循环空间的直和。

因此，局部系统 $\mathcal{L}_S[-1]$ 在 S 的非临界值开集上的 $\mathbf{k} = \mathbb{C}$ 截面给出了 L_S的确定分支。

Proof: (a) 随之成立，因为 perverse t-结构以中间维数为中心。(b) 则由消失循环的定义得出。

□

注 1.5.3。 可以说，指数积分 (1.5.1) 范畴化的第一步，是由 FT($\mathcal{L}_S$) 给出的，即反常层 $\mathcal{L}_S$ 的傅里叶变换。 [3]正如我们在 §1.4 中所见，FT($\mathcal{L}_S$) 在 ∞ 附近的结构完全由 $\mathcal{L}_S$ 在 Perv($\mathbb{C}$) 中的像决定，也就是说，由 $\mathcal{L}_S$ 的消失循环以及它们之间的传输映射 $m_{ab}(\gamma)$ 决定。要得到这些数据，我们不必将 S 紧化为本征态射 $X \to \mathbb{C}$。例如，如果 S 是莫尔斯函数，那么只需知道 X 中包含临界点以及从临界点延伸至其他临界点的 Lefschetz thimble 的那一部分。

2 反常层的外代数导数：基础理论

2.1 局部化反常层的加性卷积与傅里叶变换

交换代数群上的 ´étale反常层的卷积由 N. Katz[19]研究过。我们需要一个适用于加法群 $\mathbb{C}$上解析反常层的简化版本，参见例如 [10]。

A 加性卷积。设k 是任意域。设 $A, B \subset \mathbb{C}$ 是有限子集，且 $\mathcal{F} \in$Perv$(\mathbb{C}, A)$, $\mathcal{G} \in$Perv$(\mathbb{C}, B)$。则 $\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G}$是 $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$上的可构造复形（事实上是一个反常层）。我们有加法映射

$$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}, \quad (w', w'') \mapsto w' + w''.$$

设 $A + B = +(A \times B)$ 是所有和 $a + b$, $a \in A$, $b \in B$构成的集合。映射 $+$ 给出加性卷积

$$\mathcal{F} * \mathcal{G} := R(+)_*(\mathcal{F} \boxtimes \mathcal{G})$$

注意， $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ 先验地是 $\mathbb{C}$ 上的一个可构造复形，其奇点（上同调的局部非恒定点）包含于 $A + B$中。

命题 2.1.1. *[10,* 命题 *2.4.3]* 若 $\mathcal{F} \in$ 反常层范畴($\mathbb{C}$, A) 且 $\mathcal{G} \in$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, B)$，则 $\mathcal{F} * \mathcal{G} \in$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A + B)$。 □

令 Perv($\mathbb{C}$) $= \bigcup_A$ Perv($\mathbb{C}$, A) 为 $\mathbb{C}$ 上具有有限多个奇点的所有反常层构成的范畴。类似地，我们定义商范畴 Perv($\mathbb{C}$) 及其提升 Perv$^0(\mathbb{C}) \subset$Perv($\mathbb{C}$)。由上文可知，Perv($\mathbb{C}$) 与 Perv$^0(\mathbb{C})$ 等价。

推论 2.1.2. *[10,* 定理 *2.4.11]* 运算 $*$ 使 反常层范畴($\mathbb{C}$) $\simeq$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C})$ 成为一个对称幺半范畴，其单位对象 **1**是$\mathbf{k}_0$ 在 反常层范畴($\mathbb{C}$) 中的等价类，或者等价地，是其提升$j_!\mathbf{k}^{\mathbb{C}\setminus\{0\}} \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$，参见例 *1.3.7*。

[3]下一步应将上同调群替换为适当的范畴，参见 [17]。

B 与解析函数的 Hurwitz卷积的比较。反常层的运算 $*$是全纯函数的加法（或 Hurwitz）卷积的范畴类比 $f,\ g \in \mathbb{C}\{\{w\}\}$ 该卷积定义在 0 附近：

$$(f*g)(w) = \int_0^w f(u)g(w-u)du. \tag{2.1.3}$$

If

$$f(w) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{w^n}{n!}, \quad g(w) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{w^n}{n!},$$

then

$$(f*g)(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \Big(\sum_{i+j=n} a_i b_j \Big) \frac{w^{n+1}}{(n+1)!}$$

（无常数项的级数，事实上我们有 $1*1 = w$）。Hurwitz 定理（奇点乘积的 Hadamard 定理的加法版本）指出，若 $f,\ g$ 分别可延拓为复平面 $\mathbb{C}$ 上的多值解析函数，且奇点分别位于可能为无限集的 $A,\ B$ 中，那么 $f*g$ 也可类似地延拓为复平面 $\mathbb{C}$ 上的多值解析函数，其奇点位于 $A \cup B \cup (A+B)$。参见 [14]，以及 [29] 和 [28] §6.4 中后续的论述。与命题 2.1.1 相比，Hurwitz 定理中在 $A = A + \{0\}$ 和 $B = \{0\} + B$ 处额外出现的可能奇点，源于式 (2.1.3) 中从 0 出发的积分路径是一条链，而不是带有被积函数各分支所成局部系统系数的循环。

复平面上的加性卷积与傅里叶变换。 设$\mathbf{k} = \mathbb{C}$。经典原理“傅里叶变换将卷积变为乘积”在这里具有如下形式。

命题 2.1.4. 对于 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$，我们有局部系统的自然同构于$S^1$

$$\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F}*\mathcal{G}) \ \simeq\ \mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F}) \otimes \mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{G}).$$

Proof: 根据黎曼-希尔伯特对应，定义 $\mathcal{F}*\mathcal{G}$ 中的直接像 $R+_*$ 可以在 D-模的层面计算。也就是说，设 $M, N \in D_w$-模^{hrs}。我们将D-模的加性卷积定义为 D_w-模的复形

$$M *^D N = R +_*^D (M \boxtimes N),$$

其中：

(1) $M \boxtimes N = M \otimes_{\mathbb{C}} N$视为 $D_w \otimes_{\mathbb{C}} D_w = \mathbb{C}\langle w', w'', \partial_{w'}, \partial_{w''} \rangle$ 上的模（ $\mathbb{C} \times \mathbb{C}$ 上的多项式微分算子）；

（2） $R+_*^D$ 是导出 D-模直接像，即沿着 $+$ 的纤维的德拉姆复形： $\mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

如此定义的 $M *^D N$ 是一个具有全纯正则奇异上同调的复形，并且在可构造复形的导出范畴中，$\mathsf{Sol}(M *^D N) \simeq \mathsf{Sol}(M) * \mathsf{Sol}(N)$。

此外，命题中所述局部系统的张量积对应于 $\mathbb{C}[z]$ 上 D_z-模的张量积。因此，我们的断言是以下断言的推论。

引理 2.1.5。令 $M, N \in D_w$- 模^{hrs}。则在导出范畴中有自然同构

$$\widehat{M *^D N} \simeq \widehat{M} \otimes^L_{\mathbb{C}[z]} \widehat{N}$$

Proof of lemma: 映射 $+$ 的纤维是一维的，其相对切丛由向量场 $\partial_{w'} - \partial_{w''}$ 生成。因此，$M *^D N$ 是复形

$$M \otimes_{\mathbb{C}} N \xrightarrow{\partial_{w'} - \partial_{w''}} M \otimes_{\mathbb{C}} N$$

其微分为 $\partial_{w'} - \partial_{w''} = \partial_w \otimes 1 - 1 \otimes \partial_w$。现在，$\widehat{M} \otimes^L_{\mathbb{C}[z]} \widehat{N}$ 是复形

$$\widehat{M} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{N} \xrightarrow{z\otimes 1 - 1 \otimes z} \widehat{M} \otimes_{\mathbb{C}} \widehat{N}.$$

但是，$\widehat{M}$ 是 M，其中 z 作用为 ∂_w，而 ∂_z 作用为 $-w$；对于 N也同样如此，因此第二个复形经傅里叶变换后可与第一个复形对应。这就证明了该引理和命题 2.1.4。 □

D Thom-Sebastiani 定理。命题 1.4.2 和 2.1.4 导出了一个乘法性质（Thom-Sebastiani 定理的一个版本），该性质不涉及傅里叶变换，并且可以直接在反常层的层面上证明。我们取$\mathbf{k}$ 为任意域。

令 $\mathrm{LS}(S^1)^{\mathbb{C}}$ 为 $\mathbb{C}$-分次局部系统在 S^1上的范畴，即由 S^1 上的局部系统构成的集合 $\mathcal{L} = (\mathcal{L}_c)_{c\in\mathbb{C}}$，满足对几乎所有 a都有 $\mathcal{L}_a = 0$。此范畴具有如下对称幺半结构：

$$(\mathcal{L} \otimes \mathcal{M})_c = \bigoplus_{a+b=c} \mathcal{L}_a \otimes \mathcal{M}_b.$$

我们有总消失圈函子

$$\mathbf{\Phi} : \mathrm{Perv}(\mathbb{C}) \longrightarrow \mathrm{LS}^{\mathbb{C}}(S^1), \quad \mathcal{F} \mapsto \mathbf{\Phi}(\mathcal{F}) := (\mathbf{\Phi}_c(\mathcal{F}))_{c\in\mathbb{C}}.$$

定理 2.1.6。 *[10, 定理 2.8。3]* 函子 $\mathbf{\Phi}$是对称幺半的。换言之，对任意 $\mathcal{F}$、$\mathcal{G} \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$ 以及任意 $c \in \mathbb{C}$，我们都有 S^1上的局部系统之间的自然同构

$$\mathbf{\Phi}_c(\mathcal{F} * \mathcal{G}) \simeq \bigoplus_{a+b=c} \mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F}) \otimes \mathbf{\Phi}_b(\mathcal{G}).$$

为方便读者并供日后参考，我们给出一个直接证明。只需考虑 $c = 0$ 的情形，任意 c 的情形类似。我们进一步确定点 $1 \in S^1$ 处消失循环局部系统的茎，也就是说，在 $\mathbb{R}_+$ 方向上的茎；

单值化的确定可由下文相同的论证得出。我们用字母Φ 表示这类茎。

对于反常层 $\mathcal{E}\in$反常层范畴$(\mathbb{C})$，我们有一个典范识别

$$\Phi_0(\mathcal{E}) \;=\; R\Gamma_{\{\mathrm{Re}(w)\geqslant 0\}}(\{|w|<r\},\mathcal{E}),$$

其中 $r>0$ 足够小。事实上，§1.2 B中的讨论给出 $\Phi_0(\mathcal{E})$ 为 $R\Gamma_{\mathbb{R}_+}(\{|w|<r\},\ \mathcal{E})$不过半平面 $\mathrm{Re}(w)\geqslant 0$ （其中位于圆盘 $|w|<r$ 内的部分）与实半直线分层同伦等价（相对于 $|w|<r$ 按 0 和其余部分所作的分层）。因此，以 w'，w'' 作为 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$中的坐标，我们有

$$\Phi_0(\mathcal{F}*\mathcal{G}) \;=\; R\Gamma_Z(\{|w'+w''|<r\},\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}),\quad Z:=\{\mathrm{Re}(w'+w'')\geqslant 0\},\tag{2.1.7}$$

见图5。现在考虑子集

$$W \;:=\; \bigcup_{a,b\in A,a+b=0}\big\{\mathrm{Re}(w'-a)\geqslant 0,\,\mathrm{Re}(w''-b)\geqslant 0\big\}\;\subset\; Z.$$

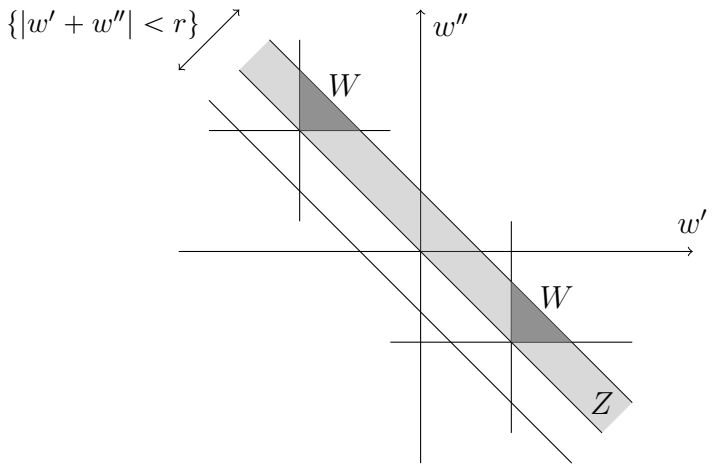


图5：Thom-Sebastiani 定理中的两组支集。

如果 r 足够小，那么 W 的定义中的并集互不相交，并且

$$R\Gamma_W(\{|w'+w''|<r\},\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}) \;=\; \bigoplus_{a,b\in A,a+b=0}\Phi_a(\mathcal{F})\otimes\Phi_b(\mathcal{G})\tag{2.1.8}$$

根据 K¨unneth 定理。还需注意，两个支集的补集，即开子集

$$U \;=\; \{|w'+w''|<r\}\setminus Z\quad\text{and}\quad V \;=\; \{w'+w''|<r\}\setminus W$$

相对于由 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}$ 的奇点给出的分层而言同伦等价。更确切地说，U 可以通过变形收缩从 V 得到，且变形只影响 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}$ 局部常值的区域，因此 $R\Gamma_Z = R\Gamma_W$，于是 (2.1.7) 和 (2.1.8) 给出的答案相同。

□

2.2 带有避让的直线传输与外来输运

A 直线传输。 我们先取 **k** 为任意域。令 $a, b \in A$ 为两个不同的点。连接 a 和 b 最自然的路径是直线区间 $[a, b]$。我们记

$$\zeta_{ab} = \frac{b-a}{|b-a|} \in S^1 := \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| = 1\} \tag{2.2.1}$$

沿从 a 到 b 的方向， $[a, b]$ 的斜率。

若 $[a, b]$ 不包含 A 的任何其他元素，那么对于任意 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$，我们可以使用 $[a, b]$ 来定义直线传输

$$m_{ab} = m_{ab}^{\mathcal{F}} = m_{ab}^{\mathcal{F}}([a, b]) : \mathbf{\Phi}_{a,[a,b]}(\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbf{\Phi}_{b,[a,b]}(\mathcal{F}). \tag{2.2.2}$$

若 A 满足包含 *8* 的线性一般位置，则 A 中任意三点都不在 $\mathbb{C}$ 中的同一条实直线上，并且没有任何 ζ_{ab} 属于 $\mathbb{R}$。

假设 A 满足包含 ∞ 的线性一般位置。那么所有直线传输 $m_{ab}([a, b])$、 $a, b \in A$ 都有定义。令 $\mathcal{M}_N$ 为图表 (Φ_i, m_{ij}) 所构成的范畴，如命题 1.3.3 所述。任意为 $A = \{a_1, \cdots, a_N\}$ 编号，并记 $\zeta_{ij} = \zeta_{a_i,a_j}$、 $i \neq j$ 和 $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F}) = \mathbf{\Phi}_{a_i}(\mathcal{F})$ （ S^1 上的一个局部系统）。采用这一记号，我们定义一个函子

$$\Xi_{\mathrm{rect}} : \overline{\mathrm{Perv}}(\mathbb{C}, A) \longrightarrow \mathcal{M}_N, \quad \mathcal{F} \mapsto (\Phi_i, m_{ij}),$$

如下。我们定义

$$\Phi_i = \mathbf{\Phi}_{a_i,a_i+\mathbb{R}}(\mathcal{F}) = \mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1$$

（局部系统 $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})$ 在 $1 \in S^1$处的茎）。此外， m_{ii}定义为 $\mathrm{Id} - T_i(\mathcal{F})$，其中$T_i(\mathcal{F})$: $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1 \to \mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1$ 是逆时针单值化。对于 $i \neq j$，我们将 m_{ij} 定义为以下复合

$$\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1 \xrightarrow{T_1^{\zeta_{ij}}} \mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_{\zeta_{ij}} = \mathbf{\Phi}_{a_i,[a_i,a_j]}(\mathcal{F}) \xrightarrow{m_{a_i,a_j}^{\mathcal{F}}} \mathbf{\Phi}_{a_j,[a_j,a_i]}(\mathcal{F}) = \mathbf{\Phi}_j(\mathcal{F})_{\zeta_{ji}} \xrightarrow{T_{\zeta_{ji}}^1} \mathbf{\Phi}_j(\mathcal{F})_1, \tag{2.2.3}$$

其中 $T_1^{\zeta_{ij}}$（分别为 $T_{\zeta_{ij}}^1$）是局部系统 $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})$从 **1** 到 ζ_{ij}（分别从 ζ_{ji}到 **1**）的单值化；当 $\mathrm{Im}(w_i) < \mathrm{Im}(w_j)$ 时，沿逆时针方向取值；当 $\mathrm{Im}(w_i) > \mathrm{Im}(w_j)$时，沿顺时针方向取值。

命题 2.2.4。 如果 A 处于包含∞的线性一般位置，那么函子 Ξ_{rect} 是范畴的等价。

Proof: 这个命题，即 [17, 命题 2.17], ，是通过将集合 A 变形到凸位置，由命题 1.3.3 推导得出的。 □

B 带避让的直线运输。现在允许 $[a,\ b]$ 包含 A中的其他元素，例如 $[a,\ b]\cap A=\{a_0=a,\ a_1,\ \cdots,\ a_r,\ a_{r+1}=b\}$，并按从 a 到b 的方向编号，其中 $r\geqslant 0$。设 $\varepsilon=(\varepsilon_1,\ \cdots,\ \varepsilon_r),\ \ \varepsilon_i\in\{+,-\}$ 是由 $+$ 和 $-$ 符号构成的序列。我们将由 ε 给出的带避让的直线运输定义为映射

$$m_{ab}^{\varepsilon}=m_{ab}^{\varepsilon,\mathcal{F}}:\Phi_{a,[a,b]}(\mathcal{F})\longrightarrow\Phi_{b,[a,b]}(\mathcal{F}),\quad m_{ab}^{\varepsilon}:=m_{ab}(\gamma_{\varepsilon}),\tag{2.2.5}$$

其中 γ_{ε} 是对路径 $[a,\ b]$ 进行的路径扰动：若 $\varepsilon_i=-$，则从左侧避开 a_i；若 $\varepsilon_i=+$，则从右侧避开 a_i，见图6。

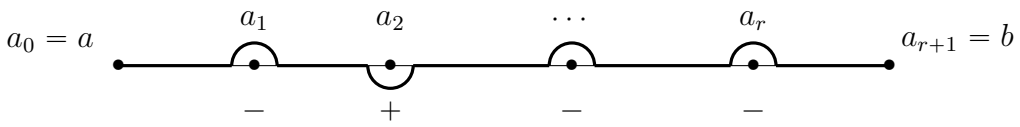


图6：带避让的传输。

我们将 $m_{ab}^{+}:=m^{+,\ \cdots,\ +}_{ab}$ 定义为所有避让均在右侧的传输，将 $m_{ab}^{-}:=m^{-,\ \cdots,\ -}_{ab}$ 定义为所有避让均在左侧的传输（两者均理解为 $m_{ab}[a,\ b]$，其中 $r=0$）。注意以下 Picard-Lefschetz 恒等式（命题1.2.8）的推论。本文以下部分中，局部 Φ 系统在中间点处的茎的识别，均按 Picard-Lefschetz 公式中的顺时针旋转进行，见 (1.2.7)。

命题2.2.6。*(a)* 我们有

$$m_{ab}^{-}\ =\ \sum_{s=0}^{r}\ \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant r}m_{a_{i_s},b}^{+}m_{a_{i_{s-1}},a_{s_r}}^{+}\cdots m_{a,a_{i_1}}^{+}.$$

(b) 等价地，我们有

$$m_{ab}^{-}\ =\ m_{ab}^{+}\ +\sum_{i=1}^{r}m_{a_i,b}^{+}m_{a,a_i}^{-}.$$

(c) 对于直线传输的复合，我们有恒等式

$$m_{a_r,b}m_{a_{r-1},a_r}\cdots m_{a,a_1}=\sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^r}(-1)^{|+(\varepsilon)|}m_{ab}^{\varepsilon},$$

其中 $|+(\varepsilon)|$ 是 ε中的 $+$ 符号数。

Proof: 这三个结论都可通过反复应用命题1.2.8轻易得出。(b) 可通过按 (a) 展开每个 m_{a,a_i}^{-} 归约为 (a)。(c) 是 [17,Cor.1.1.19] 的一个特例，适用于由直线的路径构成的路径的复合。□

复平面 外代数导数输运。 现在假设 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 0$。借鉴 Écalle 的´方法，我们给出如下

定义 2.2　　.7. 从 a 到 b 的外代数导数传输 对于 $\mathcal{F} \in$反常层范畴$(\mathbb{C})$ 是映射

$$m_{ab}^{\Delta} = m_{ab}^{\Delta,\mathcal{F}} = \sum_{s=0}^{r} \frac{(-1)^{s+1}}{s+1} \sum_{1\leqslant i_1<\cdots<i_s\leqslant r} m^{+}_{a_{i_s},b} m^{+}_{a_{i_{s-1}},a_{s_r}} \cdots m^{+}_{a,a_{i_1}} : \Phi_{a,[a,b]}(\mathcal{F}) \longrightarrow \Phi_{b,[a,b]}(\mathcal{F}).$$

这里，上标 Δ 只是一个符号，用来采用外代数导数 [9, 28]的标准记法。此外， ´Écalle 的公式可扩展到反常层的情形，形式如下:

命题 2.2.8。我们有

$$m_{ab}^{\Delta} = \sum_{\varepsilon\in\{+,-\}^r} \frac{(|+(\varepsilon)|!)\cdot(|-(\varepsilon)|!)}{(r+1)!} m_{ab}^{\varepsilon}.$$

其中， $|+(\varepsilon)|$ 和 $|-(\varepsilon)|$ 分别是 ε中 $+$ 和 $-$ 符号的数目

例 2.2.9。 对于 $r=0$: $a \bullet \underline{\qquad\qquad} \bullet b$，我们有 $m_{ab}^{\Delta} = m_{ab}[a,\ b]$。

对于 $r=1$: $a \bullet \overset{a_1}{\bullet} \bullet b$，我们有 $m_{ab}^{\Delta} = \frac{1}{2} m_{ab}^{+} + \frac{1}{2} m_{ab}^{-}$。

对于 $r=2$: $a \bullet \overset{a_1}{\bullet}\ \overset{a_2}{\bullet} \bullet b$，我们有

$$m_{ab}^{\Delta} = \frac{1}{3} m_{ab}^{++} + \frac{1}{6} m_{ab}^{+-} + \frac{1}{6} m_{ab}^{-+} + \frac{1}{3} m_{ab}^{--}.$$

注记 2.2.10。 (a) 命题 2.2.8 将 m_{ab}^{Δ} 表示为 m_{ab}^{ε} 的线性组合，且系数均为正并且总和为 1。

(b) 它还表明， m_{ab}^{Δ} 在引入虚设奇点后保持稳定，并且只依赖于 $[a,\ b]$ ，而不依赖于 A。也就是说，若 $\mathcal{F}$ 在某个 a_i处实际上没有奇点，即$\mathcal{F} \in$ 反常层范畴$(\mathbb{C},\ A\setminus\{a_i\}) \subset$ 反常层范畴$(\mathbb{C},\ A)$，那么在计算 m_{ab}^{Δ}时，无论是否将 a_i 考虑在内，结果都相同。

Proof of Proposition 2.2.8: 这是 Picard-Lefschetz 恒等式（命题1.2.8）的直接推论。为便于组织计算，我们将记号 m_{ab}^{ε} 推广到如下情形： $a = a_0,\ a_1,\ \cdots,\ a_r,\ a_{r+1} = b$ 依次位于一条可能是曲线的简单路径 γ上，该路径从a 到 b ，且不包含 A中的其他元素。也就是说，我们按照 ε定义路径 γ_ε ，其定义与（2.2.5）相同，但将 γ而非 $[a,\ b]$作为扰动对象。为表明对 γ的依赖，我们记作$m_{ab}^{\varepsilon}(\gamma)$。命题2.2.6(c)的曲线版本，即 [17, Cor.1.1.19] ，给出:

命题 2.2.11。 令 γ_i 表示 γ 中位于 a_i 和 a_{i+1} 之间的部分。

$$m_{a_{r+1},a_r}(\gamma_r) m_{a_r,a_{r-1}}(\gamma_{r-1}) \cdots m_{a_0,a_1}(\gamma_0) = \sum_{\delta\in\{+,-\}^r} (-1)^{|+(\delta)|} m_{ab}^{\delta}(\gamma). \quad \square$$

现在，为了证明命题 2.2.8，我们将命题 2.2.11 应用于定义 2.2.7 右侧的每个复合。也就是说，我们取这样一条 γ 路径：从 $a_0 = a$ 到 a_{i_1}，避开左侧的中间 a_i；接着从 a_{i_1} 到 a_{i_2}，采用类似的避让方式，并依此继续，最后沿着曲线段从 a_{i_s} 到 $a_{i_{s+1}} = b$，同样采用类似的避让方式。中间点为 a_{i_1}、$\cdots$、a_{i_s}。那么，对于这样的 γ 以及这样选取的中间点，命题 2.2.11 公式左侧的表达式就是命题 2.2.8 中的复合。因此我们得到

$$m^+_{a_{i_s},a_{i_{s+1}}} m^+_{a_{i_{s-1}},a_{s_r}} \cdots m^+_{a_{i_0},a_{i_1}} = \sum_{\delta\in\{+,-\}^s} (-1)^{|+(\delta)|} m_{ab}^{(+^{i_1-1},\delta_1,+^{i_2-i_1-1},\delta_2,\cdots,\delta_s,+^{r-i_s})},$$

其中 $+^m$ 表示由 m 个加号组成的序列。

现在，在对所有 s 和所有带有系数 $(-1)^{s+1}/(s+1)$ 的 $1 \leqslant i_1 < \cdots i_s \leqslant r$ 求和之后，我们需要求出每个 $m^{\varepsilon}_{ab}, \varepsilon \in \{+, -\}^r$ 处的系数。为此，我们用子集 $I = +(\varepsilon) = \{i|\varepsilon_i = +\} \subset \{1, \cdots, r\}$来编码 ε。于是该系数为

$$\sum_{J\supset I} \frac{(-1)^{|J\setminus I|}}{|J|+1} = \sum_{k=0}^{r-|I|} \frac{(-1)^k}{|I|+k+1} \binom{r-|I|}{k}.$$

因此，命题 2.2.8 可归结为以下结论。

引理 2.2.12。对于任意整数 $a, m > 0$，我们有

$$\sum_{k=0}^{m} \frac{(-1)^k}{a+k+1} \binom{m}{k} = \frac{m!a!}{(m+a+1)!}.$$

Proof of Lemma: 对于整数变量 a 的任意函数 $f = f(a)$，令 Δf 为其差分导数：$(\Delta f)(a) = f(a) - f(a+1)$。$\Delta$ 的第 m 次迭代具有如下形式

$$(\Delta^m f)(a) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \binom{m}{k} f(a+k).$$

令 $f_m(a) = m!a!/(m+a+1)!$，$m \geqslant 0$。该引理意味着 $f_m = \Delta^m f_0$。要证明这一点，只需证明 $\Delta f_m = f_{m+1}$，这很直接：

$$\begin{aligned}(\Delta f_m)(a) &= \frac{m!a!}{(m+a+1)!} - \frac{m!(a+1)!}{(m+a+2)!} = m! \frac{a!(m+a+2)! - (a+1)!}{(m+a+2)!} = \\ &= m! \frac{a!(m+1)}{(m+a+2)!} = \frac{a!(m+1)!}{(m+a+2)!} = f_{m+1}(a). \quad \square\end{aligned}$$

D 对 反常层范畴$(\mathbb{C}, A)$**通过外来输运**。现在我们将命题 2.2.4 推广到 $A = \{a_1, \cdots, a_N\} \subset \mathbb{C}$ 为任意有限子集的情形。我们保留上文 **§A** 中的记号，并且只假设没有任何 $[a_i, a_j]$ 是水平的，即所有 $\zeta_{ij} \notin \mathbb{R}$、$i \neq j$。

定义函子

$$\Xi_\Delta : \overline{\mathrm{Perv}}(\mathbb{C}, A) \longrightarrow \mathcal{M}_N, \quad \mathcal{F} \mapsto (\Phi_i, m_{ij}),$$

其中，与之前一样，

$$\Phi_i = \mathbf{\Phi}_{a_i, a_i+\mathbb{R}}(\mathcal{F}) = \mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1, \quad m_{ii} = \mathrm{Id} - T_i(\mathcal{F})$$

并且对于 $i \neq j$，映射 m_{ij} 是以下复合

$$\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_1 \xrightarrow{T_1^{\zeta_{ij}}} \mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})_{\zeta_{ij}} = \mathbf{\Phi}_{a_i,[a_i,a_j]}(\mathcal{F}) \xrightarrow{m^{\Delta,\mathcal{F}}_{a_i,a_j}} \mathbf{\Phi}_{a_j,[a_j,a_i]}(\mathcal{F}) = \mathbf{\Phi}_j(\mathcal{F})_{\zeta_{ji}} \xrightarrow{T^1_{\zeta_{ji}}} \mathbf{\Phi}_j(\mathcal{F})_1.$$

也就是说，我们用 $m^{\Delta,\ a_i}{}^{\mathcal{F}},\ a_j$（即针对 $\mathcal{F}$，从 a_i 到 a_j 的异变换）替换 (2.2.3) 中的直线变换（由于中间点的存在，该变换可能不再有意义）。

命题 2.2.13。 函子 Ξ_Δ 是范畴等价。

Proof: 我们对集合 A 作一个小的变形，将其替换为 $A' = \{a'_1, \cdots, a'_N\}$，使得 $|a_i - a'_i| \ll 1$ 满足如下条件： A' 现在与 ∞ 一起处于线性一般位置。由于反常层是拓扑对象，奇点集的连续变形 $a_i(t) = (1-t)a_i + ta'_i$, $t \in [0, 1]$ 会导出一个等价 $u : \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A) \to \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A')$ （“反常层的等单值变形”，例如参见 [17]）。对于任意 $\mathcal{F} \in \mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$，我们将对应的 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A')$ 中的对象记为 $\mathcal{F}'$，从而 $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})$ 与 $\mathbf{\Phi}_{a'_i}(\mathcal{F})$ 可被视为 S^1 上的一个局部系统。

将命题 2.2.4 应用于 A'，可知任意 $\mathcal{F} \in$ 反常层范畴$(\overline{\mathbb{C}, A})$ 都由以下数据唯一确定：

(1) $\mathbf{\Phi}_{a'_i}(\mathcal{F}')$的单值化，它们与 $\mathbf{\Phi}_i(\mathcal{F})$的单值化相对应。

(2) $\mathcal{F}'$的直线传输。

现在，对于 $\mathcal{F}'$，每个直线传输 m_{ij} 在等价 u下都对应于带避让的直线传输 $m^{\varepsilon(i,\ j)}_{a_i,\ a_j}$，其中某个 $\varepsilon(i, j)$ 描述了（原先的）中间点 a'_k 现在位于$[a'_i, a'_j]$的哪一侧。令 $r_{ij} = |A \cap (a_i, a_j)|$ 为 $[a_i, a_j]$上的中间点数量，则 $\varepsilon(i, j)$ 是一个长度为 r_{ij}的序列。

外代数导数输运$m^\Delta_{a_i,a_j}$ 是所有 $2^{r_{ij}}$ 传输 $m^\varepsilon_{a_i,a_j}$ 的线性组合，其系数严格为正（特别是非零）。已知任意一个 $m^\varepsilon_{a_i,a_j}$，根据 Picard-Lefschetz 公式，其他任意一个 $m^{\varepsilon'}_{a_i,a_j}$都可通过对 $[a_i, a_j]$的较小子区间上的带避让的传输复合进行加减来表示。因此，所有不同的 $1 \leqslant i, j \leqslant N$以及所有 $\varepsilon \in \{+,-\}^{r_{ij}}$对应的全部$\{m^\varepsilon_{a_i,a_j}\}$的数据，都可以通过三角形公式从 $\{m^{\varepsilon(i,\ j)}_{a_i,a_j}, 1 \leqslant i, j \leqslant N$的数据中唯一恢复出来，其中我们为每个有序对 (i, j)选取一个代表 $\varepsilon(i, j)$。因此，此类 $\{m^{\varepsilon(i,\ j)}_{a_i,a_j}\}$ 的数据与$\{m^\Delta_{a_i,a_j}\}$的数据构成双射，命题得证。

□

2.3 反常层的外来导数与斯托克斯自同构

A 单侧避让的乘法性质。同样，我们首先令$\mathbf{k}$为任意域。对于 $a, b \in \mathbb{C}$ 以及一个反常层 $\mathcal{F} \in$ 反常层范畴$(\mathbb{C})$，我们使用记号 $m_{ab}^{\pm} = m^{\pm,\mathcal{F}}_{ab}$ 表示 $m^{+,\mathcal{F}}_{ab} = m^{+,\cdots,+\mathcal{F},}_{ab}$ 或 $m^{-,\mathcal{F}}_{ab} = m^{-,\cdots,-\mathcal{F},}_{ab}$，并在任何公式中始终一致地采用这一含义。

设 $\mathcal{F} \in$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A')$, $\mathcal{G} \in$ 反常层范畴$^0(\mathbb{C}, A'')$ 和 $A = A' + A''$。根据定理 2.1.6，对于任意方向 $\theta \in S^1$ 及任意 $a, b \in A$，我们有

$$\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F} * \mathcal{G})_\theta \simeq \bigoplus_{\substack{a' \in A', a'' \in A'' \\ a'+a''=a}} \mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \otimes \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta, \quad \mathbf{\Phi}_b(\mathcal{F} * \mathcal{G})_{-\theta} \simeq \bigoplus_{\substack{b' \in A', b'' \in A'' \\ b'+b''=b}} \mathbf{\Phi}_{b'}(\mathcal{F})_{-\theta} \otimes \mathbf{\Phi}_{b''}(\mathcal{G})_{-\theta}. \tag{2.3.1}$$

设 $a = a' + a'', b = b' + b'' \in A$ 互不相同，且 $a', b' \in A'$ 和 $a'', b'' \in A''$。注意，$a' = a''$ 或 $b' = b''$ 可能成立（但不能同时成立）。令 $\theta = \zeta_{ab}$ 为从 a 到 b的方向。将带单侧避让的直线传输视为线性映射

$$m_{ab}^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}} : \mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F} * \mathcal{G})_\theta \longrightarrow \mathbf{\Phi}_b(\mathcal{F} * \mathcal{G})_{-\theta}.$$

相对于分解 (2.3.1)，我们得到矩阵元

$$\left(m_{ab}^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}}\right)_{a',a''}^{b',b''} : \mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \otimes \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta \longrightarrow \mathbf{\Phi}_{b'}(\mathcal{F})_{-\theta} \otimes \mathbf{\Phi}_{b''}(\mathcal{G})_{-\theta}.$$

定理 2.3.2. *(a)* 除非区间 $[a', b']$, $[a'', b'']$ 和 $[a, b]$ 平行且方向相同，否则 $\left(m^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}}_{ab}\right)^{b',b''}_{a',a''} = 0$。此处，退化区间 $[a', a']$ 或 $[b', b']$ 被视为与任意其他区间平行（且方向相同）。

(b) 如果这些区间 $[a', b']$, $[a'', b'']$ 和 $[a, b]$ 平行且方向相同，那么

$$\left(m_{ab}^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}}\right)_{a',a''}^{b',b''} = m_{a',b'}^{\pm,\mathcal{F}} \otimes m_{a'',b''}^{\pm,\mathcal{G}}.$$

这里我们将 $m^{\pm,\mathcal{F}}_{a',a'}$，或 $m^{\pm,\mathcal{G}}_{a'',a''}$ 理解为恒等映射。

我们用 $[a', b'] \parallel [a'', b''] \parallel [a, b]$ 表示上述三个区间平行且方向相同的条件。于是，我们可以将定理 2.3.2 重述如下：

重述 2.3.3。在上述记号下，我们有

$$m_{ab}^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}} = \sum_{\substack{a'+a''=a,\, b'+b''=b \\ [a',b'] \parallel [a'',b''] \parallel [a,b]}} m_{a',b'}^{\pm,\mathcal{F}} \otimes m_{a'',b''}^{\pm,\mathcal{G}}. \quad \square$$

定理 2.3.2和重述 2.3.3，以及下面的证明，均受到 [28] 的定理 6.83及其纯解析证明的启发。

B 定理 2.3.2 的证明。 我们来讨论 m^- 的情形（左侧的避让）， m^+ 的情形类似。固定 $a' \in A'$、$a'' \in A''$。令 $a = a' + a'' \in A$ 并

$$K' = a' + \mathbb{R}_+\theta = \{a' + t'\,\theta |\ t' \geqslant 0\}, \quad K'' = a'' + \mathbb{R}_+\theta = \{a'' + t''\,\theta |\ t'' \geqslant 0\}, \\ K = a + R_+\theta = \{a + t\,\theta |\ t \geqslant 0\} \tag{2.3.4}$$

是从 a'、 a'' 和 a 沿 θ 方向延伸的直半直线，见图 7(b)。我们用 t'、t'' 和 t 作为这些半直线上的坐标。

根据例 1.2.2,

$$\mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \;=\; \underline{H}^0_{K'}(\mathcal{F})_{a'}, \quad \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta \;=\; \underline{H}^0_{K''}(\mathcal{F})_{a''} \quad \text{and therefore} \\ \mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \otimes \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta \;=\; \mathcal{H}_{(a',a'')}, \quad \text{where} \quad \mathcal{H} := \underline{H}^0_{K'\times K''}(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}). \tag{2.3.5}$$

茎 $\mathcal{H}_{(a',\ a'')}$ 可视为 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}$ 的零次上同调，其支撑位于 $(a',\ a'')$ 左侧附近的深色阴影区域内，见图 7(a)。记作

$$\widetilde{A}' = A' \cap K' \;=\; \big\{a' = b'_0, b'_1, b'_2, \cdots\big\}, \quad \widetilde{A}'' = A'' \cap K'' \;=\big\{a'' = b''_0, b''_1, b''_2, \cdots\big\}$$

按 K'， K'' 的方向所给出的顺序，见图 7(b)。

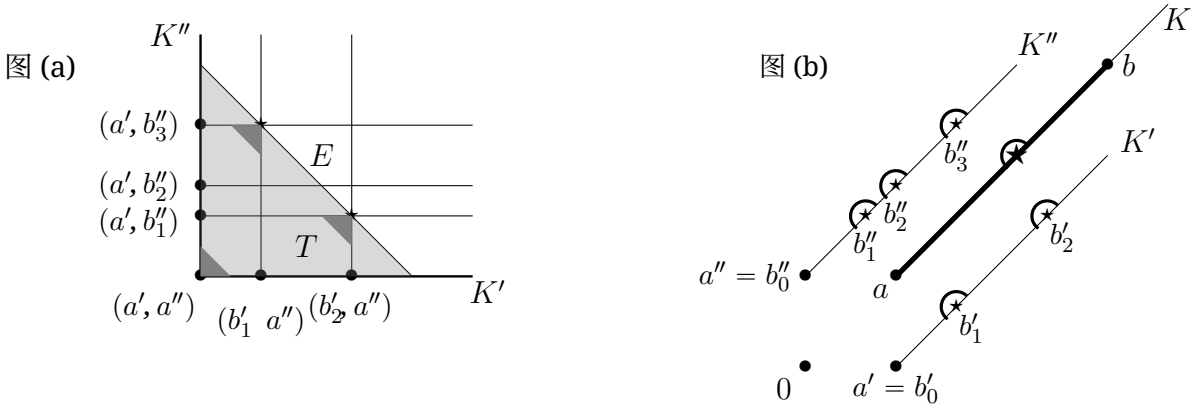


图 7：区域 $T \subset K' \times K''$ 以及针对 $\mathcal{F} * \mathcal{G}$ 的带避让的运输。

$\widetilde{\mathcal{H}}$ 层在 $K'\times K''$ 上是可构造的，相对于由 $A'\times K''$、$K'\times A''$ 及其交集 $A'\times A''$所确定的分层而言，见图 7(a)。这是因为 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}$ 相对于 $\mathbb{C}\times\mathbb{C}$的类似分层是可构造的。特别地， $\mathcal{H}$ 在 $(a'$上附近的内部是局部常值的，。

令 K', K'' 为 K', K'' 的小扰动，它们通过避开左侧的 $b'_i, b''_i, i > 0$ 得到。于是，$K' \times K''$ 在 (a', a'') 附近与 $K' \times K''$ 重合。根据构造，

$$\widetilde{\mathcal{H}} \;=\; \underline{H}^0_{\widetilde{K}'\times\widetilde{K}''}(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G})$$

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$在 $K' \times K''$ 的整个内部上局部常值，并且在 (a', a'') 附近与 $\mathcal{H}$ 重合。再令$\sim K$ 为 $[a, b] \subset K$ 的一个类似扰动，它避开左侧 A 中除 a 和 b 之外的所有元素。

现在来看复合映射

$$(2.3.6)\quad \mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \otimes \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta \xrightarrow{\varepsilon_{a',\,a''}} \mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F}*\mathcal{G})_\theta \xrightarrow{m_{ab}^{-,\mathcal{F}*\mathcal{G}}} \mathbf{\Phi}_b(\mathcal{F}*\mathcal{G})_{-\theta} = \bigoplus_{b'+b''=b} \mathbf{\Phi}_{b'}(\mathcal{F})_{-\theta} \otimes \mathbf{\Phi}_{b''}(\mathcal{G})_{-\theta}.$$

这里 $\varepsilon_{a',\,a''}$ 是由 Thom-Sebastiani 定理 2.1.6 给出的嵌入，右侧的等式中也指明了这一点。传输 $m^{-,\,\mathcal{F}*\mathcal{G}}_{ab}$ 使用 $\widetilde{K}$ 定义。如 §1.2**复平面**$\widetilde{\quad}$ 中所述（应用于 $\alpha = K$），它由三个映射组成:

(1) 泛化映射 $u_{a,\,\tilde{K}} = u^{\mathcal{F}*\mathcal{G}}_{a\,\tilde{K}}$，（采用 (1.2.4) 中的记号），从 $\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F}*\mathcal{G})_\theta = H^0_{\tilde{K}}(\mathcal{F}*\mathcal{G})_a$ 到邻近点 $c \in \widetilde{K}$ 处的茎，即 $H^0_{\tilde{K}}(\mathcal{F}*\mathcal{G})_c = (\mathcal{F}*\mathcal{G})[-1]_c$；它与局部系统 $\mathcal{F}*\mathcal{G}[-1]$ 在 c 处的茎相同。

$\widetilde{\quad}$(2) 将 (1) 的结果沿局部系统 $\mathcal{F}*\mathcal{G}[-1]$ 中的 K 平行传输，直到几乎到达 b。

(3) 使用 (2) 逼近 b 之后，在 b 处应用变分映射 $v_{b,\,\tilde{K}} = v^{\mathcal{F}*\mathcal{G}}_{b\,\tilde{K}}$，（采用 (1.2.4) 中的记号）；该映射是 Verdier 对偶反常层 $(\mathcal{F}*\mathcal{G})^\vee \simeq \mathcal{F}^\vee * \mathcal{G}^\vee$ 的泛化映射 $u^{(\mathcal{F}*\mathcal{G})^\vee}_{b\,\tilde{K}}$ 的对偶。

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$设 $\tau \in K' \times K''$ 是靠近点 $(a',\ a'')$ 的一个内部点。它也属于 $K' \times K''$，并且

$$\gamma_{a',a''} : \mathcal{H}_{(a',a'')} = \widetilde{\mathcal{H}}_{(a',a'')} \longrightarrow \mathcal{H}_\tau = \widetilde{\mathcal{H}}_\tau$$

$\widetilde{\quad}$是可构造层 $\mathcal{H},\ \mathcal{H}$ 的泛化映射；这些层在包含 $(a',\ a'')$ 和 τ 的区域内一致。

设 $\varphi \in \mathbf{\Phi}_{a'}(\mathcal{F})_\theta \otimes \mathbf{\Phi}_{a''}(\mathcal{G})_\theta = \mathcal{H}_{(a',\,a'')}$。由 Thom-Sebastiani 定理中识别的构造（定理 2.1.6 的证明）可知，复合 $u_{a,\,\tilde{K}}\varepsilon_{a',\,a''}$ 可视为先取 $\gamma_{a',\,a''}$，然后再取“遗忘支撑”态射

$$R(+)_*\ \underline{H}^0_{K'\times K''}(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}) \longrightarrow R(+)_*(\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}) = \mathcal{F}*\mathcal{G}$$

在 c 上的茎中求值。因此，我们可以将沿着

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\sim K$ 对 $u_{a,\,\tilde{K}}\varepsilon_{a',\,a''}(\varphi)$ 的平行传输，替换为在 $K' \times K''$ 的内部上由 $\mathcal{H}$ 给出的局部系统中对 $\gamma_{a',\,a''}(\varphi)$ 的平行传输。由于该内部是可缩的，我们在其上有 $\mathcal{H}$ 的一个良定义截面 $\tilde{\varphi}$，它延拓了 $\gamma_{a',\,a''}(\varphi)$。

映射 $+ : \mathbb{C}\times\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 限制为 $+_K : K' \times K'' \to K$，其在坐标 t', t'' 中由 (2.3.4) 给出的形式为 $t = t' + t''$。令 $T = +_K^{-1}([a, b)) \subset K' \times K''$ 为$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$半开区间 $[a, b)$的原像，如图 7(a) 中的大块阴影区域所示，并令 $T \subset K' \times K''$ 为

T的相应扰动。在 T的边 $E=\{t'+t''=|b-a|\}$ 上，我们有点(b'_i,b''_j)，其中 $b'_i+b''_j=b$，也就是说，恰好是满足以下条件的点 (b',b'')： $[a',b']$、 $[a',b'']$和 $[a,b]$平行且方向相同，正如定理 2.3.2 的陈述所述。

由于上文（3）中的变分映射 $v_{b\,\tilde{K}}^{\mathcal{F}*\mathcal{G}}$,与刚刚描述过的 $u_{b\,\tilde{K}}^{\mathcal{F}^\vee*\mathcal{G}^\vee}$,互为对偶，因此我们看到，只有 (b'_i,b''_j)在 E上会接收到 $m^{-}{}_{,ab}^{\mathcal{F}}(\varepsilon_{a,a'}(\varphi))$的一个分量：其他的$(b'_i,b''_j)$将映射到远离 b的位置。这正是定理的（a）部分。

现在证明（b）。设 $b'=b'_i,b''=b''_j$满足 $b'+b''=b$和 $\psi\in\mathbf{\Phi}_{b'}(\mathcal{F}^\vee)_{-\theta}\otimes\mathbf{\Phi}_{b''}(\mathcal{G}^\vee)_{-\theta}$。与之前一样，我们利用 $v_{b\,\tilde{K}}^{\mathcal{F}*\mathcal{G}}$,与 $u_{b\,\tilde{K}}^{\mathcal{F}^\vee*\mathcal{G}^\vee}$,之间的对偶性，并用泛化映射 $\gamma_{(b',b'')}:\mathcal{H}_{(b',b'')}\to\mathcal{H}_\sigma$来解释后者，其中 σ 是 T 中的一点，位于 (b',b'')附近的区域内，如图 7(b) 中边缘 E 附近较深的阴影区域所示。因此，我们有配对的等式

$$\big(m_{ab}^{-,\mathcal{F}*\mathcal{G}}(\varepsilon_{a',a''}(\varphi)),\psi\big)=\big(\widetilde{\varphi}(\sigma),\gamma_{(b',b'')}(\psi)\big).$$

右侧的两个对偶局部系统的截面在附近的点处取值，因此配对定义良好。但由于 $\widetilde{\varphi}$是局部系统 $\mathcal{F}\boxtimes\mathcal{G}[-2]$的一个截面，右侧的配对恰好就是 $\big((m^{-}{}_{,\,a'}^{\mathcal{F}}{}_{,\,b'}\otimes m^{-}{}_{,\,a''}^{\mathcal{G}}{}_{,\,b''})(\varphi),\ \psi\big)$。定理得证。

C 示例：初等平行四边形。作为定理 2.3.2 的一个例子，考虑以下特殊情形。设 $A'=\{a',\ b''\}$ 和 $A''=\{a'',\ b''\}$ 各由两个元素组成，且区间 $[a',\ b']$ 和 $[a'',\ b'']$ 不平行，因此

$$A=A'+A''=\big\{a:=a'+a'',\ b'+a'',\ a'+b'',\ b'+b''=:b\big\}$$

是一个非退化平行四边形的顶点集合，见图 8。根据定理 2.1.6， $\mathcal{F}*\mathcal{G}$ 在这些顶点处的消失循环空间是如图 8 所示的张量积。由于没有中间点， $\mathcal{F}*\mathcal{G}$ 在这些顶点之间的直线传输不需要避让： $m^+=m^-=m$。在这种情况下，定理 2.3.2 表明，沿平行四边形各面的传输是 $m^{\mathcal{F}}_{a',\,b'}$ 或 $m^{\mathcal{G}}_{a'',\,b''}$ 与 Id 的张量积，因此这些映射（在局部系统 $\mathbf{\Phi}$ 的茎的同构意义下）看起来构成了一个交换方形。

但是，对角输运 $m_{ab}^{\mathcal{F}*\mathcal{G}}$ 等于 0。注意到由 a' 和 a'' 沿方向 $\theta=\zeta_{ab}$ 出发的射线 K', K'' 中不会包含 A' 或 A''的其他元素，便可直接看出这一结论。因此， $K'=K'$、 $K''=K''$ 以及层 $\mathcal{H}=\mathcal{H}$ 在 $K'\times K''$内部处处局部常值。这意味着，对于 $\varphi\in\Phi_{a'}(\mathcal{F})\otimes\Phi_{a''}(\mathcal{G})$， $u_{a,\,K}(\varphi)$在泛化映射下的像φ 可以沿着 K 一直延拓，穿过整个 b ，因此它在 b 处的变化（在 $v_{b,\,K}$下的像）为零。

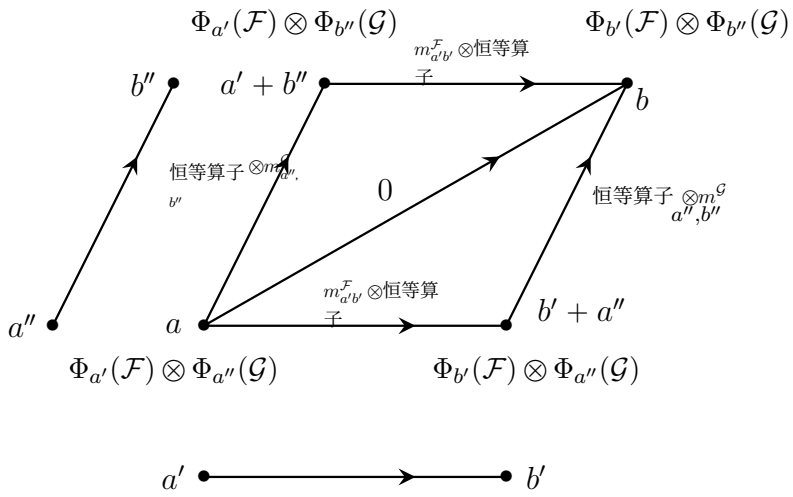


图 8：一个基本平行四边形：对角输运为 0。

D 矩阵表述。斯托克斯算子。和之前一样，设 $S^1=\{\zeta\in\mathbb{C}:\ |\zeta|=1\}$为方向圆。设 $\omega\in\mathbb{C}$ 为一个非零数。对于任意 $\mathcal{F}\in$ 反常层范畴$(\mathbb{C})$，我们将$\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})_\omega$记作 $\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})$在 $\omega/|\omega|\in S^1$处的茎，并令 $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\omega=\bigoplus_{a\in\mathbb{C}}\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})_\omega$。

定义算子 $C^{\pm,\ \mathcal{F}}_{\cdot,\ \omega}$: $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\omega\to\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\omega$，其矩阵元 $(C^{\pm,\ \mathcal{F}}_{\cdot,\ \omega})^b_a:\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})_\omega\to\Phi_b(\mathcal{F})_\omega$ 定义如下:

$$(C^{\pm,\mathcal{F}}_\omega)^b_a=\begin{cases}\mathrm{Id}, & \text{if } a=b;\\ T^\omega_{-\omega}\circ m^{\pm,\mathcal{F}}_{ab}, & \text{if } b=a+\omega;\\ 0, & b \text{ otherwise.}\end{cases}$$

这里，$T^\omega_{-\omega}$是从方向 $-\omega/|\omega|$到方向 $+\omega/|\omega|$的 $\mathbf{\Phi}_b(\mathcal{F})$的顺时针半单值变换（采用与复合直线传输时相同的识别）。

重述 2.3.3 还可以进一步表述如下。

推论 2.3.7。对于 $\mathcal{F}$，$\mathcal{G}\in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$ 我们有

$$C^{\pm,\mathcal{F}*\mathcal{G}}_\omega=\sum_{\substack{\omega'+\omega''=\omega\\ \omega',\omega''\in[0,\omega]}}C^{\pm,\mathcal{F}}_{\omega'}\otimes C^{\pm,\mathcal{G}}_{\omega''}.$$

这里对于 $\omega'=0$ 或 $\omega''=0$（由于 $\omega\neq0$，只能出现一种情形），我们将$C^\pm_0$理解为 恒等映射 . □

定义2.3.8。设 $\zeta\in S^1$ 和 $\mathcal{F}\in$属于反常层范畴$(\mathbb{C})$。我们将与 ζ和 $\mathcal{F}$ 相关联的斯托克斯算子 定义为

$$\mathrm{St}_\zeta=\mathrm{St}^{\mathcal{F}}_\zeta=\mathrm{Id}+\sum_{\omega\in\mathbb{R}_{>0}\zeta}C^-_\omega:\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\zeta\longrightarrow\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\zeta.$$

算子 St_ζ 是可逆的，因为相对于 A上的顺序 $\leqslant_\zeta$，它由一个块上三角矩阵表示。它的对角线上为 Id，因为它在伴随分次空间上给出恒等映射。命题 2.3.7还可以用更加简洁的方式重新表述。

命题 2.3.9. 设 $\mathcal{F}$，$\mathcal{G} \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$。对于任意 $\zeta \in S^1$。

$$\mathrm{St}_\zeta^{\mathcal{F}*\mathcal{G}} = \mathrm{St}_\zeta^{\mathcal{F}} \otimes \mathrm{St}_\zeta^{\mathcal{G}}. \quad \square$$

换言之，St_ζ 是张量函子 $\mathbf{\Phi}(-)_\zeta$ 的自同构。

E 通过矩阵元定义外来导数。 现在假设 $\mathrm{char}(\mathbf{k}) = 0$。对于 $\mathcal{F} \in$反常层范畴$(\mathbb{C})$ 和非零的 $\omega \in \mathbb{C}$，我们称关于 $\mathcal{F}$ 沿方向 ω 的外代数导数为算子$\Delta_\omega = \Delta_\omega^{\mathcal{F}}$: $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\omega \to \mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\omega$，其矩阵元 $(\Delta_\omega)_a^b$: $\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})_\omega \to \mathbf{\Phi}_b(\mathcal{F})_\omega$定义如下:

$$(\Delta_\omega)_a^b = \begin{cases} T_{-\omega}^{\omega} \circ m_{ab}^{\Delta}, & \text{if } b = a + \omega; \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

因此，对于几乎所有的 ω， $\Delta_\omega = 0$。

F 将外来导数视为函子导子。 由于 $\mathrm{St}_\zeta^{\mathcal{F}}$由一个对角线上为 Id 的块上三角矩阵给出，其对数是一个定义良好的算子。

定理 2.3.10. *(a)* 我们有

$$\log \mathrm{St}_\zeta^{\mathcal{F}} = \sum_{\omega \in \mathbb{R}_{>0}\zeta} \Delta_\omega^{\mathcal{F}}.$$

(b) 设 $\mathcal{F}, \mathcal{G} \in$反常层范畴$^0(\mathbb{C})$。关于这一识别 $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F} * \mathcal{G})_\omega \simeq \Phi(\mathcal{F})_\omega \otimes \Phi(\mathcal{G})_\omega$，我们有莱布尼茨法则

$$\Delta_\omega^{\mathcal{F}*\mathcal{G}} = \Delta_\omega^{\mathcal{F}} \otimes \mathrm{Id} + \mathrm{Id} \otimes \Delta_\omega^{\mathcal{G}}.$$

换　　句话说，外代数导数是张量函子 $\mathbf{\Phi}(-)_\omega$ 的导子。

Proof: (a) 可通过将 m_{ab}^{Δ} 的定义 2.2.7 与对数级数 $\log(1+x) = \sum_{s=0}^{\infty} (-1)^s x^{s+1}/(s+1)$ 进行比较而得出。

(b) 由于 St_ζ 是张量函子 $\mathbf{\Phi}(-)_\zeta$ 的自同构，按照形式上的理由，其对数 $\Delta_{\mathbb{R}_{>0}\zeta} = \log \mathrm{St}_\zeta$ 是一个导子。现在，$\mathbf{\Phi}(-)_\zeta$ 取值于 $\mathbb{C}$分次向量空间的张量范畴（配备分次张量积）。该函子的任意自同态 D 都可以分解为齐次分量 $D = \sum_{\omega \in \mathbb{C}} D_\omega$，其中 D_ω 将次数提高 ω。显然，D 是导子，当且仅当每个 D_ω 都是导子。只需注意到，根据 (a)， Δ_ω、$\omega \in \mathbb{R}_{>0}\zeta$ 恰好是 $\Delta_{\mathbb{R}_{>0}\zeta}$ 的齐次分量。 $\square$

G 关于傅里叶变换的 Stokes 自同构。令 $\mathbf{k}=\mathbb{C}$ 且 $\mathcal{F}\in Perv(\mathbb{C},\ A)$。对于所有互不相同的 $a,\ b\in A$，方向 ζ_{ab}（见 (2.2.1)）称为 A 的*Stokes* 方向。

如 §1.4 所述，傅里叶变换给出复平面 $\mathbb{C}^*$ 上的局部系统 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$，或者等价地，给出在 S^1 上的局部系统。在命题 1.4.2 的证明中，我们构造了一个识别，将 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$ 与 $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})=\bigoplus_{a\in A}\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})$ 在斯托克斯方向之外联系起来。事实上，$\zeta\in S^1$ 不是斯托克斯方向，当且仅当所有半射线 $K_a(\zeta)=a+\zeta\mathbb{R}_+$ 彼此不相交。

现在让我们通过描述这些识别如何在给定的斯托克斯方向 ζ 处粘合在一起，来完成这一构造。设 ζ^+ 和 ζ^- 分别是从 ζ 顺时针和逆时针方向邻近的非斯托克斯方向。对于局部系统 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$)，沿 ζ 的粘合，在采用先前的识别后，由映射 S_ζ 给出，该映射定义为以下复合

$$\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\zeta \xrightarrow{T_\zeta^{\zeta^+}(\mathbf{\Phi})} \mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_{\zeta^+} \xrightarrow{(1.4.2)} \mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})_{\zeta^+} \xrightarrow{T_{\zeta^+}^{\zeta^-}(\mathrm{FT})} \mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})_{\zeta^-} \xrightarrow{(1.4.2)} \mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_{\zeta^-} \xrightarrow{T_{\zeta^-}^{\zeta}(\mathbf{\Phi})} \mathbf{\Phi}(\mathcal{F})_\zeta.$$

这里，例如，$T_\zeta^{\zeta^+}(\mathbf{\Phi})$ 是局部系统 $\mathbf{\Phi}(\mathcal{F})$ 从 ζ 到 ζ^+（沿最短路径）的单值化，而 $T_{\zeta^+}^{\zeta^-}(\mathrm{FT})$ 是 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$ 从 ζ^+ 到 ζ^- 的单值化。下面的结果除记号外与 $[5,\mathrm{Th.5.2.2}]$ 一致。

定理 2.3.11。 S_ζ 与 *Stokes* 自同构 St_ζ 重合。 □

注 2.3.12。由于 St_ζ 具有三角形结构，它保持命题 1.4.4 中针对一般位置（非 Stokes）方向 θ 所描述的 Stokes 过滤：穿过 ζ 后添加的项，其指数增长率较低。因此，我们在 S^1 上的局部系统 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})$ 上得到一个定义良好的过滤，该过滤由 S^1 上的偏序集层 $(A,\ \leqslant_\theta)_{\theta\in S^1}$ 标记。这意味着集合层 A 是常值的，但序关系 $\leqslant_\theta$ 随 θ 变化，见 $[8,\ 7]$ 和 $[17,\ \S2.4]$。

H 定理 2.3.11 的含义与重新表述。为方便读者，我们来更详细地讨论定理 2.3.11 的含义。设 $V=\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})_\zeta$，通过单值化（沿最短路径）与 $\mathrm{FT}_{\mathrm{gen}}(\mathcal{F})_{\zeta^\pm}$ 相识别。选取 $R\gg 0$，并令 $\mathfrak{H}$ 为半平面 $\{\mathrm{Re}(\zeta w)\geqslant -R\}$，如命题 1.4.2 的证明中所述，使得

$$V=H^0_{\mathfrak{H}}(\mathbb{C},\mathcal{F}).$$

对于任意闭子集 $Z\subset\mathfrak{H}$，令 $\tau_Z\colon\ H^0_Z(\mathbb{C},\ \mathcal{F})\to V$ 为由支撑的包含关系诱导的态射。

和之前一样，对于任意 $a\in\mathbb{C}$ 和 $\theta\in S^1$，记 $K_a(\theta)=a+\mathbb{R}_+\theta$ 为从 a 出发、方向为 θ 的射线。记

$$K_a^\pm=K_a(\zeta^\pm),\quad K_a=K_a(\zeta),\quad K^\pm=\bigsqcup_{a\in A}K_a^\pm,\quad K=\bigcup_{a\in A}K_a,$$

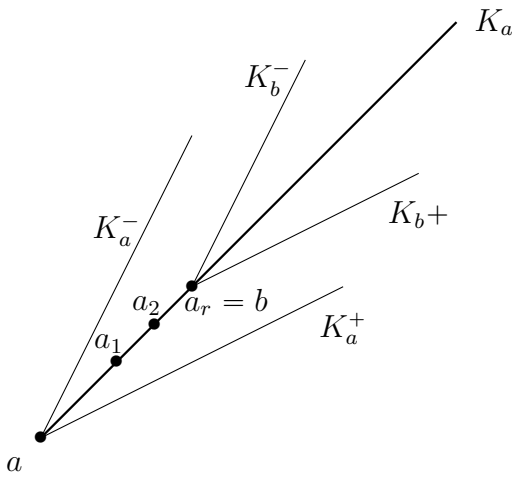


图9：穿越斯托克斯方向 $\zeta = \zeta_{ab}$。

见图 9。由于 $\zeta^{\pm}$ 不是 Stokes 的，射线 $K_a^{\pm}$、 $a \in A$彼此不同，但K_a则不然。对任意 $\theta \in [\zeta^+, \zeta^-]$, 记 Φ_a为茎 $\mathbf{\Phi}_a(\mathcal{F})_\theta$；这些茎通过单值化相互识别，并令 $\Phi = \bigoplus_{a\in A} \Phi_a$。于是我们得到如下识别

$$\Phi \simeq \bigoplus_a H^0_{K_a^{\pm}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) = H^0_{K^{\pm}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}).$$

注意，态射

$$\tau_{K^{\pm}} : \Phi = H^0_{K^{\pm}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \to V \text{ as well as } \tau_K : H^0_K(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \to V$$

是同构，因为补集 $\mathbb{C}\backslash K^{\pm}$ 和 $\mathbb{C}\backslash K$ 同伦等价于 $\mathbb{C}\backslash\mathfrak{H}$，而$\mathcal{F}$ 在这些补集上是局部常值的。由命题 1.4.2中构造的识别可得， $S_\zeta = \tau_{K^-}^{-1}\tau_{K^+}$，也就是说，它等于以下复合

$$\Phi = H^0_{K^+}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\tau_{K^+}} H^0_{\mathfrak{H}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\tau_{K^-}^{-1}} H^0_{K^-}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) = \Phi$$

简记各条射线的支撑映射包含为

$$\tau_a^{\pm} = \tau_{K^{\pm}(a)} : H^0_{K_a^{\pm}}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \to V, \quad \tau_a = \tau_{K(a)} : H^0_{K(a)}(\mathbb{C}, \mathcal{F}) \to V,$$

于是

$$\tau_{K^{\pm}} = \sum_{a\in A} \tau_a^{\pm} : \ \Phi = \bigoplus_{a\in A} \Phi_a \longrightarrow V.$$

现在固定 $a \in A$，并令 $a_0 = a, a_1, \cdots, a_r = b$为 K_a上的 A的所有元素，见图9。回顾关于 Stς的定义2.3.8，我们可以将定理 2.3.11改述如下。

关于 式 2.3.13。对于上述任意选择的 a 以及任意 $\varphi \in \Phi_a$，我们有

$$\tau_a^-(\varphi) = \tau_a^+(\varphi) + \sum_{i=1}^r \tau_{a_i}^+(m^-_{a,a_i}(\varphi)). \quad \square$$

备注 2.3.14。 (a) 注意上述公式与命题 2.2.6(b) 的相似之处。这里，我们没有最终将 $m^+_{a_i},_b$ 传输到 Φ_b，而是有从 $\tau^+_{a_i}$ 到 V 的映射，这可以非正式地理解为将 b 放在 ∞处。

(b) 重新表述 2.3.13 与传统上在重求和理论中使用的、沿各种路径对多值函数进行指数积分所得的恒等式直接对应。

3 复兴理论：反常层范畴$(\mathbb{C})$中的卷积代数

3.1 一般方案

现在，我们概述一种研究复兴理论的方法：将上述初等理论扩展并应用于反常层这一更一般的概念。

A 复苏反常层：卷积范畴中的代数。我们建议考虑 $\mathbb{C}_w$ （博雷尔平面）上的反常层，它们相对于卷积运算 $*$ 带有某些代数结构。例如，结合代数（交换或非交换），即带有运算（也就是态射） $\mathcal{A}*\mathcal{A}\to\mathcal{A}$ 的反常层 $\mathcal{A}$，且该运算满足结合律，并且可能还满足交换律。或者，给定这样的代数 $\mathcal{A}$，我们可以考虑 $\mathcal{A}$-模，也就是带有运算 $\mathcal{A}*\mathcal{M}\to\mathcal{M}$ 的反常层 $\mathcal{M}$。还可以考虑其他代数结构（例如李代数）。

在反常层 $\mathcal{A}$ 上定义的卷积代数结构，将在其不同区域上的截面或消失循环空间（其直观含义是描述截面的奇点数据）上给出形式上的卷积运算。这样，涉及卷积、外代数导数等的各种复苏分析公式，就可以在与 $\mathcal{A}$相关的数据中以内蕴的方式表述。因此，我们建议将配备此类代数结构的反常层称为复苏反常层。[4] 在各种具体例子中，复苏反常层的截面将由经典意义下的实际复苏函数表示。

由于傅里叶变换将卷积变为逐纤维乘法，对复苏反常层 $\mathcal{A}$ 应用傅里叶变换，将得到复平面$\mathbb{C}^*_z$ 去心部分上的一个局部系统，其纤维带有（相应类型的）代数结构，并具有一种斯托克斯结构，使得斯托克斯矩阵是代数同构。例如，如果 $\mathcal{A}$ 是交换代数，那么作为交换代数同构的斯托克斯矩阵便可以看作坐标变换。这与例如将簇变换解释为适当微分方程（或者更确切地说，积分方程）的斯托克斯数据相契合，见 [11, §7] 及下文 §3.3。

B 广义反常层及其卷积。为了实现上述计划，我们需要推广反常层的概念。

[4]更准确地说，我们建议将这一术语用于下一小节所讨论的反常层概念的推广。

首先，我们需要复平面 $\mathbb{C}$上的反常层，其奇点集合 A是复平面 $\mathbb{C}$中的任意可数子集（例如处处稠密的子集）。这类 A 的典型例子是复平面 $\mathbb{C}$ 中的有限秩 r（自由）阿贝尔子群；若 $r \geqslant 3$，它就不可能是离散的。这类例子不可避免，因为在经典情形（命题 2.1.1）中，$\mathcal{F}*\mathcal{G}$的奇点通常是 $\mathcal{F}$ 的一个奇点与 $\mathcal{G}$的一个奇点的所有和。因此，要使映射 $\mathcal{A}*\mathcal{A} \to \mathcal{A}$有意义， $\mathcal{A}$ 的奇点集合必须对加法封闭。

基本研究对象应当是局部化范畴 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$。其对象应当具有定义良好的消失循环空间（更准确地说，是 S^1 上的局部系统） Φ_a,$a \in A$ ，以及传输映射 $m_{ab}(\gamma)$: $\Phi_a \to \Phi_b$ ，其中路径 γ 属于某类连接 a 与 b 的路径。

注意，离散 $A \subset \mathbb{C}$ 的情形似乎可以由解析情境中的 $\mathcal{D}$-模与反常层理论涵盖。然而，在这一情境下，将 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$ 提升回 $\mathbf{Perv}(\mathbb{C}, A)$ 已经并非显然，因为在经典情形 $|A| < \infty$ 中，提升后的层的一般茎是所有 Φ_a 的直和（见 $[13, 20, 10]$）；对于 $|A| = \infty$ ，该直和可能是无限维的，因此不属于解析 $\mathcal{D}$-模理论的范畴。

鉴于这一点及其他原因，我们需要允许茎可能是无限维的反常层，或者更一般地，取值于某种相当任意的阿贝尔范畴 $\mathcal{C}$ 中的反常层。例如，当 $\mathcal{C}$ 是由序有限维（= 局部线性紧、线性拓扑）向量空间构成的范畴，也就是所有向量空间范畴的对偶时，这种方法将给出取值于 $[25]$ 的（反常）余层。此外，还需要考虑各种解析完备化（例如上述消失循环的无限直和的解析完备化），它们介于直和与直积之间，并涉及收敛条件。

无限维空间中的 Lefschetz 层。将 §1.5 中 Lefschetz 反常层的构造推广到这样的情形，是一个非常诱人的想法： $\mathcal{L}^i_S$ 其中 X是某个“场”的复函数空间，而 S 是对应于某种物理理论的经典作用泛函。

事实上，$\mathbf{Crit}(S)$，即 S的临界轨迹，是经典运动方程的解空间；如果问题设置得当，$\mathbf{Crit}(S)$的连通分支是有限维的。 S 在垂直于 $\mathbf{Crit}(S)$ 的“横向”方向上的行为通常具有如下形式

$$S(x) = f(x_1, \cdots, x_m) + \sum_{i=m+1}^{\infty} x_i^2,$$

有限个变量的函数与无限个独立平方项之和的直和。这意味着，可以从 Φ_f 出发“手动”定义 $\mathbf{Crit}(S)$ 上，或至少在 $\mathbf{Crit}(S)$ 的某些开片上的反常层 Φ =“$\Phi_S(\mathbf{k}_X$[维 X]）”。由于添加一个额外的独立平方项会以已知方式变换消失循环（Kn¨orrer 周期性），我们由此得到一个自然的 gerbe（定向数据的 gerbe），其平凡化可完整定义 Φ 。这一

[5]严格来说，在一个满足 $S(C) = a \in \mathbb{C}$ 的分量 $C \subset \mathbf{Crit}(X)$ 上，我们应该定义 Φ_{S-a}，而不是 Φ_S。

如今已广为人知的过程，利用 (-1)-移位辛结构 [2] 的框架进行了公理化。连通分支 $C \subset \mathrm{Crit}(S)$ 的超上同调群（其系数取自 Φ ）出现在动机 Donaldson-Thomas （简称 DT ）理论的框架中。

然而，这种过程将不同的分量彼此独立地处理，因为它忽略或丢失了 S 在各分量上的实际取值。对上述数据的一种自然细化，是在 $\mathbb{C}$ 上引入反常层范畴 [6] $\mathcal{L}_S^i$ ，使其在 $a \in \mathbb{C}$ 处的茎为 $H^i(C_a,\ \Phi)$，其中 C_a 是由分量 $C \subset \mathrm{Crit}(S)$ 与 $S(C) = a$ 的并集构成的。只要将稳定性结构纳入我们的框架，这种附加结构还将为某一类路径 γ 上的动机 DT 不变量提供传输映射 $m_{ab}(\gamma)$ （例如，当 X 是一个具有“几何起源”的三维 Calabi–Yau 范畴的对象栈时）。

D 无尽解析延拓：解析原-´étale site. 复兴理论中出现于博雷尔平面上的多值解析函数 $f(w)$ ，具有无限解析延拓这一显著性质；这一性质已通过略有不同的“无割线”（sans coupure，见 [9] ）或“无尽”（sans fin，见 [4]）延拓概念得到精确定义。直观而言，这种形式化需要兼顾相关函数的两个特征：

(1) 它们没有自然边界，也就是说，不存在超出边界便无法进行解析延拓的情形（例如，单位圆是函数 $\sum_n w^{n^2}$ 的自然边界）。

(2) 但它们可能存在孤立奇点，包括分歧点；这些奇点可以在黎曼曲面的更高层上不断聚集。

为了解释 (2)， $f(w)$ 的任一“分支”都定义在一个“层”上，该层是从 $\mathbb{C}$ 中移除一组离散的切口后得到的；这些切口从一组离散的分歧点出发，并且这些分歧点“在该层上可见”。但跨过一个切口后，我们会到达一个新层，在那里 $f(w)$ 有一组新的、仍然离散但可能更大的分歧点，等等。最终可能出现一个看似悖谬的结果： f 有一组非离散的奇点，例如处处稠密的奇点集（将其理解为 $\mathbb{C}$ 中的点）。

(1) 和 (2) 这些特征让人想到 Bhatt-Scholze 理论中的 pro-´etale site [1]。事实上，(1) 暗示了某种 ´etale 性质，而 (2) 中不断进入更高层的过程则类似于某种射影极限过程。因此，我们来概述一下这一理论在解析情形下的一个版本。我们计划今后对此作详细讨论。

设 X 是一个维数为 d的复流形。我们可以在 X 上考虑解析 ***Zariski*** （简称$ana\text{-}Zariski$ ）拓扑，其中闭集是解析子集 $S \subset X$。那么开集就是此类集合的补集 $X \backslash S$ S。例如，如果 $d = 1$，那么X 中的解析子集就是离散子集，且可能是无限的。因此，ana-Zariski 开子集是一个离散子集的补集。

现在设 X 和 Y 是维数相同的复流形 d。

[6]或局部化范畴反常层范畴中的对象。

定义 3.1.1。 全纯映射 $f: Y \to X$ 称为解析 *´étale*（简称解析 *´étale*），如果：

- f 是一个局部双全纯映射，也就是说，微分 df 处处可逆。
- 存在两个 ana-Zariski开集 $Y' \subset Y$、 $X' \subset X$，使得 $f(Y') = X'$，并且$f: Y' \to X'$ 是一个无分歧覆盖（纤维可能是无限的）。

指数映射 exp : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个例子，其中 $S = \{0\} \subset X = \mathbb{C}$。

定义 3.1.2。若存在以下条件，则称全纯映射 $f: Y \to X$ 为$pro\text{-}ana\text{-}´etale$：

- 一个射影系统
$$Y_0 = X \leftarrow Y_1 \leftarrow Y_2 \leftarrow \cdots$$
其中每个箭都是 ana-´etale；
- 一个单射态射 $f: Y \xrightarrow{\sim} \varprojlim Y_i$，其与投影 $\varprojlim Y_i \to Y_0 = X$ 的复合等于 f。

因此，定义 3.1.1 体现了所需的特征（1），而定义 3.1.2 体现了特征（2）。

例 3.1.3。（a）嵌入映射 $Y = \{|w| < 1\} \hookrightarrow X = \mathbb{C}_w$ 是一个局部双全纯映射，但不是 pro-ana-´étale。这样的 Y 可以看作具有自然边界的函数的黎曼曲面。

（b）在 [4, §3] 中讨论的超椭圆积分的逆函数的黎曼曲面这一经典例子，似乎可以纳入上述 pro-ana-´étale 理论的框架。我们计划今后讨论这一例子以及更一般的例子。

要定义具有可能为非离散奇点集的可构造层，进而定义反常层，可以采用以下两条路径之一。

首先，解析空间的每个层 $\mathcal{F}$ 在 X 上都有其 *´étale* 空间 $X_{\mathcal{F}}$，$x \in X$。可以考虑这样的层：其 ´étale 空间的连通分支的最大豪斯多夫部分满足上述意义下的 pro-ana-´étale 性质，同时对这些层施加一些可构造性条件。

或者，也可以直接考虑X 上的某种 pro-ana-´étale Grothendieck site，并在此 site 上研究层。

.

3.2 有限性示例：带势箭图的 COHA

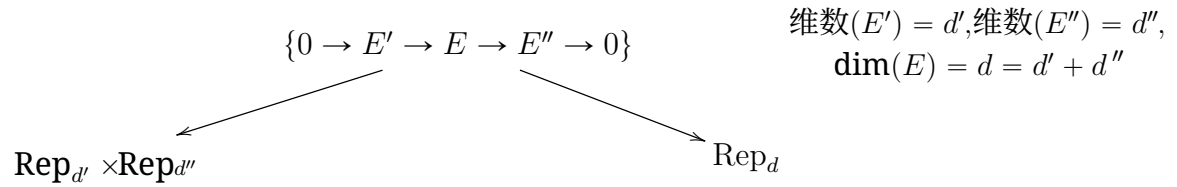
设 $Q = (I, E)$ 是一个有限箭图，其中 I 为顶点集合， $E \to I \times I$ 为有向边集合。对于任意维数向量 $d = (d_i)_{i \in I}$， $d_i \in \mathbb{Z}_+$，我们将 $\mathrm{Rep}_d(Q)$ 记为 Q 的复 d维表示 V 所构成的栈。根据定义，这样的表示

将一个 d_i 维 $\mathbb{C}$ 向量空间 V_i 赋给每个 $i \in I$，并将一个线性算子 $\rho_e : V_i \to V_j$ 赋给连接 i 和 j 的每个箭 $e \in E$，且不附加任何关系。

我们用 $\mathbb{C}\langle Q\rangle$ 表示 Q 的路径代数，因此 Q 的表示等同于左 $\mathbb{C}\langle Q\rangle$-模。固定一个势，或一个循环词，取自 $\mathbb{C}\langle Q\rangle$，即一个元素 $s \in \mathbb{C}\langle Q\rangle/\big[\mathbb{C}\langle Q\rangle,\ \mathbb{C}\langle Q\rangle\big]$，也就是模掉交换子子空间（而非由交换子生成的理想）所得的商。更明确地说，s 可表示为 Q 中闭边路径的线性组合。选定 s 后，对任意 d，都可得到一个正则函数

$$S_d : \mathrm{Rep}_d(Q) \longrightarrow \mathbb{C}, \quad V \mapsto \mathrm{tr}_V(s)$$

该函数由取迹给出。这类函数具有如下可加性：在代数栈的归纳图中



左侧对 $S_{d'} + S_{d''}$ 的拉回等于右侧对 S_d 的拉回。

与 (Q, s) 相关的上同调霍尔代数（COHA）是 [22]

$$A = \bigoplus_{d \in \mathbb{Z}_+^I} A_d, \quad A_d = H^\bullet\big(\mathrm{Rep}_d(Q), \Phi_{S_d}(\underline{\mathbf{k}}[\dim \mathrm{Rep}_d(Q)])\big).$$

这里，$\dim \mathrm{Rep}_d(Q)$ 是栈意义下的维数。乘法 $A_{d'} \otimes A_{d''} \to A_{d'+d''}$由上述归纳图中的拉回与推前给出。

现在考虑（双）分次反常层

$$\mathcal{A} = \bigoplus_d \mathcal{A}_d, \quad \mathcal{A}_d = \mathcal{L}^\bullet_{S_d}$$

其中，$\mathcal{L}^\bullet_{S_d}$ 是 $\mathbb{C}$ 上与 S_d相关的分次 Lefschetz 层（参见 §1.5B）。每个 $\mathcal{A}_d$ 都是仅有有限个奇点的分次perverse层。我们将把 $\mathcal{A}_d$ 视为局部化范畴 $\mathrm{Perv}(\mathbb{C})$中的对象。归纳图似乎定义了反常层的态射 $\mathcal{A}_{d'} * \mathcal{A}_{d''} \to \mathcal{A}_{d''}$，其位于 $\mathrm{Perv}(\mathbb{C})$中；也就是说，它使 $\mathcal{A}$ 成为一个精化 A的结合卷积代数，参见 [22, §4]。

注 3.2.1。 上述 COHA 的定义仅取决于带势箭图。还可以额外选择中心荷 $Z : \mathbb{Z}^I \to \mathbb{C}$。这一选择会产生 [23, 24] 意义下的墙穿越结构。如果墙穿越结构在 [24] 意义下是解析的，那么 loc.cit. 中提出了一个猜想：相关非线性纤维丛在 $\mathbb{C}$ 上的截面的芽是可复兴的。假设该猜想成立，我们便在博雷尔平面上得到一个反常层，其奇点属于像 $Z(\mathbb{Z}^I)$。这个反常层似乎与 $\mathcal{L}^\bullet_{S_d}$ 截然不同。

3.3 簇反常层与墙穿越结构

A 两类例子：Lefschetz 型和簇型。 复兴理论中自然出现了定义在 $\mathbb{C}$ 上的两大类无限秩反常层，其奇点集合可能是无限的:

- 那些源自无限维流形上的全纯函数（Lefschetz 层的自然推广）的层

- 那些源自墙穿越结构 [24]的层。本节将讨论这一类。它们可以称为簇反常层”或墙穿越反常层。我们将采用前一种称呼，因为簇变换在这一理论中起着关键作用。

这些类别的交集非空。

B 分次李代数上的稳定性数据回顾。让我们按照 [21, 23, 24].**回顾相关结构。**

设 Γ 是一个有限秩自由阿贝尔群 n，并赋予其一个整数值斜对称双线性形式 $\langle -,-\rangle$: $\Gamma\times\Gamma\to\mathbb{Z}$。考虑向量空间 $\mathfrak{g}=\mathfrak{g}_\Gamma=\oplus_{\gamma\in\Gamma}\mathbb{Q}\cdot e_\gamma$。通过交换（结合）乘积以及由下式给出的泊松括号，可以将该空间赋予泊松代数结构

$$\begin{aligned} e_{\gamma_1}e_{\gamma_2} &= (-1)^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}e_{\gamma_1+\gamma_2}\\ \{e_{\gamma_1},e_{\gamma_2}\} &= (-1)^{\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle}\langle\gamma_1,\gamma_2\rangle e_{\gamma_1+\gamma_2}\ . \end{aligned} \tag{3.3.1}$$

令 $\mathbb{T}=\mathbb{T}_\Gamma:=\mathrm{Spec}(\mathfrak{g})$ 为交换代数 $\mathfrak{g}$ 的谱所得到的代数泊松流形。它是代数环面 $\mathrm{Hom}(\Gamma,\mathbb{G}_m)$ 上的一个挠子，并且 $\mathbb{T}$ 上的泊松结构在环面作用下保持不变。

令 $\Gamma_\mathbb{R}=\Gamma\otimes\mathbb{R}$。对于任意严格凸锥 $C\subset\Gamma_\mathbb{R}$，我们记

$$\widehat{\mathfrak{g}}_C \;=\; \prod_{\gamma\in\Gamma\cap C-\{0\}} \mathbb{Q}\cdot e_\gamma$$

th与 C 相关联的 $\mathfrak{g}$ 的完备化。它继承了泊松代数结构 re.

回想一下，[21] 在 $\mathfrak{g}$ 上的稳定性数据由一对 $(Z,\ a)$ 组成，其中 $Z:\Gamma\to\mathbb{C}$ 是一个阿贝尔群同态（“中心荷”），而 a 是一组元素 $a_\gamma\in\mathbb{Q}\cdot e_\gamma\subset\mathfrak{g}$，对每个 $\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}$ 给定。这些数据满足所谓的支撑条件，即存在一个非零二次型，定义在 $\Gamma\otimes\mathbb{R}$ 上；它在满足 $\gamma\in\Gamma$ 且 $a_\gamma\neq 0$ 的元素上取非负值，并在 $\mathrm{Ker}(Z\otimes\mathbb{R})$ 上取负值。详情见 [21, §2] 。

将集合 $a=(a_\gamma)$ 转换为数的集合 $\Omega=(\Omega(\gamma)\in\mathbb{Q})_{\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}}$ 很方便，它由以下恒等式唯一确定

$$a(\gamma)=-\sum_{n\geqslant 1,\frac{1}{n}\gamma\in\Gamma\backslash\{0\}}\frac{\Omega(\gamma/n)}{n^2}e_\gamma\ .$$

那么，对于任何如上所述且包含 γ 的锥 C，我们在 $\hat{\mathfrak{g}}_C$ 中有一个形式恒等式:

$$\exp\left(\sum_{n\geqslant 1} a(n\gamma)\right) = \exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\Omega(n\gamma)\sum_{k\geqslant 1}\frac{e_{kn\gamma}}{k^2}\right) := \exp\left(-\sum_{n\geqslant 1}\Omega(n\gamma)\mathrm{Li}_2(e_{n\gamma})\right),$$

其中 $\mathbf{Li}_2(t) = \sum_{k\geqslant 1} t^k/k^2$ 是二对数级数。

与任意泊松流形一样，李代数 $\mathfrak{g} = (\mathcal{O}(\mathbb{T}),\ \{-,\ -\})$ 通过哈密顿向量场（坐标环 $(\mathfrak{g} = \mathcal{O}(\mathbb{T}),\ \bullet)$ 的导子）的作用于 $\mathbb{T}$，这些向量场具有 $\{f,\ -\}$ 的形式，其中$f \in \mathfrak{g}$。对于任意 $\gamma \in \Gamma\backslash\{0\}$，记由下式定义的形式泊松自同构为 S_γ

$$S_\gamma = \exp(\{-\mathrm{Li}_2(e_\gamma), -\}), \quad S_\gamma(e_\mu) = (1-e_\gamma)^{\langle\gamma,\mu\rangle}e_\mu$$

这里，第二个等式表明 S_γ 是 $\mathbb{T}$的一个双有理自同构，即 $\mathfrak{g}$的分式域的一个自同构。第一个等式给出了它在 $\hat{\mathfrak{g}}_C$ 中的形式级数展开，其中任意 $C \ni \gamma$如上所述。文献 [21] 解释了 $\mathbf{\Omega}(\gamma)$ 与三维卡拉比-丘范畴的枚举唐纳森-托马斯不变量之间的关系。

此外，如果上述数据满足某个解析性假设，那么它们将产生一个在 $\mathbb{C}$ 上的解析纤维丛 E，其纤维同构于 $\mathbb{T}$。E 的粘合函数来自如下变换

$$S_l = \prod_{Z(\gamma)\in l} S_\gamma^{\Omega(\gamma)} \quad \text{(product in the order given by } l) \tag{3.3.2}$$

与各种射线 $l \subset \mathbb{C}$ 相关。在这种情况下，[24] 的重求和猜想指出，对于 E 的任一解析截面以及每个 $\gamma \in \Gamma$，都可以自然地关联到复平面 $\mathbb{C}$ 上标准坐标 z 中的一个重求和级数。

墙穿越结构和解析墙穿越结构的概念（见 [24]），大致通过考虑稳定性数据层和解析稳定性数据，将分次李代数上的稳定性数据概念推广了。

C 反常层解释。从本文的角度来看，自然会将中心荷映射 $Z: \Gamma \to \mathbb{C}$ 的目标视为博雷尔平面。为简单起见，假设 Z 是集合论意义上的嵌入。变换 S_l 令人联想到斯托克斯乘子；事实上，在更一般的积分方程背景下，它们也被如此解释，见 [11]，另见 [3]。

因此，自然会在上述某种广义意义下，考虑 $\mathbb{C}$ 上的一个反常层[7] $\mathcal{F}$（事实上，是适当的局部化范畴反常层范畴中的一个对象），使其具有以下性质:

(0) $\mathcal{F}$ 关于卷积构成一个泊松代数。

(1) A 的奇点集合是 $Z(\Gamma)$的子群。因此，如果 $\mathbf{rk}(\Gamma) \leqslant 2$，它可以是离散的（但仍是无限的）。

[7]与 $\mathbf{k} = \mathbb{Q}$。

(2) 对于 $a = Z(\gamma)$，空间 $\Phi_a(\mathcal{F})$ 是一维的，可视为 $\mathbb{Q} \cdot e_\gamma$。（3）对于 $\zeta \in S^1$， $\mathcal{F}$ 的斯托克斯算子 St_ζ 由（3.3.2）中的 $S_{\mathbb{R}_+\zeta}$ 给出。

那么， $\mathfrak{g}$就可以实现为 $\bigoplus_{a\in A}\Phi_a(\mathcal{F})$，其运算由 $\mathcal{F}$上的运算导出。$\widehat{}$傅里叶变换 $\mathcal{F}$ 将成为一个无限秩的广义纽结层（后者需要严格定义），而 $\mathbb{C}^*$ 上局部系统 $\mathrm{FT}(\mathcal{F})_{\mathrm{gen}}$ 的茎将涉及 $\mathfrak{g} = \bigoplus_{\gamma\in\Gamma}\mathbb{Q}\cdot e_\gamma$的一些解析完备化。对于一条射线 $l \subset \mathbb{C}$，变换 S_l 未必保持 $\mathfrak{g}$；后者是一个代数直和：它将 $\mathfrak{g}$ 映射到直积中。不过，作为这样的变换，它在任意两个直和项之间都有定义良好的矩阵元，可将其写作$(S_l)_{ab}$：$\Phi_a(\mathcal{F}) \to \Phi_b(\mathcal{F})$。注意，除非 $(b-a) \in l$，否则 $(S_l)_{ab} = 0$。因此，将每个 S_l 解释为某个假想广义纽结层 $\mathcal{F}$的斯托克斯算子，确实是有意义的。若如此，§2.3 中的有限情形分析便给出了对于任意 $a,\ b \in A = Z(\Gamma)$，应当采用怎样的（例如左侧）避开传输 $m^{-}{}_{,\ ab}{}^{\mathcal{F}}$ 或 alien 输运 $m^{\Delta}{}_{,\ ab}{}^{\mathcal{F}}$ 的答案。命题 2.2.13 表明，这些信息应足以将 $\mathcal{F}$ 作为局部化范畴中的对象恢复出来。

当 $\mathrm{rk}(\Gamma) = 2$ and A 是 $\mathbb{C}$中的离散格时，这幅图尤其引人注目。此时，可以将 $\mathcal{F}$ 视为经典意义下的反常层，但其茎可能是无限维的。

3.4 Chern-Simons 理论中的反常层

与紧致定向三维流形 M 和复半单李群 G相关联的复化 Chern-Simons 泛函（简称 CS 泛函），提供了一个定义在无限维复流形（或栈）上的全纯函数的例子。例如，令 $G = SL_n(\mathbb{C})$。我们取 $\mathcal{X}$ 为平凡 SL_n丛 M上 C^∞联络的模栈，因此 $\mathcal{X}$ 是向量空间 $\Omega^1(M)\otimes\mathfrak{sl}_n$对规范群 $C^\infty(M, SL_n(\mathbb{C}))$取商所得的空间，而 CS 泛函为

$$\mathrm{CS} : \mathcal{X} \longrightarrow \mathbb{C}/4\pi^2\mathbb{Z}, \quad \mathrm{CS}(A) = \int_{M^3} \mathrm{tr}\left(\frac{1}{2}A\wedge dA + \frac{1}{3}A\wedge A\wedge A\right) \bmod 4\pi^2\mathbb{Z}. \tag{3.4.1}$$

事实上，若将规范变换中在固定点$m_0 \in M$处取值为 1 的子群除去，就得到一个带有 $\mathcal{X} = \mathcal{X}_{\mathrm{fr}}/SL_n(\mathbb{C})$的无限维流形 $\mathcal{X}_{\mathrm{fr}}$（带框架联络），我们可以在这个流形上考虑 CS。

为了消除多值性，我们转到最大阿贝尔覆盖 $\widetilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{fr}} \xrightarrow{\mathbb{Z}} \mathcal{X}_{\mathrm{fr}}$，从而得到一个定义良好的全纯函数

$$\widetilde{\mathrm{CS}} : \widetilde{\mathcal{X}}_{\mathrm{fr}} \longrightarrow \mathbb{C}. \tag{3.4.2}$$

接下来可以尝试沿着 **§3复平面** 中讨论的思路，定义并研究相应的 Lefschetz perverse层 $\mathcal{L}_{\mathrm{CS}}$。事实上， [25] 已开始这类研究，尽管目前对 $\mathcal{L}_{\widetilde{\mathrm{CS}}}$ 知之甚少。一些已知事实和预期可以概括如下。

(1) (3.4.1) 中的泛函 CS 只有有限个临界值，已知它们是某些代数 K 群 $K_3(\mathbb{C})$ 中元素的调节子。因此，$\widetilde{\text{CS}}$ 的临界值落在有限个等差数列中，公差为 $4\pi^2\mathbb{Z}$。(2) 预期反常层 $\mathcal{L}_{\widetilde{\text{CS}}}$ 的一般茎是无限维的（直观地说，即 CS 一般纤维的中维$\widetilde{\ }$上同调）。事实上，首先定义 Verdier 对偶余层会更容易，正如 [25] 中所做的那样。不过，消失循环空间是有限维的。(3) $\mathcal{L}_{\widetilde{\text{CS}}}$ 可以定义为局部系统的反常延拓；该局部系统由临界值集合补集上各纤维的中维上同调构成，参见 [25, §8。3]。(4) 此外，$R\Gamma(\mathbb{C},\ \mathcal{L}_{\widetilde{\text{CS}}}) = 0$，所以形式上 $\mathcal{L}_{\sim\text{CS}}$ 是反常层范畴 $\text{Perv}^0(\mathbb{C})$ 的一个对象（尽管有无限多个奇点，且茎是无限维的）。

一些进一步的猜想可见于 [25, §8.3]文中。文中还在*loc.cit.* 解释了切恩–西蒙斯泛函积分的微扰展开的墙穿越结构与重求和性质如何与反常层 $\mathcal{L}_{\widetilde{\text{CS}}}$相关。

参考文献

[1] B. Bhatt、P. Scholze。概形的 pro-´étale 拓扑。arXiv:1309.1198。[2] C. Brav、V. Bussi、D. Dupont、D. Joyce 和 B. Szendr¨oi。消失循环层的对称性与稳定化。J. of Singularities 11 (2015)，85–151。[3] T. Bridgeland、B. Toledano Laredo。稳定性条件与 Stokes因子。Invent. math. 187 (2012) 61–98。[4] B. Candelperger、J. C. Nosmas、F. Pham。重求和方法。Hermann，巴黎，1993。[5] A. D'Agnolo、M. Hien、G. Morando、C. Sabbah。仿射直线上某些 Stokes 现象的拓扑计算。arXiv: 1705.07610。[6] L. Daia。 $\mathcal{D}$-模的傅里叶变换。Ann. Inst. Fourier 50 (2000) 1891–1944。[7] P. Deligne、B. Malgrange、J.-P. Ramis（编）。不规则奇点：对应与文献。Soc. Math. France，2007。[8] P. Deligne。致 V. S. Varadarajan 的信，1986 年 1 月 4 日，载于： [7]第 47–51 页。[9] J. ´Ecalle。复兴函数，第 1 卷：复兴函数的代数。Publ. Math. Orsay 81.05 (1981)，可见于 https://www.imo.universite-paris-saclay.fr/~jean.ecalle/ fichiersweb/E_ECALLE_81_05.pdf[10] J. Fres´an、P. Jossen。指数动机。书稿，见 http://javier. fresan.perso.math.cnrs.fr/expmot.pdf[11] D. Gaiotto、G. W. Moore、A. Neitzke。通过三维场论研究四维墙穿越。arXiv:0807.4723。[12] A. Galligo、M. Granger、P. Maisonobe。 $\mathcal{D}$-模与其奇异支撑为正规交叉的反常层。Ann. Inst. Fourier 35 (1985) 1–48。[13] S. Gelfand、R. D. MacPherson、K. Vilonen。反常层与箭图。Duke Math. J. 33 (1996) 621–643。[14] A. Hurwitz。关于 M. Hadamard 的一个定理。C. R. Acad. Sci. Paris 128 (1899) 350–353。[15] M. Kapranov、V. Schechtman。拟层簇。arXiv:1411.2772。[16] M. Kapranov、V. Schechtman。反常层与曲面上的图。arXiv:1601.10789。[17] M. Kapranov、Y. Soibelman、L. Soukhanov。拟层簇与红外代数。arXiv:2011.00845。[18] M. Kapranov、Y. Soibelman。红外代数、次多面体与拟层簇。arXiv:2509.13716。

[19] N. Katz。《刚性局部系统》。普林斯顿大学出版社，1996 年。[20] L. Katzarkov、M. Kontsevich、T. Pantev。镜像对称的霍奇理论方面，载于：《纯数学研讨会论文集》**78** （2008）《从霍奇理论到可积性与拓扑量子场论： tt^*-几何》（R. Donagi、K. Wendland 编），第 87–174 页。[21] M. Kontsevich、Y. Soibelman。稳定性结构、动机唐纳森–托马斯不变量与簇变换。arXiv:0811.2435。[22] M. Kontsevich、Y. Soibelman。上同调霍尔代数、指数霍奇结构与动机唐纳森–托马斯不变量。arXiv:1006.2706。[23] M. Kontsevich、Y. Soibelman。唐纳森–托马斯不变量、可积系统与镜像对称中的墙穿越结构。arXiv:1303.3253。[24]M. Kontsevich、Y. Soibelman。墙穿越公式中的解析性与复兴理论。arXix:2005.10651。[25] M. Kontsevich、Y. Soibelman。全纯弗洛尔理论 I：有限维与无限维中的指数积分。arXiv:2402.07343。[26] B. Malgrange。J. ´Écalle 的研究导论。《数学教学》**31** （1985）261–282。[27] B. Malgrange。´《多项式系数微分方程》。伯克豪瑟出版社，波士顿，1991。[28] C. Mitschi、D. Sauzin。《发散级数、可求和性与复兴理论 I》。《数学讲义》**2153**，施普林格出版社，2016。[29] S. Schottlaender。哈达玛乘积定理及函数论中的其他复合定理。《数学新闻》**11**（1954）239–294。

M. K.：卡夫利数理物理与宇宙研究所，日本千叶县柏市柏之叶 5-1-5，277-8583。mikhail.kapranov@protonmail.com

Y.S.：堪萨斯州立大学数学系，美国堪萨斯州曼哈顿，KS 66508。soibel@math.ksu.edu