平面图的恰有一个颜色的可选择性

YutingWang Xin Zhang*
西安电子科技大学数学与统计学院，中国西安，710071

2025年12月30日

arXiv:2512.22805v1 [math.CO] 28 Dec 2025

摘要

图的恰有一个颜色的正常着色，是一种正常顶点着色，其中每个非孤立顶点的开邻域中至少有一种颜色恰好出现一次。对于非负整数 k，若对于G 的任意列表赋值L，只要对每个顶点 v $\in V(G)$ 都满足 $|L(v)| = d(v) + k$，就存在G 的一个恰有一个颜色的正常着色 ϕ，使得对所有 v $\in V(G)$，都有 $\phi(v) \in L(v)$，则称图G 是恰有一个颜色的（度+k）-可选择的。近期，Kashima、Škrekovski 和 Xu 提出了两个关于恰有一个颜色的可选择性的相关猜想：第一个猜想断言，存在一个绝对常数k，使得每个图都是恰有一个颜色的（度+k）-可选择的；第二个猜想则进一步将范围限制为除长度为5的圈以外的连通图，并将常数降至$k = 2$。本文证明了三个图类满足第二个猜想：最大度不超过4的K_4-无 minor 图、最大度不超过4的外 1 平面图，以及围长至少为12的平面图；我们还证明这些图类满足第一个猜想，并且该结论也适用于所有外 1 平面图（不限制度）。此外，我们证明围长至少为12的平面图和外 1 平面图都是恰有一个颜色的正常6-可选择的。

关键词：恰有一个颜色的正常着色；平面图；K_4-无子式图；外1-平面图。

1 引言

本文仅考虑简单有限图。对于图G，分别用$V(G)$和$E(G)$表示其顶点集和边集。顶点 v 的开邻域$N_G(v)$是与 v 相邻的顶点集合。v 的度 $d_G(v)$是其开邻域中顶点的数量。图G的最大度 记为 $\Delta(G)$，即G中所有顶点的最大度。如果图G 是平面图，我们假设它嵌入平面且边彼此不交叉。用$F(G)$表示该嵌入的面集。面的度 $d_G(f)$是与面f关联的边数，其中每条割边计数两次。当上下文明确指图G时，为简洁起见，我们将$N(v)$、$d(v)$和$d(f)$分别简写为 N(v)、d(v) 和 d(f)。

图 G 的正常k-着色是一个映射 ϕ: V(G) $\to$ [k] := {1, 2, . . . , k}，使得对于每条边 uv $\in$E(G)，都有 $\phi(u) \neq \phi(v)$。G 的一个 f-列表赋值（其中 f: V(G) $\to \mathbb{N}^+$）是一个函数 L: V(G) $\to 2^{\mathbb{N}^+}$，为每个顶点 v 赋予一个至少包含 f(v) 个颜色的集合 L(v)。给定一个 f-列表赋值 L，G 的一个 L-着色是满足 $\phi(v) \in L(v)$（对所有 v $\in$ V(G)）的正常着色 ϕ。如果对于每个顶点 v 都有 |L(v)| = k，则该 L-着色称为列表k-着色。

*通讯作者。电子邮箱：xzhang@xidian.edu.cn。

2023年，Fabrici、Lužar、Rindošová 和 Soták [8] 引入了图的恰有一个颜色的正常着色概念。一个正常恰有一个颜色的k-着色对于G 是一个正常着色 $\phi\colon V(G) \to [k]$，使得对于每个非孤立顶点$v \in V(G)$），集合

$$U_\phi(v,G) := \{\phi(u) \mid u \in N(v) \text{ and } \phi(u) \neq \phi(w) \text{ for all } w \in N(v) \setminus \{u\}\}$$

非空。换句话说，U_ϕ(v,G) 表示在 v 的开邻域 N(v) 中恰好出现一次的颜色集合。使G 存在适当无冲突k-着色的最小k 称为G的适当无冲突（PCF）色数，记为 $\chi_{\mathrm{PCF}}(G)$。Caro、Petruševski 和 Škrekovski [3]证明了，对于每个最大度为 $\Delta(G) \geq 1$ 的图G，都有 $\chi_{\mathrm{PCF}}(G) \leq \lfloor 5\Delta(G)/2 \rfloor$，并提出了以下猜想：

猜想 1.1. *[3]* 对于任意最大度为 $\Delta \geq 3$ 的连通图 G，其适当无冲突色数满足：

$$\chi_{\mathrm{PCF}}(G) \leq \Delta + 1.$$

5-圈C_5, 这一特殊情形中，$\chi_{\mathrm{PCF}}(C_5) = 5 \neq \Delta + 1$，这表明条件$\Delta \geq 3$ 不能放宽。此外，对于长度不是 3 的倍数且不等于C_5 的任意圈，都有 $\chi_{\mathrm{PCF}}(C) = 4 \neq \Delta + 1$，从而得出与$C_5$类似的结论。上界 $\Delta + 1$ 是紧的，因为当G 是完全图K_n的 1-子分割 （即将每条边恰好细分一次）时，$\chi_{\mathrm{PCF}}($ $G) = \Delta(G) + 1$；见 [6]。

Liu 和 Yu [16] 关于图的线性着色的早期研究 Δ(G) = 3时蕴含了猜想 1.1；他们的结果也涵盖了该猜想的列表版本。作为解决猜想 1.1 的后续进展，Cranston 和 Liu [7] 证明，直接应用贪心算法即可为任意最大度为 Δ 的图 G 构造一个适当的无冲突（$2\Delta + 1$）着色。这一界后来被 Cho、Choi、Kwon 和 Park [4], 改进为（$2\Delta - 1$），目前这是在不假设 Δ 足够大的情况下已知的最佳上界。另一方面，若 Δ足够大，则 Cranston 和 Liu [7] 证明了 χ_{PCF}(G) $\leq$ 1。656Δ，Liu 和 Reed [15] 证明了

$$\chi_{\mathrm{PCF}}(G) \leq \Delta + O\left(\Delta^{2/3} \log \Delta\right),$$

表明猜想1.1 渐近地成立，而 Chuet、Dai、Ouyang 和 Pirot [6]通过消去二阶项中的多项式因子，进一步改进了这一上界，得到

$$\chi_{\mathrm{PCF}}(G) \leq \Delta + O\left(\log \Delta\right).$$

关于图的适当的无冲突着色的其他结果，请参阅 [2–8, 10–12, 14, 15] 。

关于恰有一个颜色的正常着色的列表版本，已有研究见 [7, 14]；特别是，Liu [14] 证明，任何分层树宽至多为 w 的图都是恰有一个颜色的正常着色 (8w−1)-可选的；而 Liu 和 Cranston [7] 证明，任何最大度 Δ 足够大的图都是恰有一个颜色的正常着色 1.656Δ-可选的。类比图的度可选着色性，Kashima、Škrekovski 和 Xu [11]提出了恰有一个颜色的正常着色（度 + k)-可选着色性这一概念。对于非负整数 k，若图 G 满足：对其任意$L$$f$-列表赋值，若$G$ 上的赋值满足f(v) $= d$(v) $+ k$，对所有 v $\in V(G)$ 均成立，则称该图为恰有一个颜色的正常着色(度 $+ k$)-可选的，如果存在 G 的恰有一个颜色的正常L-着色ϕ。这里，条件f(v) $= d$(v) $+ k$ 确保每个顶点的列表大小比其度至少多出固定的余量k。Kashima、Škrekovski 和 Xu 在论文 [11] 中提出了以下猜想。

猜想 1.2。 *[11]* 存在一个绝对常数 k，使得每个图都是恰有一个颜色的正常着色(度+k)-可选的。

注意到，5-圈不满足适当无冲突 4-Cho 可选的性质，这表明k 的最小值至少为 3。此外，Kashima、Škrekovski 和 Xu [11] 猜想，5-圈是唯一不满足适当无冲突（度+2）-可选的图。他们将这一更强的猜想正式表述如下：

猜想 1.3。 *[11]* 除 C_5 之外的每个连通图都是适当无冲突（度+2）-可选的。

由于长度为 $l \neq 0$ （模 3）的圈已知不满足适当无冲突（度+1）-可选， [3],因此无法进一步改进上界，以保证所有图都适当无冲突（度+1）-可选。在积极的一面，Kashima、Škrekovski 和 Xu [11] 证实了最大度不超过 4 的图的猜想 1.2 以及次三度图的猜想 1.3 ；特别地，他们证明了如下结论：

定理 1.4。 *[11]*

(1) 每个最大度至多为4的连通图都是可作适当无冲突(度+3)列表着色的。(2) 除 C_5 外，每个连通次三次图都是可作适当无冲突 (度+2)列表着色的。

如果图G 的每个G 子图都包含一个度至多为d的顶点，则称图G 是d-退化的。Kashima、Škrekovski 和 Xu [10]证明，每个d-退化图都是可作适当无冲突（度+d+1）列表着色的。由于 5-圈是 2-退化的，却无法作适当无冲突（度+2）列表着色，因此上界（度+d+1）无法统一降低。不过，树可以作适当无冲突（度+1）列表着色 [10], ，相比一般情况，界限提高了 1。此外，Kashima、Škrekovski 和 Xu [12] 还为外平面图——这一广为人知的 2-退化平面图子类——建立了以下结果：

定理 1.5. *[12]* 除 C_5 外，每个连通外平面图都是可选度为(度+2)的恰当无冲突图。

当$d = 2$ 且G 是外平面图时，这将一般界（度+d+1）提高了 1。文献中有两个与外平面图具有某些相似之处的平面图子类：

- K_4-无子式图 [17–19]：若图G 不包含任何可通过边删除、顶点删除或收缩从K_4 得到的子图，则称图G 为K_4-无子式图。
- 外1-平面图 [1, 9, 20]：若图G 存在一种画法，使所有顶点都位于外面上，且每条边至多交叉一次，则称图G 为外 1-平面图。

已知K_4-无子式图是 2-退化的，而外 1-平面图是 3-退化的。因此：

- 每个K_4-无子式图都是可选度为（度+3）的恰当无冲突图。
- 每个外 1-平面图都是适当冲突自由（度+4）可选的。

本文通过证明以下定理，将最大度为 $\Delta \leq 4$的图的这些界改进为(degree+2)：

定理 1.6. 除 C_5 外，每个最大度至多为 4 的连通 K_4-小图无关图都是 *properconflict-free* (degree+2)-可选染色的。

定理 1.7。 除 C_5 外，每个最大度不超过4 的连通外1-平面图都是可作适当冲突自由(度+2)-列表着色的。

此外，我们去除对最大度的限制，并证明了以下关于围长较大的平面图和外 1-平面图的结果：

定理 1.8。 *E* 每个围长至少为12 的平面图都是可作适当冲突自由(度+2)-列表着色的。 *e.*

定理 1.9。 每个外1-平面图都是可作适当冲突自由(度+3)-列表着色的，而且这个界是紧的。

因此，我们证实了外 1-平面图的猜想 1.2，以及以下图类的猜想 1.3 ： 次四次 K_4-小图、次四次外 1- 平面图，以及围长至少为 12 的平面图。这在多个受限情形下解决了这两个猜想，并显著拓展了它们的适用范围。

2 不可避免构形

本节证明，本文讨论的每个图都至少包含下列集合中的一种构型：

T_1 一个1-度顶点u；T_2 一个三角形uvw，其中d(u) = 2 且d(v) = 3；T_3 一个4-圈xuyv，其中d(u) = d(v) = 2；T_4 两个相邻三角形uvw和uxy，使得d(u) = 4且d(v) = d(x) = 2；T_5 一条路径uvw，其中d(u) = d(v) = 2且d(w) = 3；T_6 一个三角形uvx，其中d(u) = d(v) = 2 且d(x) ≠ 3；T_7 一个4-圈uvwx，其中d(u) = d(v) = d(w) = 2 且d(x) ≠ 3；T_8 一条迹xuvwpy，其中d(u) = d(v) = d(w) = d(p) = 2，且当x = y时d(x) ≠ 2；T_9 一个三角形ypw，与一条路径wvu相邻，使得d(p) = d(v) = d(u) = 2 且d(w) = 4；T_{10} 一个4-圈uvwx，与一条路径wpq相邻，使得d(u) = d(v) = d(p) = d(q) = 2 且d(w) = 4；T_{11} 一条路径xuvwpq，其中d(x) = d(u) = d(v) = d(p) = d(q) = 2 且d(w) = 4；T_{12} 一条路径uvwp，与一条边wa相邻，其中d(u) = d(v) = d(p) = d(a) = 2 且d(w) = 4；T_{13} 一个三角形xuw，与一个四边形xwvy相邻，其中d(x) = d(w) = 4 且d(u) = d(v) = 2；T_{14} 一条路径xuvy，其中d(u) = d(v) = 3 且uy, xv ∈ E(G)；T_{15} 一条路径xwuvy，其中d(w) = 2, d(u) = d(v) = 3，且uy,xv ∈ E(G)；T_{16} 一条路径xutvy，其中d(t) = 2，d(u) = d(v) = 3, 且uy,xv ∈ E(G)；T_{17} 一条路径xwuvzy，其中d(w) = d(z) = 2，d(u) = d(v) = 3，且uy, xv ∈ E(G)；T_{18} 一条路径xwutvy，其中d(w) = d(t) = 2，d(u) = d(v) = 3，且uy, xv ∈ E(G)；T_{19} 一条路径xwutvzy，其中d(w) = d(t) = d(z) = 2，d(u) = d(v) = 3，且uy,xv ∈ E(G)；T_{20} 两个相邻四边形xuvw和xwpy，其中d(u) = d(v) = d(p) = 2 且d(x) = d(w) = 4

;

T_{21} 一个5-圈xuvwy，与一个4-圈xypq相邻，使得d(u) = d(v) = d(w) = d(p) = 2 且d(x) = d(y) = 4；T_{22} 一个三角形uxy，其中d(u) = 2，d(x) = d(y) = 4，且N(x) ∩ N(y) = {u,h, p}；T_{23} 两个相邻三角形xuy和yph，使得d(u) = 2，d(x) = d(y) = 4，且xh ∈ E(G)；T_{24} 一个三角形xuy，与一个四边形ypzh相邻，使得d(u) = d(z) = 2，d(h) = 3，d(x) = d(y) = 4，且xh ∈ E(G)；T_{25} 一个四边形xuvy，其中d(u) = d(v) = 2，d(x) = d(y) = 4，且N(x) ∩ N(y) = {h, p}；T_{26} 一个四边形xuvy，与一个三角形yph相邻，使得d(u) = d(v) = 2，d(x) = d(y) = 4，且xh ∈ E(G)；T_{27} 两个相邻四边形xuvy和ypzh，使得d(u) = d(v) = d(z) = 2，d(h) = 3，d(x) = d(y) =4，且xh ∈ E(G)；T_{28} 一个5-圈xuwvy，其中d(u) = d(v) = d(w) = 2，d(x) = d(y) = 4，且N(x) ∩ N(y) = {h, p}；T_{29} 一个5-圈xuwvy，与一个三角形ypq相邻，使得d(u) = d(v) = d(w) = 2，d(x) = d(y) = 4，且xq ∈ E(G)；T_{30} 一个5-圈xuwvy，与一个四边形ypzq相邻，使得d(u) = d(v) = d(w) = d(z) = 2，d(q) = 3，d(x) = d(y) = 4，且xq ∈ E(G)；T_{31} 一个5-圈xuvyt，其中d(u) = d(v) = d(t) = 2，d(x) = d(y) = 4，且N(x) ∩ N(y) = {h, p, t}；T_{32} 一个5-圈xuvyt，与一个三角形yph相邻，使得d(u) = d(v) = d(t) = 2，d(x) = d(y) = 4，且xh ∈ E(G)；T_{33} 一个5-圈xuvyt，与一个四边形ypzh相邻，使得d(u) = d(v) = d(t) = d(z) = 2，d(h) = 3，d(x) = d(y) = 4，且xh ∈ E(G)；T_{34} 一个6-环xuvwyt，其中d(u) = d(v) = d(w) = d(t) = 2 且d(x) = d(y) = 4；T_{35} 一个6-环xuvwpq，其中d(u) = d(v) = d(p) = d(q) = 2且d(x) = d(w) = 4；T_{36} 一条迹huvwpql，其中d(h) = d(u) = d(v) = d(p) = d(q) = d(l) = 2 且d(w) = 5,

如图 1所示。在此图以及所有其他相关图中，我们清楚地标出了证明中提及的每个顶点的邻点。需要注意的是，空心顶点可以彼此重叠，而实心顶点始终与其他所有顶点互不相同。此外，对于任意空心顶点，其度至少为 min{2,*d*}，其中 *d* 表示图中与其关联的边数。

2.1 K_4-无 minor 图

引理 2.1。 *[21]* 每个连通的 K_4-无 *minor* 图 G，其 $\Delta(G) \leq 4$ 都包含某个 i 对应的构型 T_i，或者包含一条路径 $xuvy$，使得 $d(u) = d(v) = 2$ 且 $x \neq y$。

引理 2.2。 每个连通的 K_4-无 *minor* 图 $G \ncong C_5$，其 $\Delta(G) \leq 4$ 都包含某个 i 对应的构型 T_i。

证明。 假设$G \ncong C_5$ 是一个 K_4-小图无关图，且 $\Delta(G) \leq 4$，在所有违反该结论的此类图中，其顶点数最少。我们定义以下两种操作，以获得更小的 K_4-小图无关图，后续讨论中将它们称为 **操作 I**和 **操作 II**：

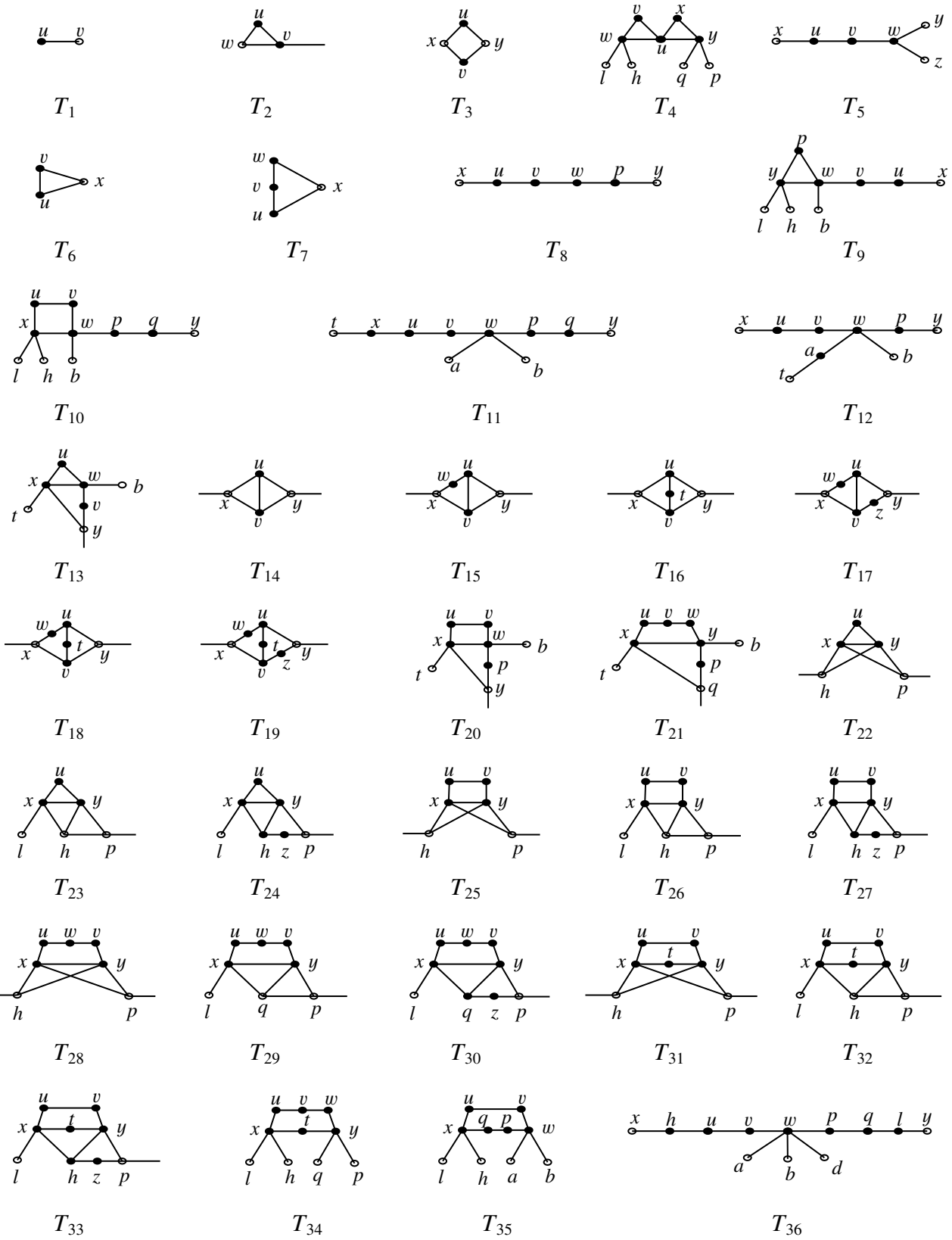

T1
T2
T3
T4
T5
T6
T7
T8
T9
T10
T11
T12
T13
T14
T15
T16
T17
T18
T19
T20
T21
T22
T23
T24
T25
T26
T27
T28
T29
T30
T31
T32
T33
T34
T35
T36

图 1：不可用配置

	操作 I	操作 II		操作 I	操作 II
T_1	-	-	T_2	-	T_5
T_4	-	T_9	T_5	-	-
T_6	-	T_7	T_7	-	T_8
T_8	-	-	T_9	-	T_{10}
T_{10}	T_{12}	T_{11}	T_{11}	-	-
T_{12}	-	-	T_{13}	-	T_9, T_{20}
T_{14}	-	-	T_{15}	-	T_5
T_{16}	-	T_5	T_{17}	-	T_5
T_{18}	-	T_5	T_{19}	-	T_5
T_{20}	T_{12}	T_{10}, T_{21}	T_{21}	-	T_8, T_{11}
T_{22}	-	T_{25}	T_{23}	-	T_{26}
T_{24}	-	T_5, T_{27}	T_{25}	T_{31}	T_{28}
T_{26}	T_{32}	T_{29}	T_{27}	T_{33}	T_5, T_{30}
T_{28}	-	T_8	T_{29}	-	T_8
T_{30}	-	T_5, T_8	T_{31}	-	T_{34}, T_{35}
T_{32}	-	T_{34}, T_{35}	T_{33}	-	T_5, T_{34}, T_{35}
T_{34}	-	T_8, T_{11}	T_{35}	-	T_{11}

表1：引理证明示意图 2.2 和 2.4

操作 I：若 G 含有一个 5-圈 xuwyv，且 d(u) = d(v) = d(w) = 2，则删除顶点 v；若 x 与 y 之间尚不存在边，则连接 x 与 y。操作 II：若未应用操作 I，且存在一条路径 xuvy，使得 d(u) = d(v) = 2 且 x ≠ y，则用一条新的路径 xwy 替换该路径，其中 d(w) = 2。

由引理 2.1，G 有一条路径 xuvy，使得 d(u) = d(v) = 2 且 x ≠ y，因此对 G 应用操作 I 或操作 II。于是，我们得到一个更小的 K_4-无小图 G′。若 G′ ≅ C_5,，则 G ≅ C_6，且 G 含有 T_8。若 G′ ≇ C_5,，则由 G 的极小性，G′ 满足该引理。

首先，假设 G′ 包含 T_3。由于 G 中并非如此，因此 G 中存在一个 5-圈 xuwyv，其中 d(u) = d(v) = d(w) = 2，于是对路径 xuwy 应用操作 II。然而，若出现这种情况，则会优先应用操作 I，而操作 II 不会启动，这就产生了矛盾。因此，G′不包含 T_3,，从而对于某个 i ∈ [12] 且 i ≠ 3，G′ 包含 T_i。

现在我们只给出 G′ 包含 T_{10}, 时的一个补充情形，其余情形均可类似处理。由于 G 也不包含 T_{10},，因此要么 G 中有 T_{11} 的一个副本，并对路径 xuvw 应用操作 II；要么 G 中有 T_{12} 的一个副本，且 t = x，并对 5-圈 xuvwa 应用操作 I。因此，G′ 中的构型 T_{10} 可由 G 通过操作 I 得到（前提是 G 包含 T_{11},），也可通过操作 II 得到（前提是 G 包含 T_{12}）。我们将这一结果填入表 2.1，由此可类似地得出 G′ 包含其他构型时的结论。这就构成了最终的矛盾，因为现在 G 包含某个 i ∈ [12]且 i ≠ 3对应的构型 T_i。□

2.2 外 1 平面图

引理 2.3。 *[13, 定理 3 和 4]* 每个连通外-1-平面图 $G \ncong C_5$，其 $|V(G)| \geq 4$ 和$\Delta(G) \leq 4$都包含构型 T_i，对某个 $i \in \{1,2,3,4,6\} \cup [13,19] \cup [22,24]$ 成立，或者包含一条路径 $xuvy$，使得 $d(u) = d(v) = 2$ 且 $x \neq y$。此外，

- 如果 G 包含后一种构型，那么将路径 $xuvy$ 替换为一条新的路径 xwy，其中 $d(w) = 2$，仍会得到一个外-1-平面图；

- *(T_3条件)* 若 G 包含构型 T_3，则用 uwy 替换路径 uy，并添加边 xy（若该边不存在），即可得到一个外 *1*-平面图。

引理 2.4。 每个连通外1-平面图 $G \ncong C_5$，其中 $\Delta(G) \leq 4$，都包含构型 T_i，其中某个 $i \in [35]$。此外，若 G 包含构型 T_3，，则满足 T_3条件。

证明。 设$G \ncong C_5$ 是一个外 1-平面图，其中 $|V(G)| \geq 4$ 且 $\Delta(G) \leq 4$，并在所有违反该结论的此类图中取顶点数最少者。我们定义以下两种操作，以得到更小的外 1-平面图；在后续讨论中分别称为 **操作 I** 和 **操作 II**：

操作 I 若 G 包含一个 5-圈 xuwyv，其中 $d(u) = d$(v) $= d$(w) $= 2$，则删除顶点 v；若边 x 与 y 之间尚不存在，则在 x 与 y 之间添加一条边，前提是该添加不会破坏该图的外 1-平面性。

操作 II 若 **操作 I** 未被应用，且存在一条路径 $xuvy$ 满足 $d(u) = d(v) = 2$ 且 $x \neq y$，则将这条路径替换为一条新路径 xwy，其中$d(w) = 2$。

由引理 2.3，G 存在一条路径 xuvy，使得 d(u) = d(v) = 2 且 x ≠ y，因此对 G 应用操作 I 或操作 II。于是，我们得到一个更小的外 1-平面图 G′。若 G′ ≅ C_5,，则 G ≅ C_6 且 G 含有 T_8。若 G′ ≇ C_5,，则根据 G 的极小性，G′ 满足引理。

首先，假设 G′ 含有满足 T_3-条件的 T_3。由于 G 中并非如此，因此 G 中存在一个 5-圈 xuwyv，其中 d(u) = d(v) = d(w) = 2，从而对路径 xuwy 应用操作 II。然而，根据 T_3-条件，添加一条新边 xy（若尚不存在）不会破坏该图的外 1-平面性，因此优先应用操作 I，而不启动操作 II，矛盾。因此，G′ 不含有满足 T_3-条件的 T_3，故 G′ 含有某个 i ∈ [35] 且 i ≠ 3 的 T_i。

现在我们只给出一个额外情形：G′ 包含 T_{20},，其余情形类似。由于 G 不含 T_{20},，因此 G 中要么有 T_{21} 的一个副本，并对路径 xuvw 应用操作 II；要么有 T_{10} 的一个副本，且 xy ∈ E(G)，并对路径 xwpy 应用操作 II；要么有 T_{12} 的一个副本，且 t = x、xy ∈ E(G)，并对 5-圈 xuvwa 应用操作 I。因此，G′ 中的构型 T_{20} 可由 G 经操作 I 得到，前提是 G 包含 T_{12}，；也可经操作 II 得到，前提是 G 包含 T_{10} 或 T_{21}。我们将这一结果列入表 2.1，由此可得当 G′ 包含其他构型时的类似结论。这就导出了最终的矛盾，因为 G 现在包含某个 i ∈ [35] 且 i ≠ 3的构型 T_i。
□

2.3 围长较大的平面图

引理 2.5。 每个围长至少为12 的平面图 G 都包含构型 T_i，其中某个 i 满足 $\in \{1, 5, 8, 11, 12, 36\}$。

证明。 在此证明中，我们将k-顶点 定义为度恰好为k的顶点，将k^+-顶点 定义为度至少为k的顶点；t-线程 是形如$ux_1x_2\cdots x_t$v的路径，其中每个x_i都是一个2-顶点，而u和v是3^+-顶点；我们称每个x_i为u的线程-*2*-顶点 。反设G 不包含任何一种构型。我们有以下结构性质：

P_1 $\delta(G) \geq 2$（由于不存在 T_1）；P_2 对于每个t，都不存在-线程$t \geq 4$（由于不存在 T_8）；

P_3 根据不存在t-线程可知，任何3度顶点都不与一个$t \geq 2$相邻（根据不存在T_5）——因此，每个3度顶点至多有三个线程-2-顶点；

P_4 若一个4度顶点与一条3-线程相邻，则它不能与任何2-线程相邻（根据不存在T_{11}）；若一个4度顶点与一条2-线程相邻，则它不能与两条1-线程相邻（根据不存在T_{12}）——因此，根据P_2，每个4度顶点至多有四个线程-2-顶点；

P_5 根据不存在T_{36}可知，任何5度顶点都不与两条3-线程相邻——因此，根据P_2，每个5度顶点至多有十一个线程-2-顶点。

我们给G 的每个顶点v赋予一个初始电荷$ch(\mathrm{v}) := d(\mathrm{v}) - \frac{12}{5}$。由此可得

$$\sum_{v\in V(G)} ch(v) \leq \sum_{v\in V(G)} \left(d(v) - \frac{12}{5}\right) + \sum_{f\in F(G)} \left(\frac{1}{5}d(f) - \frac{12}{5}\right) = -\frac{24}{5} < 0$$

由欧拉公式。接下来，我们重新分配电荷，使最终总电荷与初始总电荷之间产生矛盾。分配依据以下规则：

规则$_1$ 每个3度顶点向其每个线程-2-顶点发送$_{1\ 5}$；规则$_2$ 每个4度顶点向其每个线程-2-顶点发送$_{2\ 5}$；规则$_3$ 每个 5^+度顶点向其每个线程-2-顶点发送$_{1\ 5}$。

令$ch'(v)$ 表示$v \in V(G)$ 的最终电荷。由命题$_1$,可知$d(v) \geq 2$。

若 v 是一个2-顶点，则由 P_1 可知，除非 G 是一个圈，否则它必定是两个不同顶点的线程-2-顶点。然而，若 G 是一个圈，其长度至少为12，因此 G 会包含禁构 T_8,，这就产生了矛盾。因此，v 必定始终是两个不同顶点的线程-2-顶点。由 R_1, R_2, 和 R_3，可得 $\mathrm{ch}'(\mathrm{v}) \geq 2 - \frac{12}{5} + 2\times\frac{1}{5} = 0$。若 v 是一个3度顶点，则由 P_3 和 R_1，可得 $\mathrm{ch}'(\mathrm{v}) \geq 3 - \frac{12}{5} - 3\times\frac{1}{5} = 0$。若 v 是一个4度顶点，则由 P_4 和 R_2，可得 $\mathrm{ch}'(\mathrm{v}) \geq 4 - \frac{12}{5} - 4\times\frac{2}{5} = 0$。若 v 是一个5度顶点，则由 P_5 和 R_3，可得 $\mathrm{ch}'(\mathrm{v}) \geq 5 - \frac{12}{5} - 11\times\frac{1}{5} > 0$。若 v 是一个 6^+ 度顶点，则由 P_2 和 R_3，可得 $\mathrm{ch}'(\mathrm{v}) \geq \mathrm{d}(\mathrm{v}) - \frac{12}{5} - 3\mathrm{d}(\mathrm{v})\cdot\frac{1}{5} \geq 0$。

现在我们得出

$$\sum_{v\in V(G)} ch(v) = \sum_{v\in V(G)} ch'(v) \geq 0,$$

矛盾。 □

3 可约性

今后，我们用 PCF 作为“适当无冲突”的缩写。设 $\mathcal{G}_\ell$ 是图G 的一个类，使得 $\Delta(G) \leq l$，且对于每个$G \in \mathcal{G}_\ell$ 和每个$H \subseteq G$，都有$H \in \mathcal{G}_\ell$。若$G \in \mathcal{G}_\ell$ 不是 PCF-(度+2)-可选择的，而每个$H \subseteq G$ 满足$H \ncong C_5$ 时都是 PCF-(度+2)-可选择的，则称G 为 $\mathcal{G}_\ell$ 中的 PCF-(度+2)-临界图 。若某个构型不可能出现在 $\mathcal{G}_\ell$ 中的 PCF-(度+2)-临界图$G \in \mathcal{G}_\ell$内，则称该构型在 $\mathcal{G}_\ell$ 中是(度+2)-可约 。

设 ϕ 是 L-适当无冲突着色 G，且 u 是一个顶点，使得 $\alpha \in U_\phi(u,G)$。对于 u 的任意邻点 w，若 $U_\phi(u, G - \mathrm{w}) = \emptyset$，那么在 ϕ 下，u 的所有其他邻点都获得相同的颜色，记为 γ_w。现在，

对于u的任意邻点 w，我们定义颜色 $\tau_w(u)$ 如下：

$$\tau_w(u) = \begin{cases} \gamma_w & \text{if } |U_\phi(u,G)| = 1 \text{ and } \phi(w) = \alpha, \\ \alpha & \text{if } |U_\phi(u,G)| = 1 \text{ and } \phi(w) \neq \alpha, \\ \beta \in U_\phi(u,G) \setminus \{\alpha\} & \text{if } |U_\phi(u,G)| = 2 \text{ and } \phi(w) = \alpha, \\ \text{NULL} & \text{if } |U_\phi(u,G)| = 2 \text{ and } \phi(w) \neq \alpha \text{ or } |U_\phi(u,G)| \geq 3. \end{cases}$$

我们称 $\tau_w(u)$ 是唯一确定的，如果 $\tau_w(u) \neq$ NULL。

对于两个有序元组 $\{a_1, a_2, \ldots, a_t\}$ 和 $\{b_1, b_2, \ldots, b_t\}$，记号

$$\{a_1, a_2, \ldots, a_t\} := \{b_1, b_2, \ldots, b_t\}$$

表示对于每个$i \in \{1, 2, \ldots, t\}$，$\{a_i := b_i\}$。

3.1 扩展障碍

在本小节中，我们重点讨论六个不可约构型（见图2）：

H_1 一条路径 uvw，其中 d(u) = d(v) = d(w) = 2；H_2 一条路径 uvwp，且 d(u) = d(v) = d(p) = 2，d(w) = 4；H_3 一条路径 uvwpq，其中 d(u) = d(v) = d(p) = d(q) = 2，且 d(w) = 4；H_4 一个三角形 xuy，其中 d(u) = 2，且 d(x) = d(y) = 4；H_5 一个 5- 圈 xuwvy，其中 d(u) = d(v) = d(w) = 2，且 d(x) = d(y) = 4；

我们将证明，这些构型中的每一个要么是可约的，要么具有理想性质，具体如以下引理所述。

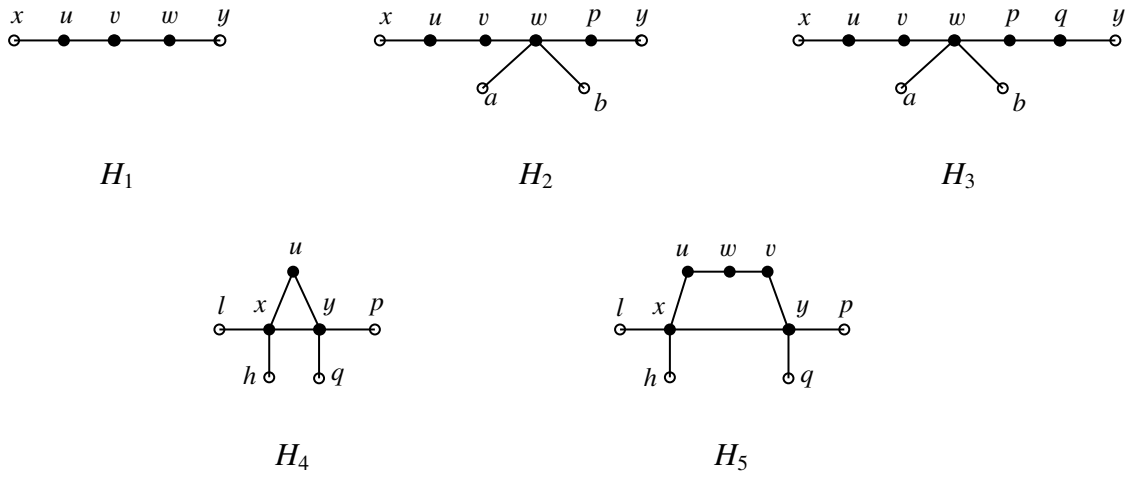


图2：三种常见构型

引理 *3.1*。设 G 有 H_1。令 $G' = G - \{u、v、w\}$，并设 L 为 G 的一个（度+2）列表赋值。若存在 G 的一个 *PCF-L-* 着色 ϕ'，使得 $\{c_x、c_y\} := \{\phi(x)、\phi(y)\}$，那么 ϕ 可以扩展为 G 的一个 *PCF-L-*着色，除非 $x \neq y$，且存在颜色 α、β、ξ_1、ξ_2，使得

- $U_\phi(x,\ G') = \{\alpha\},\ U_\phi(y,\ G') = \{\beta\},$
- $L(u) = \{c_x,\ \alpha,\ \xi_1,\ \xi_2\},$
- $L(v) = \{c_x, c_y, \xi_1, \xi_2\},$
- $L(w) = \{c_y,\ \beta, \xi_1, \xi_2\}.$

证明。设 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们按以下方式扩展着色 ϕ。首先，我们用颜色 $\xi_1 \in L(u) \setminus \{c_x, \alpha\}$ 给 u 着色，并用颜色 $\xi_2 \in L(v) \setminus \{c_x, c_y, \xi_1\}$ 给 v 着色。如果存在一种颜色 $\xi_3 \in L(w) \setminus \{c_y, \beta, \xi_1, \xi_2\}$，那么我们就用 ξ_3 给 w 着色，着色过程便成功完成。否则，我们有 $L(w) = \{c_y, \beta, \xi_1, \xi_2\}$。在这种情况下，我们用 ξ_2 给 w 着色。随后，如果我们能够用集合 $L(v) \setminus \{c_x, c_y, \xi_1, \xi_2\}$ 中的一种颜色重新着色 v，那么着色过程就完成了。否则，必有 $L(v) = \{c_x, c_y, \xi_1, \xi_2\}$。此时，我们用 ξ_1 重新着色 v。最后，如果我们能够用集合 $L(u) \setminus \{c_x, \alpha, \xi_1, \xi_2\}$ 中的一种颜色重新着色 u，那么着色就完成了。否则可知 $L(u) = \{c_x, \alpha, \xi_1, \xi_2\}$。现在，如果有一种颜色 $\alpha' \in U_\phi(x, G') \setminus \{\alpha\}$，那么我们就可以用 α 重新着色 u，从而完成扩展着色。因此，$U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$，并且根据对称性，我们也有 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。证明完毕。□

引理 *3.2.* 假设 G 有 H_2。令 $G' = G - \{u, v, p\}$，并设 L 是 G 的一个 *(*度+2*)*-列表赋值。若存在 G' 的一个 *PCF-L-*着色 ϕ，使得 $\{c_x、c_y、c_w、c_a、c_b\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(w)、\phi(a)、\phi(b)\}$ 且 $c_w \neq c_y$，那么 ϕ 可以扩展为 G 的一个 *PCF-L-* 着色，除非 $y \notin \{a, b\}$，并且存在颜色 α、β、ξ、ζ_1、ζ_2，使得

- $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{c_a, c_b\}.$
- $U_\phi(x,\ G') = \{\alpha\},\ U_\phi(y,\ G') = \{\beta\},$
- $L(u) = \{c_x,\ \alpha,\ c_w,\ \xi\},$
- $L(v) = \{c_x,\ c_w,\ \xi\ \zeta_1\},$
- $L(w) = \{c_w,\ c_a,\ c_b,\ \tau_w(a),\ \tau_w(b),\ c_y\},$
- $L(p) = \{c_y,\ \beta,\ c_w,\ \zeta_2\}$。

证明。设 $\alpha \in U_\phi(x, G')$和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们按以下方式扩展着色 ϕ。首先，用颜色 $\xi \in L(u) \setminus \{c_x, \alpha, c_w\}$ 给 u 着色，用颜色 $\zeta_1 \in L(v) \setminus \{c_x, c_w, \xi\}$ 给 v 着色，并用颜色 $\zeta_2 \in L(p) \setminus \{c_y, \beta, c_w\}$ 给 p 着色。若 $\{\zeta_1, \zeta_2\} \neq \{c_a, c_b\}$，则着色过程顺利完成。否则，假设 $\zeta_1 = c_b$ 且 $\zeta_2 = c_a$（分别地，$\zeta_1 = c_a$ 且 $\zeta_2 = c_b$）。如果我们可以用$L(p) \setminus \{c_y, \beta, c_w, c_a\}$（分别地，$L(p) \setminus \{c_y, \beta, c_w, c_b\}$）中的某个颜色给p重新着色，或者用$L(v) \setminus \{c_x, c_w, \xi, c_b\}$（分别地，$L(v) \setminus \{c_x, c_w, \xi, c_a\}$）中的某个颜色给v重新着色，那么问题也就解决了。因此，$L(p) = \{c_y, \beta, c_w, c_a\}$ 且$L(v) = \{c_x, c_w, \xi, c_b\}$（分别地，$L(p) = \{c_y, \beta, c_w, c_b\}$ 且$L(v) = \{c_x, c_w, \xi, c_a\}$）。由此可得$L(u) = \{c_x, \alpha, c_w, \xi\}$（因此 $\alpha \neq c_w$）。否则，我们可以用$L(u) \setminus \{c_x, \alpha, c_w, \xi\}$ 中的某个颜色给u重新着色，并用 ξ给v着色，从而完成所需的着色。若$U_\phi(x, G') \neq \{\alpha\}$，则用$\alpha$ 给u重新着色，并用 ξ给v着色；若$U_\phi(y, G') \neq \{\beta\}$，则用 β给p重新着色。每种情况下，ϕ 都成功扩展。因此$U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$ 且$U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。

首先，假设 $x \neq a, b$。如果我们可以用 $L(w) \setminus \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), c_y\}$中的一种颜色给 w 重新着色，那么通过用 c_w给 p 和 u 重新着色，就可以将 ϕ 扩展到 G。因此，$L(w) = \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), c_y\}$，且 $y \neq a, b$。接下来，假设 $x \in \{a, b\}$。由于 $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$，且 $\alpha \neq c_w$, $\tau_w(x) = \alpha$。我们用 c_w给 u 和 p 重新着色

再次如此。如果可以用 $L(w) \setminus \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), c_y\}$中的一种颜色给 w 重新着色，那么我们就完成了 G 的适当无冲突-L-着色。因此，我们有 $L(w) = \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), c_y\}$，且 $y \neq a,b$ 再次如此。□

引理 *3.3*。假设 G 有 H_3。令 $G' = G - \{u, v, p, q\}$，并设 L 是 G 的一个（度+2）列表赋值。如果 G' 有一个 *PCF-L*-着色 ϕ，满足 $\{c_x, c_y, c_w, c_a, c_b\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(w), \phi(a), \phi(b)\}$，那么除非存在颜色 $\alpha, \beta, \xi, \zeta_1, \zeta_2$ 满足以下条件，否则 ϕ 可以扩展为 G 的一个 *PCF-L*-着色：

- $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{c_a, c_b\}$,
- $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$, $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$,
- $L(u) = \{c_x, \alpha, c_w, \xi\}$,
- $L(v) = \{c_x, c_w, \xi, \zeta_1\}$,
- $L(w) = \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), \xi\}$,
- $L(p) = \{c_y, c_w, \xi, \zeta_2\}$,
- $L(q) = \{c_y, \beta, c_w, \xi\}$。

证明。设 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们按以下方式扩展着色 ϕ。首先，用颜色 $\zeta \in L(q) \setminus \{c_w, c_y, \beta\}$ 给 q 着色，并将扩展后的部分着色记为 ϕ'。根据引理 3.2，ϕ' 可以成功扩展，除非 $U_\phi(x, G') = U_{\phi'}(x, G') = \{\alpha\}$，且存在颜色 ξ, ζ_1, ζ_2，使得 $L(u) = \{c_x, \alpha, c_w, \xi\}$，$L(v) = \{c_x, c_w, \xi, \zeta_1\}$，$L(w) = \{c_w, c_a, c_b, \tau_w(a), \tau_w(b), \xi\}$，且 $L(p) = \{c_y, \zeta, c_w, \zeta_2\}$，其中 $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{c_a, c_b\}$。若能用 $L(q) \setminus \{c_w, c_y, \beta, \zeta\}$ 中的颜色给 q 重新着色，则可通过分别用 ξ, ζ_1, ζ 给 u、v、p 着色，将 ϕ 扩展至 G。因此 $L(q) = \{c_w, c_y, \beta, \zeta\}$。若 $U_\phi(y, G') \neq \{\beta\}$，则用 β 给 q 重新着色，然后分别用 ξ, ζ_1, ζ 给 u、v、p 着色，完成着色。由此可得 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。若 $\xi \neq \zeta$，则我们用 c_w 给 q 重新着色，用 ξ 给 w 着色，然后分别用 c_w, ξ_1, ζ 给 u、v、p 着色。这同样扩展了 ϕ。因此，我们有 $\xi = \zeta$。□

引理 *3.4*。假设 G 有 H_4。令 $G' = G - \{u\}$，并设 L 是 G 的一个（度+2）列表赋值。若 G 存在一个 *PCF-L*-着色 ϕ，满足 $\{c_x、c_y、c_h、c_l、c_p、c_q\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(h)、\phi(l)、\phi(p)、\phi(q)\}$，则 ϕ 可以扩展为 G 的 *PCF-L*-着色，除非存在颜色 α、β 使得

- $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$, $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$,
- $L(u) = \{c_x、c_y、\alpha, \beta\}$,
- $L(x) = \{c_x、c_y、\alpha, \beta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$,
- $L(y) = \{c_x、c_y、\alpha、\beta、\tau_y(p)、\tau_y(q)\}$。

证明。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们按以下方式扩展着色 ϕ。如果$|U_\phi(x, G')| = 3$ 或 $|U_\phi(y, G')| = 3$，那么通过给 u 着以 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \beta\}$ 或 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$ 中的一个颜色，ϕ即可扩展到 G。因此，假设 $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$ 且 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。如果 $L(u) \neq \{c_x, c_y, \alpha, \beta\}$，那么通过给 u 着以 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \alpha, \beta\}$ 中的一个颜色，ϕ即可扩展到 G。因此进一步假设 $L(u) = \{c_x, c_y, \alpha, \beta\}$，$\alpha = c_h$，$c_y = c_l$，$\beta = c_p$，且 $c_x = c_q$。现在，如果可以用 $L(x) \setminus \{c_x, c_y, \alpha, \beta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$ 中的一个颜色给 x 重新着色，那么通过给 u 着以 c_x，我们便可将 ϕ扩展到 G。因此，$L(x) = \{c_x, c_y, \alpha, \beta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$。类似地，有 $L(y) = \{c_x, c_y, \alpha, \beta, \tau_y(p), \tau_y(q)\}$。□

引理 3.5。假设 G 有 H_5。令 $G' = G - \{u, v, w\}$，并令 L 为 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G' 存在一个 PCF-L-着色 ϕ，使得 $\{c_x, c_y, c_h, c_l, c_p, c_q\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(h), \phi(l), \phi(p), \phi(q)\}$，那么除非存在颜色 $\alpha, \beta, \zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$ 满足以下条件，否则 ϕ 可以扩展为 G 的一个 PCF-L-着色

- $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$，$U_\phi(y, G') = \{\beta\}$，
- $c_h = c_l = \zeta_1, c_p = c_q = \zeta_2$，
- $L(u) = L(v) = L(w) = \{\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2\}$，
- $L(x) = \{\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x(h), \tau_x(l), \xi_i\}$ 对于某个 $i = 1, 2$，
- $L(y) = \{\alpha, \beta, \zeta_2, \tau_y(p), \tau_y(q), \xi_i\}$ 对于某个 $i = 1, 2$。

证明。设 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们按以下方式扩展着色 ϕ。根据引理 3.1，ϕ' 可以成功扩展，除非 $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$、$U_\phi(y, G') = \{\beta\}$，并且存在两种颜色 ξ_1和 ξ_2，使得 $L(u) = \{c_x, \alpha, \xi_1, \xi_2\}$，$L(v) = \{c_x, c_y, \xi_1, \xi_2\}$，且 $L(w) = \{c_y, \beta, \xi_1, \xi_2\}$。由对称性，只需考虑三种情况。

情形 1：$\alpha = c_h$、$c_y = c_l$、$\beta = c_p$，以及$c_x = c_q$。

设 $\gamma \in L(x) \setminus \{c_x$、$c_y$、$\alpha$、$\tau_x(h)$、$\tau_x(l)\}$。若 $\gamma = \xi_1$（或 $\gamma = \xi_2$），则通过将 x 重新着色为 γ，并分别将 u、v、w 着色为 ξ_2、c_x、ξ_1（或 ξ_1、c_x、ξ_2），ϕ 可以扩展到 G。若 $\gamma \neq \xi_1$、ξ_2，则通过将 y 重新着色为 γ，并分别将 u、v、w 着色为 ξ_1、c_x、ξ_2，ϕ 可以扩展到 G，因为 $\xi_2 \notin \{c_x$、$\beta\}$。

情形 2：$\alpha = c_h$、$c_y = c_l$、$\beta = c_x$，以及$c_p = c_q = \zeta_2$。

设 $\theta \in L(y) \setminus \{c_x$、$c_y$、$\zeta_2$、$\tau_y(p)$、$\tau_y(q)\}$。若 $\theta = \xi_1$（或 $\theta = \xi_2$），则通过将 y 重新着色为 θ，并分别将 u、v、w 着色为 ξ_1、c_y、ξ_2（或 ξ_2、c_y、ξ_1），ϕ 可以扩展到 G。若 $\theta \neq \xi_1$、ξ_2，则通过将 y 重新着色为 θ，并分别将 u、v、w 着色为 ξ_1、c_y、ξ_2，ϕ 可以扩展到 G，因为 $\xi_1 \notin \{c_y$、$\alpha\}$。

情形 3：$\alpha = c_y$、$c_h = c_l = \zeta_1$、$\beta = c_x$，以及 $c_p = c_q = \zeta_2$。

设 $\xi \in L(x) \setminus \{\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$。若 $\xi \neq \xi_1$、ξ_2，则通过将 x 重新着色为 ξ，并分别用 ξ_1、c_x、ξ_2 为 u、v、w 着色，ϕ 可以扩展到 G。因此，$L(x) = \{\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x(h)$、$\tau_x(l)\xi_1\}$，或 $L(x) = \{\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x(h)$、$\tau_x(l)\xi_2\}$。由对称性，$L(y) = \{\alpha, \beta, \zeta_2, \tau_y(p)$、$\tau_y(q)\xi_1\}$，或 $L(y) = \{\alpha, \beta, \zeta_2, \tau_y(p)$、$\tau_y(q)\xi_2\}$。

□

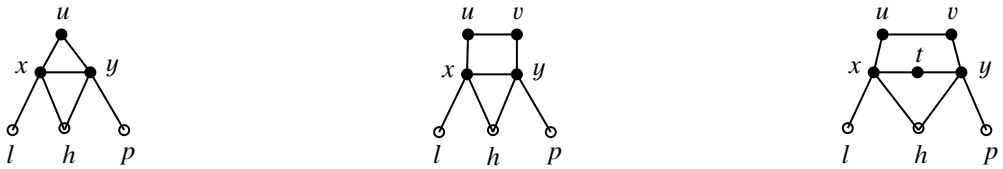
3.2 化简三种频繁出现的构型

在本小节中，我们首先分析后续情形中经常出现的三个构型（见图 3）：

F_1 两个相邻三角形 xuy 和 xyh，其中 $d(u) = 2$ 且 $d(x) = d(y) = 4$；F_2 一个与三角形 xyh 相邻的 4-圈 xuvy，其中 $d(u) = d(v) = 2$ 且 $d(x) = d(y) = 4$；F_3 一个与 4-圈 xtyh 相邻的 5-圈 xuvyt，其中 $d(u) = d(v) = d(t) = 2$ 且 $d(x) = d(y) = 4$，

引理 3.6。构型 F_1 在 $\mathcal{G}_\ell$（度+2）意义下是可约的 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$均成立。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 F_1，，则 $G' := G - \{u\}$ 有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \not\cong C_5$。若 $|U_\phi(x, G')| = |U_\phi(y, G')| = 1$，则 $U_\phi(x, G') = U_\phi(y, G') = \{\phi(h)\}$。由此可知，根据引理 3.4，$\phi$ 可以扩展到 G。□



F_1 F_2 F_3

图3：三种频繁出现的构型

引理 3.7. 构型 F_2 是 (度+2)-可约于 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 F_2,，则 $G' = G - \{u, v\}$ 有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \ncong C_5$。令 $\{c_x, c_y, c_l, c_h, c_p\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(l), \phi(h), \phi(p)\}$, $\alpha \in U_\phi(x, G')$，且 $\beta \in U_\phi(y, G')$。

若 $|U_\phi(x, G')| = 3$，则我们用 $\zeta \in L(v) \setminus \{c_x, c_y, \beta\}$ 中的颜色给 v 着色，并用 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \zeta\}$中的颜色给 u 着色。这样即可扩展 ϕ。类似地，若 $|U_\phi(y, G')| = 3$，也可以扩展 ϕ。因此，我们假设 $|U_\phi(x, G')| = |U_\phi(y, G')| = 1$。若 $\alpha = c_y$，则可通过用 θ $L(v) \setminus \{c_x, c_y, \beta\}$ 中的颜色给 v 着色，并用 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \theta\}$中的颜色给 u 着色，将 ϕ 扩展到 G。因此，$\alpha \neq c_y$，并由对称性可得 $\beta \neq c_x$。由此可知 $\alpha = \beta = c_h$。若可以分别用 $\xi_1 \in L(u) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$ 中的颜色给 u 着色，以及用 $\xi_2 \in L(v) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$ 中的颜色给 v 着色，使得 $\xi_1 \neq \xi_2$，则 ϕ 可以成功扩展。因此，对于某个颜色 ξ，有 $L(u) = L(v) = \{c_x, c_y, \alpha, \xi\}$。在最后这种情况下，我们用 $L(x) \setminus \{c_x, c_y, \alpha, \tau_x(l), \tau_x(h)\}$ 中的颜色给 x 重新着色，然后用 ξ，c_x 给 u、v 着色。这样也能扩展 ϕ。□

引理 3.8. 构型 F_3 是 (度+2)-可约的，且位于 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 F_3,，则 $G' := G - \{u, v\}$ 有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \ncong C_5$。令 $\{c_x, c_y, c_h, c_l, c_p, c_t\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(h), \phi(l), \phi(p), \phi(t)\}$。

令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。若我们能分别用 $L(u) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$ 中的一个颜色给 u 着色，并用 $L(v) \setminus \{c_x, c_y, \beta\}$ 中的一个颜色给 v 着色，使 u 和 v 所得颜色不同，那么就能成功地将 ϕ 扩展到 G。因此，存在一个颜色 ζ_1，使得 $L(u) = \{c_x, c_y, \alpha, \zeta_1\}$ 且 $L(v) = \{c_x, c_y, \beta, \zeta_1\}$。若 $U_\phi(x, G') \neq \{\alpha\}$，则给 u 着 α，给 v 着 ζ_1，即可得到 G 的 PCF-L-着色。因此，根据对称性，$U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$ 且 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。

我们首先证明命题 Q：不存在同时满足 $L(x) = \{c_x, c_y, c_t, \theta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$以及 $L(y) = \{c_x, c_y, c_t, \theta, \tau_y(h), \tau_y(p)\}$ 的颜色 θ。假设存在这样的 θ；那么必有 $\tau_x(h) \notin \{c_x, c_y, NULL\}$ 以及 $\tau_y(h) \notin \{c_x, c_y, NULL\}$。若 $d(h) = 2$，则 $U_\phi(h, G') = \{c_x, c_y\}$，从而推出 $\tau_x(h) = c_y$，矛盾。若 $d(h) = 3$，令 $N(h) = \{x, y, a\}$，并令 $\{c_a\} := \{\phi(a)\}$。若 $c_a \notin \{c_x, c_y\}$，则 $|U_\phi(h, G')| = 3$，从而推出 $\tau_x(h) = NULL$；若 $c_a = c_x$，则 $\tau_x(h) = c_y$；若 $c_a = c_y$，则 $\tau_x(h) = NULL$，均矛盾。若 $d(h) = 4$，令 $N(h) = \{x, y, a, b\}$，并令 $\{c_a, c_b\} := \{\phi(a), \phi(b)\}$。显然，不可能有 $\{c_a, c_b\} = \{c_x, c_y\}$。因此，不妨设 $c_a = \xi$，其中某个颜色为 $\xi \neq c_x, c_y$。若 $c_b = \xi$，则 $\tau_x(h) = c_y$；若 $c_b = c_x$，则 $\tau_x(h) = NULL$；若 $c_b = c_y$，则 $\tau_y(h) = NULL$；若 $c_b \neq \xi$，c_x, c_y，则 $|U_\phi(h, G')| \geq 3$，从而推出$\tau_x(h) = NULL$。上述每一种情形都会导致矛盾。

情形 1：$\alpha = \beta$。

若 $c_t = \alpha$，则 $c_l = c_h = c_p \neq \alpha$。令 $c_h = \eta$。若 $L(x) \neq \{c_x, c_y, c_t, \eta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$，则用 $L(x) \setminus \{c_x, c_y, c_t, \eta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$中的一个颜色重新着色 x，并分别用 c_x, ζ_1给 u、v 着色。这样便得到一个 PCF-L-着色

G。因此，根据对称性，$L(x) = \{c_x, c_y, c_t, \eta, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$，且 $L(y) = \{c_x, c_y, c_t, \eta, \tau_y(p), \tau_y(q)\}$。然而，这与命题 Q 矛盾。

若 $c_h = \alpha$，则 $c_l = c_p = c_t \neq \alpha$；若 $c_l = c_p = \alpha$，则 $c_t = c_h \neq \alpha$。在这两种情况下，只要 $L(x) \neq \{c_x, c_y, c_t, \alpha, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$，我们就用 $L(x) \setminus \{c_x, c_y, c_t, \alpha, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$中的一个颜色对 x 重新着色，然后分别用 c_x, ζ_1对 u、v 着色。这样就得到了 G 的一个 PCF-L-着色。因此，$L(x) = \{c_x, c_y, c_t, \alpha, \tau_x(h), \tau_x(l)\}$，并且由对称性，$L(y) = \{c_x, c_y, c_t, \alpha, \tau_y(p), \tau_y(q)\}$。然而，这与命题 Q矛盾。

情形 2：$\alpha \neq \beta$。

若 $c_t = \alpha$，则 $c_l = c_h = \beta$ 且 $c_p = \alpha$。我们用 $L(t) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$中的一个颜色对 t 重新着色。为了完成 G 的 PCF-L-着色，我们只需分别用 α 和 ζ_1给 u 和 v 着色。因此，$c_t \neq \alpha$，并且由对称性，$c_t \neq \beta$。由此可得 $c_l = \alpha$、$c_p = \beta$，且 $c_t = c_h$。在这种情况下，通过用 $L(t) \setminus \{c_x, c_y, c_t\}$中的一个颜色对 t 重新着色，并分别用 α, β给 u、v 着色，ϕ 可以扩展到 G。□

3.3 化简每个T_i

引理 3.9. 构型 T_1 是 (度+2)-可约的，其中 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个适当无冲突-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个(度+2)-列表赋值。假设 $uv \in E(G)$。若 G 包含 T_1, ，则令 $G' := G - \{u\}$。若 $G' \cong C_5$, ，则 $G \ncong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由此，根据定理 1.4(2)，G 是适当无冲突-(度+2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \ncong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_v\} := \{\phi(v)\}$。通过用 $L(u) \setminus \{\phi(v)$ 中的一种颜色给 u 着色，可以将此着色扩展到 G，$\alpha\}$，其中 α 是 $U_\phi(v, G')$ 中任意一种颜色。□

引理 3.10. 构型 T_2 是 (度+2)-可约的，在 $\mathcal{G}_\ell$ 内对每个 $l \geq 4$均成立。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_2, ，则令 $G' := G - \{u\}$。若 $G' \cong C_5$, ，则 $G \ncong C_5$，且 $\Delta(G) \leq 3$。由此，根据定理 1.4(2)，G 是 PCF-(度+2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \ncong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_v, c_w\} := \{\phi(v), \phi(w)\}$。取 α 为 $U_\phi(w, G')$ 中的任意一种颜色（注意，可能有 $\alpha = c_v$）。我们通过给 u 着以一种属于 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_v, c_w, \alpha\}$ 的颜色，将 ϕ 扩展为 G 的一个 PCF-L-着色。容易看出，在 G 的扩展着色下，γ 或 c_w 是 v 的 PCF 着色，因为 $d(v) = 3$。□

引理 3.11. 构型 T_3 在(度+2)意义下是可约的 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_4$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 包含 T_3, ，则令 $G' := G - \{v\}$。若 $G' \cong C_5$, ，则 $G \ncong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由定理 1.4(2)可知，G 是 PCF-(度+2)-可选的，矛盾。因此，$G' \ncong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。假设 $d(x) \leq d(y)$。我们分两种不同情形讨论。

情形 1。$d(x) = 3$。

设 $N(x) = \{u, v, p\}$。令 $\{c_x, c_u, c_y, c_p\} := \{\phi(x), \phi(u), \phi(y), \phi(p)\}$。由于 x 在 G' 中的度为 2，$c_u \neq c_p$。任取 β 为 $U_\phi(y, G')$ 中的一个颜色（注意，可能有 $\beta = c_u$）。通过给 v 染上 $L(v) \setminus \{c_x, c_y, \beta\}$ 中的一个颜色，我们可以将 ϕ 扩展为 G 的一个 PCF-L-着色。容易看出，在 G 的扩展着色下，c_u 或 c_p 是 x 的一个 PCF 着色，因为 $d(x) = 3$。

情形 2。$d(x) = 4$。

假设 $N(x) = \{u, v, p, q\}$。令 $\{c_x, c_u, c_y, c_p, c_q\} := \{\phi(x), \phi(u), \phi(y), \phi(p), \phi(q)\}$。任取 α $U_\phi(x, G')$ 中的一个颜色，并任取 β $U_\phi(y, G')$ 中的一个颜色。若 $L(v) \neq \{c_x, c_y, \alpha, \beta\}$，则我们可以扩展

ϕ 为 G 的适当无冲突L-着色G，方法是为 v 染上L(v) \ {c_x, c_y, α, β}中的一个颜色。因此，L(v) = {c_x, c_y, α, β}。由于现在我们有 $\alpha \neq \beta$，可以假设 $\beta \neq c_u$。这意味着在G'中，y 与两个染为c_u 的顶点以及一个染为 β 的顶点相邻。

首先，假设 $\alpha = c_u$。由此可得 $c_p = c_q$。我们先用 α 给 v 着色。如果可以用 L(u) 中的某个颜色重新着色 u，满足 \ {c_x、c_y、c_u, β}，那么 ϕ 就成功扩展了，因为此时 α 和 β 仍分别是 x 和 y 的 PCF-颜色。因此，L(u) = {c_x、c_y、c_u, β}。我们用 c_x 重新给 u 着色。如果可以用 L(x) 中的某个颜色重新着色 x，满足 \ {c_x、c_y, α、c_p, τ_x(p)、τ_x(q)}，那么我们就完成了 ϕ 的扩展。因此，L(x) = {c_x、c_y, α、c_p, τ_x(p)、τ_x(q)}。此时，我们用 α 重新给 x 着色，并用 β 给 v 着色。由此得到 G 的一个 PCF-L-着色 ϕ，且 U_ϕ(x, G) = {c_x, β}，U_ϕ(y, G) = {c_x, α}。

接下来假设 $\alpha \neq c_u$。由此可知，x 在G'中与两个颜色为c_u 的顶点以及一个颜色为 α 的顶点相邻。我们先用 α 给 v 着色。现在，通过用$L(u)$ \ {c_x、c_y、c_u}中的一个颜色重新给u着色，就可以将 ϕ 扩展为G 的适当无冲突L-着色，使得$c_u \in U_\phi(x, G) \cap U_\phi$(y,$G$)。□

引理 3.12。 构型 T_4 在(度+2)-可约 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个适当无冲突-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个(度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_4,，则 G′ := G − {v, x} 有一个适当无冲突 L-着色 ϕ，因为 G′ $\not\cong C_5$。设 {c_u、c_w、c_y} := {ϕ(u)、ϕ(w)、ϕ(y)}。取 $\alpha \in U_\phi$(w, G′) 和 $\beta \in U_\phi$(y, G′)。

我们用颜色 $\gamma \in$ L(v) \ {c_w、$c_u\alpha$} 给 v 着色，并用颜色 $\zeta \in$ L(x) \ {c_y、$c_u\beta$}给 x 着色。除非 {γ, ζ} = {c_w、c_y}，否则这可以扩展ϕ 到 G。在这一特殊情况下，我们有 $\gamma = c_y$ 和 $\zeta = c_w$。因此，L(v) = {c_w、$c_u\alpha$、c_y} 且 L(x) = {c_y、$c_u\beta$、c_w}，因为否则我们可以对 v 或 x 重新着色，从而再次得到 G 的 PCF-L- 着色。因此，$c_u \neq \alpha\beta$，并且我们可以通过用 L(u) \ {c_u、c_w、$c_y\alpha\beta$} 中的某个颜色对 u 重新着色，并用 c_u给 v 和 x 同时着色，完成 G 的 PCF-L-着色。□

引理 3.13。 构型 T_5 是 （度为+2）-可约的，在 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 l ≥ 4内。

证明。令 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 为一个 PCF-(度+2)-临界图，并令 L 为 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_5,，则令 G′ := G − {u, v}。若 G′ ≅ C_5,，则 G $\not\cong C_5$ 且 Δ(G) ≤ 3。由定理 1.4(2)，可知 G 是 PCF-(度+2)-可选的，矛盾。因此，G′ $\not\cong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 {c_x, c_w, c_y, c_z} := {ϕ(x), ϕ(w), ϕ(y), ϕ(z)}。

若 x = w，则不妨设 z = u。现在，通过给 u 着色为 L(u) \ {c_w, c_y} 中的一个颜色 γ，并给 v 着色为 L(v) \ {c_w, c_y, γ} 中的一个颜色， ϕ 可扩展到 G。因此，x ≠ w 且 u ≠ y, z。由于 w 在 G′ 中的度为 2，故 $c_y \neq c_z$。令 $\alpha \in U_\phi$(x, G′)。然后，通过给 u 着色为 L(u) \ {c_x, α, c_w} 中的一个颜色 ζ，并给 v 着色为 L(v) \ {c_x, c_w, ζ} 中的一个颜色， ϕ 可扩展到 G。□

引理 3.14. 构型 T_6 在 (度+2)内是可约的 $\mathcal{G}_\ell$ 对任意 l ≥ 4。

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_6,，则令 G′ := G − {u}。由于 G′ $\not\cong C_5$， G − {u} 有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 {c_x， c_v} := {ϕ(x)， ϕ(v)}。任选 α 一个属于 U_ϕ(x, G′) 的颜色。我们可以用 L(u) \ {c_x, α, c_v} 中的一个颜色给 u 着色，从而将 ϕ 扩展为 G 的 PCF-L- 着色。□

Le引理 3.15. 构型 T_7 在 (度+2)内是可约的 $\mathcal{G}_\ell$ 对任意 l ≥ 4。

证明。若 G 含有 T_7,，则令 G′ := G − {u, v, w}。若 G′ ≅ C_5,，则 G $\not\cong C_5$，且 G 是连通外平面图。由定理 1.5 可知，G 是 PCF-(度+2)-可选择的，这与假设矛盾。因此，G′ $\not\cong C_5$，且它有一个 PCF-L- 着色 ϕ。这是引理 3.1 的直接推论，因为 x ∈ N(u) ∩N(w)。□

Le引理 3.16. 构型T_8 是（度+2）-可约的，且在 $\mathcal{G}_\ell$ 中对每个l $\geq$ 4均成立。

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_8,，则令 G′:= G $-$ {u, v, w, p}。注意，x =y 是允许的；但若出现这种情况，根据 T_8 的定义，我们有 d(x) $\neq 2$ 。

若 G′ $\cong C_5$,，则 G $\ncong C_5$，且 $\Delta(G) \leq 3$。由定理 1.4(2)，G 是适当无冲突-(度+2)-可选择的，矛盾。因此，G′ $\ncong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_x, c_y\} := \{\phi(x), \phi(y)\}$。由于 x 和 y 在 G′中都不是孤立顶点，我们可以选取 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。首先用一个颜色 $\gamma \in L(p) \setminus \{c_y, \beta\}$ 给 p 着色，从而将 ϕ 扩展到 G $-$ {u, v, w}。现在应用引理 3.1，若 ϕ 无法扩展到 G，则存在两种颜色 ξ_1 和 ξ_2，使得 $L(u) = \{c_x, \alpha, \xi_1, \xi_2\}$，$L(v) = \{c_x, \gamma, \xi_1, \xi_2\}$，且 $L(w) = \{\gamma, c_y, \xi_1, \xi_2\}$。在后一种情况下，我们也可以通过将 p 重新着色为$\zeta \in L(p) \setminus \{\gamma, c_y, \beta\}$（假设 $\zeta \neq \xi_1$，由对称性），然后分别用 ξ_2、ξ_1、γ 给 u、v、w 着色，从而完成 G 的 PCF-L-着色。□

引理 3.17。 构型 T_9 在 (度+2)-可约于 $\mathcal{G}_4$。

证明。如果 G 包含 T_9,，那么 G′:= G $-$ {u,v, p} 有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 G′ $\ncong C_5$, 这是引理 3.2 的直接推论，因为 y $\in N(w) \cap N(p)$。□

引理 3.18。 构型 T_{10} 在 (度+2)-可约于 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 G $\in \mathcal{G}_4$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，并设 L 是 G 的一个(度+2)-列表赋值。如果 G 包含 T_{10},，那么 G′:= G $-$ {u, v, p, q} 有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 G′ $\ncong C_5$。令 $\{c_x, c_w, c_b, c_y\} := \{\phi(x), \phi(w), \phi(b), \phi(y)\}$。

根据引理 3.3，ϕ 可以扩展到 G，除非 $\{c_h、c_t\} = \{\alpha, c_w\}$，并且存在一个颜色 ξ，使得 $L(u) = \{c_x、\alpha、c_w、\xi\}$，$L(v) = \{c_x、c_w、\xi、\zeta_1\}$，$L(w) = \{c_w、c_x、c_b、\alpha、\tau_w(b)、\xi\}$，$L(p) = \{c_y、c_w、\xi、\zeta_2\}$，以及 $L(q) = \{c_y、\beta、c_w、\xi\}$，其中 $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{c_x、c_b\}$，且 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。然而，这目前并非例外情形，因为我们可以通过用 α 重新给 w 着色，然后分别用ξ、c_w、c_w、ξ给 u、v、p、q 着色，从而完成 G 的 PCF-L-着色。□

Le引理 3.19。 构型 T_{11} 在 （度+2）-内是 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 l $\geq$ 4-可约的 .

证明。设 G $\in \mathcal{G}_4$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{11},，则 G′:= G $-$ {u 、 v 、 p 、 q} 有一个 PCF-L- 着色 ϕ，因为 G′ $\ncong C_5$。令 $\{c_x、c_t、c_w、c_a、c_b、c_y\}$:=$\{\phi(x)、\phi(t)、\phi(w)、\phi(a)、\phi(b)、\phi(y)\}$。取 $\alpha \in U_\phi(t, G')$。由引理 3.3，该 ϕ 可以扩展到 G，除非存在一种颜色 ξ，使得 $L(u) = \{c_x、c_t、c_w, \xi\}$，$L(v) = \{c_x、c_w, \xi, \zeta_1\}$，$L(w) = \{c_w、c_a、c_b, \tau_w(a)、\tau_w(b)、\xi\}$，$L(p) = \{c_y、c_w, \xi, \zeta_2\}$，且 $L(q) = \{c_y, \beta、c_w, \xi\}$，其中 $\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{c_a、c_b\}$ 且 $U_\phi(y, G') = \{\beta\}$。

在这种情况下，我们分别用c_x、ξ、ζ_2、ξ给u、v、p、q着色。如果我们能用$L(x) \setminus \{c_x、c_t、\xi、\alpha\}$中的一种颜色重新给$x$着色，就完成了。否则，我们有$L(x) = \{c_x、c_t、\xi、\alpha\}$。现在，通过用 ξ 重新给x 和 w 着色，并分别用c_w给 v 和q 着色，我们完成了G 的 PCF-L-着色。□

引理 3.20. 构型 T_{12} 是 (度+2)-可约的，且适用于 $\mathcal{G}_\ell$ 每个 l $\geq$ 4。

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个适当无冲突-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{12},，则 G′:= G $-$ {a, u, v, p} 有一个适当无冲突-L-着色 ϕ，因为 G′ $\ncong C_5$。令 $\{c_x、c_t、c_w、c_b、c_y\}$:=$\{\phi(x)、\phi(t)、\phi(w)、\phi(b)、\phi(y)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$、$\beta \in U_\phi(y, G')$，以及 $\gamma \in U_\phi(t, G')$。我们先通过将 a 着为 $\theta \in L(a) \setminus \{c_t、c_w\gamma\}$中的一个颜色，将 ϕ 扩展到 G″:= G $-$ {u, v, p}。我们可以假设 $c_w \neq c_y$ 且 $c_w \neq c_t$,

否则，我们可以用$L(w) \setminus \{\theta, c_b、c_t、\tau_w(b)、c_y\}$中的一个颜色重新着色 w，使所得着色满足这一假设。

根据引理 3.2，G″的着色ϕ可以扩展到 G，除非存在一种颜色ξ，使得$y \notin \{a, b\}$、$U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$、$U_\phi(y, G') = \{\beta\}$、$L(u) = \{c_x, \alpha、c_w, \xi\}$、$L(v) = \{c_x、c_w, \xi, \zeta_1\}$、$L(w) = \{c_w, \theta、c_b、c_t, \tau_w(b)、c_y\}$，以及$L(p) = \{c_y, \beta、c_w, \zeta_2\}$，其中$\{\zeta_1, \zeta_2\} = \{\theta, c_b\}$。在这种情况下，我们分别用$\xi$、$c_w$、$c_w$给 u、v、p 着色，并用$\theta$重新着色 w。如果我们能够用$L(a) \setminus \{\theta, c_b、c_t, \gamma\}$中的一种颜色给 a 重新着色，那么扩展即可完成。否则，我们有$L(a) = \{\theta, c_b、c_t, \gamma\}$。现在，通过用$c_b$重新着色 a，并用$\zeta_1$给 v 着色，我们完成 G 的 PCF-L-着色。□

引理 3.21. 构型 T_{13} 在（度+2）内可约 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-（度+2）-临界图，L 是 G 的一个（度+2）-列表赋值。若 G 包含 T_{13},，则 $G' := G - \{u\}$有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \ncong C_5$。令 $\{c_x, c_y, c_w, c_t, c_v, c_b\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(w), \phi(t), \phi(v), \phi(b)\}$。由引理 3.4，若 ϕ无法扩展到 G，则 $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$，$U_\phi(w, G') = \{\beta\}$，且 $L(w) = \{c_w, c_x, \alpha, \beta, \tau_w(b), \tau_w(v)\}$。由于 $c_w \neq c_y$，$U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$意味着 $\alpha \in \{c_w, c_y\}$。由于 $\tau_w(v) = c_y$, $\alpha \in \{c_w, \tau_w(v)\}$。因此 $|L(w)| \leq 5$，矛盾。□

引理 3.22. 构型 T_{14} 是 (度+2)-可约的，其中 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_4$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{14},，则令 $G' := G - \{v\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \ncong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由此，根据定理 1.4(2)，G 是 PCF- (度+2)-可选择的，这与假设矛盾。因此，$G' \ncong C_5$ 且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_x、c_y、c_u\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(u)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。

若 $L(v) \neq \{c_x、c_y、c_u, \alpha, \beta\}$，则可通过给 v 着上 $L(v) \setminus \{c_x、c_y、c_u, \alpha, \beta\}$ 中的一个颜色，将 ϕ 扩展到 G。因此，$L(v) = \{c_x、c_y、c_u, \alpha, \beta\}$。我们通过给 v 着上 α，并用 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_x、c_y、c_u, \alpha\}$ 中的一个颜色重新给 u 着色，将 ϕ 扩展到 G。若 $N(x) = \{u, v, p\}$ 或 $N(x) = \{u, v, p, q\}$，则 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\alpha \neq c_u$ 分别推出 $\phi(p) = \alpha$ 或 $\{\phi(p), \phi(q)\} = \{c_u, \alpha\}$。由此，$\gamma$ 是 x 的一个 PCF 颜色。另一方面，若 $N(y) = \{u, v, h\}$ 或 $N(y) = \{u, v, h, l\}$，则 $\beta \in U_\phi(y, G')$ 和 $\beta \neq c_u$ 分别推出 $\phi(h) = \beta$ 或 $\{\phi(h), \phi(l)\} = \{c_u, \beta\}$。由此，$\alpha$ 是 y 的一个 PCF 颜色。最后，$\alpha \in U_\phi(u, G)$ 和 $\gamma \in U_\phi(v, G)$，因为 $\{\alpha, \gamma\} \cap \{c_x、c_y\} = \emptyset$。□

引理 3.23。 构型 T_{15} 在(度+2)-可约于 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_4$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{15},，则令 $G' := G - \{u, w\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \ncong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由定理 1.4(2)可知，G 是 PCF-(度+2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \ncong C_5$ 且存在其 PCF-L-着色ϕ。令 $\{c_x、c_y、c_v\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(v)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。现在通过给 u 着色为 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_x、c_y、c_v, \beta\}$，并给 w 着色为 $\xi \in L(w) \setminus \{c_x, \alpha, \gamma\}$，将 ϕ扩展到 G。容易看出，在 G 的这一着色中，除 u 以外的每个顶点都有 PCF 颜色。若此时 u 没有 PCF 颜色，则 $\xi = c_y = c_v$。然而，由于 $yv \in E(G)$，这是不可能的。□

引理 3.24。 构型 T_{16} 是 （度+2）-可约于 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{16},，则令 $G' := G - \{u, t\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \ncong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由定理 1.4(2)可知，G 是 PCF-(度+2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \ncong C_5$，并且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_x, c_y, c_v\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(v)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$，并令 $\beta \in U_\phi(y, G')$。

若 L(u) $\neq \{c_x, c_y, c_v, \alpha, \beta\}$，则通过用 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_x, c_y, c_v, \alpha, \beta\}$中的颜色给 u 着色，并用 L(t) $\setminus \{\gamma, c_v\}$中的颜色给 t 着色，可将 ϕ扩展到 G。因此，L(u) $= \{c_x, c_y, c_v, \alpha, \beta\}$。我们通过用 α给 u 着色、用 $\xi \in L(v) \setminus \{c_x, c_y, c_v, \alpha\}$重新给 v 着色，并用 L(t) $\setminus \{\alpha, \xi\}$中的颜色给 t 着色，将 ϕ扩展到 G。若 N(x) $= \{u, v, p\}$，或 N(x) $= \{u, v, p, q\}$，则 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\alpha \neq c_v$ 推出 $\phi(p) = \alpha$ 或 $\{\phi(p), \phi(q)\} = \{c_v, \alpha\}$，相应地。因此，$\xi$是 x 的一个 PCF 颜色。另一方面，若 N(y) $= \{u, v, h\}$，或 N(y) $= \{u, v, h, l\}$，则 $\beta \in U_\phi(y, G')$ 和 $\beta \neq c_v$ 推出 $\phi(p) = \beta$ 或 $\{\phi(p), \phi(q)\} = \{c_v, \beta\}$，相应地。因此，$\alpha$是 y 的一个 PCF 颜色。最后，$\{c_x, c_y\} \cap U_\phi(u, G)$ 和 $\{c_x, c_y\} \cap U_\phi(v, G)$ 均非空，因为 $c_x \neq c_y$。□

Le引理 3.25. 构型 T_{17} 是 (度+2)-可约的，在 $\mathcal{G}_\ell$ 中对每个 $l \geq 4$.

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{17},，则令 $G' := G - \{u, w\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \not\cong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由定理 1.4(2)可知，G 是 PCF- (度+2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \not\cong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令 $\{c_x, c_y, c_v, c_z\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(v), \phi(z)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。

现在通过用一个属于 L(u) γ c_x、c_y、$c_v\beta\}$ 的颜色给 u 着色，并用一个属于 L(w) $\setminus \{c_x$、γ、$\alpha\}$的颜色给 w 着色，将 ϕ 扩展到 G。容易看出，在 G 的这个着色中，除了 u、v 之外的每个顶点都有一个 PCF 着色。如果此时 u 或 v 没有 PCF 着色，那么分别有 $\xi = c_v = c_y$ 或 $\gamma = c_x = c_z$。然而，两种情况都不可能，因为根据 z 在 G′ 中的度为二这一事实，$c_v \neq c_y$ 且 $c_x \neq c_u$，并且根据 γ的选取，$\gamma \neq c_x$。□

引理 3.26。 构型 T_{18} 是 (度+2)-可约的，且处于 $\mathcal{G}_\ell$ 之内，对任意 $l \geq 4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 包含 T_{18},，则令 $G' := G - \{w、u、t\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \not\cong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由此可知，根据定理 1.4(2)，G 是 PCF-(度 +2)- 可选择的，矛盾。因此，$G' \not\cong C_5$，且它有一个 PCF-L- 着色 ϕ。令 $\{c_x、c_y、c_v\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(v)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。现在通过给 u 涂上属于 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_x、c_y、c_v\beta\}$ 的颜色，给 w 涂上属于 $\xi \in L(w) \setminus \{c_x、\alpha、\gamma\}$的颜色，并给 t 涂上属于 $\zeta \in L(t) \setminus \{c_v、\gamma、c_y\}$的颜色，将 ϕ扩展到 G。容易看出，所得着色是一个 PCF-L-着色。□

引理 3.27. 构型 T_{19} 是 (度+2)-可约的，其中 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个(度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{19},，则令 $G' := G - \{w、u、t\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 $G \not\cong C_5$ 且 $\Delta(G) \leq 3$。由此，根据定理 1.4(2)，G 是 PCF-(度 +2)-可选择的，矛盾。因此，$G' \not\cong C_5$，且它有一个 PCF-L- 着色 ϕ。令 $\{c_x、c_y、c_v、c_z\} := \{\phi(x)、\phi(y)、\phi(v)、\phi(z)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x, G')$ 和 $\beta \in U_\phi(y, G')$。我们用 $\gamma \in L(u) \setminus \{c_x、c_y、c_v\beta\}$ 给 u 着色；用 $\xi \in L(w) \setminus \{c_x, \alpha, \gamma\}$ 给 w 着色；用 $\zeta \in L(t) \setminus \{\gamma, c_v、c_y\}$ 给 t 着色。由于 v 在 G′ 中的度为二，$c_x \neq c_z$。结合 $\zeta \neq c_y$ 这一事实可知，v 和 u 都有 PCF-颜色，因此 ϕ 已经扩展为 G 的 PCF-L-着色。□

引理 3.28。 构型 T_{20} 是 (度+2)-可约的，在 $\mathcal{G}_4$内。

证明。设 $G \in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 包含 T_{20},，则 $G' := G - \{u, v\}$ 具有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \not\cong C_5$。令 $\{c_p、c_t、c_y、c_w、c_x、c_b\} := \{\phi(p)、\phi(t)、\phi(y)、\phi(w)、\phi(x)、\phi(b)\}$。选取 $\alpha \in U_\phi(x, G')$、$\beta \in U_\phi(w, G')$ 和 $\gamma \in U_\phi(y, G')$。

如果我们能分别用 L(u) 中的颜色 $\setminus \{c_x, c_w, \alpha\}$ 和 L(v) 中的颜色 $\setminus \{c_x, c_w, \beta\}$ 给 u 和 v 着色，使它们获得不同的颜色，那么 ϕ 就已经扩展到 G。因此，对于某个颜色 ζ，有 $L(u) = \{c_x, c_w, \alpha, \zeta\}$ 且 $L(v) = \{c_x, c_w, \beta, \zeta\}$。由此可得 $\alpha, \beta \notin \{c_x, c_w\}$。由于 $c_w \neq c_y$，我们有 $c_y = \alpha$, $c_t = c_w$，并且 $\{c_b, c_p\} = \{c_x, \beta\}$。如果

我们可以用一个属于 L(p) 的颜色 ξ in L(p)\{c_w, c_y, γ, c_p} 给 p 重新着色，那么分别用 ζ, β 给 u、v 着色即可将 ϕ 扩展到 G。否则，L(p) = {c_w, c_y, γ, c_p}。我们可以用一个属于 L(w) 的颜色 η in L(w)\{c_w, c_x, c_b, α, τ_w(b)} 给 w 重新着色，用 c_w 给 p 着色，再分别用 α, c_w 给 u、v 着色。这样就扩展了 ϕ。□

引理 3.29. 构型 T_{21} 是 （度+2）-可约的，在 $\mathcal{G}_4$内。

证明。设 G ∈ $\mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-（度+2）-临界图，且 L 是 G 的一个（度+2）-列表赋值。若 G 包含 T_{21},，则 G′:= G − {u、v、w} 具有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 G′ ≠ C_5。设 {c_x、c_y、c_t、c_b、c_p、c_q}:= {ϕ(x)、ϕ(y)、ϕ(t)、ϕ(b)、ϕ(p)、ϕ(q)}。设 $\alpha \in U_\phi$(x, G′)、$\beta \in U_\phi$(y, G′)，以及 $\gamma \in U_\phi$(q, G′)。

根据引理 3.5，ϕ 可以扩展到 G，除非存在颜色 ζ_1、ζ_2、ξ_1、ξ_2，使得 U_ϕ(x, G′) = {α} ={c_y}，U_ϕ(y, G′) = {β} = {c_x}, $\zeta_1 = c_t = c_q$, $\zeta_2 = c_b = c_p$，L(u) = L(v) = L(w) = {$\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2$}，L(x) = {$\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x$(t), τ_x(q), ξ_i} 对某个 i = 1，2，且 L(y) = {$\alpha, \beta, \zeta_2, \tau_y$(b), τ_y(p), ξ_i} 对某个 i = 1，2。由对称性，不失一般性，设 $\xi_1 \in$L(y)。若存在颜色 η 属于 L(p) \ {c_y、c_q, γ、c_p}，则可通过将 p 重新着色为 η，并依次用 ξ_1、ξ_2、β给 u、v、w 着色，将 ϕ 扩展到 G。否则，L(p) = {c_y、c_q, γ、c_p}，此时可通过将 p、y 分别重新着色为 β、ξ_1，并依次用 ξ_2、α、β给 u、v、w 着色，将 ϕ 扩展到 G。□

Lem引理 3.30。 构型 T_{22}, T_{23}, 和 T_{24} 是 （度+2）-可约的，其中 $\mathcal{G}_4$.

证明。 这是引理 3.6的直接推论，因为所提及的每个构型都包含由 F_1 所指的构型。□

Le引理 3.31。 构型 T_{25}, T_{26}, 和 T_{27} 是 （度+2）-可约的，其中 $\mathcal{G}$ 4.

证明。 这是引理 3.7的直接推论，因为所提及的每个构型都包含由 F_2 所指的构型。□

引理 3.32。 构型 T_{28} 是 （度+2）-可约的，其中 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 G ∈ $\mathcal{G}_\ell$ 是一个适当无冲突-(度+2)-临界图，并设 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 包含 T_{28},，则 G′:= G − {u, w, v} 有一个 PCF-L- 着色 ϕ，因为 G′ ≠ C_5。令 {c_x, c_y, c_h, c_p} :={ϕ(x), ϕ(y), ϕ(h), ϕ(p)}。根据引理 3.5，ϕ 可扩展到 G，除非存在颜色 $\zeta_1, \zeta_2, \xi_1, \xi_2$，使得 U_ϕ(x, G′) = {α} = {c_y}, U_ϕ(y, G′) = {β} = {c_x}, $\zeta_1 = c_h = c_p = \zeta_2$, L(u) = L(v) = L(w) = {$\alpha, \beta, \xi_1, \xi_2$}, L(x) = {$\alpha, \beta, \zeta_1, \tau_x$(h), τ_x(p), ξ_i} 对某个 i = 1, 2，且 L(y) = {$\alpha, \beta, \zeta_2, \tau_y$(h), τ_y(p), ξ_i} 对某个 i = 1, 2。然而，由于 3 ≤ d(h) ≤ 4, τ_x(h) = NULL 或 τ_x(h) = α，矛盾。□

引理 3.33. 构型 T_{29} 和 T_{30} 在(度+2)-可约 $\mathcal{G}_4$。

证明。设 G ∈ $\mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{29} 或 T_{30},，则 G′:= G −{u, w, v} 具有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 G′ ≠ C_5。令 {c_p, c_q}:= {ϕ(p), ϕ(q)}。由于 $c_p \neq c_q$ 在两种情况下都成立，根据引理 3.5，ϕ 可以扩展到 G。□

引理 3.34. 构型 T_{31}, T_{32}, 和 T_{33} 在(度+2)-可约 $\mathcal{G}_4$。

证明。 注意，$G' := G - \{u,v\} \not\cong C_5$。这是引理 3.8的直接推论，因为上述每个构型都包含 F_3所指的构型。□

Lemma 3.35. 构型 T_{34} 是 (度+2)-可约的，范围为 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 l ≥ 4 .

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个适当无冲突-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个(度+2)-列表赋值。若 G 包含 T_{34},，则 $G' := G - \{u, v, w\}$ 具有一个 PCF-L-着色 ϕ，因为 $G' \ncong C_5$。令 $\{c_t, c_x, c_y, c_h, c_l, c_p, c_q\} := \{\phi(t), \phi(x), \phi(y), \phi(h), \phi(l), \phi(p), \phi(q)\}$。

根据引理 3.1，ϕ 可以扩展到 G，除非 $U_\phi(x, G') = \{\alpha\}$、$U_\phi(y, G') = \{\beta\}$，并且存在两种颜色 ξ_1 和 ξ_2，使得 $L(u) = \{c_x, \alpha, \xi_1, \xi_2\}$，$L(v) = \{c_x, c_y, \xi_1, \xi_2\}$，且 $L(w) = \{c_y, \beta, \xi_1, \xi_2\}$。如果 $c_t = \alpha$（$c_t = \beta$ 的情形由对称性可知），那么 $c_l = c_h$。若 $\alpha \neq \beta$，则 $\{c_p, c_q\} = \{\alpha, \beta\}$。我们用 $\zeta \in$ 重新给 t 着色，其中 $L(t) \setminus \{c_x, c_y, \alpha\}$。如果 $\zeta = c_l$，那么通过分别用 α, ξ_1, β 给 u、v、w 着色，ϕ 可以扩展到 G；若 $\zeta \neq c_l$（不妨由对称性设 $\zeta \neq \xi_2$），那么通过分别用 α, ξ_1, ξ_2 给 u、v、w 着色，ϕ 可以扩展到 G。若 $\alpha = \beta$，则 $c_p = c_q$ 且 $c_h = c_l$。我们用 $\zeta' \in$ 重新给 t 着色，其中 $L(t) \setminus \{c_x, c_y, c_t\}$。若 $\zeta' \neq \xi_1$，那么通过用 ξ_1, ξ_2, c_t 分别给 u、v、w 着色，ϕ 可以扩展到 G；若 $\zeta' = \xi_1$，那么通过分别用 ξ_2, ξ_1, c_t 给 u、v、w 着色，ϕ 可以扩展到 G。

若 $c_t \neq \alpha, \beta$，则 $\{c_l, c_h\} = \{c_t, \alpha\}$ 且 $\{c_p, c_q\} = \{c_t, \beta\}$。不失一般性，由对称性可设 $\xi_2 \neq c_t$。我们用 $\zeta \in L(t) \setminus \{c_x, c_y, c_t\}$ 对 t 重新着色。若 $\zeta = \alpha$，则 ϕ 可通过将 u、v、w 分别着色为 α, ξ_1, ξ_2，扩展到 G；若 $\zeta = \beta$，则 ϕ 可通过将 u、v、w 分别着色为 ξ_2, ξ_1, β，扩展到 G；若 $\zeta \neq \alpha, \beta$，则 ϕ 可分别通过将 u、v、w 着色为 α, ξ_1, β，扩展到 G。□

Le理 3.36. 构型 T_{35} 是 (度+2)-可约的，且在 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 4$.

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{35},，则令 $G' := G - \{u, v, p, q\}$。若 $G' \cong C_5$,，则 G $\ncong C_5$，且 G 是连通外平面图。由定理 1.5 可知，G 是 PCF-(度+2)-可选择的，这与假设矛盾。因此，$G' \ncong C_5$，且它有一个 PCF-L-着色 ϕ。根据引理 3.3，这 ϕ 可通过 $|U_\phi(x, G')| = 2$ 快速扩展到 G。□

Le题 3.37. 构型 T_{36} 是(度+2)-可约的，在 $\mathcal{G}_\ell$ 对每个 $l \geq 5$.

证明。设 G $\in \mathcal{G}_\ell$ 是一个 PCF-(度+2)-临界图，且 L 是 G 的一个 (度+2)-列表赋值。若 G 含有 T_{36},，则令 $G' := G - \{h, u, v, p, q, l\}$。由于 $G' \ncong C_5$,，它有一个 PCF-L-着色 ϕ。令$\{c_x, c_y, c_w, c_a, c_b, c_d\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(w), \phi(a), \phi(b), \phi(d)\}$。令 $\alpha \in U_\phi(x,G')$，$\beta \in U_\phi(y,G')$，以及 $\gamma \in U_\phi(w, G')$。

如果我们能将 ϕ 扩展为 $G'' := G - \{p, q, l\}$ 的一个 PCF-L-着色 φ，使得 $|U_\varphi(w, G'')| \neq 1$，那么根据引理 3.1，$\varphi$ 可扩展到 G。这意味着 $|\{c_a, c_b, c_d\}| = 2$，因为否则，我们就有 $|\{c_a, c_b, c_d\}| = 3$，并且根据引理 3.1，ϕ 可以扩展为所需的 φ。因此，我们假设 $c_a = c_b$ 且 $c_d = \gamma$。现在，我们用一个颜色 $\xi_1 \in L(v) \setminus \{c_w, \gamma\}$给 v 着色，并用一个颜色 $\xi_2 \in L(u) \setminus \{c_x, c_w, \xi_1\}$给 u 着色。若 $L(h) \neq \{\alpha, c_x, \xi_1, \xi_2\}$，则我们用 $L(h) \setminus \{\alpha, c_x, \xi_1, \xi_2\}$中的一个颜色给 h 着色。这样便得到所需的 φ，证明完成。因此，$L(h) = \{\alpha, c_x, \xi_1, \xi_2\}$。接下来，若 $L(u) \neq \{c_x, c_w, \xi_1, \xi_2\}$，则我们用 ξ_2 给 h 着色，并用 $L(u) \setminus \{c_x, c_w, \xi_1, \xi_2\}$中的一个颜色给 u 重新着色；若 $L(v) \neq \{c_w, \gamma, \xi_1, \xi_2\}$，则我们用 ξ_1 给 h 着色，并用 $L(v) \setminus \{c_w, \gamma, \xi_1, \xi_2\}$ 中的一个颜色给 v 重新着色。两种情况下，我们都能得到所需的 φ，证明完成。因此，$L(u) = \{c_x, c_w, \xi_1, \xi_2\}$ 且 $L(v) = \{c_w, \gamma, \xi_1, \xi_2\}$。

由对称性，存在两种颜色 ζ_1 和 ζ_2，使得 $L(p) = \{c_w, \gamma, \zeta_1, \zeta_2\}$，$L(q) = \{c_y, c_w, \zeta_1, \zeta_2\}$，且 $L(l) = \{\beta, c_y, \zeta_1, \zeta_2\}$。此时，我们分别用 $\xi_1, \xi_2, \gamma, c_w, \zeta_1, \zeta_2$ 为 h、u、v、p、q、l 着色，并用 $L(w) \setminus \{c_w, c_a, \gamma, \tau_w(a), \tau_w(b), \tau_w(d)\}$ 中的一种颜色重新为 w 着色。这就得到了 G 的 PCF-L 着色，其中 w 的 PCF 着色恰为 c_w。 □

4 完成证明

在第 3.3 小节中，我们完成了以下命题的证明。

引理 4.1. 每个带有 $i \in [35]$ 的构型 T_i 在 $\mathcal{G}_4$ 中都是（度 $+2$）-可约的。特别地，对每个 $l \geq 4$，带有 $i \in [5,8] \cup [17,19] \cup \{1,2,11,12,15,34,35\}$ 的构型 T_i 在 $\mathcal{G}_\ell$ 中都是（度 $+2$）-可约的。

现在，我们完成前三个主要定理的证明。

定理1.6的证明。 在本证明中，我们将 $\mathcal{G}_4$ 定义为最大度不超过 4 的连通 K_4-次图无关图类。反设该定理不成立。那么，在 $\mathcal{G}_4$中将存在一个适当无冲突-(度 $+2$)-临界图。根据引理 4.1，G 不包含任何T_i，其中 $i \in [12]$。这与引理 2.2矛盾，因为G 仍然是一个最大度不超过 4 的K_4-次图无关图。□

定理的证明1.7。 我们将 $\mathcal{G}_4$ 定义为最大度不超过 4 的连通外 1-平面图类。反设定理不成立。则 $\mathcal{G}_4$ 将包含一个适当无冲突-(度 $+2$)-临界图。然而，根据引理 4.1，任意此类图 G 都不含任何 T_i （$i \in [35]$）。这直接与引理 2.4矛盾，因为G 按构造仍是最大度不超过 4 的外 1-平面图。□

定理 1.8 的证明。设 G 是围长至少为 12 的平面图。若 $\Delta(G) \leq 3$，则根据定理 1.4(2)，G 是适当无冲突-(度+2)-可选择的。因此，我们假设 $\Delta(G) \leq l$ 且 $l \geq 4$。在此证明中，我们将 $\mathcal{G}_\ell$ 定义为围长至少为 12 且最大度不超过 l 的平面图类。反设该定理不成立。则存在一个属于 $\mathcal{G}_\ell$ 的适当无冲突-(度 $+2$)-临界图。根据引理 3.37 和 4.1，对于任意 $i \in \{1,5,8,11,12,36\}$，G 均不含 T_i。这与引理 2.5 矛盾，因为 G 仍是围长至少为 12 且最大度不超过 l 的平面图。□

为了证明定理1.9，我们需要用到 Li 和 Zhang 的以下引理 [13]。

引理 4.2。 *[13, 定理 3 和 4]* 设 G 是一个外 1-平面图。如果 G 不包含 T_1, T_3, 或T_{14},, 那么它包含

X_1 一个三角形 uvw，其 $d(u) = 2$；或者
X_2 一条边 uv，其 $d(u) = 2$ 且 $d(v) \leq 3$。

定理 1.9 的证明。 反设定理不成立。那么，存在一个外 1-平面图 G 不是适当无冲突-(度 + 3)-可选择的，但 G的每个真子图都是适当无冲突-(度 + 3)-可选择的。由引理 4.2，G 必包含以下某个构型： T_1,T_3, T_{14}, X_1, 或 X_2。然而，下面将详细说明，如何对这些构型逐一进行约化并导出矛盾。

Let L 是G的一个（度数+3）列表赋值。根据假设，G' 有一个适当无冲突L-着色 ϕ。

- 若G 有T_1，则令$G' := G - \{u\}$，且 $\{c_v\} := \{\phi(v)\}$。通过给u 赋予$L(u) \setminus \{\phi(v)$中的一个颜色 $\alpha\}$，其中 $\alpha \in U_\phi(v,G')$，即可将此着色扩展到G。
- 若 G 满足 T3，则令 $G' := G - \{v\}$，并令 $\{cx, cy\} := \{\phi(x), \phi(y)\}$。由于 $\phi(x) \neq \phi(y)$，ϕ 可通过用 $L(v) \setminus \{\phi(x), \phi(y), \alpha, \beta\}$中的一个颜色给 v 着色，从而扩展到 G，其中 $\alpha \in U_\phi(x, G')$，且 $\beta \in U_\phi(y, G')$。

- 若 G 满足 T14，则令 $G' := G - \{v\}$，并令 $\{cx, cy, cu\} := \{\phi(x), \phi(y), \phi(u)\}$。由于 $\phi(x) \neq \phi(y)$，ϕ 可通过用 $L(v) \setminus \{\phi(x), \phi(y), \phi(u), \alpha, \beta\}$中的一个颜色给 v 着色，从而扩展到 G，其中 $\alpha \in U_\phi(x, G')$，且$\beta \in U_\phi(y, G')$。
- 若 G 满足 X1，则令 $G' := G - \{u\}$，并令 $\{cv, cw\} := \{\phi(v), \phi(w)\}$。由于 $\phi(v) \neq \phi(w)$，ϕ 可以通过为 u 着上 $L(u) \setminus \{\phi(v), \phi(w), \alpha, \beta\}$ 中的一个颜色，扩展到 G，其中 $\alpha \in U_\phi(v, G')$ 且 $\beta \in U_\phi(w, G')$。
- 若 G 满足 X2，则令 $G' := G - \{u, v\}$，并令 $\{cp, cq, cw\} := \{\phi(p), \phi(q), \phi(w)\}$。选取 $\alpha \in U_\phi(p, G')$，$\beta \in U_\phi(q, G')$ 和 $\gamma \in U_\phi(w, G')$。假设 $N(u) = \{v, p\}$。若 $d(v) = 2$，则假设 $N(v) = \{u, q\}$。现在，ϕ 可以通过给 u 着上 $\xi \in L(u) \setminus \{\phi(p), \alpha\}$ 中的一个颜色，并给 v 着上 $L(v) \setminus \{\xi, \phi(p), \phi(q), \beta\}$ 中的一个颜色，扩展到 G。若 $d(v) = 3$，则假设 $N(v) = \{u, q, w\}$。现在，ϕ 可以通过给 v 着上 $\zeta \in L(v) \setminus \{\phi(p), \phi(q), \phi(w), \beta, \gamma\}$ 中的一个颜色，并给 u 着上 $L(u) \setminus \{\zeta, \phi(p), \alpha\}$ 中的一个颜色，扩展到 G。

由于C_5 不是适当无冲突（度+2）可选着色的，因此定理 +3中（度+2）的界是紧的。1.9。

□

5 结论与开放问题

2023年，Fabrici、Lužar、Rindošová 和 Soták [8] 证明，每个平面图都可进行适当无冲突的8-着色，且每个外平面图都可进行适当无冲突的5-着色。Caro、Petruševski 和 Škrekovski [3]还证明，每个围长至少为7的平面图都可进行冲突自由可选6-着色。我们独立地得到了以下列表版本的强化结果。

定理 5.1。 每个围长至少为12 的平面图都可进行冲突自由可选*6*-着色。

定理 5.2。 每个外1-平面图都可进行冲突自由可选*6*-着色。

证明策略概述如下。设 G 是一个围长至少为12的平面图或外1-平面图，且 G 不是冲突自由可选6-着色的，而 G 的每个真子图都是冲突自由可选6-着色的。通过类似的推理过程，可以证明 G 不含任何标记为 T_1, T_3, T_5, T_8, T_{11}, T_{12}, T_{14}, T_{36}, X_1, 或 X_2的构型。结合引理2.5和4.2，我们分别得到定理5.1和5.2。详细证明留给感兴趣的读者（请注意，只有 T_{36} 可约性的证明与引理 3.37 的证明略有不同；不过，由于现在任意一个2-顶点的列表都更长，因此证明会容易得多，而且我们无需对该构型中的5度顶点重新着色）。

另一方面，结合定理1.6、1.7、1.8和1.9 与猜想1.3，我们可以提出以下问题。当然，猜想1.3的结论蕴含这些问题都有肯定答案；不过，它们本身也具有独立的研究价值。

问题5.3。除 C_5 外，每个连通的 K_4-*minor-free* 图（或外 *1*-平面图）是否都是 *proper conflict-free* (度+2)-*choosable*?

问题5.4。围长至少为6 的每个平面图是否都是 *proper conflict-free* (度+2)-*choosable*?

值得再次指出，正如 Kashima、Škrekovski 和 Xu [10] 所证明的，每个d-退化图都是适当冲突自由（度+d+1）可选着色的。给定一个最大度为 Δ 的图G，显然它是Δ-退化的，因此是适当冲突自由（度+Δ+1）可选着色的。另一方面，我们认为

Cranston 和 Liu 提出的直接贪心算法 [7], 可得出图 $2\Delta + 1$ 的适当冲突自由（G）着色，也意味着 G 是适当冲突自由（$2\Delta + 1$）可选着色的。结合这些发现，我们提出以下问题：

问题 5.5。 每个图是否都是适当的无冲突（2 ·度 + 1）-可列表着色的？

作为本文的总结，我们引入一个推广概念。对于两个非负整数 k 和 l，如果对于 G 的任意满足 $|L(v)| = l \cdot d(v) + k$ 的列表赋值 L（其中对所有顶点 $v \in V(G)$ 均成立），都存在 G 的适当的无冲突 L-着色 ϕ，则称图 G 是适当的无冲突（l · 度 +k）-可列表着色的。为解决猜想 1.3，我们提出以下具有独立研究价值的问题：

问题 5.6。 对于任意 $\varepsilon > 0$，是否存在 $\Delta_0 = \Delta_0(\varepsilon)$，使得每个最大度为$\Delta \geq \Delta_0$ 的图都是适当的无冲突（（$1 + \varepsilon$） ·度)-可列表着色的？

参考文献

[1] C. Auer, C. Bachmaier, F. J. Brandenburg, A. Gleißner, K. Hanauer, D. Neuwirth 和 J. Reislhuber。外 1 平面图。*Algorithmica*，74(4):1293–1320，2016 年。[2] Y. Caro 、 M. Petruševski 和 R. Škrekovski。关于图的奇数染色的评述。*DiscreteAppl.Math.*，321:392–401，2022年。[3] Y. Caro、M. Petruševski 和 R. Škrekovski。关于图的恰当无冲突列表染色的评述。离散数学，346(2):113221，2023年。[4] E.-K. Cho、I. Choi、H. Kwon 和 B. Park。平方染色放宽形式的 Brooks 型定理。离散数学，348(1):114233，2025年。[5] E.-K. Cho、I. Choi、H. Kwon 和 B. Park。稀疏图的恰当无冲突染色。*DiscreteAppl. Math.*，362:34–42，2025年。[6] Q. Chuet、T. Dai、Q. Ouyang 和 F. Pirot。恰当的h-无冲突染色的新界。预印本，arXiv:2505.04543 [math.CO], 2025。[7] D. W. Cranston 和 C.-H. Liu。最大度较大的图的恰当无冲突染色。*SIAM J. Discrete Math.*，38(4):3004–3027，2024年。[8] I. Fabrici、B. Lužar、S. Rindošov´a 和 R. Sot´ak。关于邻域的平面图的恰当无冲突染色与唯一最大染色。*Discrete Applied Mathematics*，324:80–92，2023年。[9] S.-H. Hong、P. Eades、N. Katoh、G. Liotta、P. Schweitzer 和 Y. Suzuki。用于测试外 1 平面性的线性时间算法。*Algorithmica*，72(4):1033–1054，2015年。[10] M. Kashima、R. Škrekovski 和 R. Xu。关于具有指定退化度的图的恰当无冲突度可选性的评述。预印本，arXiv:2509.12560 [math.CO], 2025。[11] M. Kashima、R. Škrekovski 和 R. Xu。图的恰当无冲突列表染色结果。预印本，arXiv:2508.20521 [math.CO], 2025。

[12] M. Kashima、R. Škrekovski 和 R. Xu。外平面图的恰当无冲突度可选性。离散数学，349(3):114800，2026年。[13] Y. Li 和 X. Zhang。外 1 平面图的结构与列表3-动态染色。*DiscreteMath. Theor. Comput. Sci.*，23(3):17，2021年。编号/第4期。[14] C.-H. Liu。恰当无冲突列表染色、奇子式、细分与分层树宽。离散数学，347(1):113668，2024年。[15] C.-H. Liu 和 B. Reed。渐近最优恰当无冲突染色。*Random Struct. Algo-rithms*，66(3):9，2025年。编号/e21285。[16] C.-H. Liu 和 G. Yu。次三度图的线性染色。*Eur. J. Comb.*，34(6):1040–1050，2013年。[17] J.-B. Lv、J. Fu 和 J. Li。无K_4-子式图的单射色指数。*Graphs Comb.*，40(4):10，2024年。编号/第77期。[18] W. Yang 和 B. Wu。无K_4-子式图的邻点和可区分指数。*Graphs Comb.*，41(4):15，2025年。编号/第90期。[19] J. Ye、J. Zou 和 M. Han。无K_4-子式图的平方的弱退化。*Appl. Math.Comput.*，500:8，2025年。编号/第129439期。[20] X. Zhang、G. Liu 和 J.-L. Wu。用森林覆盖伪外平面图的边。*DiscreteMath.*，312(18):2788–2799，2012年。[21] X. Zhang 和 J.-L. Wu。关于串并联图的均衡染色与均衡列表染色。*DiscreteMath*，311(10-11):800–803，2011年。