arXiv:2512.22813v1 [math.CO] 28 Dec 2025

多轮毂轮图中与圈相关图的精确彩虹数

Mengyao Dai 张欣*
西安电子科技大学数学与统计学院，中国西安，710071
mengyaodai@stu.xidian.edu.cn xzhang@xidian.edu.cn

2025年12月30日

摘要

彩虹数 rb(*G*,*H*) 是使得任意使用至少 k 种颜色对G 进行边着色时，都能保证出现一个与H同构的彩虹子图的最小颜色数。彩虹数在无线通信网络、密码学、生物信息学和社交网络分析等诸多领域有广泛应用。本文通过建立相应结果，确定了彩虹数 rb(*G*,*H*) 的精确值，其中G 是多轮毂轮图$W_d(s)$，定义为s 个孤立顶点与长度为d 的圈 C_d 的图的联结（即$W_d(s) = K_s + C_d$）；而$H = \theta_{t,\ell}$表示一个长度为t 的圈C_t，其同一顶点发出 $0 \le \mathrm{l} \le t - 3$ 条弦，

$$\mathrm{rb}(W_d(s), \theta_{t,\ell}) = \begin{cases} \left\lfloor \dfrac{2t-5}{t-2} d \right\rfloor + 1, & \text{if } \ell = t-3,\ s = 1 \text{ and } t \ge 4, \\ \left\lfloor \dfrac{3t-10}{t-3} d \right\rfloor + 1, & \text{if } \ell = t-3,\ s = 2 \text{ and } t \ge 6, \\ \left\lfloor \dfrac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \right\rfloor + 1, & \text{if } \ell = t-3,\ s \ge 3 \text{ and } t \ge 7, \\ \left\lfloor \dfrac{2t-7}{t-3} d \right\rfloor + 1, & \text{if } s = 1 \text{ and } t \ge \max\{5, \ell+4\}, \end{cases}$$

当 $d \ge 3t - 5$ 时，本文给出的参数 t 的所有界都是紧的。这解决了 Jakhar、Budden 和 Moun（2025年）提出的问题，即研究轮图中大圈和大弦圈的彩虹数（具体对应于我们框架中 $s = 1$ 和 $\mathrm{l} \in \{0, 1\}$ 的情形）。此外，本文还完全确定了大轮图中任意长度圈的彩虹数，从而推广了 Lan、Shi 和 Song（2019年）的一项结果。

关键词：彩虹数；反 *Ramsey* 数；边染色。

*通讯作者。

1 引言

边染色图 G 的子图 H 若任意两条边的颜色均不同，则称 H 为彩虹子图。1973 年，Erd˝os、Simonovits 和 Sós [5] 引入了反 Ramsey 数 $ar_{\mathcal{P}}(n, H)$，将其定义为满足以下条件的最大整数 t：存在一种对 K_n 进行的边染色，恰好使用 t 种颜色，且其中不包含与 H 同构的彩虹子图。这个概念与彩虹数 rb(G, H) 密切相关；rb(G, H) 定义为这样一个最小颜色数 k：对于 G 的任意边染色，只要使用至少 k 种颜色，就能保证其中包含与 H 同构的彩虹子图。根据这些定义可直接推出，$rb(K_n, H) = ar_{\mathcal{P}}(n, H) + 1$。

在无线传感器网络或卫星通信中，信号传输可能因频段冲突或恶意干扰而失败。通过为边分配不同的频段（颜色），彩虹数 rb(G,H)量化了确保任意两个节点之间存在抗干扰路径（彩虹路径）所需的最少频段数。例如，若 rb(G,P_3) $= k$，则至少需要k 个频段，才能确保路径上不存在连续同频的边（P_3表示一条长度为 2 的路径）。在加密网络中，彩虹路径模拟多跳加密中继，其中每条边代表一个加密层，颜色则代表不同的密钥；rb(G,H)的最小性可防止攻击者通过截获同色边来解密整条路径，从而增强安全性。在蛋白质相互作用网络中，顶点表示蛋白质，边表示相互作用，颜色代表功能类别（如催化、信号传导）；较小的 rb(G,K_3) 表明存在由功能各异的蛋白质构成的稳定三元组（如激酶-磷酸酶-底物复合物），这对理解细胞调控至关重要。在社交网络中，颜色反映话题（如科技、娱乐、政治），而 rb(G, S_4)（针对星形子图）衡量通过多彩路径获取多元信息的难度；较高的 rb(G, S_4) 表明某位意见领袖的关注者话题同质性较强，因此有必要通过算法干预来丰富内容并缓解“过滤气泡”。

文献中已研究过一些特殊图类的彩虹数（或反 Ramsey 数） [1, 4, 6, 9, 12, 13, 31]; 研究者还考察了特定宿主图族中的彩虹数，包括 Kneser 图 [16], 、二部图 [21], 、完全多部图 [2, 19, 33], 、平面图 [8], 、二部平面图 [15, 28, 29], 、平面三角剖分 [3, 10, 12, 20, 24–27], 以及外平面图 [17, 18, 30]。值得注意的是，这一问题的超图变体也受到了专门关注 [7, 14, 22, 23, 32]。

特别是，Jendrol’、Schiermeyer 和 Tu [12] 率先通过研究匹配来探讨平面三角剖分中的彩虹数；对于大小为 k 的匹配（记为 M_k），他们确定了当 $t \leq 4$时 $rb(T_n, M_t)$ 的精确值，并推导出所有满足 $t \geq 5$且 $n \geq 2t$ 的情形下的下界/上界，其中 T_n 表示具有 n 个顶点的平面三角剖分类，且 $rb(T_n, M_t) := \max\{rb(G, M_t) \mid G \in T_n\}$。随后，Qin、Lan 和 Shi [24] 确定了 $n \geq 11$ 时 $rb(T_n, M_5)$ 的精确值，并将上界改进为对于所有满足 $t \geq 5$且 $n \geq 2t$ 的情形，$rb(T_n, M_t) \leq 2n + 6t - 16$。Chen、Lan 和 Song [3] 进一步确定了 $rb(T_n, M_6)$ 的精确值，并改进了

下界/一般情形下 rb(T_n,M_t) 的上界。对于相对于 t $\geq$ 7足够大的 n，Qin、Lan、Shi 和 Yue [25] 建立了 rb(T_n,M_t) 的强化下界。

2015年，Horˇnák、Jendrol'、Schiermeyer 和 Soták [10] 通过证明对于所有$n \geq 4$, 均有 rb(T_n, C_3) $= \left\lfloor \frac{3n}{2} \right\rfloor - 2$，开创了平面图中圈的彩虹数研究。关于一般情形 rb(T_n,C_k), 他们为所有整数$k \geq 4$建立了下界，并进一步针对$k = 4$ 和$k = 5$得出了上界；随后，Lan、Shi 和 Song [20]改进了$k \geq 5$ 且$n \geq k^2 - k$时的下界，并确定了 rb(T_n, C_6) 和 rb(T_n,C_7) 的显式上界。

rb(T_n, H) 的研究与 rb(W_d, H) 的探究密切相关，其中 W_d 表示具有 d + 1 个顶点的轮图；这种联系源于平面三角剖分的结构性质：度为 d $\geq$ 3 的任一顶点，其闭邻域会诱导出一个 W_d 子图。Qin、Lei 和 Li [26] 取得的突破极大推动了这一研究，他们确定了轮图中彩虹数的精确值：他们证明，对于三角形，rb(W_d, C_3) = d + 2；并将结果推广至添加悬挂边的结构，得到当 H 是带一条悬挂边的三角形时，rb(W_d, H) = d + 2；当 H 是带两条集中悬挂边的三角形时，rb(W_d, H) = d + 4；当 H 是带两条不相交悬挂边的三角形时，rb(W_d, H) $= \left\lfloor \frac{4d}{3} \right\rfloor + 1$。Horˇnák、Jendrol'、Schiermeyer 和 Soták [10]进一步证明了 rb(W_d, C_4) $= \left\lfloor \frac{4d}{3} \right\rfloor + 1$以及 rb($W_d$, C_5) $= \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1$。随后，Lan、Shi 和 Song [20] 确定了 rb(W_d, C_6) $= \left\lfloor \frac{5d}{3} \right\rfloor + 1$，并给出了 rb($W_d$, C_k) 的如下界：

定理 1.1. 对于满足 d, k 且 $d \geq k - 1$ 并且 $k \geq 5$, $\left\lfloor \frac{2k-7}{3}d \right\rfloor + 1 \leq \mathrm{rb}(W_d, C_k) \leq \left\lfloor \frac{2k-5}{2}d \right\rfloor + 1$ 的整数 d, k。

最近，Jakhar、Budden 和 Moun [11] 证明，对于所有整数 d $\geq$ 3，rb(W_d, C_4^+) $= \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1$；对于所有 d $\geq$ 5，rb(W_d, C_5^+) $= \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1$，其中 C_t^+表示带有任意一条弦的 t-圈。此外，他们还证明，rb(W^*d, C_3) $= \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1$ 且 $\left\lfloor \frac{4d}{3} \right\rfloor + 2 \leq \mathrm{rb}(W^*d, C_4) \leq 2d + 1$, 其中 W^*d 是双轮毂轮，即 $2K_1$ 与 C_d的图的联结。这些发现阐明，嵌入 T_n 中的局部轮结构如何直接限制与圈相关子图的彩虹数估计。

这篇论文通过拓展所研究的图类范围并改进已有的极值界，深化了对轮图或与轮相关的图中与圈相关的图的彩虹数研究。

t-扇图 F_t 由一个 t-圈 C_t 构成，其顶点按顺序标记为 $v_1, v_2, \ldots, v_t$（形成边界圈）；指定 v_1 为中心顶点，并添加所有形如 v_1v_i 的弦，其中 $3 \leq i \leq t - 1$。为简洁起见，将此构造记为 $F_t := [v_1; v_2 \cdots v_t]$。令$\Theta_{t,\ell}$ 表示一个图类。对于该图类中的任意图 $\theta_{t,\ell}$，它由一个 t-圈和 l 条弦组成，且这 l 条弦均从同一个顶点引出。当 l = t − 3时，图 F_t 与图 $\theta_{t,\ell}$ 表示相同的结构，即一个 t-圈及从单个顶点引出的所有可能的弦。当 l = 0时，图 $\theta_{t,\ell}$ 恰为 t-圈 C_t。轮图 W_d 由一个中心枢纽顶点和一个 d-圈 C_d组成，该枢纽顶点与圈上的所有顶点相连。s-轮毂轮 $W_d(s)$ 是

通过将W_d的枢纽“扩展”为s个独立顶点（即将单个枢纽替换为s个彼此不相邻的顶点，每个顶点都与原d-圈上的所有顶点相连）；我们称这s个顶点为枢纽顶点或中心顶点，并称这d个圈上的顶点为边界顶点，属于$W_d(s)$。在$W_d(s$中，与某个枢纽顶点关联的边称为辐条边，其余所有边称为轮缘边。图1给出了具体实例，以说明此处介绍的概念。

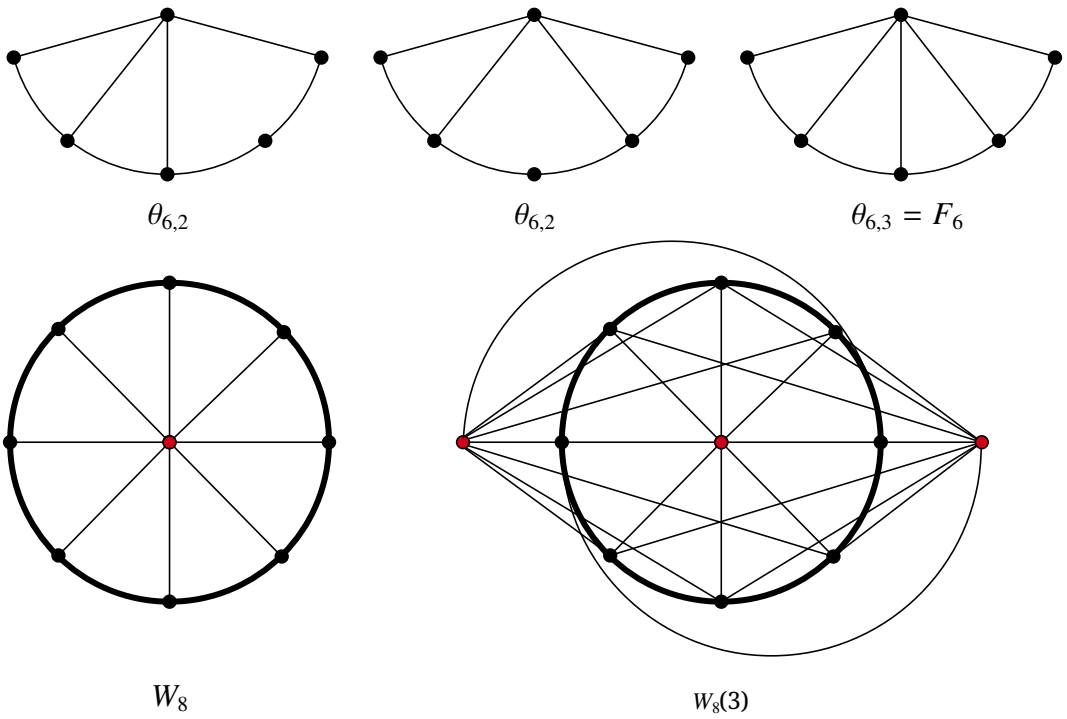

图1：$\theta_{6,2}$、F_6,W_8和$W_8(3)$的示例。

以下是本文的两个主要定理。

定理 1.2. 设 d、s、t 为满足 $d \geq 3t-5$ 的整数。F_t 在 $W_d(s)$ 中的彩虹数为

$$\mathrm{rb}(W_d(s), F_t) = \begin{cases} \left\lfloor \frac{2t-5}{t-2} d \right\rfloor + 1, & \text{if } s = 1 \text{ and } t \geq 4, \\ \left\lfloor \frac{3t-10}{t-3} d \right\rfloor + 1, & \text{if } s = 2 \text{ and } t \geq 6. \\ \left\lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \right\rfloor + 1, & \text{if } s \geq 3 \text{ and } t \geq 7. \end{cases}$$

Theorem 1.3. 对于满足 $d \geq 3t-5$ 且 $t \geq \max\{5, l+4\}$ 的整数 d、l 和 t，我们有 e

$$\mathrm{rb}(W_d, \theta_{t,\ell}) = \left\lfloor \frac{2t-7}{t-3} d \right\rfloor + 1$$

对每个$\theta_{t,\ell} \in \Theta_{t,\ell}$。

定理$t \geq 4$ 1.2 第一个断言中所述的条件 确实是必要的。这种必要性源于以下事实：$F_3 = C_3$。正如 Qin、Lei 和 Li 在他们的工作中所示 [26],已证明，$\mathrm{rb}(W_d, C_3) = d + 2$。定理 1.2 第二和第三个断言中所述的条件$t \geq 6$ 以及$t \geq 7$ 同样是必要的，我们将对此加以证明

$$\mathrm{rb}(W_d(2), F_5) \leq \left\lfloor \frac{33}{14}d \right\rfloor + 1 < \left\lfloor \frac{5}{2}d \right\rfloor + 1$$
$$\mathrm{rb}(W_d(3), F_6) \leq \left\lfloor \frac{55}{16}d \right\rfloor + 1 < \left\lfloor \frac{11}{3}d \right\rfloor + 1$$

根据定理5.1 第5节。

结合定理1.2 （参数为$s = 1$ 和$t = 4$）以及定理1.3 （其中$t = 5$且$\mathrm{l} = 1$），我们得到精确彩虹数：

$$\mathrm{rb}(W_d, C_4^+) = \mathrm{rb}(W_d, C_5^+) = \left\lfloor \frac{3d}{2} \right\rfloor + 1,$$

这与 Jakhar、Budden 和 Moun 最近的结果一致， [11], 他们进一步提出将研究扩展到轮图中的大圈和大弦圈。有趣的是，通过将定理1.3 分别应用于$\mathrm{l} = 0$和$\mathrm{l} = 1$的情形，我们得到如下结果。

推论 1.4。 对于满足 $d \geq 3t - 5$ 且 $t \geq 5$的整数 d 和 t，我们有

$$\mathrm{rb}(W_d, C_t) = \mathrm{rb}(W_d, C_t^+) = \left\lfloor \frac{2t-7}{t-3}d \right\rfloor + 1.$$

该结果表明，Lan、Shi 和 Song [20] 在定理1.1 中给出的轮图W_d 中C_t $(t \geq 5)$的彩虹数下界实际上是精确的，与推论1.4中导出的值完全一致。定理1.3 和推论1.4 中的条件$t \geq 5$ 是必要的。注意，$\theta_{4,1} = F_4$ 以及 $\theta_{4,0} = C_4$。定理1.2意味着 $\mathrm{rb}(W_d, F_4) = \lfloor \frac{3d}{2} \rfloor + 1$，而 Horˇnák、Jendrol’、Schiermeyer 和 Soták [10] 证明了 $\mathrm{rb}(W_d, C_4) = \lfloor \frac{4d}{3} \rfloor + 1$。

本文结构安排如下。第 2 节建立了一个计数论证，用于计算在 $\theta_{t,\ell}$-子图中覆盖指定边的数量，这些子图属于 s-中心顶点轮图 $W_d(s)$。这一枚举为后续证明提供了基础工具。在第 3 节，我们推导出 $\mathrm{rb}(W_d(s), F_t)$ 和 $\mathrm{rb}(W_d, \theta_{t,\ell})$ 的上界，并在第 4 节给出相应的下界。最后，第 5 节总结主要发现，并讨论该领域未来研究的潜在方向。

2 计数引理

图 $\theta_{t,\ell}$ 的结构可描述如下。存在一个 t-圈C_t，其顶点按顺序标记为 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_t$。此外，从集合 $\{\mathrm{v}_1\mathrm{v}_i \mid 3 \leq i \leq t-1\}$中选取了 l 条弦。我们称边界圈 $\theta_{t,\ell}$为C_t。为方便起见，我们用一个向量表示 $\theta_{t,\ell}$

$\mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) := (2, i_1, i_2, \ldots, i_\ell, t)$，其中 $2 < i_1 < i_2 < \cdots < i_\ell < t$，且对每个 $j \in [l]$，$v_1 v_{i_j}$ 都是一条边。若 $l = 0$ 或 $i_j + i_{\ell+1-j} = t + 2$ 对每个 $j \le (l+1)/2$ 都成立，则称 $\theta_{t,\ell}$ 或 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 是对称的。例如，图1中的第一个子图描绘了一个非对称的 $\theta_{6,2}$，而第二个子图展示了一个对称变体。

引理 2.1. 设 d, s, t, l 为非负整数，满足 $d \ge 2t - 3$ 且 $t \ge \max\{4, l+3\}$。对于图 $W_d(s)$ 中的任意一对边，至多存在 $N_{2.1}$ 个图 $\theta_{t,\ell}$ 的副本同时包含这两条边以及 $W_d(s)$ 的恰好一个中心顶点，其中

$$N_{2.1} = \begin{cases} \max\{s(t-3), t-2\}, & \text{if } \theta_{t,\ell} = F_t, \\ s(t-3), & \text{if } \theta_{t,\ell} \neq F_t \text{ and } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric}, \\ 2s(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric}. \end{cases}$$

证明。 设 e_1 和 e_2 是图 $W_d(s)$ 中两条固定的边。我们定义 q 为图 $\theta_{t,\ell}$ 的副本数量，这些副本同时包含 e_1 和 e_2，，并且包含 $W_d(s)$ 的恰好一个中心顶点。e_1 和 e_2 的分布必定恰好属于以下互斥情形之一

情形 A1 $e_1 \in E_{u_a}$ 和 $e_2 \in E_{u_b}$，其中某些 $a, b \in [s]$。

若 $a \neq b$，则显然 $q = 0$。因此，我们假设 $a = b$。设 $e_1 = u_a v_i$ 和 $e_2 = u_a v_j$ $(i < j)$。若 $j - i > t - 2$ 且 $(i - j) \bmod d > t - 2$，则 $q = 0$。由于 $d \ge 2t - 3$，不可能同时满足两个不等式 $j - i \le t - 2$ 和 $(i - j) \bmod d \le t - 2$；因此，不失一般性，假设 $j - i \le t - 2$。现在，恰有 $t - (j - i) - 1$ 个 F_t 的副本同时包含 e_1 和 e_2；它们是 $F_t^1 = [u_a; v_i \cdots v_{i+t-2}]$、$F_t^2 = [u_a; v_{i-1} \cdots v_{i+t-3}]$、..... 以及 $F^{t-(j-i)-1}t = [u_a; v_{j+2-t} \ldots v_j]$（注意，$t - (j - i) - 1 \ge t - (t-2) - 1 = 1$）。若下标中出现负数，则将该负数加上 t 替换它。后续类似情形也同样处理。

如果 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 是对称的或非对称的，那么每个 F_t^h 分别包含 θ_t 一个或两个副本，ℓ。如果 F_t^h 包含 $\theta_{t,\ell}$ 的一个副本，且该副本覆盖 e_1 和 e_2，，那么

(i) $h + 1$ 和 $(h + 1 + j - i)$ 模 t 是向量 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 的分量，或者 (ii) $t - h + 1 - (j - i)$ 和 $(t - h + 1)$ 模 t 是向量 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 的分量

.

因此，如果对每个 F_t^h，(i) 都成立，那么 2、3、.....、t 就是向量 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 的分量，从而 $\theta_{t,\ell} = F_t$ 是对称的。类似地，如果对每个 F_t^h，(ii) 都成立，那么也可得出相同结论。因此，若 $\theta_{t,\ell}$ 是非对称的，则至少存在一个 h 值使 (i) 不成立，并且至少存在另一个不同的 h 值使 (ii) 不成立。这意味着，当 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 是非对称的时，至少存在两个 h 值，使得 F_t^h 不包含两份 $\theta_{t,\ell}$，它们覆盖 e_1 和 e_2。因此，

$$q \le \begin{cases} t - (j-i) - 1 \le t - 2, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric}, \\ 2(t - (j-i) - 1) - 2 \le 2(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric}. \end{cases}$$

情形 A2 对每个$a,b \in [s]$，$e_1 \notin E^{u_a}$ 和$e_2 \notin E^{u_b}$。

令 $e_1 = v_i v_{i+1}$ 和 $e_2 = v_j v_{j+1}$（模 d 的指标），其中 $i < j$。若 $j - i \geq t-2$ 且 $(i-j) \bmod d \geq t-2$，则 $q = 0$。由于 $d \geq 2t-3$，不可能同时满足两个不等式 $j - i < t-2$ 和 $(i-j) \bmod d < t-2$；因此，不失一般性，我们假设 $j - i < t-2$。现在，恰有 $s(t-(j-i)-2)$ 个 F_t 的副本同时包含 e_1 和 e_2。若 $X(\theta_{t,\ell})$ 是对称或非对称的，则每个 F_t^h 分别包含一或两个 $\theta_{t,\ell}$ 的副本。因此，

$$q \leq \begin{cases} s(t-(j-i)-2) \leq s(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2s(t-(j-i)-2) \leq 2s(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

情形 A3 $e_1 \in E^{u_a}$ 对于某个 $a \in [s]$成立，且对每个 $b \in [s]$，$e_2 \notin E^{u_b}$ 均成立。

令 $e_1 = u_a v_i$，其中 a、i 为某些指标；令 $e_2 = v_j v_{j+1}$（指标模 d），其中 j 为某个指标。注意，$i = j$ 是可能的。若 $j - i \geq t-2$ 且 $(i-j) \bmod d \geq t-2$，则 $q = 0$。由于 $d \geq 2t-3$，不等式 $j - i < t-2$ 和 $(i-j) \bmod d < t-2$ 不可能同时成立；因此，不失一般性，我们假设 $j - i < t-2$。现在，恰有 $m := t-(j-i)-2$ 个 F_t 的副本同时包含 e_1 和 e_2。若 $X(\theta_{t,\ell})$ 是对称或非对称的，则每个 F_t^h 分别包含一个或两个 $\theta_{t,\ell}$ 的副本。因此，若 $j \neq i$，则

$$q \leq \begin{cases} t-(j-i)-2 \leq t-3, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-(j-i)-2) \leq 2(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

若 $j = i$，则 $m = t-2$。令 $F_t^1 = [u_a; v_i \cdots v_{i+t-2}]$、$F_t^2 = [u_a; v_{i-1} \cdots v_{i+t-3}]$、.....以及 $F_t^m = [u_a; v_{i+1-h} \ldots v_{i+1}]$ 为同时包含 e_1 和 e_2 的 m 个 F_t 副本。若 F_t^h 包含一个覆盖 e_1 和 e_2, 的 $\theta_{t,\ell}$ 副本，则

(i) $h+1$ 是向量 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 的一个分量，
或 (ii) $t-h+1$ 是向量 $\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$ 的一个分量。

因此，若对每个 F_t^h，条件 (i) 或 (ii) 成立，则 $3, \ldots, t-1$ 是向量 $X(\theta_{t,\ell})$ 的分量，这意味着 $\theta_{t,\ell} = F_t$。因此，若 $\theta_{t,\ell} \neq F_t$ 且 $\theta_{t,\ell}$ 是对称的，那么 $h+1$ 是向量 $X(\theta_{t,\ell})$ 的一个分量，就意味着 $t-h+1$ 是向量 $X(\theta_{t,\ell})$ 的一个分量，反之亦然，即 (i) 和 (ii) 等价。因此，在这种情况下，至少存在一个 h 值，使得 F_t^h 不包含两个覆盖 e_1 和 e_2 的 $\theta_{t,\ell}$ 副本。若 $\theta_{t,\ell}$ 是非对称的，则至少存在一个 h 值使得 (i) 不成立，并且至少存在另一个不同的 h 值使得 (ii) 不成立。这意味着，当 $X(\theta_{t,\ell})$ 非对称时，至少存在两个 h 值，使得 F_t^h 不包含两个覆盖 e_1 和 e_2 的 $\theta_{t,\ell}$ 副本。因此，

$$q \leq \begin{cases} t-2, & \text{if } \theta_{t,\ell} = F_t, \\ (t-2)-1 = t-3, & \text{if } \theta_{t,\ell} \neq F_t \text{ and } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-2)-2 = 2(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

证明到此完成。 □

引理 2.2。 设 d、s、t、l 为非负整数，满足 $d \geq 3t-5$ 且 $t \geq \max\{4, l+3\}$。对于图 $W_d(s)$ 中的任意三条边，至多存在 $N_{2.2}$ 个图 $\theta_{t,\ell}$ 的副本，它们包含这些边中的至少两条，并且恰好包含 $W_d(s)$ 的一个枢纽顶点，其中

$$N_{2.2} = \begin{cases} \max\{s(t-2), t-1\}, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ \max\{2s(t-2), 2(t-1)\}, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

证明。 设e_1, e_2 和e_3 是图$W_d(s)$中的三条固定边。我们将q 定义为图$\theta_{t,\ell}$ 的副本数，这些副本至少包含上述三条边中的两条，且恰好包含$W_d(s)$的一个中心顶点。这三条边的分布必属于以下互斥情形之一：

情形 B1 $e_1 \in E^{u_a}$、$e_2 \in E^{u_b}$和$e_3 \in E^{u_c}$，其中a、b、$c \in [s]$。

若a、b、c两两不同，则显然$q = 0$。因此，假设$a = b$。若$c \neq a$，则q 是图的副本数$\theta_{t,\ell}$ 这些副本同时包含e_1 和e_2,，且恰好包含$W_d(s)$的一个中心顶点。通过与引理情形 A1 中的 2.1 相同的分析，我们得出

$$q \leq \begin{cases} t-2, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

因此，我们进一步假设 $c = a$。令 $e_1 = u_a v_i$、$e_2 = u_a v_j$ 和 $e_3 = u_a v_k$ （$i < j < k$）。

由于 $d \geq 3t-5 > 3(t-2)$，不可能同时成立以下三个不等式：$j-i \leq t-2$、$k-j \leq t-2$ 以及 $(i-k) \bmod d \leq t-2$；因此，不失一般性，我们假设 $(i-k) \bmod d > t-2$。这意味着，如果 $W_{d+1}(s)$ 包含一个同时覆盖 e_1 和 e_3, 的图 F_t 副本，那么它必然覆盖 e_2。因此，包含 e_1 和 e_2，或同时包含 e_2 和 e_3 的 F_t 副本至多有 $(t+j-2)-j+1 = t-1$ 个。如果 $X(\theta_{t,\ell})$ 是对称或非对称的，那么 F_t 的每个副本分别包含一个或两个 θ_t、ℓ的副本。因此，

$$q \leq \begin{cases} t-1, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-1), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

情形 B2 $e_1 \notin E^{u_a}$、$e_2 \notin E^{u_b}$，以及$e_3 \notin E^{u_c}$，对每个a、b、$c \in [s]$均成立。

令$e_1 = v_i v_{i+1}$、$e_2 = v_j v_{j+1}$和$e_3 = v_k v_{k+1}$（指标模d），其中$i < j < k$。

由于 $d \geq 3t-5 > 3(t-3)$，三个不等式 $j-i \leq t-3$、$k-j \leq t-3$ 和 $(i-k) \bmod d \leq t-3$ 不可能同时成立；因此，不失一般性，我们假设 $(i-k) \bmod d > t-3$。这意味着，如果 $W_{d+1}(s)$ 包含图 F_t 的一个副本，且该副本同时覆盖 e_1 和 e_3,，那么它必须覆盖 e_2,，从而至多有 $s((t+j-2)-(j+1)+1) = s(t-2)$ 个 F_t 的副本同时覆盖 e_1 和 e_2，或同时覆盖 e_2 和 e_3。如果 $X(\theta_{t,\ell})$ 是对称或非对称的，那么 F_t 的每个副本分别包含一个或两个 $\theta_{t,\ell}$的副本。因此，

$$q \leq \begin{cases} s((t+j-2)-(j+1)+1) \leq s(t-2), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2s((t+j-2)-(j+1)+1) \leq 2s(t-2), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

情形 B3 $e_1,e_2 \in E_{u_a}$ 对于某个 $a \in [s]$，且对于每个 $b \in [s]$，都有 $e_3 \notin E_{u_b}$。

令 $e_1 = u_a v_i$、$e_2 = u_a v_j$，其中 $i < j$，且 $e_3 = v_k v_{k+1}$（指标模 d）对某个 k成立。注意，$k = i$或$k = j$ 都是可能的。

首先假设 $i \le k < j$。由于 $d \ge 3t - 5 > 3t - 7$，不可能同时满足以下三个不等式：$k - i \le t - 2$、$j - k \le t - 2$以及（$i - j$）模 $d \le t - 2$；因此我们考虑三种子情形。

- 若 $k - i > t - 2$，则在 $W_d(s)$ 中，任何同时覆盖 e_1 和e_3 的 F_t 副本都必然覆盖 e_2。因此，同时覆盖e_2 和e_3，或同时覆盖 e_1 和e_2的 F_t 副本至多有（$t + j - 2$）$- j + 1 = t - 1$ 个。
- 若 $j - k > t - 2$，则在 $W_d(s)$ 中，任何同时覆盖 e_2 和e_3 的 F_t 副本都必然覆盖 e_1。因此，同时覆盖 e_1和e_3，或同时覆盖e_1 和e_2的 F_t 副本至多有（$t + i - 2$）$- i + 1 = t - 1$ 个。
- 若 $(i - j) \bmod d > t - 2$，则 $W_d(s)$ 中任何同时覆盖 e_1 和 e_2 的 F_t 副本都必然覆盖 e_3。因此，同时覆盖 e_1 和e_3 或同时覆盖 e_2 和 e_3 的F_t 副本至多有 $(t + k - 2) - (k + 1) + 1 = t - 2$ 个。

对于$k \ge j$ 或 $k < i$ 的情形，也可以用类似的方法处理，从而得到相同的结论：至多存在 $t - 1$ 个F_t 副本，它们至少覆盖三条边e_1, e_2, 和 e_3中的两条。由于当$\mathbf{X}(\theta_{t,\ell})$分别为对称或非对称时，每个$F_t^h$包含 $\theta_{t,\ell}$ 的一个或两个副本，因此我们有

$$q \le \begin{cases} t - 1, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-1), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

情形 B4 $e_1 \in E_{u_a}$ 对于某个$a \in [s]$, 以及$e_2 \notin E_{u_b}$，而$e_3 \notin E_{u_c}$ 对于每个$b,c \in [s]$均成立。

Let $e_1 = u_a v_i$，$e_2 = v_j v_{j+1}$ 以及$e_3 = v_k v_{k+1}$（下标模d），其中k、j满足$j < k$.

与情形 B3 中的方法类似，我们根据 i、j 和 k 的顺序将分析分为三个主要情形：$j \le i < k$、$i \ge k$ 或 $i < j$，每种情形又进一步细分为三个子情形（例如，对于 $j \le i < k$，子情形分别为 $i - j > t - 2$、$k - i > t - 2$，以及 $(j - k) \bmod d > t - 2$）；在全部九个子情形中，我们均得出结论：至多存在 $t - 1$ 个 F_t 的副本，它们覆盖 e_1, e_2, 和 e_3这几条边中的至少两条。由于每个 F_t^h包含一个或两个 θ_t的副本，分别对应于 $X(\theta_t,\ell)$ 为对称或非对称的情形，因此我们有

$$q \le \begin{cases} t - 1, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric,} \\ 2(t-1), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric.} \end{cases}$$

情形 B5 $e_1 \in E_{u_a}$, $e_2 \in E_{u_b}$ 对于互不相同的 $a,b \in [s]$, , 以及对于每个 $c \in [s]$，都有 $e_3 \notin E_{u_c}$。

两次采用引理 2.1 中情形 A3 的 相同证明方法，第一次针对边对

$\{e_1,e_2\}$，第二次针对 $\{e_1,e_3\}$，由此得出

$$q \le \begin{cases} 2(t-2) \le s(t-2), & \text{if } \theta_{t,\ell} = F_t, \\ 2(t-3) \le s(t-3), & \text{if } \theta_{t,\ell} \ne F_t \text{ and } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric}, \\ 4(t-3) \le 2s(t-3), & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric}. \end{cases}$$

请注意，在这种情况下 ≥ 2。

证明至此完成。 □

引理 2.3。设 d, s, t, l 为整数，满足 $d \ge t-1$ 且 $t \ge \mathrm{l}+3$。对于图 $W_d(s)$中的任意 i 条 ≥ 4 边$_d(s)$，至多存在 $N_{2,3}$ 个图 $\theta_{t,\ell}$ 副本，包含这些边中的至少两条，且恰好包含 $W_d(s)$ 的一个中心顶点，其中

$$N_{2,3} = \begin{cases} \frac{(t-1)i}{2}, & \textit{if } \theta_{t,\ell} = F_t \textit{ and } s = 1, \\ s(t-2)i & \textit{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \textit{ is asymmetric}, \\ \frac{s(t-2)i}{2}, & \textit{otherwise}. \end{cases}$$

证明。令 x 和 y 分别表示给定的 i 条边中辐条边和轮缘边的数量（因此 x +y =i）。图 W_d(s) 具有以下性质。若 X($\theta_{t,n}$) 是对称的，则每条辐条边出现在 l +2 个不同的 $\theta_{t,\ell}$-子图中，每条轮缘边出现在 s(t −2) 个子图中；若是非对称的，则每条辐条边出现在 2(l +2) 个子图中，每条轮缘边出现在 2s(t −2) 个子图中。定义 q 为包含 i 条边中至少两条且恰好包含 W_d(s) 的一个中心顶点的 $\theta_{t,\ell}$-副本数。此外，定义 q_j 为恰好包含 j 条边且恰好包含 W_d(s) 的一个中心顶点的此类 $\theta_{t,\ell}$-副本数。现在，根据 q 和 q_j 的定义可得

$$2q \le 2q + q_1 \le \sum_{j \ge 1} j q_j$$

$$= \begin{cases} (t-1)x + s(t-2)y \le (t-1)(x+y) = (t-1)i, & \text{if } \theta_{t,\ell} = F_t \text{ and } s = 1, \\ (t-1)x + s(t-2)y \le s(t-2)(x+y) = s(t-2)i, & \text{if } \theta_{t,\ell} = F_t \text{ and } s \ge 2, \\ (\ell+2)x + s(t-2)y \le s(t-2)(x+y) = s(t-2)i, & \text{if } \theta_{t,\ell} \ne F_t \text{ and } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is symmetric}, \\ 2(\ell+2)x + 2s(t-2)y \le 2s(t-2)(x+y) = 2s(t-2)i, & \text{if } \mathbf{X}(\theta_{t,\ell}) \text{ is asymmetric}. \end{cases}$$

这就证明了该引理。 □

引理 2.4. 假设 W_d（s）包含图 F_t 的一个副本。若 $s = 2$ 且 $t \ge 6$，或 $s \ge 3$且 $t \ge 7$，那么这个 F_t 恰好包含 W_d（s）的一个中心顶点。

证明。假设 F_t 嵌入于 W_d(s) 中。反设 F_t 至少包含 W_d(s) 的两个枢纽顶点 u_1 和 u_2。由于枢纽彼此独立（即 $u_1u_2 \notin E(W_d(s))$），F_t 的中心顶点 v 不可能是枢纽。因此，v 必须位于 W_d(s) 的边界圈 C 上，并且在 C 上恰有两个邻点 w_1 和 w_2。于是，F_t 中 v 的其余 t −3 个邻点（包括 u_1 和 u_2）都必须是枢纽（因为若它们位于 C 上，就会违反嵌入条件）。如果 s =2，那么

$t-3\le 2$，这意味着 $t\le 5$，产生矛盾。如果 $s\ge 3$，那么这 $t-3$ 个枢纽必须在F_t的边界圈上构成一个独立集，这意味着$t-3\le \lfloor t/2\rfloor$（因为圈上任意两个枢纽都不相邻）。此不等式化简为$t\le 6$，与$t\ge 7$矛盾。因此，$F_t$ 至多包含$W_d(s)$的一个枢纽顶点。鉴于F_t 的中心顶点度数为$t-1\ge 5$，而C 上的每个顶点在F_t中的度数至多为 3，中心顶点必定本身就是一个枢纽。证明完毕。□

设G 为一个边染色图。对于正整数i，我们将$A_i(G)$定义为恰好出现在G的i 条边上的颜色集合。对于任意颜色c 和任意子图$H\subseteq G$，我们引入记号$p_j(c,G,H)$，表示图G中恰有j条边染成颜色c的H-子图的数量。G 中至少有两条边染成颜色c 的H-子图总数由下列求和给出：

$$p(c,G,H)=\sum_{j\ge 2}p_j(c,G,H).$$

应用引理2.1、2.2、2.3和2.4，我们得出如下结论。

引理 2.5。 设 d、s、t、l 为非负整数，满足 $d\ge 3t-5$ 且 $t\ge\max\{4,l+3\}$。给定一个边染色的 $W_d(s)$ 和一种颜色 c，有

$$p(c,W_d,F_t)\le\begin{cases}t-2, & if\ c\in A_2(W_d),\\ t-1, & if\ c\in A_3(W_d),\\ \frac{(t-1)i}{2}, & if\ c\in A_i(W_d)\ for\ i\ge 4.\end{cases}$$

$$p(c,W_d,\theta_{t,\ell})\le\begin{cases}\beta(t-3), & if\ c\in A_2(W_d),\\ \beta(t-1), & if\ c\in A_3(W_d),\\ \frac{\beta(t-2)i}{2}, & if\ c\in A_i(W_d)\ for\ i\ge 4,\end{cases}$$

$$where\ \beta=\begin{cases}1, & if\ \theta_{t,\ell}\ne F_t\ and\ \mathbf{X}(\theta_{t,\ell})\ is\ symmetric,\\ 2 & if\ \mathbf{X}(\theta_{t,\ell})\ is\ asymmetric,\end{cases}$$

并且如果 $t\ge 6$且 $s=2$，或者 $t\ge 7$且 $s\ge 3$，那么

$$p(c,W_d(s),F_t)\le\begin{cases}s(t-3), & if\ c\in A_2(W_d(s)),\\ s(t-2), & if\ c\in A_3(W_d(s)),\\ \frac{s(t-2)i}{2}, & if\ c\in A_i(W_d(s))\ for\ i\ge 4.\end{cases}$$

证明。 从上到下共有九个上界，分别基于引理2.1、2.2、2.3、2.1、2.2、2.3、2.1、2.2 和2.3分别推导得出。 □

3 具有彩虹结构的最优染色

定理 3.1。 设 d 和 t 为整数，满足 $d\ge 3t-5$ 且 $t\ge 4$。W_d 的任意边染色，只要使用至少 $\left\lfloor\frac{2t-5}{t-2}d\right\rfloor+1$ 种颜色，就包含一个与 F_t 同构的彩虹子图。换言之，

$$\mathrm{rb}(W_d,F_t)\le\left\lfloor\frac{2t-5}{t-2}d\right\rfloor+1.$$

证明。设 φ 是 W_d的一个边 k-染色，其中 $k := \left\lfloor \frac{2t-5}{-2} t\, d \right\rfloor + 1$。反设 W_d中不存在彩虹 F_t 子图。因此，W_d 中包含的每个 F_t 都有一种颜色 c，使得 $\overline{p(c)} := p(c, W_d, F_t) \geq 1$。令 $A_i := A_i(W_d)$。由于 W_d 中恰好包含 d 个 F_t，且 $2d = |E(W_d)| = \sum i|A_i|$，我们得出 $i_{\geq 1}$

$$\begin{aligned} d &\leq \sum_{c\in[k]} p(c) = \sum_{i\geq 2}\sum_{c\in A_i} p(c) = \sum_{c\in A_2} p(c) + \sum_{c\in A_3} p(c) + \sum_{i\geq 4}\sum_{c\in A_i} p(c) \\ &\leq (t-2)|A_2| + (t-1)|A_3| + \frac{(t-1)}{2}\sum_{i\geq 4} i|A_i| \\ &= (t-2)|A_2| + (t-1)|A_3| + \frac{(t-1)}{2}(2d - |A_1| - 2|A_2| - 3|A_3|) \\ &= -\left(\frac{t-1}{2}|A_1| + |A_2| + \frac{t-1}{2}|A_3|\right) + (t-1)d. \end{aligned}$$

这里，第二个不等式由引理 2.5 得出。因此

$$\frac{t-1}{2}|A_1| + |A_2| + \frac{t-1}{2}|A_3| \leq (t-2)d. \tag{3.1}$$

若 $t = 4$，则（3.1）意味着

$$3|A_1| + 2|A_2| + |A_3| \leq 4d.$$

因此，

$$\begin{aligned} k = \left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1}|A_i| &\leq \frac{1}{4}(3|A_1| + 2|A_2| + |A_3|) + \sum_{i\geq 1}\frac{i}{4}|A_i| \\ &\leq \frac{1}{4}\times 4d + \frac{1}{4}\times 2d = \frac{3}{2}d, \end{aligned}$$

矛盾。

$_{t-3}$若 $t \geq 5$，则应用 $d_{_} \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1} i|A_i|$，将（3.1）改写如下：

$$\begin{aligned} \frac{t-1}{2}|A_1| + |A_2| + \frac{t-1}{2}|A_3| \leq (t-2)d &= (2t-7)d - (t-5)d \\ &\leq (2t-7)d - \frac{t-5}{2}\sum_{i=1}^{t-3} i|A_i|. \end{aligned}$$

这意味着

$$\begin{aligned} (2t-7)d &\geq (t-3)|A_1| + (t-4)|A_2| + (2t-8)|A_3| + \sum_{i=4}^{t-3}\frac{(t-5)i}{2}|A_i| \\ &\geq (t-3)|A_1| + (t-4)|A_2| + (t-5)|A_3| + \sum_{i=4}^{t-3}(t-i-2)|A_i| = \sum_{i=1}^{t-3}(t-i-2)|A_i|. \end{aligned}$$

因此，

$$k = \left\lfloor \frac{2t-5}{t-2} d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1} |A_i| \leq \frac{1}{t-2} \sum_{i=1}^{t-3} (t-i-2)|A_i| + \sum_{i\geq 1} \frac{i}{t-2} |A_i|$$
$$\leq \frac{1}{t-2} \times (2t-7)d + \frac{1}{t-2} \times 2d = \frac{2t-5}{t-2} d.$$

这一矛盾完成了证明。 □

定理 3.2. 设 d、s、t 和l 为整数，满足 $d \geq 3t-5$ 且 $t \geq \max\{5,\mathrm{l}+4\}$。则有：

1. 对 $W_d(s)$ 的任意边染色，若至少使用 $\left\lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \right\rfloor + 1$ 种颜色，则包含一个彩虹 F_t，若进一步有 $s = 2$且 $t \geq 6$，或 $s \geq 3$ 且 $t \geq 7$;
2. 对 W_d 的任意边染色，若至少使用 $\left\lfloor \frac{2t-7}{t-3} d \right\rfloor + 1$ 种颜色，则包含一个彩虹 $\theta_{t,\ell}$。

换言之，

$$\mathrm{rb}(W_d(s), F_t) \leq \left\lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \right\rfloor + 1 \ (s = 2 \text{ and } t \geq 6, \text{ or } s \geq 3 \text{ and } t \geq 7);$$
$$\mathrm{rb}(W_d, \theta_{t,\ell}) \leq \left\lfloor \frac{2t-7}{t-3} d \right\rfloor + 1.$$

证明。 设 φ 是 $\mathrm{W}W_d(s)$ 的一个边k着色，其中$k := \lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \rfloor + 1$。为方便起见，我们定义$H$ 如下：

$$H := \begin{cases} F_t & \text{if } s = 2 \text{ and } t \geq 6, \text{ or } s \geq 3 \text{ and } t \geq 7, \\ \theta_{t,\ell} & \text{if } s = 1. \end{cases}$$

引理 2.4 意味着每个 H 包含于$W_d(s)$ 中恰好包含一个 $W_d(s)$ 的中心顶点。

为导出矛盾，假设不存在彩虹H 存在于$W_d(s)$ 中。因此，包含于$W_d(s)$ 中的每个H 都有一个颜色c，满足$p(c) := p(c, W_d(s), H) \geq 1$。令$A_i := A_i(W_d(s))$。包含于$W_d(s)$ 中的H 的数量恰好为sd 或 $2sd$，分别取决于$\mathbf{X}(H)$ 是对称的还是不对称的，且

$$(s+1)d = |E(W_d(s))| = \sum_{i\geq 1} i|A_i|.$$

我们考虑以下两种情况。

情况 1 $s \geq 2$。

根据引理2.5，如果$\mathbf{X}(H)$ 是对称的，那么

$$\begin{aligned} sd &\le \sum_{c\in[k]} p(c) = \sum_{i\ge 2}\sum_{c\in A_i} p(c) = \sum_{c\in A_2} p(c) + \sum_{c\in A_3} p(c) + \sum_{i\ge 4}\sum_{c\in A_i} p(c) \\ &\le s(t-3)|A_2| + s(t-2)|A_3| + \frac{s(t-2)}{2}\sum_{i\ge 4} i|A_i| \\ &= \frac{s}{2}\Big(2(t-3)|A_2| + 2(t-2)|A_3| + (t-2)((s+1)d - |A_1| - 2|A_2| - 3|A_3|)\Big) \\ &= \frac{s}{2}\Big((s+1)(t-2)d - (t-2)|A_1| - 2|A_2| - (t-2)|A_3|\Big), \end{aligned}$$

且若$\mathbf{X}(H)$是非对称的，则

$$\begin{aligned} 2sd &\le \sum_{c\in[k]} p(c) = \sum_{i\ge 2}\sum_{c\in A_i} p(c) = \sum_{c\in A_2} p(c) + \sum_{c\in A_3} p(c) + \sum_{i\ge 4}\sum_{c\in A_i} p(c) \\ &\le 2s(t-3)|A_2| + 2s(t-2)|A_3| + s(t-2)\sum_{i\ge 4} i|A_i| \\ &= s\Big(2(t-3)|A_2| + 2(t-2)|A_3| + (t-2)((s+1)d - |A_1| - 2|A_2| - 3|A_3|)\Big) \\ &= s\Big((s+1)(t-2)d - (t-2)|A_1| - 2|A_2| - (t-2)|A_3|\Big). \end{aligned}$$

在这两种情况下，我们都有

$$(t-2)|A_1| + 2|A_2| + (t-2)|A_3| \le \Big((s+1)(t-2) - 2\Big)d. \tag{3.2}$$

若 $t = 5$，则（3.2）推出

$$3|A_1| + 2|A_2| + |A_3| \le (3s+1)d.$$

因此，

$$\begin{aligned} k = \left\lfloor \frac{2s+1}{2}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\ge 1}|A_i| &\le \frac{1}{4}(3|A_1| + 2|A_2| + |A_3|) + \sum_{i\ge 1}\frac{i}{4}|A_i| \\ &\le \frac{1}{4}\times(3s+1)d + \frac{1}{4}\times(s+1)d = \frac{2s+1}{2}d, \end{aligned}$$

矛盾。

若$t \ge 6$，则应用$d \ge \frac{1}{s+1}\sum_{i=1}^{t-4} i|A_i|$，我们将（3.2）重新表述如下：

$$\begin{aligned} (t-2)|A_1| + 2|A_2| + (t-2)|A_3| &\le \Big((s+1)(t-2) - 2\Big)d \\ &= \Big((2s+2)t - (8s+10)\Big)d - \Big((s+1)t - (6s+6)\Big)d \\ &\le \Big((2s+2)t - (8s+10)\Big)d - (t-6)\sum_{i=1}^{t-4} i|A_i|. \end{aligned}$$

这意味着

$$\Big((2s+2)t-(8s+10)\Big)d \geq (2t-8)|A_1|+(2t-10)|A_2|+(4t-20)|A_3|+(t-6)\sum_{i=4}^{t-4} i|A_i|.$$

由于$t \geq 6$和$(t-6)i \geq 2(t-3-i)$对$i \geq 4$成立，我们进一步得到

$$\begin{aligned}\Big((s+1)t-(4s+5)\Big)d &\geq (t-4)|A_1|+(t-5)|A_2|+(t-6)|A_3|+\sum_{i=4}^{t-4}(t-3-i)|A_i| \\ &= \sum_{i=1}^{t-4}(t-3-i)|A_i|.\end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned}k &= \left\lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1}|A_i| \\ &\leq \frac{1}{t-3}\sum_{i=1}^{t-4}(t-3-i)|A_i| + \sum_{i\geq 1}\frac{i}{t-3}|A_i| \\ &\leq \frac{1}{t-3}\times\Big((s+1)t-(4s+5)\Big)d + \frac{1}{t-3}\times(s+1)d = \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3}d,\end{aligned}$$

矛盾。

情形$2s=1$。

根据引理 2.5，若$\mathbf{X}(H)$是对称的（在这种情况下，我们有$H \neq F_t$，因为$t \neq 1+3$），则

$$\begin{aligned}d &\leq \sum_{c\in[k]} p(c) = \sum_{i\geq 2}\sum_{c\in A_i} p(c) = \sum_{c\in A_2} p(c) + \sum_{c\in A_3} p(c) + \sum_{i\geq 4}\sum_{c\in A_i} p(c) \\ &\leq (t-3)|A_2| + (t-1)|A_3| + \frac{t-2}{2}\sum_{i\geq 4} i|A_i| \\ &= (t-3)|A_2| + (t-1)|A_3| + \frac{t-2}{2}(2d - |A_1| - 2|A_2| - 3|A_3|) \\ &= -\left(\frac{t-2}{2}|A_1| + |A_2| + \frac{t-4}{2}|A_3|\right) + (t-2)d,\end{aligned}$$

并且如果$\mathbf{X}(H)$是非对称的，那么

$$\begin{aligned}2d &\leq \sum_{c\in[k]} p(c) = \sum_{i\geq 2}\sum_{c\in A_i} p(c) = \sum_{c\in A_2} p(c) + \sum_{c\in A_3} p(c) + \sum_{i\geq 4}\sum_{c\in A_i} p(c) \\ &\leq 2(t-3)|A_2| + 2(t-1)|A_3| + (t-2)\sum_{i\geq 4} i|A_i| \\ &= 2(t-3)|A_2| + 2(t-1)|A_3| + (t-2)(2d - |A_1| - 2|A_2| - 3|A_3|) \\ &= -\Big((t-2)|A_1| + 2|A_2| + (t-4)|A_3|\Big) + 2(t-2)d.\end{aligned}$$

在这两种情况下，我们都有

$$(t-2)|A_1| + 2|A_2| + (t-4)|A_3| \leq 2(t-3)d. \tag{3.3}$$

若 $t = 5$，则（3.3）蕴含

$$3|A_1| + 2|A_2| + |A_3| \leq 4d,$$

因此，

$$\begin{aligned} k = \left\lfloor \frac{3}{2}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1} |A_i| &\leq \frac{1}{4}(3|A_1| + 2|A_2| + |A_3|) + \sum_{i\geq 1} \frac{i}{4}|A_i| \\ &\leq \frac{1}{4} \times 4d + \frac{1}{4} \times 2d = \frac{3}{2}d, \end{aligned}$$

矛盾。

若 $t \geq 6$，则应用 $d \geq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{t-4} i|A_i|$，我们将（3.3）改写如下：

$$\begin{aligned} (t-2)|A_1| + 2|A_2| + (t-4)|A_3| \leq (2t-6)d &= (4t-18)d - (2t-12)d \\ &\leq (4t-18)d - (t-6)\sum_{i=1}^{t-4} i|A_i|. \end{aligned}$$

这意味着

$$(4t-18)d \geq (2t-8)|A_1| + (2t-10)|A_2| + (4t-22)|A_3| + \sum_{i=4}^{t-4}(t-6)i|A_i|.$$

由于 $t \geq 6$ 和 $(t-6)\, i \geq t-3-i$ 对于 $i \geq 4$，我们进一步得到

$$\begin{aligned} (2t-9)d &\geq (t-4)|A_1| + (t-5)|A_2| + (t-6)|A_3| + \sum_{i=4}^{t-4}(t-3-i)|A_i| \\ &= \sum_{i=1}^{t-4}(t-3-i)|A_i|. \end{aligned}$$

因此，

$$\begin{aligned} k = \left\lfloor \frac{2t-7}{t-3}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1} |A_i| &\leq \frac{1}{t-3}\sum_{i=1}^{t-4}(t-i-3)|A_i| + \sum_{i\geq 1}\frac{i}{t-3}|A_i| \\ &\leq \frac{1}{t-3} \times (2t-9)d + \frac{1}{t-3} \times 2d = \frac{2t-7}{t-3}d, \end{aligned}$$

矛盾。

在每种情况下，我们都会得到矛盾，从而完成证明。 □

4 极值图

定理 4.1。 对于满足 d、s、t，且 $d \geq t-1$ 并且 $t \geq 4$ 的整数，我们有

$$\mathrm{rb}(W_d, F_t) \geq \left\lfloor \frac{2t-5}{t-2} d \right\rfloor + 1.$$

证明。 对于带有中心顶点 u 和边界顶点 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2, \cdots, \mathrm{v}_d$ 的 W_d，我们将辐条边 $u\mathrm{v}_1, u\mathrm{v}_2, \cdots, u\mathrm{v}_d$ 划分为 q 组，从 $u\mathrm{v}_1$, 开始，每组包含连续的 $t-2$ 条辐条边（最后一组可能少于 $t-2$ 条辐条边）。

对于第 m 组（$1 \leq \mathrm{m} \leq \mathrm{q}-1$）辐条 $\mathrm{uv}_{(m-1)(t-2)+1}, \mathrm{uv}_{(m-1)(t-2)+2}, \cdots, \mathrm{uv}_{m(t-2)}$，将前两条辐条 $\mathrm{uv}_{(m-1)(t-2)+1}$ 和 $\mathrm{uv}_{(m-1)(t-2)+2}$ 染成颜色 $\mathrm{d}+(\mathrm{m}-1)(\mathrm{t}-3)+1$；对于 $3 \leq \mathrm{i} \leq \mathrm{t}-2$，将 $\mathrm{uv}_{(m-1)(t-2)+i}$ 染成颜色 $\mathrm{d}+(\mathrm{m}-1)(\mathrm{t}-3)+(\mathrm{i}-1)$。因此，第 m 组的最后一条辐条 $\mathrm{uv}_{m(t-2)}$ 染成颜色 $\mathrm{d}+\mathrm{m}(\mathrm{t}-3)$。对于最后一组（第 q 组）：

- 如果该结构至少包含两条辐条边，则将前两条辐条边 $u\mathrm{v}_{(q-1)(t-2)+1}$ 和 $u\mathrm{v}_{(q-1)(t-2)+2}$ 染成颜色 $d+(q-1)(t-3)+1$。剩余的辐条边依次赋予比前一条辐条边的颜色大 1 的颜色；
- 如果该结构恰好包含一条辐条边 $u\mathrm{v}_d$，则将其染成与 $u\mathrm{v}_{d-1}$ 相同的颜色，即 $d+(q-1)(t-3)$。

这些规则旨在确保任意 $t-1$ 条连续辐条边中，至少有两条颜色相同。因此，在将 W_d 的每条轮缘边 $\mathrm{v}_i\mathrm{v}_{i+1}$ 染成颜色 i 时，我们便完成了 W_d 的边染色，同时避免出现彩虹 F_t。由于 <style id='d $=(q-1)(t-2)+p$，其中 $1 \leq p \leq t-2$，且该着色使用

$$\begin{aligned} & d+(q-1)(t-3)+(d-(q-1)(t-2)-1) \\ =& 2d-sq=\begin{cases} 2d-\left\lfloor \frac{d}{t-2} \right\rfloor+1=\left\lfloor \frac{2t-5}{t-2} d \right\rfloor, & \text{if } p<t-2, \\ 2d-\frac{d}{t-2}=\frac{2t-5}{t-2} d, & \text{if } p=t-2 \end{cases} \end{aligned}$$

颜色，我们得出本定理的结论。 □

定理 4.2. 对于满足 $d \geq t-1$ 且 $t \geq$ 最大值$\{5, \mathrm{l}+4\}$ 的整数 d, t, s, l，我们有 e

$$\mathrm{rb}(W_d, \theta_{t,\ell}) \geq \left\lfloor \frac{2t-7}{t-3} d \right\rfloor + 1,$$

此外，如果 $s=2$ 且 $t \geq 6$，或 $s \geq 3$且 $t \geq 7$，那么

$$\mathrm{rb}(W_d(s), F_t) \geq \left\lfloor \frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3} d \right\rfloor + 1.$$

证明。 对于 $W_d(s)$，其中心顶点为 $u_1, u_2, \ldots\ldots$、u_s，边界顶点为 $\mathrm{v}_1, \mathrm{v}_2$、$\cdots$、$\mathrm{v}_d$，我们将轮缘边 $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2, \mathrm{v}_2\mathrm{v}_3$、$\cdots$、$\mathrm{v}_{d-1}\mathrm{v}_d$、$\mathrm{v}_d\mathrm{v}_1$ 划分为 q 组，从 $\mathrm{v}_1\mathrm{v}_2$, 开始，每组包含连续的 $t-3$ 条轮缘边（最后一组可能少于 $t-3$ 条轮缘边）。

对于第 m 组（$1 \le m \le q-1$），其中轮缘边为 $v_{(m-1)(t-3)+1}v_{(m-1)(t-3)+2}$、$v_{(m-1)(t-3)+2}v_{(m-1)(t-3)+3}$、$\cdots$、$v_{m(t-3)}v_{m(t-3)+1}$，将前两条轮缘边 $v_{(m-1)(t-3)+1}v_{(m-1)(t-3)+2}$ 和 $v_{(m-1)(t-3)+2}v_{(m-1)(t-3)+3}$ 着色为颜色 $sd+(m-1)(t-4)+1$；对于 $3 \le i \le t-3$，将 $v_{(m-1)(t-3)+i}v_{(m-1)(t-3)+i+1}$着色为颜色 $sd+(m-1)(t-4)+(i-1)$。因此，第 m 组的最后一条轮缘边 $v_{m(t-3)}v_{m(t-3)+1}$ 着色为 $sd+m(t-4)$。对于最后一组（第 q 组）：

- 如果其中至少有两条轮缘边，则将前两条轮缘边 $v_{(q-1)(t-3)+1}v_{(q-1)(t-3)+2}$和 $v_{(q-1)(t-3)+2}v_{(q-1)(t-3)+3}$ 着成颜色 $sd+(q-1)(t-4)+1$，其余轮缘边的颜色则依次比组内前一条轮缘边的颜色递增 1；
- 如果其中恰好有一条轮缘边 v_dv_1，则将其着成与 $v_{d-1}v_d$ 相同的颜色，即$sd+(q-1)(t-4)$。

这些规则旨在确保任意$t-2$ 条连续轮缘边中，至少有两条轮缘边颜色相同。因此，在将$W_d(s)$的每条辐条u_av_i 着成颜色 $(a-1)d+i$ 时，对于每个$a \in [s]$,，我们完成$W_d(s)$的一种着色，使得

- 不存在彩虹F_t，若$s=2$ 且$t \ge 6$，或$s \ge 3$ 且$t \ge 7$，此外；
- 不存在彩虹 $\theta_{t,1}$，若$s=1$。

由于$d=(q-1)(t-3)+p$，其中 $1 \le p \le t-3$，且该着色使用了

$$
\begin{aligned}
&sd+(q-1)(t-4)+(d-(q-1)(t-3)-1)\\
=&(s+1)d-q=\begin{cases}(s+1)d-\left\lfloor\frac{d}{t-3}\right\rfloor-1=\left\lfloor\frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3}d\right\rfloor, & \text{if } p<t-3,\\ (s+1)d-\left\lfloor\frac{d}{t-3}\right\rfloor=\frac{(s+1)t-(3s+4)}{t-3}d, & \text{if } p=t-3\end{cases}
\end{aligned}
$$

种颜色，我们得出定理的结论。 □

在图 2(a)中，我们展示了按照定理 4.1 中的构造对 W_8 进行的 13边染色，确保不存在彩虹 F_5 子图。同样，在图 2(b)中，我们应用定理 4.2 中的证明技巧，构造了对 $W_8(2)$进行的 21边染色，从而避免出现彩虹 F_6 子图。然而，该着色意外地包含一个彩虹 F_5（以灰色突出显示），这意味着它不是 $rb(W_8(2), F_5)$ 的极值图。实际上，如第 5 节所示，我们将证明 $rb(W_8(2), F_5) \le 19$。因此，$W_8(2)$的任何 21边染色都必须包含一个彩虹 F_5 子图。

5 结论与评述

综合定理 3.1、3.2、4.1和4.2的结果，我们证明了定理 1.2。此外，综合定理 3.2 和4.2 可得定理 1.3。如前所述，我们将证明定理 *1.2* $t \ge 6$ 第二和第三个断言中规定的$t \ge 7$ 条件是关键的，以下这个具有独立意义的定理便说明了这一点。

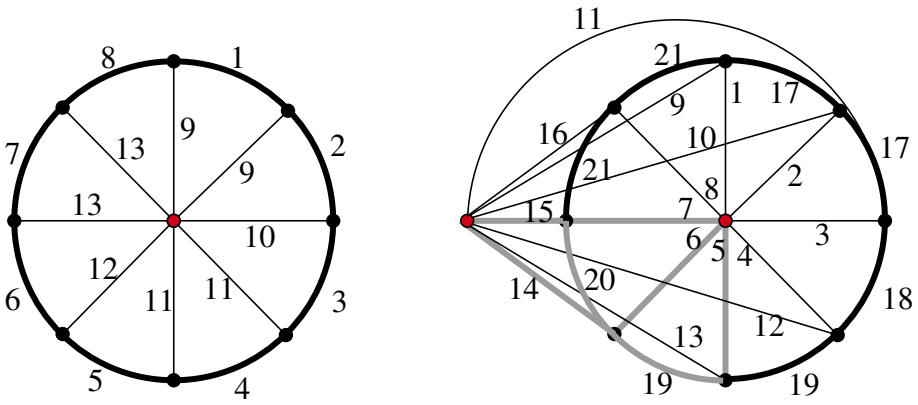

图2：（a）一个没有任何彩虹W_8 中的F_5的13边染色；（b）一个$W_8(2)$的21边染色，其中没有任何彩虹F_6,，但存在一个彩虹F_5（以灰色标出）。

定理 5.1. 对于整数 $d \geq 5$，有 彩虹拉姆齐数$(W_d(2), F_5) \leq \left\lfloor \frac{33}{14} d \right\rfloor + 1$ 以及 彩虹拉姆齐数$(W_d(3), F_6) \leq \left\lfloor \frac{55}{16} d \right\rfloor + 1$。

证明。令 $m \in \{5, 6\}$、$k_5 = \left\lfloor \frac{33}{14} d \right\rfloor + 1$ 和 $k_6 = \left\lfloor \frac{55}{16} d \right\rfloor + 1$。将 $W_d(m-3)$ 定义为一个具有 k_m 种颜色的边染色图。为导出矛盾，假设 $W_d(m-3)$ 中不存在彩虹 F_m 子图。因此，$W_d(m-3)$ 中的每个 F_m 都含有一种颜色 c，使得 $p^{(m)}(c) := p(c, W_d(m-3), F_m) \geq 1$。设 $A_i^{(m)} := A_i(W_d(m-3))$，且 $p_j^{(m)}(c) := p_j(c, W_d(m-3), F_m)$。

在图 $W_d(m-2)$ 中，每个边界顶点 w 都属于以 w 为中心的 $2m-6$ F_5-子图。因此，$W_d(m-3)$ 中包含的 F_m 数量恰好为 $(3m-9)d$；此外，每条辐条边出现在 α_m 个不同的 F_m-子图中，而每条轮缘边恰好出现在 β_m 个中，其中 $\alpha_5 = \beta_5 = 14$、$\alpha_6 = 19$ 和 $\beta_6 = 24$。对于颜色 $c \in A$，设 $x := x(c)$ 和 $y := y(c)$ 分别表示着色为 c 的辐条边和轮缘边的数量。因此，对于任意$c \in A_i$，有

$$2p^{(m)}(c) \leq 2p^{(m)}(c) + p_1^{(m)}(c) \leq \sum_{j \geq 1} j p_j^{(m)}(c) = \alpha_m x + \beta_m y \leq \beta_m (x + y) = \beta_m i. \tag{5.1}$$

通过采用与证明引理 2.1 和 2.2时类似的方法，我们得到

$$\begin{cases} p^{(5)}(c) \leq 9 & \text{for any } c \in A_2^{(5)}, \\ p^{(5)}(c) \leq 15 & \text{for any } c \in A_3^{(5)}, \\ p^{(6)}(c) \leq 15 & \text{for any } c \in A_2^{(6)}, \\ p^{(6)}(c) \leq 27 & \text{for any } c \in A_3^{(6)}, \end{cases} \tag{5.2}$$

其中，这些界限来自四种不同的构型：

- 当两条相邻的辐条边被着色为 c 时，恰好存在九个包含这些辐条边的 F_5-子图，位于 $W_d(2)$ 中；
- 当三条连续辐条被染成颜色c时，$W_d(2)$中至多有十五个F_5子图至少包含其中两条辐条；

- 当两条连续轮缘边被染成颜色c时，$W_d(3)$中至多有十五个包含这两条轮缘边的F_6子图；

- 当三个连续的轮缘边被染成c时，至多有二十七个F_6-子图在$W_d(3)$中至少包含这三个轮缘边中的两条。

我们要求$d \geq 5$；否则，前两个界可能变为 10 和 16，从而干扰后续计算。尽管假设$d \geq 6$可以将最后一个界降至 24，但这一调整并不会加强我们的最终结论。此外，我们有

$$(m-2)d = |E(W_d(m-3))| = \sum_{i\geq 1} i|A_i^{(m)}|. \tag{5.3}$$

有了这些界，我们可以推得

$$\begin{aligned}
6d &\leq \sum_{c\in[k]} p^{(5)}(c) = \sum_{i\geq 2}\sum_{c\in A_i^{(5)}} p^{(5)}(c) = \sum_{c\in A_2^{(5)}} p^{(5)}(c) + \sum_{c\in A_3^{(5)}} p^{(5)}(c) + \sum_{i\geq 4}\sum_{c\in A_i^{(5)}} p^{(5)}(c) \\
&\overset{(5.1)(5.2)}{\leq} 9|A_2^{(5)}| + 15|A_3^{(5)}| + \sum_{i\geq 4} 7i|A_i^{(5)}| \\
&\overset{(5.3)}{=} 9|A_2^{(5)}| + 15|A_3^{(5)}| + 7(3d - |A_1^{(5)}| - 2|A_2^{(5)}| - 3|A_3^{(5)}|) = 21d - (7|A_1^{(5)}| + 5|A_2^{(5)}| + 6|A_3^{(5)}|).
\end{aligned}$$

由此可知

$$\frac{3}{4}|A_1^{(5)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(5)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(5)}| \leq \frac{3}{28}\left(7|A_1^{(5)}| + 5|A_2^{(5)}| + 6|A_3^{(5)}|\right) \leq \frac{45}{28}d.$$

因此，

$$\begin{aligned}
k_5 = \left\lfloor \frac{33}{14}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1}|A_i^{(5)}| &\leq \frac{3}{4}|A_1^{(5)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(5)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(5)}| + \frac{1}{4}\sum_{i\geq 1} i|A_i^{(5)}| \\
&\overset{(5.3)}{=} \frac{3}{4}|A_1^{(5)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(5)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(5)}| + \frac{3}{4}d \leq \frac{45}{28}d + \frac{3}{4}d = \frac{33}{14}d.
\end{aligned}$$

对于$m = 6$，我们有

$$\begin{aligned}
9d &\leq \sum_{c\in[k]} p^{(6)}(c) = \sum_{i\geq 2}\sum_{c\in A_i^{(6)}} p^{(6)}(c) = \sum_{c\in A_2^{(6)}} p^{(6)}(c) + \sum_{c\in A_3^{(6)}} p^{(6)}(c) + \sum_{i\geq 4}\sum_{c\in A_i^{(6)}} p^{(6)}(c) \\
&\overset{(5.1)(5.2)}{\leq} 15|A_2^{(6)}| + 27|A_3^{(6)}| + \sum_{i\geq 4} 12i|A_i^{(6)}| \\
&\overset{(5.3)}{=} 15|A_2^{(6)}| + 27|A_3^{(6)}| + 12(4d - |A_1^{(6)}| - 2|A_2^{(6)}| - 3|A_3^{(6)}|) = 48d - (12|A_1^{(6)}| + 9|A_2^{(6)}| + 9|A_3^{(6)}|).
\end{aligned}$$

由此可得

$$\frac{3}{4}|A_1^{(6)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(6)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(6)}| \leq \frac{3}{16}\left(4|A_1^{(6)}| + 3|A_2^{(6)}| + 3|A_3^{(6)}|\right) \leq \frac{39}{16}d.$$

因此，

$$k_6 = \left\lfloor \frac{55}{16}d \right\rfloor + 1 = \sum_{i\geq 1} |A_i^{(6)}| \leq \frac{3}{4}|A_1^{(6)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(6)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(6)}| + \frac{1}{4}\sum_{i\geq 1} i|A_i^{(6)}|$$
$$\overset{(5.3)}{=} \frac{3}{4}|A_1^{(6)}| + \frac{2}{4}|A_2^{(6)}| + \frac{1}{4}|A_3^{(6)}| + d \leq \frac{39}{16}d + d = \frac{55}{16}d.$$

这两个矛盾完成了证明。 □

我们不知道定理 5.1 中的两个界是否是紧的。因此，确定 $\mathrm{rb}(W_d(2),F_5)$ 和 $\mathrm{rb}(W_d(3),F_6)$ 的精确值仍然是一个有趣的开放问题。更广泛地说，对于 $W_d(s),F_t$，当 $s = 2$ 和 $t \leq 5$，或 $s \geq 3$ 和 $t \leq 6$ 时，确定 rb(

致谢

作者感谢 Ping Chen、YaliWu 和 DezhiZou 参与了关于本文主题的初步讨论。

参考文献

[1] Alon, N. 关于 Erdöus、Simonovits 和 Sós 提出的反 Ramsey 定理猜想。图论杂志 *7* (1983), 91–94.[2] An, Y., Gya˝ori, E., and Li, B. 完全多部图中团的反 Ramsey 数。离散数学 *349*, 2 (2026), 114692.[3] Chen, G., Lan, Y., and Song, Z.-X. 匹配的平面反 Ramsey 数。离散数学 *342*, 7 (2019年), 2106–2111.[4] Chen, H., Li, X., and Tu, J. 匹配彩虹数的完整解。离散数学 *309*, 10 (2009), 3370–3380.[5] Erd˝os, P., Simonovits, M., and S´os, V. T. 反 Ramsey 定理。载于《无限集与有限集》（讨论会，凯斯特海伊，*1973*；献给 *P. Erd˝os* 的 *60* 岁生日），第 *I*、*II*、*III* 卷，第 10 卷，János Bolyai 数学学会讨论会。北荷兰出版社，阿姆斯特丹-伦敦，1975, pp. 633–643.[6] Fujita, S., Kaneko, A., Schiermeyer, I., and Suzuki, K. 完全图中含 r 种颜色的彩虹*k*-匹配。组合学电子期刊 *16*, 1 (2009).[7] Gu, R., Li, J., and Shi, Y. 超图中路径和圈的反 Ramsey 数。*SIAM* 离散数学杂志 *34*, 1 (2020), 271–307.

[8] Gy˝ori, E., Martin, R. R., Paulos, A., Tompkins, C., and Varga, K. 路径的彩虹平面图 Turán 数。离散数学 *348*, 10 (2025年), 114523.[9] Haas, R., and Young, M. 完美匹配的反 Ramsey 数。离散数学 *312*, 5 (2012), 933–937.[10] Horˇn´ak, M., Jendrol', S., Schiermeyer, I., and Sot´ak, R. 平面三角剖分中圈的彩虹数。图论杂志 *78*, 4 (2015年), 248–257.[11] Jakhar, J., Budden, M., and Moun, M. 平面宿主图中的彩虹数。*Filomat 39*, 8 (2025年), 2695–2710.[12] Jendrol', S., Schiermeyer, I., and Tu, J. 平面三角剖分中匹配的彩虹数。离散数学 *331* (2014), 158–164.[13] Jiang, T., and West, D. B. 关于 Erd˝os-Simonovits-Sós 的圈反 Ramsey 数猜想。组合学、概率与计算 *12*, 5-6 (2003), 585–598.[14] Jin, Z. 超图中匹配的反 Ramsey 数。离散数学 *344*, 12 (2021), 112594.[15] Jin, Z., Ma, H., and Yu, R. 边染色平面二部图中的彩虹匹配。应用数学与计算 *432* (2022), 127356.[16] Jin, Z., Wang, F., Wang, H., and Lv, B. 边染色 Kneser 图中的彩虹三角形。应用数学与计算 *365* (2020), 124724.[17] Jin, Z., and Ye, K. 平面图中匹配的彩虹数。离散数学 *341*, 10 (2018), 2846–2858.[18] Jin, Z., Yu, R., and Sun, Y. 外平面图中匹配的反 Ramsey 数。《离散应用数学》*345*, C (2024), 125–135.[19] Jin, Z., Zhong, K., and Sun, Y. 完全多部图中三角形的反 Ramsey 数。图与组合 *37*, 3 (2021), 1025–1044.[20] Lan, Y., Shi, Y., and Song, Z.-X. 路径和圈的平面反 Ramsey 数。离散数学 *342*, 11 (2019年), 3216–3224.[21] Li, X., Tu, J., and Jin, Z. 匹配的二部彩虹数。离散数学 *309*, 8 (2009), 2575–2578.[22] Liu, X., and Song, J. 超图反 Ramsey 定理。图论杂志 *108*, 4 (2025年), 808–816.

[23] Özkahya, L. 和 Young, M. 超图中匹配的反 Ramsey 数。《离散数学》*313*（2013年），2359–2364。[24] Qin, Z.、Lan, Y. 和 Shi, Y. 平面三角剖分中匹配的彩虹数的改进界。《离散数学》*342*，1（2019年），221–225。[25] Qin, Z.、Lan, Y.、Shi, Y. 和 Yue, J. 平面三角剖分中匹配的精确彩虹数。《离散数学》*344*，4（2021），112301。[26] Qin, Z.、Lei, H. 和 Li, S. 平面图中小图的彩虹数。应用数学与计算*371*（2020），124888。[27] Qin, Z.、Li, S.、Lan, Y. 和 Yue, J. 平面图中路径的彩虹数。应用数学与计算*397*（2021），125918。[28] Ren, L.、Lan, Y. 和 Xu, C. 极大二部平面图中圈的彩虹数。《离散应用数学》*356*（2024年），37–43。[29] Ren, L.、Lan, Y. 和 Xu, C. 极大二部平面图中路径的彩虹数。《离散数学》*348*，11（2025年）。[30] Xiang, C.、Lan, Y.、Yan, Q. 和 Xu, C. 匹配的外平面反拉姆齐数。《*Symmetry*》*14*，6（2022）。[31] Xu, C.、Hu, X.、Wang, W. 和 Zhang, S. 边染色图中的彩虹团。《欧洲组合学杂志》*54*（2016），193–200。[32] Xue, Y.、Shan, E. 和 Kang, L. *r*部*r*一致超图中匹配的反 Ramsey 数。《离散数学》*345*，4（2022），112782。[33] Zhang, M. 和 Dong, F. 完全多部图中树的反 Ramsey 数。《离散数学》*345*，12（2022），113100。