arXiv:2512.22776v1 [math.MG] 28 Dec 2025

Hyers–Ulam 定理与格罗莫夫–豪斯多夫距离中的满射映射*

S. A. Bogaty˘ı, E. A. Reznichenko, A. A. Tuzhilin

目录

1 引言
1 2 预备言
inaries 与符号说明 **2**
3 用双射逼近映射 4
4 度量空间类上的伪度量 44.1 同基数空间之间的距离.6 4.2 同基数的基数齐性空间之间的距离.7
5 δ-满射映射的逼近 8
6 在巴拿赫空间中的应用 **10**

摘要

如果一个拓扑空间的每个非空开子集都与该空间本身具有相同的基数，就称其为基数齐性。设 X 和 Y 是基数相同的基数齐性度量空间。如果这两个等势的基数齐性度量空间 X 和 Y 之间存在一个 δ- 满射 d- 等距映射，那么 X 和 Y 之间就存在一个双射（$d+2\delta$）- 等距映射。该结果使我们能够将 Dilworth–Tabor 定理归结为关于等距映射逼近的 Gevirtz–Omladič–Šemrl 定理，特别是归结为有关巴拿赫空间等距的问题。

关键词：度量空间，格罗莫夫–豪斯多夫距离， δ-满射映射， d-等距映射，等距映射。

1 引言

1932年的著名 Mazur–Ulam 定理指出，实赋范空间之间的每个满射等距映射 $f\colon V \to W$都是仿射的 [1]。强化这一结论的一个方向源自 Hyers 和 Ulam 于1945年的研究 [2]。D.H. Hyers 和 S. M. Ulam 提出了以下问题：

*A.A. Tuzhilin 的这项工作得到俄罗斯科学基金会项目（编号：25-21-00152）、中国国家重点研发计划（项目编号：2020YFE0204200）以及北京大学中俄数学中心的资助。A.A. Tuzhilin 的部分工作是在中俄数学中心完成的，他感谢数学中心的邀请与款待。

是否存在一个常数 K，它仅取决于巴拿赫空间 V和 W，使得对任意 $d>0$以及任意满射 d-等距映射 $f\colon V\to W$，都存在一个满射等距映射 $U\colon V\to W$，满足

$$\|f-U\|=\sup\bigl\{\|f(x)-U(x)\|:x\in V\bigr\}\le K\,d?$$

他们指出，对 f 的满射假设是必要的，并在 $V=W=\ell_2$（希尔伯特空间，且具有 $K=10$）的情形下给出了肯定的答案。

经过众多数学家多年的努力，J. Gevirtz 于 1983 [3]最终给出了完整的肯定解答。1995 年，M. Omladič 和 P. Šemrl [4] 确立了最佳常数 $K=2$。

S. J. Dilworth [5] 和 J. Tabor [6] 放宽了满射条件：

若 $d,\delta\ge 0$且 $f\colon\ V\to W$是巴拿赫空间之间的一个 d-等距映射，满足 $f(0)=0$，并将 $V\delta$-满射地映到闭子空间 $L\subset W$(即， $d_H(L,f(V))\le\delta$)，则存在一个双射线性等距映射 $U\colon V\to L$，使得

$$\|f-U\|\le M=12d+5\delta\quad(\text{Dilworth});\qquad M=2d+35\delta\quad(L=W,\ \text{Tabor}).\tag{1}$$

2003 年，P. Šemrl 和 J. Väisälä [7]证明了 (1) 右侧可以替换为$M=2d+2\delta$。他们还证明，当 $L=W$ 时，普适界 $M=2d$ 成立。

受康托尔–伯恩斯坦定理证明技巧的启发，本文用一个双射逼近集合之间的两个映射 $f\colon X\to Y$ 和 $g\colon Y\to X$（定理 3.1）。

本文介绍了这种逼近的两个应用。首先，我们证明，对于基数相同且基数齐性的度量空间，格罗莫夫–豪斯多夫距离可以用双射映射来刻画（定理 4.6）。

定理 3.1 及其推论还允许将巴拿赫空间中 d-等距 δ-满射映射（到一个闭线性子空间）的逼近问题，化归为 $(d+2\delta)$-等距（或 $(d+6\delta)$-等距）满射映射的逼近问题（巴拿赫空间的一般情形见定理 5.5 和 5.8 以及命题 6.4 和 6.6）。我们认为，这使得将迪尔沃思–塔博尔定理化归为 J. Gevirtz 的定理更为简单（见推论 6.5 和 6.7）。Šemrl–Väisälä 定理的另一项应用表明，这种化归中出现的系数 $d+2\delta$ 并非本质因素。

2 预备知识与记号

设 (X,d) 为一个度量空间（距离可以为无穷大）。对于 $\varepsilon>0$, $x,y\in X$ 和 $M\subset X$，我们记

$$\begin{aligned}
|xy|&=d(x,y) && \textit{the distance between } x \textit{ and } y;\\
U_\varepsilon(x)&=\{y\in X:|xy|<\varepsilon\} && \textit{the open } \varepsilon\textit{-ball centered at } x;\\
U_\varepsilon(M)&=\bigcup_{x\in M}U_\varepsilon(x) && \textit{the } \varepsilon\textit{-neighborhood of } M;\\
\operatorname{diam}M&=\sup\{|xy|:x,y\in M\} && \textit{the diameter of } M.
\end{aligned}$$

对于子集 $A,\ B\subset X$，豪斯多夫距离 为

$$d_H(A,B)=\inf\{\varepsilon>0:A\subset U_\varepsilon(B)\text{ and }B\subset U_\varepsilon(A)\}.$$

度量空间 X和 Y之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离 $d_{GH}(X,\ Y)$，是将 X和 Y等距嵌入到某个公共度量空间 Z后，所有$d_H(X,\ Y)$中的下确界；详情请参见 [8, 9, 10]。

集合 X 与 Y之间的对应关系 是一个关系 $R \subset X \times Y$，使得每个 $x \in X$ 至少与一个 $y \in Y$相关联，反之亦然。

对于非空的 $R \subset X \times Y$，其畸变 为

$$\operatorname{dis} R = \sup\bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x,y),(x',y') \in R\bigr\}.$$

格罗莫夫–豪斯多夫距离的一个等价表达式是 [11, 定理 7.3。25]

$$d_{GH}(X,Y) = \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} R : R \subset X \times Y \text{ is a correspondence}\}.$$

非空 R、$R' \subset X \times Y$的余畸变 为

$$\operatorname{codis}(R,R') = \sup\bigl\{\bigl||xx'| - |yy'|\bigr| : (x,y) \in R,\ (x',y') \in R'\bigr\}.$$

对于映射 $f\colon\ X \to Y$和 $g\colon\ Y \to X$，f的畸变 为

$$\operatorname{dis} f = \sup\bigl\{\bigl||f(x)f(x')| - |xx'|\bigr| : x,x' \in X\bigr\},$$

且其余畸变为

$$\operatorname{codis}(f,g) = \sup\bigl\{\bigl||xg(y)| - |f(x)y|\bigr| : x \in X,\ y \in Y\bigr\}.$$

映射的图[1] 为 f

$$\operatorname{Gr} f = \{(x, f(x)) : x \in X\}.$$

对于关系 $Q \subset Y \times X$，我们将 $Q^{-1} = \{(x,y) \in X \times Y\colon (y,x) \in Q\}$ 称为逆关系。我们记作

$$\operatorname{Gr}^{-1} g = (\operatorname{Gr} g)^{-1} = \{(g(y), y) : y \in Y\}.$$

以下事实容易验证:

- $R \subset X \times Y$是一个对应关系，当且仅当存在 $f \in Y^X$和 $g \in X^Y$，使得 $\operatorname{Gr} f \cup \operatorname{Gr}^{-1} g \subset R$;
- $\operatorname{dis}\ f = \operatorname{dis}(\operatorname{Gr}\ f)$;
- 余维(f,g) $=$余维$(\operatorname{Gr} f, \operatorname{Gr}^{-1} g)$;
- $\operatorname{dis}(R \cup R') = \max\{\operatorname{dis} R,\ \operatorname{codis}(R,\ R'),\ \operatorname{dis}\ R'\}$。

因此,

$$d_{GH}(X,Y) = \inf\{d_{GH}(f,g) : f \in Y^X,\ g \in X^Y\},$$

其中

$$d_{GH}(f,g) = \frac{1}{2}\max\{\operatorname{dis} f, \operatorname{codis}(f,g), \operatorname{dis} g\}.$$

这一形式见于有界空间的 [12, 命题 1(5)、注释 2]。

拓扑空间 X 的稠密度 是基数

$$d(X) = \min\{|D| : D \subset X = \overline{D}\}.$$

[1]在集合论中，映射的图被视为映射本身。为清晰起见，我们使用 $\operatorname{Gr} f$ 。

3 通过双射逼近映射

定理 3.1。设 X 和 Y 为集合，分别配备覆盖 $\mathcal{L}_X$ 和 $\mathcal{L}_Y$，使得对于每个 $V \in \mathcal{L}_X$ 都有 $|X| = |Y| = |V|$，对于每个 $U \in \mathcal{L}_Y$ 都有 $|U|$。那么，对于任意映射 $f\colon\ X \to Y$ 和 $g\colon\ Y \to X$，存在一个双射 $f\colon\ X \to Y$，使得对于每个 $x \in X$，以下条件至少有一个成立：

(1) $f(x)$ 和 $f(x)$ 属于 $\mathcal{L}_Y$；(2) $g(f(x))$ 和 x 属于 $\mathcal{L}_X$ 的同一个成员。

证明。选取函数 $U\colon\ X \to \mathcal{L}_X$ 和 $V\colon\ Y \to \mathcal{L}_Y$，使得 $x \in U(x)$ 和 $y \in V(y)$。使用基数 $\tau = |X| = |Y|$：$X = \{x_\alpha$ 枚举这些点：$\alpha < \tau\}$ 和 $Y = \{y_\alpha\colon\ \alpha < \tau\}$。对于 $\alpha \leq \tau$，令 $X_\alpha = \{x_\beta\colon\ \beta < \alpha\}$ 和 $Y_\alpha = \{y_\beta\colon\ \beta < \alpha\}$。

对 $\alpha \leq \tau$ 作超限归纳，构造单射 $f_\alpha\colon\ X_\alpha \to Y$ 和 $g_\alpha\colon\ Y_\alpha \to X$，使得对每个 $\beta < \alpha$：

- $f_\alpha|_{X_\beta} = f_\beta$ 和 $g_\alpha|_{Y_\beta} = g_\beta$；
- 若 $f_\alpha(x_\beta) \in Y_\alpha$，则 $x_\beta = g_\alpha(f_\alpha(x_\beta))$；
- 若 $g_\alpha(y_\beta) \in X_\alpha$，则 $y_\beta = f_\alpha(g_\alpha(y_\beta))$；
- 要么 $f_\alpha(x_\beta) \in V(f(x_\beta))$，要么 $g_\alpha(y_\beta) \in U(g(y_\beta))$.

若 α 是极限，则取前面映射的并。对于后继 $\alpha = \beta + 1$，按如下方式扩展 f_α 和 g_α。

定义 $f_\alpha(x_\beta)$：

情况 1：若 $x_\beta \notin g_\beta(Y_\beta)$，选择 $y \in V(f(x_\beta)) \setminus (Y_\beta \cup f_\beta(X_\beta))$，并令 $f_\alpha(x_\beta) = y$。

情形 2：若 $x_\beta \in g_\beta(Y_\beta)$，令 $f_\alpha(x_\beta) = y$，其中 $y \in Y_\beta$ 且 $x_\beta = g_\beta(y)$。

定义 $g_\alpha(y_\beta)$：

情形 1：若 $y_\beta \notin f_\alpha(X_\alpha)$，选择 $x \in U(g(y_\beta)) \setminus (X_\alpha \cup g_\beta(Y_\beta))$，并令 $g_\alpha(y_\beta) = x$。

情形 2：若 $y_\beta \in f_\alpha(X_\alpha)$，令 $g_\alpha(y_\beta) = x$，其中 $x \in X_\alpha$ 且 $y_\beta = f_\alpha(x)$。

该构造得到互为逆映射的双射 $f = f_\tau$ 和 g_τ，并且对所有 $x \in X$ 都满足所需条件。

□

若条件 (1) 对 x 成立，我们记作 $x \in X_I$；若条件 (2) 成立，则记作 $x \in X_{II}$。

4 度量空间类上的伪度量

设 X 和 Y 上定义了度量，其中 $f\colon\ X \to Y$ 和 $g\colon\ Y \to X$。定义

$$d_f^- = \sup\{|xx'| - |f(x)f(x')| : x, x' \in X\}, \qquad d_f^+ = \sup\{|f(x)f(x')| - |xx'| : x, x' \in X\},$$

$$d^-(f,g) = \sup\{|xg(y)| - |f(x)y|\colon\ x \in X,\ y \in Y\}, \qquad d^+(f,g) = \sup\{|f(x)y| - |xg(y)|\colon\ x \in X,\ y \in Y\}.$$

Then

$$-d_f^- \le |f(x)f(x')| - |xx'| \le d_f^+ \quad \text{for all } x, x' \in X, \tag{2}$$

$$-d_g^- \le |g(y)g(y')| - |yy'| \le d_g^+ \quad \text{for all } y, y' \in Y, \tag{3}$$

$$-d_{(f,g)}^- \le |f(x)y| - |xg(y)| \le d_{(f,g)}^+ \quad \text{for all } x \in X,\ y \in Y. \tag{4}$$

显然,

$$d_{(g,f)}^+ = d_{(f,g)}^- \quad \text{and} \quad d_{(g,f)}^- = d_{(f,g)}^+.$$

我们有

$$\operatorname{dis} f = \max\{d_f^+, d_f^-\}, \quad \operatorname{codis}(f,g) = \max\{d_{(f,g)}^+, d_{(f,g)}^-\},$$
$$d_{GH}(f,g) = \frac{1}{2}\max\{d_f^-, d_f^+, d_g^-, d_g^+, d_{(f,g)}^+, d_{(f,g)}^-\}.$$

若映射 f 满足 $\operatorname{dis} f \le d$，则称其为 d-等距映射。单侧界也很有用，例如 d_f^+ -非扩张映射 [13]。

定义

$$md_{GH}(f,g) = \frac{1}{2}\max\{\operatorname{dis} f, \operatorname{dis} g\} = \frac{1}{2}\max\{d_f^-, d_f^+, d_g^-, d_g^+\}.$$

显然，$md_{GH}(f,\ g) \le d_{GH}(f,\ g)$。

对于类 $\mathcal{F} \subset Y^X \times X^Y$，令

$$d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}) = \inf\{d_{GH}(f,g) : (f,g) \in \mathcal{F}\},$$
$$md_{GH}(X,Y;\mathcal{F}) = \inf\{md_{GH}(f,g) : (f,g) \in \mathcal{F}\}.$$

命题 4.1。若 $\mathcal{F}' \subset \mathcal{F}$，则

$$md_{GH}(X,Y;\mathcal{F}) \le d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}) \le d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}'),$$
$$md_{GH}(X,Y;\mathcal{F}) \le md_{GH}(X,Y;\mathcal{F}').$$

标准 Gromov–Hausdorff 距离为

$$d_{GH}(X,Y) = d_{GH}(X,Y;Y^X \times X^Y).$$

修改的 Gromov–Hausdorff 距离 [14], 在算法上更简单，为

$$md_{GH}(X,Y) = md_{GH}(X,Y;Y^X \times X^Y). \tag{5}$$

定义

$$\mathcal{M}_c(X,Y) = \{f \in Y^X : f \text{ is continuous}\},$$
$$\mathcal{F}_c(X,Y) = \mathcal{M}_c(X,Y) \times \mathcal{M}_c(Y,X).$$

连续 *Gromov–Hausdorff* 距离 [15, 16]为

$$d_{GH}^c(X,Y) = d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_c(X,Y)), \tag{6}$$

及其 修改版本 为

$$md_{GH}^c(X,Y) = md_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_c(X,Y)).$$

由命题 4.1 可得

$$md_{GH} \le d_{GH} \le d_{GH}^c, \qquad md_{GH} \le md_{GH}^c.$$

4.1 相同基数空间之间的距离

设 X 和 Y 是基数相同的度量空间。定义

$$\begin{aligned}
&\mathcal{M}_{\mathrm{in}}(X,Y)=\{f\colon X\to Y : f \text{ is injective}\}, && \mathcal{M}_{\mathrm{sur}}(X,Y)=\{f\colon X\to Y : f \text{ is surjective}\},\\
&\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y)=\{f\colon X\to Y : f \text{ is bijective}\},\\
&\mathcal{F}_{\mathrm{in}}(X,Y)=\mathcal{M}_{\mathrm{in}}(X,Y)\times\mathcal{M}_{\mathrm{in}}(Y,X), && \mathcal{F}_{\mathrm{sur}}(X,Y)=\mathcal{M}_{\mathrm{sur}}(X,Y)\times\mathcal{M}_{\mathrm{sur}}(Y,X),\\
&\mathcal{F}_{\mathrm{bi}}(X,Y)=\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y)\times\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(Y,X), && \mathcal{F}_{i}(X,Y)=\{(f,f^{-1}) : f\in\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y)\}.
\end{aligned}$$

相应的（修正后）距离为

$$\begin{aligned}
&(m)d_{GH}^{\mathrm{sur}}(X,Y)=(m)d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_{\mathrm{sur}}(X,Y)),\\
&(m)d_{GH}^{\mathrm{in}}(X,Y)=(m)d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_{\mathrm{in}}(X,Y)),\\
&(m)d_{GH}^{\mathrm{bi}}(X,Y)=(m)d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_{\mathrm{bi}}(X,Y)).
\end{aligned}\tag{7}$$

另设

$$(m)d_{GH}^{i}(X,Y)=(m)d_{GH}(X,Y;\mathcal{F}_{i}(X,Y)).$$

由命题 4.1,

$$md_{GH}^{\mathbf{xx}}\le d_{GH}^{\mathbf{xx}}\quad \text{for } \mathbf{xx}\in\{i,\mathrm{in},\mathrm{sur},\mathrm{bi}\}$$

and

$$\begin{aligned}
&(m)d_{GH}\le(m)d_{GH}^{\mathrm{in}}\le(m)d_{GH}^{\mathrm{bi}}\le(m)d_{GH}^{i},\\
&(m)d_{GH}\le(m)d_{GH}^{\mathrm{sur}}\le(m)d_{GH}^{\mathrm{bi}}.
\end{aligned}$$

命题 4.2。对于度量空间之间的一个双射 $f\colon\ X\to Y$，

$$d^{+}_{f^{-1}}=d^{-}_{f},\quad d^{-}_{f^{-1}}=d^{+}_{f};\quad d^{+}_{(f,f^{-1})}=d^{+}_{f},\quad d^{-}_{(f,f^{-1})}=d^{-}_{f}.$$

因此,

$$md_{GH}(f,f^{-1})=d_{GH}(f,f^{-1})=\frac{1}{2}\operatorname{dis} f=\frac{1}{2}\operatorname{dis} f^{-1}.$$

证明。将 $x=f^{-1}(y)$ 和 $x'=f^{-1}(y')$ 代入（2）。其余等式可通过将 $y=f(x')$ 代入（4）得到。□

推论 4.3。对于基数相同的度量空间 X 和 Y，

$$\begin{aligned}
md_{GH}^{i}(X,Y)=d_{GH}^{i}(X,Y)&=\frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} f : f\in\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y)\}\\
&=\frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} g : g\in\mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(Y,X)\}.
\end{aligned}$$

命题 4.4。对于基数相同的度量空间 X 和 Y，

$$d_{GH}^{\mathrm{bi}}(X,Y)=md_{GH}^{\mathrm{bi}}(X,Y)=d_{GH}^{i}(X,Y).$$

证明。Sin ce $md_{GH}^{\mathrm{bi}} \le d_{GH}^{\mathrm{bi}} \le d_{GH}^{i} = md_{GH}^{i}$，只需证明 $d_{GH}^{i} \le md_{GH}^{\mathrm{bi}}$。由推论 4 .3,

$$\begin{aligned} md_{GH}^{\mathrm{bi}}(X,Y) &= \frac{1}{2}\inf\{\max\{\operatorname{dis} f, \operatorname{dis} g\} : f \in \mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y),\ g \in \mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(Y,X)\} \\ &= \frac{1}{2}\max\left\{\inf\{\operatorname{dis} f : f \in \mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(X,Y)\},\ \inf\{\operatorname{dis} g : g \in \mathcal{M}_{\mathrm{bi}}(Y,X)\}\right\} \\ &= d_{GH}^{i}(X,Y). \end{aligned}$$

□

4.2 同基数的基数齐性空间之间的距离

拓扑空间 X 是基数齐性的，当且仅当每个非空开子集 $U \subset X$ 都具有基数 $|U| = |X|$。

下面给出度量空间中定理 3.1 的一个细化结果。

˜**命题 4.5**。设 X、Y、$\mathcal{L}_X$、$\mathcal{L}_Y$、f、g 和 f如定理 3.1中所述。此外，设 X和Y为度量空间，且 ε_X、$\varepsilon_Y > 0$ 为有限的，对于所有 $U \in \mathcal{L}_X$都有直径 $U \le \varepsilon_X$，对于所有 $V \in \mathcal{L}_Y$都有直径 $V \le \varepsilon_Y$。

For $x, x' \in X$,

$$|f(x)\tilde{f}(x)| \le \begin{cases} \varepsilon_Y & \text{if } x \in X_I, \\ d^{+}_{(f,g)} + \varepsilon_X & \text{if } x \in X_{II}; \end{cases}$$

$$\begin{aligned} -d_f^- - 2\varepsilon_Y \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| - |xx'| \le d_f^+ + 2\varepsilon_Y & \qquad \text{if } x, x' \in X_I, \\ -d_g^+ - 2\varepsilon_X \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| - |xx'| \le d_g^- + 2\varepsilon_X & \qquad \text{if } x, x' \in X_{II}, \\ -d^-_{(f,g)} - \varepsilon_X - \varepsilon_Y \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| - |xx'| \le d^+_{(f,g)} + \varepsilon_X + \varepsilon_Y & \qquad \text{if } x \in X_I,\ x' \in X_{II}. \end{aligned}$$

因此，对于 $\varepsilon =$最大值$\{\varepsilon_X, \varepsilon_Y\}$,

$$\begin{gathered} -\max\{d_f^-, d_g^+, d^-_{(f,g)}\} - 2\varepsilon \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| - |xx'| \le \max\{d_f^+, d_g^-, d^+_{(f,g)}\} + 2\varepsilon, \\ \frac{1}{2}\operatorname{dis}\tilde{f} \le d_{GH}(f,g) + \varepsilon. \end{gathered}$$

证明。 我们为每种情况给出详细估计。

˜为界定 $|f(x)f(x)|$:

˜如果 $x \in X_I$，那么 $f(x)$ 和 $f(x)$ 属于 $\mathcal{L}_Y$ 的同一个成员，因此 $|f(x)f(x)| \le \varepsilon_Y$。如果 $x \in X_{II}$，令 $\tilde{g} = \tilde{f}^{-1}$和 $y = \tilde{f}(x)$。于是

$$|f(x)y| \le |xg(y)| + d^+_{(f,g)} \le |x\tilde{g}(y)| + \varepsilon_X + d^+_{(f,g)} = \varepsilon_X + d^+_{(f,g)}.$$

对于 x，$x' \in X_I$,

$$|xx'| - d_f^- - 2\varepsilon_Y \le |f(x)f(x')| - 2\varepsilon_Y \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| \le |f(x)f(x')| + 2\varepsilon_Y \le |xx'| + d_f^+ + 2\varepsilon_Y.$$

对于 $x,\ x' \in X_{II}$,

$$|xx'| - 2\varepsilon_X - d_g^+ \le |xg\tilde{f}(x)| + |g\tilde{f}(x)g\tilde{f}(x')| + |g\tilde{f}(x')x'| - 2\varepsilon_X - d_g^+ \le$$
$$|g\tilde{f}(x)g\tilde{f}(x')| - d_g^+ \le |\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| \le |g\tilde{f}(x)g\tilde{f}(x')| + d_g^- \le$$
$$|g\tilde{f}(x)x| + |xx'| + |x'g\tilde{f}(x')| + d_g^- \le |xx'| + 2\varepsilon_X + d_g^-.$$

对于 $x \in X_I$ 和 $x' \in X_{II}$,

$$|xx'| - \varepsilon_X - d^-_{(f,g)} - \varepsilon_Y \le |xx'| - |x'g\tilde{f}(x')| - d^-_{(f,g)} - \varepsilon_Y \le$$
$$|xg\tilde{f}(x')| - d^-_{(f,g)} - \varepsilon_Y \le |f(x)\tilde{f}(x')| - |\tilde{f}(x)f(x)| \le$$
$$|\tilde{f}(x)\tilde{f}(x')| \le |\tilde{f}(x)f(x)| + |f(x)\tilde{f}(x')| \le \varepsilon_Y + |xg\tilde{f}(x')| + d^+_{(f,g)} \le$$
$$|xx'| + |x'g\tilde{f}(x')| + d^+_{(f,g)} + \varepsilon_Y \le |xx'| + \varepsilon_X + d^+_{(f,g)} + \varepsilon_Y.$$

□

定理 4.6. 对于具有相同基数的基数齐次度量空间 X 和 Y,

$$d_{GH}(X,Y) = d_{GH}^{\text{in}}(X,Y) = d_{GH}^{\text{sur}}(X,Y) = d_{GH}^{\text{bi}}(X,Y) = d_{GH}^{i}(X,Y)$$
$$= \frac{1}{2}\inf\{\operatorname{dis} f : f\colon X \to Y \ \textit{is a bijection}\}.$$

证明. 只需考虑 $d_{GH}(X,\ Y) < \infty$。根据第 4.1 节、推论 4.3 和命题 4.4 中的不等式，我们只需证明 $d^i_{GH}(X,\ Y) \le d_{GH}(X,\ Y)$。

给定 $\varepsilon > 0$, 选取 $f\colon\ X \to Y$ 和 $g\colon\ Y \to X$，使得 $d_{GH}(f,\ g) < d_{GH}(X,\ Y) + \varepsilon$。

用 Hausdorff 定理找到 X 和 Y 的 ε 双射覆盖 $\tilde{f}$ 和 $\tilde{g}$。根据命题 4.5, $d_{GH}(\tilde{f},\tilde{g}) < d_{GH}(X,\ Y) + \varepsilon$。根据推论 4.3, $d^i_{GH}(X,\ Y) \le \frac{1}{2}\operatorname{dis}\tilde{f} < d_{GH}(X,\ Y) + \varepsilon$。由于 $\varepsilon > 0$ 是任意的，结论得证。

□

5 δ-满射映射的逼近

映射 $f\colon\ X \to Y$是 δ-满射的，如果 $d_H(f(X),\ Y) < \delta$。我们称 f将 X δ-满射地映到$L \subset Y$，如果 $d_H(f(X),\ L) < \delta$。

命题 5.1。 对于度量空间 X, Y和映射 $f\colon\ X \to Y$, $g\colon\ Y \to X$,

$$d_H(f(X), Y) \le d^+_{(f,g)}.$$

因此，若 $d^+{}_{(f,g)} < \delta$，则 f 是 δ-满射的。

证明。 对于任意 $y \in Y$，令 $x = g(y)$。于是由 (4) 得

$$|f(x)y| \le |f(g(y))y| = |f(g(y))y| - |g(y)g(y)| \le d^+_{(f,g)}.$$

因此 $d_H(f(X),\ Y) \le d^+{}_{(f,\ g)}$。

□

命题 5.2。 对于度量空间之间的 δ-满射映射 f: $X \to Y$，存在 g: $Y \to X$ 使得

$$d_g^+ \le d_f^- + 2\delta, \quad d_g^- \le d_f^+ + 2\delta, \quad d_{(f,g)}^+ \le d_f^+ + \delta, \quad d_{(f,g)}^- \le d_f^- + \delta.$$

因此，

$$d_{GH}(X,Y) \le d_{GH}(f,g) \le \frac{1}{2}\operatorname{dis} f + \delta.$$

证明。 在 $f(X)$ 上定义 g，使得 $g(f(x)) = x$。对于 $y \notin f(X)$，选取满足 $|yy'| < \delta$ 的 $y' \in f(X)$，并令$g(y) = g(y')$。

Then

$$|g(y_1)g(y_2)| = |g(y_1')g(y_2')| = |x_1'x_2'| \le |f(x_1')f(x_2')| + d_f^- = |y_1'y_2'| + d_f^- < |y_1y_2| + 2\delta + d_f^-,$$

类似地

$$|g(y_1)g(y_2)| = |x_1'x_2'| \ge |f(x_1')f(x_2')| - d_f^+ > |y_1y_2| - 2\delta - d_f^+.$$

此外，

$$|f(x)y| < |f(x)y'| + \delta = |f(x)f(x')| + \delta \le |xx'| + d_f^+ + \delta = |xg(y')| + d_f^+ + \delta,$$

并类似地

$$|f(x)y| > |f(x)y'| - \delta = |f(x)f(x')| - \delta \ge |xx'| - d_f^- - \delta = |xg(y')| - d_f^- - \delta.$$

□

命题 **命题 5.3**。 若 $d_{GH}(X,Y) < d$，则存在一个 d-满射$(2d)$-等距映射 f: $X \to Y$.

证明。 存在 f: $X \to Y$和 g: $Y \to X$，使得 $d_{GH}(f,g) < d$。根据命题 5.1， f是d-满射。由于$\frac{1}{2}\operatorname{dis} f \le d_{GH}(f,g) < d$， f是一个 $(2d)$-等距映射。 □

由命题 5.2 和命题 5.3 可得:

推论 5.4。 对于度量空间 X 和 Y，以下条件等价:

(1) $d_{GH}(X,Y) < \infty$; (2) 存在有限的 d、δ 以及一个 δ-满射 d-等距映射 f: $X \to Y$; (3) 存在有限的 d'、δ' 以及一个 δ'-满射 d'-等距映射 g: $Y \to X$。

定理 5.5。 设 X 和 Y 是基数相同的基数齐性度量空间。若存在一个 δ-满射 d-等距映射 f: $X \to Y$，则存在一个双射$(d + 2\delta)$-等距映射 $\tilde{f}$: $X \to Y$。

证明。 由命题 5.2，存在 g: $Y \to X$，使得 $d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\operatorname{dis} f + \delta < \frac{1}{2}d + \delta$。定理 4.6 得到一个双射 $\tilde{f}$: $X \to Y$，使得 $d_{GH}(X,Y) \le \frac{1}{2}\operatorname{dis} \tilde{f} < \frac{1}{2}d + \delta$。因此 $\operatorname{dis} \tilde{f} < d + 2\delta$。 □

命题 5.6。 若 f: $X \to Y$将 X δ-满射到子集 $L \subset Y$上，且 $\delta > 0$，则存在 f: $X \to L$，使得对所有 $x \in X$，均有 $|f(x)f(x)| < \delta$。因此

$$d_H(\hat{f}(X), L) \le 2\delta, \quad d_{\hat{f}}^+ \le d_f^+ + 2\delta, \quad d_{\hat{f}}^- \le d_f^- + 2\delta,$$

ˆ因此 f 是从 2δ到 L的(2δ)-满射。

ˆˆ证明。对每个 $x \in X$，选取 $f(x) \in L$，使得 $|f(x)f(x)| < \delta$。 □

命题 5.7. 若 $f\colon\ X \to Y$ 是一个 d-等距映射，且将 $L \subset Y(\delta, d > 0)$ 映满至 X δ，ˆ则存在一个 (2δ)-满射 $(d + 2\delta)$-等距映射 $f\colon\ X \to L$。

ˆ证明。由命题 5.6，存在 $f\colon X \to L$，它将 L 映满至 2δ，且满足ˆˆ$|f(x)f(x)| < \delta$，对所有 $x \in X$ 均成立。因此 f 是一个 $(d + 2\delta)$-等距映射。 □

定理 5.8. 若 $f\colon\ X \to Y$ 是一个 d-等距映射，将 $L \subset Y(\delta, d > 0)$ 映满至 X δ，且 X 和 L 都与 $|X| = |L|$ 基数齐性，则存在一个双射 $(d + 6\delta)$-˜等距映射 $f\colon\ X \to L$。

ˆ证明。命题 5.7 给出一个 (2δ)-满射的 $(d+2\delta)$-等距映射 $f\colon X \to L$。随后，定理 5.5 给出一个˜双射的 $(d + 6\delta)$-等距映射 $f\colon X \to L$。 □

6 在巴拿赫空间中的应用

命题 6.1。每个拓扑向量空间都是基数齐性的。

证明。设 U 是拓扑向量空间 X 的一个非空开子集，并设 $x \in U$。那么 U 和$V = U - x = \{y - x\colon$ $y \in U\}$ 等势。由于 $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} nV$、 V 和 X 等势。 □

命题 6.2。若巴拿赫空间 X 和 Y 之间存在一个 δ-满射的 d-等距映射(其中 δ 和 d为有限)，则 $|X| = |Y|$。

˜证明。我们证明 $d(X) = d(Y)$。取一个稠密的 $Z \subset X$，使得 $|Z| = d(X)$。限制映射 $f = f|_Z\colon Z \to Y$是 ε-满射的，且 $\varepsilon = d + \delta$，因此 $d_H(f(Z)\ Y) < \varepsilon$，并且 $f(Z)$ 是 Y中的一个 ε-网。于是 $\frac{1}{n}f(Z)$ 是一个 $\frac{\varepsilon}{n}$-网，而 $\mathcal{S} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}f(Z)$ 在 Y中稠密，且 $|S| \leq |Z|$。

根据推论 5.4，存在一个 δ'-满射的 d'-等距映射 $g\colon Y \to X$（对于有限的 d' 和 δ'）。对称地， $d(X) \leq d(Y)$。因此， $d(X) = d(Y)$。根据 Toruńczyk 定理 [17]， X 和 Y 同胚，因此 $|X| = |Y|$。 □

注 6.3. 在 [6, 定理 1], 中，任何 δ-满射映射 $f\colon V \to W$ 在巴拿赫空间V, W之间，若其没有基数较小的稠密子集，则可将其转化为满射 $F\colon V \to W$，使其满足$\|f - F\| \leq 7\delta$。[5]中的命题 2 的证明也类似地构造了一个满射的 F，使其满足 $\|f - F\| \leq 2d + \delta$。这将对 δ-满射 d-等距映射的逼近，归结为对 $(2d + \delta)$-或 $(d + 14\delta)$-等距满射的逼近。

下面，我们从一个 d-等距且 δ-满射的 $f\colon V \to W$ 构造映射 $g\colon W \to V$，使得定理 3.1 适用于这一对 $(f,\ g)$。由此可更简洁地推导迪尔沃思–塔博尔定理。

命题 6.4。如果巴拿赫空间 X˜和 Y 之间存在一个 δ-满射的 d-等距映射 $f\colon X \to Y$，那么就存在一个双射的$(d + 2\delta)$-等距映射 $f\colon X \to Y$。

证明。命题 6.1 蕴含 X 和 Y 具有基数齐性，而命题 6.2 给出 $|X| = |Y|$。结论由定理 5.5 得出。 □

结合命题 6.4 与 M. Omladič 和 P. Šemrl 的定理 [4] 可得:

推论 6.5 (Tabor [6])。 如果巴拿赫空间之间存在一个 δ-满射的 d-等距映射 $f\colon X \to Y$，那么存在一个双射仿射等距映射 $U\colon X \to Y$，满足 $\|f - U\| \le 2d + 4\delta$。

S. J. Dilworth 证明了如下结果：对于像接近某个闭子空间、而非整个空间的映射，该结果成立。同样的技巧也适用于此处。

命题 6.6. 若 $f\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的一个 d-等距映射，且将 X δ满射地映至闭线性子空间 $L \subset Y$，则存在一个双射$(d + 6\delta)$-等距映射 $f\colon X \to L$。

证明。 由命题 6.1， X 和 L 是基数齐性的。命题 5.7 给出一个 (2δ)-ˆ 满射 $(d + 2\delta)$-等距映射 $f\colon X \to L$。命题 6.2 推出 $|X| = |L|$。应用定理 5.5。 □

将命题 6.6 与 [4] 结合，可得：

推论 6.7 (Dilworth [5])。 若 $f\colon X \to Y$ 是巴拿赫空间之间的一个 d-等距映射，将 $X\delta$满射地映至闭线性子空间 $L \subset Y$，则存在一个双射仿射等距映射$U\colon X \to L$，且满足 $\|f - U\| \le 2d + 12\delta$。

注 6.8. Šemrl–Väisälä [7, 定理 3.2] 将推论 6.7 中的界改进为 $\|f - U\| \le 2d + 2\delta$，且该界是最优的。结合推论 5.4 和 6.5 可知，两个巴拿赫空间等距，当且仅当它们的格罗莫夫–豪斯多夫距离有限 [18, 定理 0.3]。

参考文献

[1] S. Mazur 和 S. Ulam，关于赋范向量空间的等距变换，《巴黎科学院报告》194（1932年），946–948。

[2] D. H. Hyers 和 S. M. Ulam，关于近似等距映射，《美国数学学会通报》51（1945年），288– 292。[3] J. Gevirtz，巴拿赫空间中等距映射的稳定性，《美国数学会会刊》89（1983），633–636。[4] M. Omladič 和 P. Šemrl，关于等距映射的非线性扰动，《数学年刊》303（1995），617–628。[5] S. J. Dilworth，有限维赋范空间上的近似等距映射，《伦敦数学会通报》31，第4期（1999），471–476。[6]J. Tabor，满射稳定性，《逼近理论杂志》105（2000），166-175。doi:10.1006jath.2000.3452。[7] P. Šemrl 和 J. Väisälä，巴拿赫空间中的非满射近等距映射，《泛函分析杂志》198（2003），268–278。[8] D. Edwards，超空间的结构，载于《拓扑学研究》，N.M. Stavrakas 和 K.R. Allen 编，纽约；伦敦；旧金山：Academic Press, Inc.，1975。[9] M. Gromov，黎曼流形的度量结构，Lafontaine 和 Pierre Pansu 编。巴黎，1981。1–120。

[10] M. Gromov，黎曼与非黎曼空间的度量结构，巴塞尔；波士顿；柏林：Birkhäuser，1999。[11] D. Burago、Yu. Burago 和 S. Ivanov，度量几何教程，《数学研究生教材》33，美国数学学会，罗得岛州普罗维登斯，2001。[12] F. Mémoli 和 G. Sapiro，点云数据等距不变识别的理论与计算框架，《计算数学基础》5(3)，313–347，2005。[13] I. A. Vestfrid，连续函数空间之间等距映射与非扩张映射的*Hyers-Ulam*稳定性，《美国数学学会会刊》145，第6期（2017），2481–2494。[14] F. Mémoli，*Gromov-Hausdorff*距离的一些性质，《离散与计算几何》48(2)（2012），416–440。[15] S. Lim、F. Mémoli 和 Z. Smith，球面之间的格罗莫夫–豪斯多夫距离，《几何与拓扑》，2023，27，第9期，第3733–3800页。[16] S. A. Bogatyi 和 A. A. Tuzhilin，连续*Gromov–Hausdorff*距离理论基础，2025，arXiv电子预印本，arXiv:2512.02611 [math.MG].[17] H. Toruńczyk，希尔伯特空间拓扑的刻画，《数学基础》111(3)，247– 262，1981。[18] S. A. Bogatyi、A. A. Tuzhilin，带有格罗莫夫–豪斯多夫距离的*Mazur-Ulam*定理，《摩尔多瓦共和国科学院学报》，编写中。