arXiv:2512.22885v1 [math.DG] 28 Dec 2025

空间形式中Steklov特征值的缩放不等式及扭曲积流形上的尖锐特征值估计

Zongyi Lv、Changwei Xiong 和 Yuxun Zou

Abstract. 在第一部分，我们推导了球面和双曲空间中的二维测地圆盘上二阶Steklov问题及两个四阶Steklov问题的归一化谱关于测地半径的单调性。归一化采用了四个自然的几何因子。由此，我们得到空间形式中曲率变化的二维测地圆盘上Steklov特征值的Escobar型界。此外，我们还得到两个适用于高维情形的单调性结果。在第二部分，我们给出了关于非负里奇曲率且边界严格凸的扭曲积流形上两个四阶Steklov问题的谱的一些尖锐界。特别地，我们证实了Qiaoling Wang和Changyu Xia于2018年提出的猜想：在三维扭曲积流形的情形下，四阶Steklov问题的第一个非零特征值具有尖锐下界。

1. 引言

谱几何中研究最广泛的主题之一是各种特征值的估计。本文的第一部分关注 Steklov 特征值的缩放性质，这可能会带来特征值估计。欧几里得空间中特征值的缩放性质在文献中已有充分研究。例如，对于有界欧几里得区域 $M \subset \mathbb{R}^n$，其所有 Dirichlet特征值 $\lambda(M)$ 均满足

$$t^2\lambda(tM) = \lambda(M), \quad t > 0.$$

相比之下，关于球面空间和双曲空间等弯曲空间中的这类缩放性质，人们所知较少。在 [31]Langford 和 Laugesen 研究了球面空间和双曲空间中狄利克雷特征值与诺伊曼特征值的缩放性质，主要针对二维情形。本文旨在探讨这些弯曲空间中三类 Steklov特征值的缩放性质。对于二维情形，我们

Date：2025年12月30日。2020 *Mathematics Subject Classification.* 35P15,58J50, 53C21.*Key words and phrases.* 缩放不等式；Steklov特征值；特征值估计；测地球；扭曲积流形。

能够得到相当完整的描述；有趣的是，对于某些高维情形，我们也能得到单调性结果。在本文的第二部分，我们考虑更一般的扭曲积流形，并推导出这类具有非负里奇曲率和严格凸边界的流形上四阶 Steklov特征值的一些尖锐结果。

本研究的动机不仅包括曲面空间中 Steklov 特征值的缩放性质，也包括一般黎曼流形上 Steklov 特征值的精细估计。换言之，只要能够建立一般黎曼流形上的特征值与模型空间（例如具有旋转对称度量的扭曲积流形）上的特征值之间的比较关系（例如比较结果 [18,定理 1 和 2]），并且能够推导出这些模型空间上特征值的良好估计，我们便能得到一般带边界黎曼流形上特征值的估计。因此，恰当地估计模型空间上的特征值，是估计一般黎曼流形上特征值的主要步骤之一。事实上，对于众所周知的狄利克雷和诺伊曼特征值，人们已投入相当多的研究，试图在具有旋转对称度量的流形上获得令人满意的估计；例如参见 [1–3，6，8–10，12，15，20，21，23–27，32，33，36–39, 41, 42, 44] 以及其中的参考文献。因此，对 Steklov 特征值开展类似研究是很自然的。

设 (M^n, g) 是一个带有边界 ∂M 的 n 维光滑紧黎曼流形。我们考虑以下三类 Steklov 特征值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u, & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{in } M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \ \dfrac{\partial (\Delta u)}{\partial \nu} + \xi u = 0, & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{1.2}$$

and

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, & \text{in } M, \\ u = 0, \ \Delta u = \eta \dfrac{\partial u}{\partial \nu}, & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{1.3}$$

其中，ν 表示 ∂M的外单位法向量。问题（1.1）由 Steklov [43] 于约 1900 年提出；关于二阶Steklov问题的精彩综述和历史评述，请参见 [14, 22, 30] 。问题（1.2）和（1.3最初由 J. R. Kuttler 和 V. G. Sigillito [29]于 1968年研究，随后由 L. E. Payne [34]于 1970年研究；例如，关于广义四阶斯捷克洛夫特征值问题的介绍，请参见 [11]。关于这些 Steklov问题的介绍，另请参见第2.3节。特别地，我们用 σ_m、ξ_m 和 η_m 表示从 $m = 0$ 开始的特征值。因此 $\sigma_0 = 0$

以及 $\xi_0 = 0$。此外，我们用 $\sigma_{(m)}$、 $\xi_{(m)}$ 和 $\eta_{(m)}$ 表示不计重数的特征值。

本文主要研究配备扭曲乘积度量的扭曲积黎曼流形 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}}.$$

本文对扭曲因子 $h(r)$ 作出如下假设（A）。

(A) $h \in C^\infty([0, R])$, $h(r) > 0$ for $r \in (0, R]$, $h'(0) = 1$ and $h^{(2k)}(0) = 0$ for all integers $k \geq 0$.

特别是，当 $h(r) = \sin r$， M位于球面上；当 $h(r) = \sinh r$， M位于双曲空间中。关于这一设定的更多细节，参见第 2.1 节。此外，根据第 2.3节的结果，扭曲积流形上的 Steklov 特征值通常具有重数。因此，我们只需研究特征值$\sigma_{(m)}$， $\xi_{(m)}$ 和 $\eta_{(m)}$ ，而无需计入重数。

接下来，我们讨论球面和双曲空间中缩放所对应的几何因子。首先注意，上述 Steklov问题具有以下缩放性质：

$$\begin{aligned}
\sigma_k((M, c^2 g)) &= c^{-1} \sigma_k((M, g)),\ c > 0, \\
\xi_k((M, c^2 g)) &= c^{-3} \xi_k((M, g)),\ c > 0, \\
\eta_k((M, c^2 g)) &= c^{-1} \eta_k((M, g)),\ c > 0.
\end{aligned}$$

对于球面中的二维测地圆盘（$h(r) = \sin r$），有四个自然的几何因子（见图 1）：测地半径（或孔径） R，边界圆的欧几里得半径 $\sin R$，立体投影半径 $\tan(R/2)$，以及面积 $4\pi \sin^2(R/2)$。因此，鉴于上述缩放性质，自然可以考察以下量关于 R 的单调性

$$\begin{gathered}
\sigma_{(m)} R, \quad \sigma_{(m)} \sin R, \quad \sigma_{(m)} \tan(R/2), \quad \sigma_{(m)} \sin(R/2), \\
\xi_{(m)} R^3, \quad \xi_{(m)} \sin^3 R, \quad \xi_{(m)} \tan^3(R/2), \quad \xi_{(m)} \sin^3(R/2), \\
\eta_{(m)} R, \quad \eta_{(m)} \sin R, \quad \eta_{(m)} \tan(R/2), \quad \eta_{(m)} \sin(R/2).
\end{gathered}$$

在双曲空间（$h(r) = \sinh r$）中，我们可以考虑关于自然几何因子的类似问题（见第 2.2节）。

在第1节余下部分，我们将介绍并讨论主要结果。在第1.1–1.3 节中，我们将考察二维空间形式，全面描述 Steklov 特征值的缩放性质，并以此为推论，给出变化曲率测地圆盘上这些 Steklov 特征值的 Escobar型单调性结果。接着，在第1.4 节中，我们转而研究高维空间形式，并给出两个单调性结果。最后，在第 1.5 节中，我们讨论扭曲积流形上的一些锐估计。

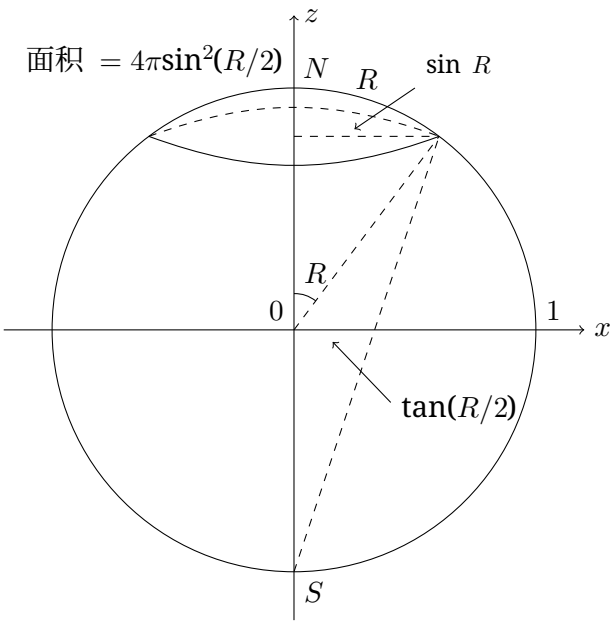

FIGURE 1. $\mathbb{S}^2$中的几何因子

注 1. 与第 1.1–1.4 节中结果类似的 Dirichlet 和诺伊曼特征值结果，由 Langford 和 Laugesen 推导得出，见 [31]。更具体地说，他们研究了空间形式中的二维测地圆盘，考察以边界圆的立体投影半径和欧几里得半径归一化的完整 Dirichlet 谱和诺伊曼谱的单调性、以面积归一化的第二诺伊曼特征值，以及以测地半径归一化的第一和第二狄利克雷特征值。作为推论，他们得到了诺伊曼特征值的 Bandle型界 [4] [5,推论 3。9] 以及变化曲率测地圆盘上 Dirichlet 特征值的 Cheng型界 [13]。最近，Harman [24] 研究了 Robin 和 Dirichlet 特征值的缩放不等式。

注记 2. 对于第1.5节中的结果，最初的动机是研究与 Escobar猜想 类似的问题 [17,第 115]节。参见 [16, 49–52] ，了解详细的研究动机及相关开放问题。

1.1. 二维球面上的缩放不等式2。对于二维球面，我们有$\sigma_{(m)}$、 $\xi_{(m)}$ 和$\eta_{(m)}$的简洁表达式。具体而言，我们有（参见，例如， [18, 命题 4] [50, (1.3)]）

$$\sigma_{(m)} = \frac{m}{\sin R}.$$

并且我们有 $\xi_{(m)}$ 和$\eta_{(m)}$ 如引理32中所述（在球面上）。利用这些显式表达式，我们能够相当完整地描述二维球面上的缩放不等式。

首先考虑二阶Steklov问题。由于本文的主要目的是估计特征值，而在二维情形下，我们已经知道 $\sigma_{(m)} = m/\sin R$的显式表达式，因此无需推导 R 关于 $\sigma_{(m)}R$,$^{\sigma_{(m)}}\sin R$, $^{\sigma_{(m)}}\tan(R/2)$和$^{\sigma_{(m)}}\sin(R/2)$的单调性。仅为比较起见，容易验证，在$(0,\pi)$上，函数 $\sigma_{(m)}R$ 严格递增，$^{\sigma_{(m)}}\sin R$为常数，$^{\sigma_{(m)}}\tan(R/2)$严格递增，并且$^{\sigma_{(m)}}\sin(R/2)$也严格递增。

非平凡的情形对应于两个四阶 Steklov 特征值问题。接下来，我们给出 $\xi_{(m)}$ 第一类四阶 Steklov 特征值问题（1.2）的结果。

定理 3. 对于2维球面上半径为R 的测地圆盘的特征值 $\xi_{(m)}$ $(m \geq 1)$，有以下结论。

(1) 函数 $\xi_{(m)}R^3$ 在$(0,\pi)$上严格递增。*(2)* 函数 $\xi_{(m)}\sin^3 R$ 在$(0,\pi)$上严格递减。*(3)* 函数 $\xi_{(m)}\tan^3(R/2)$ 在$(0,\pi)$上严格递增。*(4)* 函数 $\xi_{(m)}\sin^3(R/2)$ 在$(0,\pi)$上严格递增。

注4。当 $R \to 0+$时，函数 $\xi_{(m)}R^3$ 收敛于欧几里得单位圆盘上的第 m个Steklov 特征值， $2m^2(m+1)$。因此，由定理3中的（2）和（4），可得

$$\xi_{(m)}\sin^3 R < 2m^2(m+1) < 8\xi_{(m)}\sin^3\frac{R}{2}, \quad R \in (0,\pi),$$

or

$$\frac{m^2(m+1)}{4\sin^3\frac{R}{2}} < \xi_{(m)} < \frac{2m^2(m+1)}{\sin^3 R}, \quad R \in (0,\pi).$$

因此，我们得到关于 $\xi_{(m)}$的一个双边估计。类似的论证也适用于定理5、7 和8。

最后，我们得到关于$\eta_{(m)}$ 第二类四阶Steklov特征值问题（1.3）的结果。

定理5。 对于半径为R 的2维球面上的测地圆盘的特征值$\eta_{(m)}$ （$m \geq 1$），我们有以下结论。

(1) 函数 $\eta_{(m)}R$ 在*(0,* π*)*上严格递增。*(2)* 函数$\eta_{(m)}$ *sin* R在*(0,* π*)*上严格递减。*(3)* 函数$\eta_{(m)}$ *tan* $(R/2)$在*(0,* π*)*上严格递增。*(4)* 对于 $m = 1$，存在一个 $R_1 \in$ *(0,* π*)*，使得函数$\eta_{(1)}$ *sin*$(R/2)$在*(0,* R_1*)*上严格递减，并在*(*R_1*,* π*)*上严格递增；而对于 $m \geq 2$，函数$\eta_{(m)}$ *sin* $(R/2)$在*(0,* π*)*上严格递增。

注 6。 由 $m = 0$，根据下面的引理 32 可知 $\eta_{(0)}$ = 余切$(R/2)$。接着不难验证，在 $(0,\pi)$ 上，函数 $\eta_{(0)}R$ 是严格

递减的，$\eta_{(0)}$ 正弦 R 严格递减，$\eta_{(0)}$ 正切 $(R/2)$ 为常数，且$\eta_{(0)}$ 正弦 $(R/2)$ 严格递减。

1.2. **二维2维双曲空间中的缩放不等式**。与球面上的情形一样，对于二维双曲空间中的二阶 Steklov 特征值问题，我们有如下显式表达式（参见例如 [18, 命题 4] [50,(1.3)]）

$$\sigma_{(m)} = \frac{m}{\sinh R},$$

对于四阶问题，我们也有 $\xi_{(m)}$ 和$\eta_{(m)}$ 的显式表达式，如下文引理 33 所示。于是可以直接验证，在 $(0, +\infty)$ 上，函数 $\sigma_{(m)}R$ 严格递减，函数 $\sigma_{(m)}$ $\sinh R$ 为常数，函数 $\sigma_{(m)}\tanh(R/2)$ 严格递减，且函数$\sigma_{(m)}\sinh(R/2)$ 严格递减。

接下来，我们转向非平凡问题，即两个四阶特征值问题。首先，我们得到关于问题 (1.2) 的如下结果。

定理 7. 对于($\xi_{(m)}$ $m \geq 1$) ，即双曲空间中半径为R 的测地圆盘的特征值，我们有以下结论。

(1) 函数 $\xi_{(m)}R^3$ 在$(0, +\infty)$上严格递减。*(2)* 函数 $\xi_{(m)} \sinh^3 R$ 在$(0, +\infty)$上严格递增。*(3)* 函数 $\xi_{(m)} \tanh^3(R/2)$ 在$(0, +\infty)$上严格递减。*(4)* 函数 $\xi_{(m)} \sinh^3(R/2)$ 在$(0, +\infty)$上严格递减。

其次，我们给出问题（1.3）的结果。

定理 8. 对于($\eta_{(m)}$ $m \geq 1$) ，即双曲空间中半径为R 的测地圆盘的特征值，我们有以下结论。

(1) 当 $m = 1$时，函数 $\eta_{(m)}R$ 在*(0, +∞)*上严格递增；而当 $m \geq 2$时，存在一个仅依赖于 m的正常数 R_m，使得函数 $\eta_{(m)}R$ 在*(0, R_m)*上严格递减，并在*(R_m, +∞)*上严格递增。*(2)* 函数 $\eta_{(m)}$ *sinh* R 在*(0, +∞)*上严格递增。*(3)* 函数 $\eta_{(m)}$ *tanh*$(R/2)$在*(0, +∞)*上严格递减。*(4)* 当 $m \leq 2$ 时，函数 $\eta_{(m)}$*sinh*$(R/2)$在*(0, +∞)*上严格递增；而当 $m \geq 3$时，存在一个仅依赖于 m的正常数 R_m，使得函数 $\eta_{(m)}$*sinh*$(R/2)$在*(0, R_m)*上严格递减，并在*(R_m, +∞)*上严格递增。

备注 9。对于 $m = 0$，由下文的引理 33 可知 $\eta_{(0)}$ = 双曲余切$(R/2)$。于是容易验证，在 $(0, +\infty)$ 上，函数 $\eta_{(0)}R$ 严格递增，$\eta_{(0)}$ 双曲正弦 R严格递增，$\eta_{(0)}$ 双曲正切 $(R/2)$ 为常数，而 $\eta_{(0)}$ 双曲正弦 $(R/2)$ 严格递增。

1.3.**变化曲率下测地圆盘上的 Steklov 特征值单调性**。与诺伊曼特征值的 Bandle型界相比 [4] [5, 推论 3。9] 以及狄利克雷特征值的 Cheng型界

[13] 在 [31], 中推导出的本小节 Steklov 特征值界，鉴于 [18, 定理 1 和 2], 可称为 Escobar型界。对于本小节的结果，我们需要将常曲率空间的度量表达为扭曲乘积黎曼流形。设 $M_K^n = [0, r_0)\times\mathbb{S}^{n-1}$为常曲率 $K \in \mathbb{R}$的空间形式。则其扭曲乘积度量为

$$g = dr^2 + h_K^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中

$$h_K(r) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{K}}\sin(\sqrt{K}r), & r \in [0, \frac{\pi}{\sqrt{K}}), \quad r_0 = \frac{\pi}{\sqrt{K}}, \quad \text{if } K > 0, \\ r, & r \in [0, +\infty), \quad r_0 = +\infty, \quad \text{if } K = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{-K}}\sinh(\sqrt{-K}r), & r \in [0, +\infty), \quad r_0 = +\infty, \quad \text{if } K < 0. \end{cases}$$

我们可以证明关于二阶Steklov特征值的以下结果。

推论 10. 对于二阶*Steklov*特征值 $\sigma_{(m)}$ $(m \geq 1)$，我们有以下结果。

(1) 固定 $A > 0$。空间形式 M_K^2 中面积为 A 的测地圆盘上的第 m 个*Steklov*特征值 $\sigma_{(m)}(K; A)$ 是曲率 $K \in (-\infty, 4\pi/A)$的严格递增函数。
(2) 固定 $\rho > 0$。空间形式 M_K^2 中半径为 ρ 的测地圆盘上的第 m 个*Steklov*特征值 $\sigma_{(m)}(K; \rho)$ 是曲率 $K \in (-\infty, (\pi/\rho)^2)$的严格递增函数。

接下来我们考虑第一类四阶Steklov特征值问题。

推论11. 对于四阶 *Steklov* 特征值 $\xi_{(m)}$ $(m \geq 1)$，我们有以下结果。

(1) 固定 $A > 0$。在空间形式 M_K^2 中，面积为 A 的测地圆盘上的第 m 个 *Steklov* 特征值 $\xi_{(m)}(K; A)$ 是曲率 $K \in (-\infty, 4\pi/A)$的严格递增函数。*(2)* 固定 $\rho > 0$。在空间形式 M_K^2 中，半径为 ρ 的测地圆盘上的第 m 个 *Steklov* 特征值 $\xi_{(m)}(K; \rho)$ 是曲率 $K \in (-\infty, (\pi/\rho)^2)$的严格递增函数。

最后我们考虑第二类四阶Steklov特征值问题。

推论 12. 对于四阶 *Steklov* 特征值 $\eta_{(m)}$ $(m \geq 1)$，我们有以下结果。

(1) 固定 $A > 0$。空间形式 M_K^2 中面积为 A 的测地圆盘上的第 m 个 *Steklov* 特征值 $\eta_{(m)}(K; A)$ 是曲率 $K \in (-\infty, 4\pi/A)$ 的函数。对于 $m = 1$，存在一个 $K_1 > 0$，使得 $\eta_{(m)}(K; A)$ 在 $(-\infty, K_1)$ 上严格递减，并在 $(K_1, 4\pi/A)$ 上严格递增；对于 $m = 2$，$\eta_{(m)}(K; A)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上严格递减，并在 $(0, 4\pi/A)$ 上严格递增；而对于 $m \geq 3$,

存在一个 $K_m < 0$，使得 $\eta_{(m)}(K;\ A)$ 在$(-\infty, K_m)$上严格递减，并在 $(K_m, 4\pi/A)$上严格递增。

(2) 固定 $\rho > 0$。空间形式 M_K^2 中半径为 ρ 的测地圆盘上的第 m 个 *Steklov*特征值 $\eta_{(m)}(K;\rho)$ 是曲率 $K \in (-\infty, (\pi/\rho)^2)$ 的函数。对于 $m = 1$，$\eta_{(m)}(K;\rho)$ 在 $(-\infty, 0)$ 上严格递减，在 $(0, (\pi/\rho)^2)$ 上严格递增；而对于 $m \geq 2$，存在一个 $K_m < 0$，使得 $\eta_{(m)}(K;\rho)$ 在 $(-\infty, \bar{K}_m)$ 上严格递减，在 $(\bar{K}_m, (\pi/\rho)^2)$ 上严格递增。

注记 13. 由推论 12 可知，$\eta_{(m)}(K;A)$ 和 $\eta_{(m)}(K;\rho)$ 关于 K均为单峰函数。此外，数值实验表明，随着 m 增大，峰值的位置向左移动。

注记 14. 对于 $m = 0$，回顾

$$h(r) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{-K}} \sinh(\sqrt{-K}r), & K < 0, \\ \dfrac{1}{\sqrt{K}} \sin(\sqrt{K}r), & K > 0. \end{cases}$$

将这些代入下方的（2.12）（注意 $n = 2$），我们得到

$$\eta_{(0)} = \begin{cases} \sqrt{-K} \coth \dfrac{\sqrt{-K}R}{2}, & K < 0, \\ \sqrt{K} \cot \dfrac{\sqrt{K}R}{2}, & K > 0. \end{cases}$$

于是我们可以验证以下结论成立。

(1) 固定 $A > 0$。函数 $\eta_{(0)}(K;A)$ 在 $(-\infty, 4\pi/A)$ 上严格递减。(2) 固定 $\rho > 0$。函数 $\eta_{(0)}(K;\rho)$ 在 $(-\infty, (\pi/\rho)^2)$ 上严格递减。

1.4. 关于 $n \geq 3$ 的缩放不等式。 我们首先考虑二阶 Steklov 特征值，并得到以下结论。

定理15。 对于 $n \geq 3$ 和 $m \geq 1$ 的情形，函数 $\sigma_{(m)} \sin R$ 在球面 $\mathbb{S}^n$ 上 $(0, \pi)$ 内严格递增，而函数 $\sigma_{(m)} \sinh R$ 在双曲空间 $\mathbb{H}^n$上 $(0, +\infty)$ 内严格递减。

注记16。由定理15 可得以下结果。

(1) 由于函数 $R/\sin R$、$\tan(R/2)/\sin R$ 和 $\sin(R/2)/\sin R$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递增，因此可以验证 $\sigma_{(m)}R$、$\sigma_{(m)} \sin R$、$\sigma_{(m)} \tan(R/2)$ 和 $\sigma_{(m)} \sin(R/2)$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递增。(2) 由于函数 $R/\sinh R$、$\tanh(R/2)/\sinh R$ 和 $\sinh(R/2)/\sinh R$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减，因此可以验证 $\sigma_{(m)}R$、$\sigma_{(m)} \sinh R$、$\sigma_{(m)} \tanh(R/2)$ 和 $\sigma_{(m)} \sinh(R/2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减。

此外，对于高维双曲空间，我们能够得到关于$\eta_{(m)}$的一条单调性结果。

定理17。 对于 $n \geq 3$ 和 $m \geq 0$的情形，函数 $\eta_{(m)}$ 双曲正弦 R 在双曲空间 $\mathbb{H}^n$ 上的 $(0, +\infty)$ 内严格递增。

1.5. 扭曲积流形上特征值的尖锐界。现在，设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个带有扭曲积度量的 n 维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中 $h(r)$ 满足上文给出的假设（A）。

在本部分中，我们首先得到以下关于四阶 Steklov 特征值 $\xi_{(m)}$ 的尖锐界。

定理18. 设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 n 维的（$n \geq 2$）光滑黎曼流形，其配备扭曲乘积度量

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h(r)$ 满足假设（*A*）。设 M具有非负里奇曲率和严格凸边界。记 $\xi_{(m)}$ 为 m 个 *Steklov*问题 (1.2) 特征值（不计重数）。那么对于 $m \geq 1$，有

$$m^2(2+2m)\frac{h'(R)}{h^3(R)} \leq \xi_{(m)} \leq m^2(2+2m)\frac{1}{h^3(R)}, \quad n = 2, \tag{1.4}$$

and

$$\xi_{(m)} \geq \begin{cases} m^2(3+2m)\dfrac{h'(R)}{h^3(R)}, & n = 3, \\ m^2(n+2m)\dfrac{1}{h^3(R)}, & n \geq 4, \end{cases} \tag{1.5}$$

其中等号成立当且仅当 M 与欧几里得球等距。

注19。式（1.4）中的下界通过不同的方法在 [51, 定理 6] 中得到，而式（1.5）中的结果比 [51,定理 6]中的结果更强。此外，从几何上看 $h'(R)/h(R)$ 是边界 ∂M 在 M 中的主曲率，而 $h(R) = (|\partial M|/|\mathbb{S}^{n-1}|)^{1/(n-1)}$ 可视为归一化边界面积。

注20。假设与定理18 相同，但将 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 替换为 $\mathrm{Ric}_g \leq 0$。仿照定理18的证明可得，对于 $m \geq 1$,

$$m^2(2+2m)\frac{h'(R)}{h^3(R)} \geq \xi_{(m)} \geq m^2(2+2m)\frac{1}{h^3(R)}, \quad n = 2, \tag{1.6}$$

and

$$\xi_{(m)} \leq \begin{cases} m^2(n+2m)\dfrac{h'(R)}{h^3(R)}, & n = 3, \\ m^2(n+2m)\dfrac{1}{h^3(R)}, & n \geq 4. \end{cases} \tag{1.7}$$

并且，等号成立当且仅当 M 与欧几里得球等距。详情留给感兴趣的读者。

对于 $n = 3$ 和 $m = 1$，定理18 的结果验证了扭曲积流形情形下的Wang–Xia猜想。

猜想 21 (Qiaoling Wang 和 Changyu Xia [46, 第 13]). 设 $(M^n, g)(n \geq 2)$ 是一个带边界的连通紧致光滑黎曼流形。假设 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$，且边界 ∂M的主曲率有一个常数下界 $c > 0$。记 $\lambda_1 = \lambda_1(\partial M)$ 为 ∂M的拉普拉斯算子的第一个非零特征值。那么，第一个非零 *Steklov* 特征值 ξ_1 有如下界

$$\xi_1 \geq \frac{n+2}{n-1} c\lambda_1,$$

等号成立当且仅当流形是半径为 $1/c$ 的欧几里得球。

Wang–Xia猜想可视为著名的 Escobar猜想的四阶对应形式。Escobar猜想讨论的是二阶 Steklov 特征值问题（1.1）第一个非零特征值的尖锐下界，且比 Escobar猜想更难 [17, 第 115]；参见 [49]，了解Escobar猜想的最新进展。关于 Wang–Xia猜想，此前 Wang 和 Xia [47] 于 2013 年利用 Reilly公式证明了非尖锐下界 $\xi_1 > nc\lambda_1/(n-1)$。第二位作者 [51] 证明了 Wang–Xia猜想对维数为 $n = 2$或 $n \geq 4$的扭曲积流形成立，但 $n = 3$ 情形仍未解决。

其次，我们推导出四阶 Steklov 特征值$\eta_{(m)}$的一个双边不等式，以及关于$\eta_{(m)}$的特征值比值的一个锐下界。

定理22. 设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 n维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形，配备扭曲乘积度量

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h(r)$ 满足假设（*A*）。设 M具有非负*Ricci*曲率和严格凸边界。记 $\eta_{(m)}$ 为 *Steklov*问题 的第 m 个特征值 (1.3) （不计重数）。那么，当 $m \geq 0$ 时，我们有

$$(n+2m)\frac{h'(R)}{h(R)} \leq \eta_{(m)} \leq (n+2m)\frac{1}{h(R)}, \tag{1.8}$$

and

$$\frac{\eta_{(m+1)}}{\eta_{(m)}} \geq \frac{n+2m+2}{n+2m}, \tag{1.9}$$

等号成立当且仅当 M 与欧几里得球等距。

注记 23. 式 $\eta_{(0)}$ （1.8）中的下界由 [45, 定理 12]在一般情形下证明。对于 $\eta_{(0)}$ 的上界，正如 Kuttler [28]以及 Wang 和 Xia [45, 定理 13], 所指出的，第一特征值满足一个等周不等式 $\eta_{(0)} \leq |\partial M|/|M|$，适用于一般黎曼流形。然而，在我们考虑的扭曲

乘积流形情形下，由于根据下文式$\eta_{(0)}$（2.12）中的表达式，我们有等式，因此他们的上界是平凡的。此外，对于 $n \geq 3$ 且 $m \geq 2$ 的情形，（1.8）中的下界改进了 [51, 定理 7], ；而对于 $n = 2$，界（1.9）则由 [50, 定理 8] 采用不同的论证得到。

注记 24. 假设与定理22 中的相同，唯独将 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 替换为 $\mathrm{Ric}_g \leq 0$。仿照定理22 的证明 $n = 2$，（对于此处，（1.10）中的下界需要采用一种特殊论证，类似于（1.4）中上界的论证），我们得到，对于 $m \geq 1$,

$$(n+2m)\frac{1}{h(R)} \leq \eta_{(m)} \leq (n+2m)\frac{h'(R)}{h(R)}, \text{ for } n = 2 \text{ or } n \geq 4, \tag{1.10}$$

$$\eta_{(m)} \leq (n+2m)\frac{h'(R)}{h(R)}, \text{ for } n = 3. \tag{1.11}$$

对于 $m = 0$，我们有

$$n\frac{1}{h(R)} \leq \eta_{(0)} \leq n\frac{h'(R)}{h(R)}, \text{ for all } n \geq 2. \tag{1.12}$$

并且，等号成立当且仅当 M 与欧几里得球等距。这里注意，当应用于 $n = 3$的情形时，定理22 的证明中所用的方法只能给出$\eta_{(m)}$ 的单侧界（$m \geq 1$）。此外，这种方法无法在任意维数 $\eta_{(m+1)}/\eta_{(m)}$ 下为$m \geq 0$给出比值估计 n。详情留给感兴趣的读者。

本文其余部分安排如下。在第2节中，我们介绍一些预备知识，包括扭曲积流形、空间形式中的测地球和几何因子的基本事实，以及本文所考虑的 Steklov 特征值问题。在第3 节中，我们证明定理3和5；在第4节中，我们证明定理7 和8。接下来，在第5 节中，我们给出推论10、11 和12的证明。在第6节中，我们讨论高维情形下的缩放不等式，并证明定理15 和17。在第7节中，我们给出扭曲积流形上尖锐界的证明，即定理18 和22。最后，在第8 节中，我们提出一些开放问题。

致谢。本研究得到国家自然科学基金委员会（项目编号：12171334）和国家重点研发计划（2021YFA1001800）的资助。

2. Preliminaries

本节介绍证明主要结果所需的一些预备知识。

2.1. 扭曲积流形的一般设定。 本文主要研究扭曲积流形，其中球面和双曲空间是其特例。设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个配备扭曲乘积度量的 n 维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中，扭曲函数 $h(r)$ 满足假设

(A) $h \in C^\infty([0, R])$, $h(r) > 0$ for $r \in (0, R]$, $h'(0) = 1$ and $h^{(2k)}(0) = 0$ for all integers $k \geq 0$.

施加假设（A）是为了保证 M 是一个拓扑球，且在原点处光滑；参见Petersen的书中的第4.3.4节 [35]。

以下引理（即 [51], 中的引理 8）将在定理 18 和定理 22的证明中发挥重要作用。

引理 25 ([51, 引理 8])。 设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 n维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形，配备扭曲乘积度量

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h(r)$ 满足假设（*A*）。假设$\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 且边界 ∂M 严格凸。则有

$$h''(r) \leq 0, \quad 0 < h'(r) \leq 1, \quad r \in [0, R]. \tag{2.1}$$

2.2.**球面和双曲空间中的测地球与几何因子。**对于第 2.1 节中的扭曲积流形，如果h（r）$= \sin r$，我们得到球面中的测地球

$$\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} | \sum_{i=1}^{n+1} (x^i)^2 = 1\}$$

其度量由欧几里得空间上的度量诱导而来

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n+1} (dx^i)^2$$

。它也称为测地半径或孔径为 R 的球冠。二维情形中此前提到的几何因子包括测地半径 R、边界圆的欧几里得半径 $\sin R$、立体投影半径 $\tan(R/2)$ 以及面积$4\pi \sin^2$（$R/2$）（见图 1）。

若 $h(r) = \sinh r$，我们得到双曲空间中的测地球

$$\mathbb{H}^n = \{x \in \mathbb{R}_1^{n+1} | x^{n+1} = \sqrt{1 + \sum_{i=1}^{n} (x^i)^2}\}$$

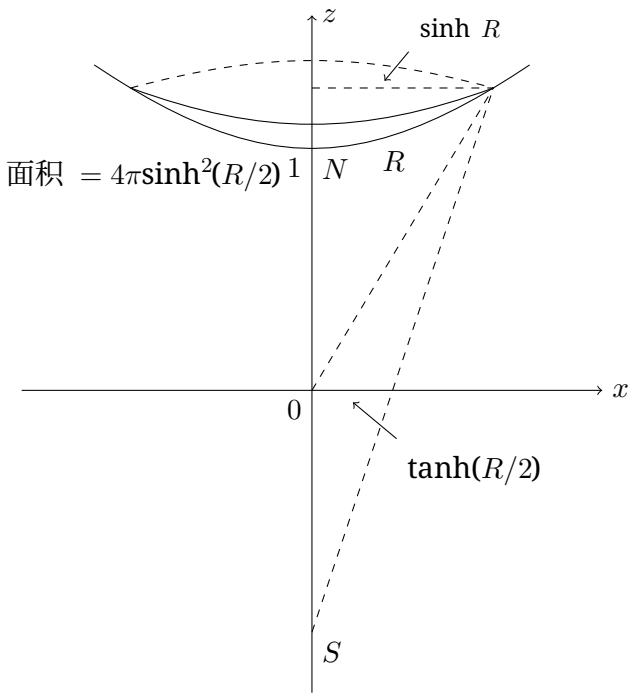

FIGURE 2. 几何因子，位于 $\mathbb{H}^2$

其度量由该度量诱导

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 - (dx^{n+1})^2$$

在洛伦兹空间 $\mathbb{R}_1^{n+1}$中，二维测地圆盘的几何因子包括测地半径 R、边界圆的欧几里得半径 $\sinh R$、立体投影半径 $\tanh(R/2)$ 以及面积$4\pi\sinh^2(R/2)$（见图 2）。

2.3. 二阶和四阶Steklov特征值问题。设 (M^n, g) 是一个带边界 ∂M 的 n 维黎曼流形。我们考虑二阶Steklov特征值问题

$$\begin{cases} \Delta u = 0, & \text{in } M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = \sigma u, & \text{on } \partial M, \end{cases} \tag{2.2}$$

其中 ν 表示相对于 ∂M 的外单位法向量。

经典二阶 Steklov 特征值问题的谱是非负、离散且无界的（按重数计）：

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1 \le \sigma_2 \le \cdots \nearrow +\infty.$$

我们用 $\sigma_{(m)}$ 表示不计重数的特征值。例如，对于半径为 R 的 n 维欧几里得球 B_R，有

$$\sigma_{(0)} = \sigma_0 = 0, \quad \sigma_{(1)} = \sigma_1 = \cdots = \sigma_n = \frac{1}{R},$$

和 $\sigma_{(m)} = m/R$ 重数为 $C_{n+m-1}^{n-1} - C_{n+m-3}^{n-1}$ 对于 $m \geq 2$ (例如参见[22])。

对于扭曲积流形，其所有特征函数和特征值具有如下刻画。

命题26 ([18, 引理 3] [51, 命题 9])。设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 n维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形，配备扭曲乘积度量

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h(r)$满足假设（A）。那么，问题 φ (2.2) 的任一非平凡特征函数都可写为 $\varphi(r, p) = \psi(r)\omega(p)$，其中 ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的某个次数为 $m \geq 1$的球谐函数，即：

$$-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\omega = \tau_m \omega \ on \ \mathbb{S}^{n-1}, \quad \tau_m = m(n-2+m),$$

并且 ψ 是常微分方程的一个非平凡解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^{n-1}} \dfrac{d}{dr}(h^{n-1} \dfrac{d}{dr}\psi) - \dfrac{\tau_m \psi}{h^2} = 0, & r \in (0, R], \\ \psi(0) = 0. \end{cases} \tag{2.3}$$

对于上述常微分方程的任意非平凡解 ψ，不计重数的第 m 个特征值 $\sigma_{(m)}$ 为 $\sigma_{(m)} = \psi'(R)/\psi(R)$。

接下来我们考虑第一类四阶Steklov特征值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, \ \text{in } M, \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0, \quad \dfrac{\partial(\Delta u)}{\partial \nu} + \xi u = 0, \ \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{2.4}$$

该问题由 Kuttler 和 Sigillito 于 1968 [29], 首次提出，其特征值构成一个离散的递增序列（计重数）：

$$0 = \xi_0 < \xi_1 \leq \xi_2 \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

我们也用 $\xi_{(m)}$ 表示不计重数的特征值。对于半径为 R 的 n 维欧几里得球 B_R，有 $\xi_{(m)} = m^2(n+2m)/R^3$，其重数为 $C_{n+m-1}^{n-1} - C_{n+m-3}^{n-1}$（见 [48, 定理1.5]）。

我们对其所有特征函数和特征值作如下刻画。

命题27 ([51, 命题 11]). 设 $M^n = [0, R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个 n维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形，配备扭曲积度量

$$g = dr^2 + h^2(r) g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h(r)$ 满足假设（A）。设 M具有非负*Ricci*曲率和严格凸边界。那么，问题 φ 的任意非平凡特征函数 (2.4) 均可写为 $\varphi(r,p) =\psi(r)\omega(p)$，其中 ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的某个次数为 $m \geq 1$的球谐函数，即：

$$-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\omega = \tau_m\omega \ on\ \mathbb{S}^{n-1}, \quad \tau_m = m(n-2+m),$$

且 ψ 是该常微分方程的一个非平凡解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^{n-1}}\dfrac{d}{dr}(h^{n-1}\dfrac{d}{dr}\psi) - \dfrac{\tau_m\psi}{h^2} = \tilde{\psi}, \\ \dfrac{1}{h^{n-1}}\dfrac{d}{dr}(h^{n-1}\dfrac{d}{dr}\tilde{\psi}) - \dfrac{\tau_m\tilde{\psi}}{h^2} = 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi'(R) = 0, \quad \tilde{\psi}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

对于上述常微分方程的任意非平凡解 ψ ，不计重数时，第 m个特征值 $\tilde{\xi_{(m)}}$由 $\xi_{(m)} = -\psi'（R）/\psi（R）$ 给出。

接下来我们考虑第二类四阶Steklov特征值问题

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0, \ \text{in } M, \\ u = 0, \quad \Delta u = \eta\dfrac{\partial u}{\partial \nu}, \ \text{on } \partial M. \end{cases} \tag{2.6}$$

该问题最初由 Kuttler 和 Sigillito 在 1968 [29]中研究，并由 Payne 在 1970 [34], 中研究，其特征值构成一个离散的递增序列（计入重数）：

$$0 < \eta_0 < \eta_1 \leq \eta_2 \leq \cdots \nearrow +\infty.$$

注意，第一特征值 η_0 为正且是单重的（见 [7,定理 1]或 [40]）。我们还用 $\eta_{(m)}$ 表示不计重数的特征值。对于半径为 R的 n维欧几里得球 B_R，我们知道$\eta_{(m)} = (n+2m)/R$ 的重数为 $C_{n+m-1}^{n-1} - C_{n+m-3}^{n-1}$ （见 [19, 定理1.3]）。

类似地，我们有其所有特征函数和特征值的如下刻画。

命题28 ([51, 命题 14]). 设 $M^n = [0,R]\times\mathbb{S}^{n-1}$ 为一个配备有扭曲积度量的 n 维 （$n \geq 2$）光滑黎曼流形

$$g = dr^2 + h^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中，扭曲函数 $h(r)$ 满足假设（A）。假设 M具有非负*Ricci*曲率和严格凸边界。那么，问题 $\varphi_0(r,p)$ 的第一特征函数 (2.6) 在相差一个常数因子的意义下为 $\psi_0(r)$，其中 ψ_0 是常微分方程的一个非平凡解

$$\begin{cases} \dfrac{1}{h^{n-1}}\dfrac{d}{dr}(h^{n-1}\dfrac{d}{dr}\psi) = \tilde{\psi}, \\ \dfrac{1}{h^{n-1}}\dfrac{d}{dr}(h^{n-1}\dfrac{d}{dr}\tilde{\psi}) = 0, \\ \psi'(0) = 0, \quad \psi(R) = 0, \quad \tilde{\psi}'(0) = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

问题 φ 的任意高阶特征函数 (2.6) 均可写为$\varphi(r,p) = \psi(r)\omega(p)$，其中 ω 是 $\mathbb{S}^{n-1}$ 上的某个次数为 $m \geq 1$ 的球谐函数，即

$$-\Delta_{\mathbb{S}^{n-1}}\omega = \tau_m\omega \ on\ \mathbb{S}^{n-1}, \quad \tau_m = m(n-2+m),$$

并且 ψ 是常微分方程的一个非平凡解

$$\begin{cases} \frac{1}{h^{n-1}}\frac{d}{dr}(h^{n-1}\frac{d}{dr}\psi) - \frac{\tau_m\psi}{h^2} = \tilde{\psi}, \\ \frac{1}{h^{n-1}}\frac{d}{dr}(h^{n-1}\frac{d}{dr}\tilde{\psi}) - \frac{\tau_m\tilde{\psi}}{h^2} = 0, \\ \psi(0) = 0, \quad \psi(R) = 0, \quad \tilde{\psi}(0) = 0. \end{cases} \tag{2.8}$$

对于常微分方程 ψ 的任意非平凡解（2.7）或（2.8），不计重数的第 m 个特征值$\eta_{(m)}$ （$m \geq 0$）由下式给出 $\eta_{(m)} = \psi（R）/\psi'（R）$。

为了证明定理 17、定理18 和定理 22，我们需要以下关键引理。

引理 29。设 $M^n = [0,R] \times \mathbb{S}^{n-1}$ 是一个具有扭曲乘积度量的 n 维（$n \geq 2$）光滑黎曼流形

$$g = dr^2 + h^2(r)g_{\mathbb{S}^{n-1}},$$

其中扭曲函数 $h（r）$ 满足假设（*A*）。假设 M具有非负*Ricci*曲率和严格凸边界。对于四阶 *Steklov* 特征值 $\xi_{(m)}$ 和 $\eta_{(m)}$，有

$$\xi_{(m)} = \frac{h^{n-1}(R)(u_m'(R))^2}{\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr}, \quad m \geq 1, \tag{2.9}$$

$$\eta_{(m)} = \frac{h^{n-1}(R)u_m^2(R)}{\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr}, \quad m \geq 1, \tag{2.10}$$

其中， u_m 是一个非平凡解

$$\begin{cases} u_m'' + \frac{(n-1)h'}{h}u_m' - \frac{\tau_m}{h^2}u_m = 0, \\ u_m(0) = 0, \end{cases} \tag{2.11}$$

and

$$\eta_{(0)} = \frac{h^{n-1}(R)}{\int_0^R h^{n-1}dr}. \tag{2.12}$$

注 30。 $\mathrm{Ric}_g \geq 0$ 和 ∂M 严格凸的假设实际上是不必要的。提出这一假设是为了使用命题 27 和 28，它们分别对应于 [51]中的命题 11 和 14。仔细检查 [51],中命题 11 和 14 的证明可知，这一假设仅用于确定特征值的顺序。在下面的证明中，我们可以先推导公式（2.9）和（2.10），然后直接使用常微分方程比较论证来确定特征值的顺序。详情留给感兴趣的读者。

注 31。 在下面的一些证明中，我们将不失一般性地假设，并默认 $u_m(r) > 0$ 和 $u'_m(r) > 0$ 对于 $r \in (0, R]$。

引理的证明 *29*。 首先，对于特征值 $\xi_{(m)}$ $(m \geq 1)$，考虑˜常微分方程 (2.5)，并令 $\psi = u_m$，由此可知

$$\xi_{(m)} = -\frac{u'_m(R)}{\psi(R)}. \tag{2.13}$$

Set

$$Ly = \frac{1}{h^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(h^{n-1} \frac{dy}{dr} \right) - \frac{\tau_m y}{h^2}.$$

对于任意两个函数 $p, q \in C^2([0, R])$，通过直接计算可得

$$pLq - qLp = \frac{1}{h^{n-1}} \frac{d}{dr} \left(h^{n-1} \left(pq' - p'q \right) \right).$$

现在取

$$p = u_m, \quad q = \psi.$$

于是我们有

$$h^{n-1} u_m^2 = \frac{d}{dr} \left(h^{n-1} \left(u_m \psi' - u'_m \psi \right) \right). \tag{2.14}$$

对（2.14）两边在区间（0, R）上积分，并利用边界条件

$$h(0) = 0, \quad \psi(0) = 0, \quad \psi'(R) = 0, \quad u_m(0) = 0,$$

可得

$$\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr = -h^{n-1}(R) u'_m(R) \psi(R). \tag{2.15}$$

结合（2.13）和（2.15）消去 ψ（R），得到

$$\xi_{(m)} = \frac{h^{n-1}(R)(u'_m(R))^2}{\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr}.$$

接下来，对于特征值$\eta_{(m)}$ （$m \geq 1$），考察常微分方程（2.8）并令˜，令 $\psi = u_m$，可知

$$\eta_{(m)} = \frac{u_m(R)}{\psi'(R)}. \tag{2.16}$$

再次对（2.14）两边关于 r 从 0 到 R积分，可得

$$\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr = h^{n-1}(R) u_m(R) \psi'(R). \tag{2.17}$$

结合（2.16）和（2.17）消去 ψ'（R），可得

$$\eta_{(m)} = \frac{h^{n-1}(R) u_m^2(R)}{\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr}.$$

最后，当 $m=0$ 时，可以验证上述类似的论证同样适用，从而得到

$$\eta_{(0)}=\frac{h^{n-1}(R)}{\int_0^R h^{n-1}dr}.$$

至此，证明完成。 □

3. Proofs of results in the 2-dimensional sphere

本节的证明需要以下引理。

引理 32. 在2维球面上，有

$$\xi_{(m)}=\frac{m^2(\tan\frac{R}{2})^{2m}}{\sin R\int_0^R(\tan\frac{r}{2})^{2m}\sin r dr},\quad m\geq 1, \tag{3.1}$$

$$\eta_{(m)}=\frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin R}{\int_0^R(\tan\frac{r}{2})^{2m}\sin r dr},\quad m\geq 1, \tag{3.2}$$

and

$$\eta_{(0)}=\cot\frac{R}{2}. \tag{3.3}$$

引理 *32*的证明. 在球面 $\mathbb{S}^2$上，对于 $m\geq 1$ 方程（2.11）变为

$$u_m''+\frac{u_m'}{\tan r}-\frac{m^2u_m}{\sin^2 r}=0.$$

令变量变换为 $t=\tan(r/2)$，则有

$$(u_m)_{tt}+\frac{1}{t}(u_m)_t-\frac{m^2}{t^2}u_m=0.$$

这是一个欧拉–柯西方程，其通解可明确写为

$$u_m(t)=C_1t^m+C_2t^{-m}.$$

在 $t=0$ 处施加正则性条件可排除项 t^{-m}，因此得到

$$u_m(r)=C(\tan\frac{r}{2})^m.$$

将此表达式代入 (2.9) 和 (2.10，即可完成对$m\geq 1$的证明。对于 $m=0$，取 $n=2$ 以及 $h(r)=\sin r$ 代入 (2.12，可见 (3.3) 成立。因此证明完成。□

在继续之前，为方便读者，值得指出，定理3 和定理5的证明中将频繁用到以下计算公式：

$$\frac{d((\tan\frac{R}{2})^k)}{dR}=k\frac{(\tan\frac{R}{2})^{k-1}}{2\cos^2\frac{R}{2}}=k\frac{(\tan\frac{R}{2})^k}{\sin R}. \tag{3.4}$$

现在我们准备给出证明。由于定理5 中涉及的几何因子次数较低，我们选择先证明该定理。

定理5的证明。(1) 令

$$M(R)=\int_0^R(\tan\frac{r}{2})^{2m}\cdot\sin r dr. \tag{3.5}$$

接下来考虑函数

$$F(R)=\eta_{(m)}R=\frac{R\cdot(\tan\frac{R}{2})^{2m}\cdot\sin R}{M(R)}.$$

我们有

$$(\tan\frac{R}{2})^{-2m}F'(R)=\frac{(2m+\cos R)M(R)-(\tan\frac{R}{2})^{2m}\cdot\sin^2 R}{M^2(R)}\cdot R+\frac{\sin R}{M(R)}.$$

接下来，令

$$J(R)=(2m+\cos R)M(R)-(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R.$$

然后通过分部积分可得,

$$\begin{aligned}J'(R)&=-\sin R\cdot(M(R)+(\tan\frac{R}{2})^{2m}\cos R)\\&=-m\sin R\int_0^R\frac{(\tan\frac{r}{2})^{2m-1}\cos r}{\cos^2\frac{r}{2}}dr\\&=-2m\sin R\int_0^{\tan\frac{R}{2}}\frac{t^{2m-1}(1-t^2)}{1+t^2}dt.\end{aligned}$$

因此，存在一个 $R_m^\circ>0$，使得 $J(R)$ 在 $(0,R_m^\circ)$ 上递减，并在 (R_m°,π) 上递增。接下来，通过直接验证可得

$$M(R)=\frac{1}{2(m-1)}(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R(1+o(1)),\ \text{as } R\to\pi-,\quad m\geq 2, \tag{3.6}$$

$$M(R)=-4\log\cos\frac{R}{2}+\cos R-1,\quad m=1. \tag{3.7}$$

然后我们可以直接验证，当 R 接近 π 和 $m\geq 1$ 时，$J(R)>0$。因此，存在一个 $R_m^*>0$，使得 $J(R)<0$ 在 $(0,R_m^*)$ 上，且 $J(R)>0$ 在 (R_m^*,π) 上。由此可得，$F'(R)>0$ 在 (R_m^*,π) 上。只需证明当 $R<R_m^*$ 时，$F'(R)>0$。

接下来我们考虑函数

$$F_1(R)=\frac{F'(R)(M(R))^2}{J(R)(\tan\frac{R}{2})^{2m}}=R+\frac{M(R)\sin R}{J(R)}.$$

那么，$F'(R)$ 和 $F_1(R)$ 在 $(0,R_m^*)$ 上符号相反。注意

$$\begin{aligned}M(R)&=\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)}R^{2m+2}(1+o(1)),\ \text{as } R\to 0,\\J(R)&=-\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)}R^{2m+2}(1+o(1)),\ \text{as } R\to 0.\end{aligned}$$

由此可得

$$F_1(R) = o(R), \text{ as } R \to 0.$$

于是 $F_1(0) = 0$。此外，我们有

$$F_1'(R) = 1 + \frac{\left((\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R + M(R)\cos R\right)J(R) - J'(R)M(R)\sin R}{J^2(R)}.$$

利用

$$(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R = (2m+\cos R)M(R) - J(R)$$

代入上述等式，得到

$$F_1'(R) = \frac{M(R)}{J^2(R)}(2(m+\cos R)J - J'\sin R).$$

Set

$$F_2(R) = \frac{J^2(R)F_1'(R)}{M(R)} = 2(m+\cos R)J - J'\sin R.$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned} F_2(R) = &(\cos^2 R + 6m\cos R + 4m^2 + 1)M(R) \\ &- (2m+\cos R)(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R. \end{aligned}$$

于是可得

$$F_2'(R) = 2\sin R\left((\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R - (3m+\cos R)M(R)\right).$$

接下来，我们定义

$$F_3(R) = \frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R}{3m+\cos R} - M(R).$$

于是我们有

$$F_3'(R) = \frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin R}{(3m+\cos R)^2}(2m\cos R + 1 - 3m^2) < 0.$$

鉴于

$$F_1(0) = 0, \quad F_2(0) = 0, \quad F_3(0) = 0,$$

我们知道，当 $R < R_m^*$ 时，$F_1(R) < 0$。由此可得，当 $R < R_m^*$ 时，$F'(R) > 0$。至此，证明完成。

(2) 定义

$$G(R) = \eta_{(m)}\sin R = \frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R}{M(R)}.$$

我们有

$$G'(R)=(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin R\cdot\frac{(2m+2\cos R)M(R)-(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R}{M^2(R)}.$$

Set

$$G_1(R)=(2m+2\cos R)M(R)-(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R.$$

那么 $G_1(0)=0$。此外，我们有

$$G_1'(R)=-2\sin R\cdot M(R)<0.$$

因此，我们有 $G_1(R)<0$。那么 $G'(R)<0$。由此可知， $G(R)$ 在 $(0,\ \pi)$ 上严格递减。

(3) 我们可以验证，函数

$$R\mapsto\frac{\tan\frac{R}{2}}{R}$$

在 $(0,\ \pi)$ 上严格递增。接着注意到

$$\eta_{(m)}\tan\frac{R}{2}=\eta_{(m)}R\cdot\frac{\tan\frac{R}{2}}{R}.$$

由（1）式，我们完成证明。

(4) 令

$$Q(R)=\eta_{(m)}\sin\frac{R}{2}=\frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin\frac{R}{2}\sin R}{M(R)}.$$

通过直接计算，我们得到

$$\begin{aligned}Q'(R)=&\frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin\frac{R}{2}}{M^2(R)}\\&\times\left((2m+\cos R+\cos^2\frac{R}{2})M(R)-(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R\right).\end{aligned}$$

Set

$$Q_1(R)=M(R)-\frac{2(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin^2 R}{K(R)},$$

其中

$$K(R)=4m+1+3\cos R.$$

注意， $Q_1(0)=0$。此外，我们有

$$Q_1'(R)=\frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}\sin R}{K^2(R)}(1-\cos R)(4m-5-3\cos R).$$

对于 $m=1$，存在唯一的 $R_1^\star>0$，使得 $Q_1'(R_1^\star)=0$。那么$Q_1(R)$在 $(0,\ R_1^\star)$ 上严格递减，并在 $(R_1^\star,\ \pi)$ 上严格递增。

由（3.7）可知 $Q_1(\pi) = +\infty$。那么存在一个 $R_1 > 0$，使得$\eta_{(1)} \sin(R/2)$ 在 $(0, R_1)$ 上严格递减，并在 (R_1, π) 上严格递增。

对于 $m \geq 2$，我们有 $Q_1'(R) > 0$。于是 $Q_1(R) > 0$。由此可知，$\eta_{(m)} \sin(R/2)$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递增。□

下面给出定理3的证明。

定理 3的证明。(1) 我们可以验证，函数

$$R \mapsto \frac{R}{\sin R}$$

在 $(0, \pi)$ 上严格递增。另一方面，我们有

$$\xi_{(m)} R^3 = m^2 \cdot \eta_{(m)} R \cdot \frac{R^2}{\sin^2 R}.$$

于是 $\xi_{(m)} R^3$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递增。

(2) 注意

$$\xi_{(m)} \sin^3 R = m^2 \eta_{(m)} \sin R.$$

则（2）成立，因为我们已在定理 5 （2）中证明了 $\eta_{(m)} \sin R$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递减。

(3) 不难证明，函数

$$R \mapsto \frac{\tan \frac{R}{2}}{\sin R}$$

在 $(0, \pi)$ 上严格递增。接下来注意到

$$\xi_{(m)} (\tan \frac{R}{2})^3 = m^2 \eta_{(m)} \tan \frac{R}{2} \cdot \frac{(\tan \frac{R}{2})^2}{\sin^2 R}.$$

我们可以完成（3）的证明，因为我们已在定理5 （3）中证明了$\eta_{(m)} \tan(R/2)$ 在 $(0, \pi)$ 上严格递增。

(4) 令

$$q(R) = \xi_{(m)} \sin^3 \frac{R}{2} = \frac{m^2 (\tan \frac{R}{2})^{2m+1} \sin \frac{R}{2}}{2M(R)}.$$

于是我们有

$$q'(R) = \frac{m^2 (\tan \frac{R}{2})^{2m+1}}{4 \cos \frac{R}{2} M(R)^2} q_1(R),$$

其中

$$q_1(R) = (2m + 1 + \cos^2 \frac{R}{2}) M(R) - (\tan \frac{R}{2})^{2m} \sin^2 R.$$

注意， $q_1(0) = 0$。此外，我们有

$$q_1'(R) = -\frac{\sin R}{2}\left(M(R) + 3(\tan\frac{R}{2})^{2m}(\cos R - 1)\right).$$

Set

$$q_2(R) = M(R) + 3(\tan\frac{R}{2})^{2m}(\cos R - 1).$$

于是 $q_2(0) = 0$。此外，我们有

$$q_2'(R) = \frac{(\tan\frac{R}{2})^{2m}}{\sin R}(2\cos^2 R + 6m\cos R - 6m - 2) < 0.$$

因此，我们得到 $q_2(R) < 0$。于是 $q_1(R) > 0$。由此可知， $q'(R) > 0$，因此$q(R)$在 $(0, \pi)$ 上严格递增。

□

4. Proofs of results in the 2-dimensional hyperbolic space

在二维双曲空间中，需要用到以下引理。

引理 33。 在2维双曲空间中，我们有

$$\xi_{(m)} = \frac{m^2(\tanh\frac{R}{2})^{2m}}{\sinh R\int_0^R(\tanh\frac{r}{2})^{2m}\sinh r dr}, \quad m \geq 1, \tag{4.1}$$

$$\eta_{(m)} = \frac{(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh R}{\int_0^R(\tanh\frac{r}{2})^{2m}\sinh r dr}, \quad m \geq 1, \tag{4.2}$$

and

$$\eta_{(0)} = \coth\frac{R}{2}. \tag{4.3}$$

引理的证明 *33*。 在双曲空间 $\mathbb{H}^2$中，对于 $m \geq 1$ 方程（2.11）变为

$$u_m'' + \frac{u_m'}{\tanh r} - \frac{m^2 u_m}{\sinh^2 r} = 0.$$

作代换 $t = \tanh(r/2$。然后仿照引理 32的论证，可得所需公式。 □

与第 3节一样，本节将频繁用到以下计算公式:

$$\frac{d((\tanh\frac{R}{2})^k)}{dR} = k\frac{(\tanh\frac{R}{2})^{k-1}}{2\cosh^2\frac{R}{2}} = k\frac{(\tanh\frac{R}{2})^k}{\sinh R}.$$

现在我们可以给出证明了。由于定理 8中涉及的几何因子次数较低，我们选择先证明定理 8。

定理 *8*的证明。 (1) 令

$$M(R)=\int_0^R(\tanh\frac{r}{2})^{2m}\cdot\sinh r dr. \tag{4.4}$$

考虑函数

$$F(R)=\eta_{(m)}R=\frac{R\cdot(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\cdot\sinh R}{M(R)},$$

我们有

$$(\tanh\frac{R}{2})^{-2m}F'(R)=\frac{(2m+\cosh R)M(R)-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\cdot\sinh^2 R}{M^2(R)}\cdot R+\frac{\sinh R}{M(R)}.$$

接下来，设

$$J(R)=(2m+\cosh R)M(R)-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R.$$

然后，根据分部积分，有

$$\begin{aligned}J'(R)&=\sinh R\cdot\left(M(R)-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\cosh R\right)\\&=-2m\sinh R\int_0^R\frac{(\tanh\frac{r}{2})^{2m}}{\tanh r}dr\\&<0.\end{aligned}$$

因此我们有

$$J(R)<J(0)=0.$$

考虑函数

$$F_1(R)=R+\frac{M(R)\sinh R}{J(R)}.$$

则 $F_1(R)$ 和 $F'(R)$ 符号相反。此外，通过直接计算可得

$$\begin{aligned}M(R)&=\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)}R^{2m+2}(1+o(1)),\ \text{as } R\to 0,\\J(R)&=-\frac{1}{2^{2m+1}(m+1)}R^{2m+2}(1+o(1)),\ \text{as } R\to 0.\end{aligned}$$

然后我们可以直接验证

$$F_1(R)=o(R),\ \text{as } R\to 0.$$

则 $F_1(0)=0$。此外，我们有

$$F_1'(R)=1+\frac{\left((\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R+M(R)\cosh R\right)J(R)-M(R)J'(R)\sinh R}{J^2(R)}.$$

利用

$$(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R=(2m+\cosh R)M(R)-J(R)$$

将其代入上述等式，可得

$$F_1'(R)=\frac{M(R)}{J^2(R)}\left(2(m+\cosh R)J(R)-J'(R)\sinh R\right).$$

定义

$$\begin{aligned}F_2(R)&=2(m+\cosh R)J(R)-J'(R)\sinh R\\&=(\cosh^2 R+6m\cosh R+4m^2+1)M(R)\\&\quad-(2m+\cosh R)(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R.\end{aligned}$$

Then

$$F_2'(R)=2\sinh R\left((\cosh R+3m)M(R)-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R\right).$$

Set

$$F_3(R)=(\cosh R+3m)M(R)-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R.$$

我们有

$$\begin{aligned}F_3'(R)&=\sinh R\left(M(R)+m(\tanh\frac{R}{2})^{2m}-(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\cosh R\right)\\&=m\sinh R\left((\tanh\frac{R}{2})^{2m}-2\int_0^R\frac{(\tanh\frac{r}{2})^{2m}}{\tanh r}dr\right).\end{aligned}$$

Let

$$F_4(R)=(\tanh\frac{R}{2})^{2m}-2\int_0^R\frac{(\tanh\frac{r}{2})^{2m}}{\tanh r}dr.$$

于是我们有

$$F_4'(R)=\frac{2(\tanh\frac{R}{2})^{2m}}{\sinh R}(m-\cosh R).$$

对于 $m=1$，我们注意到 $F_4'(R)<0$。此外，注意到

$$F_i(0)=0,\quad 1\le i\le 4.$$

于是 $F_1(R)<0$。由此可得 $F'(R)>0$。因此，我们知道 $\eta_{(1)}R$严格递增。

对于 $m\ge 2$，存在唯一的 $R_m^\star>0$，使得 $F_4(R)$ 在 $(0,R_m^\star)$ 上严格递增，并在 $(R_m^\star,+\infty)$ 上严格递减。现在利用洛必达法则以及 $J'(R)$ 的表达式，我们可以验证，当 $R\to+\infty$ 时，

$$M(R)=\cosh R(1+o(1)),\quad J(R)=-2mR\cosh R(1+o(1)).$$

然后利用它们以及 $F_i'(R)$（$1\le i\le 4$）的表达式，根据洛必达法则，依次可验证当 $R\to+\infty$ 时，

$$\begin{aligned}F_4(R)&=-2R(1+o(1)),\\F_3(R)&=-2mR\cosh R(1+o(1)),\\F_2(R)&=-2mR\cosh^2 R(1+o(1)),\end{aligned}$$

$$F_1(R) = -\frac{1}{2m}\frac{\cosh R}{R}(1 + o(1)).$$

于是我们有

$$F_i(+\infty) = -\infty, \quad 1 \le i \le 4.$$

此外，注意

$$F_i(0) = 0, \quad 1 \le i \le 4.$$

我们知道存在一个 $R_m > 0$，使得 $\eta_{(m)}R$ 在 $(0, R_m)$ 上严格递减，并在 $(R_m, +\infty)$ 上严格递增。

(2) 定义

$$G(R) = \eta_{(m)} \sinh R = \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R}{M(R)}.$$

我们有

$$G'(R) = (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh R \cdot \frac{(2m + 2\cosh R)M(R) - (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R}{M^2(R)}.$$

Set

$$G_1(R) = M(R) - \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R}{2m + 2\cosh R}.$$

我们知道

$$G_1'(R) = \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^3 R}{2(m + \cosh R)^2} > 0.$$

此外，由于 $G_1(0) = 0$，我们有 $G_1(R) > 0$。于是 $G'(R) > 0$。因此，$G(R)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增。

(3) 令

$$P(R) = \eta_{(m)} \tanh \frac{R}{2} = \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m+1} \sinh R}{M(R)}.$$

我们有

$$P'(R) = \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m+1}}{M^2(R)} \cdot \left((2m + 1 + \cosh R)M(R) - (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R \right).$$

Set

$$P_1(R) = (2m + 1 + \cosh R)M(R) - (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R.$$

注意，$P_1(0) = 0$。此外，我们有

$$P_1'(R) = \sinh R \left(M(R) + (1 - \cosh R)(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \right).$$

Let

$$P_2(R) = M(R) + (1 - \cosh R)(\tanh \frac{R}{2})^{2m}.$$

于是， $P_2(0) = 0$。另外，我们有

$$P_2'(R) = (1 - \cosh R) \cdot \frac{d(\tanh \frac{R}{2})^{2m}}{dR} < 0.$$

因此，我们有 $P_2(R) < 0$。然后 $P_1(R) < 0$ 和 $P'(R) < 0$。因此，我们知道 $\eta_{(m)} \tanh(R/2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减。

(4) 定义

$$Q(R) = \eta_{(m)} \sinh \frac{R}{2} = \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh R \sinh \frac{R}{2}}{M(R)}.$$

于是我们有

$$\begin{aligned} Q'(R) = & \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh \frac{R}{2}}{M^2(R)} \\ & \times \left((2m + \cosh R + \cosh^2 \frac{R}{2}) M(R) - (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R \right). \end{aligned}$$

Let

$$Q_1(R) = M(R) - \frac{2(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^2 R}{L(R)},$$

其中

$$L(R) = 3 \cosh R + 4m + 1.$$

因此，我们有 $Q_1(0) = 0$。此外，我们有

$$\begin{aligned} Q_1'(R) = & (\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh R - \frac{4(m + \cosh R)(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh R}{L(R)} \\ & + \frac{6(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh^3 R}{L^2(R)} \\ = & \frac{(\tanh \frac{R}{2})^{2m} \sinh R}{L^2(R)} \cdot (\cosh R - 1)(3 \cosh R - 4m + 5). \end{aligned}$$

在 $m \leq 2$ 的情况下，我们有

$$3 \cosh R - 4m + 5 > 0,$$

这意味着 $Q_1(R) > 0$。于是 $Q'(R) > 0$。因此， $\eta_{(m)} \sinh(R/2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增。

在 $m \geq 3$ 的情况下，令 $R_m^\diamond$ 为方程的唯一根

$$3 \cosh R - 4m + 5 = 0.$$

于是可知， $Q_1(R)$ 在 $(0, R_m^\diamond)$ 上严格递减，在 $(R_m^\diamond, +\infty)$ 上严格递增。

接下来，注意到当 $R \to +\infty$ 时，我们有

$$\begin{aligned} M(R) &= \sinh R(1 + o(1)), \\ (\tanh \frac{R}{2})^{2m} &= 1 + o(1), \end{aligned}$$

$$L(R) = 3\sinh R(1 + o(1)).$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} Q_1(R) &= M(R) - \frac{2(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R}{L(R)} \\ &= \frac{1}{3}\sinh R(1 + o(1)), \text{ as } R \to +\infty, \end{aligned}$$

并且当 R 充分大时，$Q_1(R) > 0$。因此，存在唯一的 $R_m > 0$ 使得 $Q_1(R_m) = 0$。于是，$Q(R)$ 在 $(0, R_m)$ 上严格递减，并在 $(R_m, +\infty)$ 上严格递增。由于 $\eta_{(m)}\sinh(R/2)$ 与 $Q(R)$ 具有相同的单调性，证明得证。□

最后我们给出定理 7 的证明。

定理 7 的证明。(2) 注意到

$$\xi_{(m)}\sinh^3 R = m^2\eta_{(m)}\sinh R.$$

那么，(2) 成立，因为我们已在定理 8 (2) 中证明 $\eta_{(m)}\sinh R$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增。

(4) 令

$$q(R) = \frac{2\xi_{(m)}\sinh^3\frac{R}{2}}{m^2} = \frac{(\tanh\frac{R}{2})^{2m+1}\sinh\frac{R}{2}}{M(R)}.$$

我们有

$$q'(R) = \frac{(\tanh\frac{R}{2})^{2m+1}}{2M^2(R)\cosh\frac{R}{2}} \cdot \left((2m + 1 + \cosh^2\frac{R}{2})M(R) - (\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R\right).$$

Set

$$q_1(R) = M(R) - \frac{2(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^2 R}{K(R)},$$

其中

$$K(R) = \cosh R + 4m + 3.$$

我们有 $q_1(0) = 0$。注意

$$\begin{aligned} q_1'(R) &= (\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh R \\ &- \frac{4m(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh R + 4(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh R\cosh R}{K(R)} + \frac{2(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh^3 R}{K^2(R)} \\ &= \frac{(\tanh\frac{R}{2})^{2m}\sinh R}{K^2(R)} \cdot (1 - \cosh R)(\cosh R + 12m + 7) \\ &< 0. \end{aligned}$$

因此，我们有 $q_1(R) < 0$。接着，$q'(R) < 0$。因此，我们看到 $\xi_{(m)}\sinh^3(R/2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减。

(1) 注意，函数

$$R \mapsto \frac{R}{\sinh \frac{R}{2}}$$

在（0，$+\infty$）上严格递减。在定理7 （4）中，我们已证明$\xi_{(m)} \sinh^3（R/2）$在（0，$+\infty$）上严格递减。此外，我们有

$$\xi_{(m)} R^3 = \xi_{(m)} \sinh^3 \frac{R}{2} \cdot \frac{R^3}{\sinh^3 \frac{R}{2}}.$$

因此，结论（1）成立。

（3）不难证明，函数

$$R \mapsto \frac{\tanh \frac{R}{2}}{\sinh \frac{R}{2}}$$

在（0，$+\infty$）上严格递减。接下来注意到

$$\xi_{(m)} \tanh^3 \frac{R}{2} = \xi_{(m)} \sinh^3 \frac{R}{2} \cdot \frac{\tanh^3 \frac{R}{2}}{\sinh^3 \frac{R}{2}}.$$

我们完成 (3) 的证明，因为我们已在定理 7 (4) 中证明$\xi_{(m)} \sinh^3(R/2)$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递减。

□

5. Proofs of monotonicity of Steklov eigenvalues on geodesic disks with varying curvature

本节中，我们首先给出推论 10 的证明。

推论 *10* 的证明。(1) 首先注意，固定面积 R 和曲率 $A > 0$ 的测地圆盘半径 K 满足

$$A = \int_0^R 2\pi h_K(r) dr = \begin{cases} 4\pi \dfrac{\sin^2(\frac{\sqrt{K}R}{2})}{K}, & \text{if } K > 0, \\ \pi R^2, & \text{if } K = 0, \\ -4\pi \dfrac{\sinh^2(\frac{\sqrt{-K}R}{2})}{K}, & \text{if } K < 0. \end{cases}$$

因此， R 可以视为曲率 K 的函数 $R = R(K)$，其中 $A > 0$ 固定。于是我们可以考虑

$$\sigma_{(m)}(K; A) = \frac{m}{h_K(R)} = \frac{m}{h_K(R(K))}$$

将其视为 K 的函数，并研究它关于 $K \in (-\infty, 4\pi/A)$ 的单调性。接下来我们将论证分为两种情况。

(1.1) 情形 $K > 0$。根据 Steklov问题的缩放性质，我们知道

$$\sigma_{(m)}(K; A) = \sqrt{K}\sigma_{(m)}(1; KA) = \sqrt{4\pi A^{-1}}\sigma_{(m)}(\Theta) \sin \frac{\Theta}{2},$$

其中，常曲率为 $+1$ 的 $\mathbb{S}^2$ 中，面积为 KA 的测地圆盘的测地半径，

$$\Theta = 2\arcsin\sqrt{\frac{KA}{4\pi}}$$

关于 $K \in (0,\ 4\pi/A)$ 严格递增。

(1.2) 情形 $K < 0$。根据 Steklov 问题的缩放性质，我们知道

$$\sigma_{(m)}(K;A) = \sqrt{-K}\sigma_{(m)}(-1;-KA) = \sqrt{4\pi A^{-1}}\sigma_{(m)}(\Theta)\sinh\frac{\Theta}{2},$$

其中，$\mathbb{H}^2$ 中常曲率为 -1 的面积为 $-KA$ 的测地圆盘的测地半径，

$$\Theta = 2\mathrm{arsinh}\sqrt{\frac{-KA}{4\pi}}$$

关于 $K \in (-\infty,\ 0)$ 严格递减。

回顾一下，$\sigma_{(m)}(\Theta) = m/\sin\Theta$ 或 $m/\sinh\Theta$。不难验证结论成立。因此，我们完成了 (1) 的证明。

(2) 当曲率为 K 的测地圆盘半径 $\rho > 0$ 固定时，第 m 个特征值 $\sigma_{(m)}(K;\rho)$ 由下式给出

$$\sigma_{(m)}(K;\rho) = \frac{m}{h_K(\rho)},$$

我们可以研究它关于 $K \in (-\infty,(\pi/\rho)^2)$ 的单调性。我们再次将论证分为两种情形。

(2.1) 情形 $K > 0$。我们有

$$\sigma_{(m)}(K;\rho) = \sqrt{K}\sigma_{(m)}(1;\sqrt{K}\rho) = \rho^{-1}\sigma_{(m)}(\Theta)\Theta,$$

其中，$\Theta = \sqrt{K}\rho$ 关于 K 在 $(0,4\pi/A)$ 上严格递增。

(2.2) 情形 $K < 0$。我们有

$$\sigma_{(m)}(K;\rho) = \sqrt{-K}\sigma_{(m)}(-1;\sqrt{-K}\rho) = \rho^{-1}\sigma_{(m)}(\Theta)\Theta,$$

其中，$\Theta = \sqrt{-K}\rho$ 关于 K 在 $(-\infty,0)$ 上严格递减。

回忆 $\sigma_{(m)}(\Theta) = m/\sin\Theta$ 或 $m/\sinh\Theta$。我们可以完成（2）的证明。□

接下来我们给出推论 11 的证明。

推论 *11* 的证明。(1) 我们将论证分为两种情况。

(1.1) 情形 $K > 0$。根据 Steklov问题的缩放性质，我们知道

$$\xi_{(m)}(K;A) = K^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(1;KA) = (4\pi A^{-1})^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(\Theta)\sin^3\frac{\Theta}{2},$$

其中 Θ 关于 $K \in (0,4\pi/A)$ 严格递增，正如推论 10的证明中所说明的那样。

(1.2) 情形 $K<0$。根据 Steklov问题的缩放性质，我们知道

$$\xi_{(m)}(K;A)=(-K)^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(-1;-KA)=(4\pi A^{-1})^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(\Theta)\sinh^3\frac{\Theta}{2},$$

其中 Θ 关于 $K\in(-\infty,0)$严格递减，正如推论10的证明中所述。

现在，根据定理3 (4)和定理7 (4)，我们完成了(1)的证明。

(2) 我们将论证分为两种情况。

(2.1) 情况 $K>0$。根据Steklov问题的缩放性质，我们有

$$\xi_{(m)}(K;\rho)=K^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(1;\sqrt{K}\rho)=\rho^{-3}\xi_{(m)}(\Theta)\Theta^3,$$

其中，$\Theta=\sqrt{K}\rho$ 关于 K严格递增。

(2.2) 情形 $K<0$。根据 Steklov问题的缩放性质，我们有:

$$\xi_{(m)}(K;\rho)=(-K)^{\frac{3}{2}}\xi_{(m)}(1;\sqrt{-K}\rho)=\rho^{-3}\xi_{(m)}(\Theta)\Theta^3,$$

其中，$\Theta=\sqrt{-K}\rho$ 关于 K严格递减。

现在根据定理3 （1）和定理 7 （1），我们完成了（2）的证明。□

最后，我们给出推论 12的证明。

推论 *12*的证明。 （1）我们将论证分为两种情形。

(1.1) 情形 $K>0$。我们知道

$$\eta_{(m)}(K;A)=\sqrt{K}\eta_{(m)}(1;KA)=\sqrt{4\pi A^{-1}}\eta_{(m)}(\Theta)\sin\frac{\Theta}{2},$$

其中 Θ 关于 $K\in(0,4\pi/A)$ 严格递增，正如推论 10 的证明中所说明的。

(1.2) 情形 $K<0$。我们知道

$$\eta_{(m)}(K;A)=\sqrt{-K}\eta_{(m)}(-1;-KA)=\sqrt{4\pi A^{-1}}\eta_{(m)}(\Theta)\sinh\frac{\Theta}{2},$$

其中 Θ 关于 $K\in(-\infty,0)$ 严格递减，正如推论 10 的证明中所说明的。

现在，根据定理5 (4) 和定理8 (4)，我们完成了 (1) 的证明。

(2) 我们将论证分为两种情形。

(2.1) $K>0$的情形。我们有

$$\eta_{(m)}(K;\rho)=\sqrt{K}\eta_{(m)}(1;\sqrt{K}\rho)=\rho^{-1}\eta_{(m)}(\Theta)\Theta,$$

其中，$\Theta=\sqrt{K}\rho$ 关于 K在 $(0,4\pi/A)$ 上严格递增。

(2.2) 情形 $K<0$。我们有

$$\eta_{(m)}(K;\rho)=\sqrt{-K}\eta_{(m)}(-1;\sqrt{-K}\rho)=\rho^{-1}\eta_{(m)}(\Theta)\Theta,$$

其中， $\Theta = \sqrt{-K\rho}$ 关于 K 在 $(-\infty,0)$ 上严格递减。

现在，根据定理5 (1) 和定理8 (1)，我们完成了 (2) 的证明。□

6. Proofs of scaling inequalities for $n \geq 3$

首先，我们给出定理15的证明。

定理*15*的证明。考虑常微分方程（2.3），由命题26 可知，不计重数的第 m 个特征值$\sigma_{(m)}$ 由下式给出

$$\sigma_{(m)} = \frac{\psi'(R)}{\psi(R)}. \tag{6.1}$$

将方程（2.3）乘以 h^{n-1} 并从 0 积分到 R，得到

$$h^{n-1}\psi' = \tau_m \int_0^R h^{n-3}\psi dr. \tag{6.2}$$

这里及下文中，为简便起见，在不引起混淆时，我们用 h 表示 $h(R)$ 或 $h(r)$，对 ψ也采用相同的约定。现在，将（6.1）和（6.2）结合起来消去 ψ'，得到

$$\sigma_{(m)}h = \frac{\psi'}{\psi}h = \frac{\tau_m \int_0^R h^{n-3}\psi dr}{h^{n-2}\psi}.$$

Let

$$F(R) = \frac{\int_0^R h^{n-3}\psi dr}{h^{n-2}\psi}.$$

于是我们有

$$F'(R) = \frac{h^{2n-5}\psi^2 - \left((n-2)h^{n-3}h'\psi + h^{n-2}\psi'\right)\int_0^R h^{n-3}\psi dr}{(h^{n-2}\psi)^2}.$$

Set

$$G(R) = h^{n-2}\psi^2 - \left((n-2)h'\psi + h\psi'\right)\int_0^R h^{n-3}\psi dr.$$

则 $G(0) = 0$。此外，我们有

$$G'(R) = h^{n-2}\psi\psi' - \left((n-2)h''\psi + (n-1)h'\psi' + h\psi''\right)\int_0^R h^{n-3}\psi dr.$$

利用

$$h\psi'' + (n-1)h'\psi' = \frac{\tau_m\psi}{h}$$

and

$$\int_0^R h^{n-3}\psi dr = \frac{h^{n-1}\psi'}{\tau_m},$$

我们得到

$$G'(R) = -\frac{n-2}{\tau_m} h^{n-1} h'' \psi \psi'.$$

如果我们处于双曲空间中，那么 $h'' = h$ 和

$$G'(R) = -\frac{n-2}{\tau_m} h^{n} \psi \psi' < 0.$$

所以我们有 $G（R）< 0$。于是 $F'（R）< 0$。由此可知，$^{\sigma_{(m)}} \sinh\ R$ 在$(0,\ +\infty)$上严格递减。

如果我们处于球面上，那么 $h'' = -h$ ，并且可以类似地得出结论。因此证明完毕。

□

为了使定理17、定理18 和定理22 的证明更加简洁，我们定义

$$y_m = \frac{u_m'}{u_m}.$$

然后可以很容易地验证， y_m 满足Riccati微分方程

$$y_m' = -y_m^2 - \frac{(n-1)h'}{h} y_m + \frac{\tau_m}{h^2}. \tag{6.3}$$

此外，我们定义

$$z_m = h y_m.$$

则 z_m 满足

$$z_m' = -\frac{z_m^2 + (n-2)h' z_m - \tau_m}{h}. \tag{6.4}$$

现在我们给出定理 17的证明。

定理 *17*的证明。 我们将论证分为两种情况。

(1) 对于 $m \geq 1$，考虑函数

$$F = \eta_{(m)} \sinh R = \frac{h^n u_m^2}{\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr}.$$

于是我们有

$$F' = \frac{h^{n-1} u_m (n h' u_m + 2 h u_m')}{(\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr)^2} \left(\int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr - \frac{h^n u_m^3}{n h' u_m + 2 h u_m'} \right).$$

接下来令

$$\begin{aligned} G &= \int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr - \frac{h^n u_m^3}{n h' u_m + 2 h u_m'} \\ &= \int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr - \frac{h^n u_m^2}{n h' + 2 z_m}. \end{aligned}$$

后续将用到 z_m 及其在零点处的导数的一些计算结果。根据方程（6.3）和（6.4）直接计算可得

$$z_m(0) = m, \quad z_m'(0) = 0, \quad z_m''(0) = -\frac{(n-2)m}{2m+n}. \tag{6.5}$$

于是 $G(0)=0$。此外，我们还有

$$G'=\frac{h^{n-1}u_m^2}{(nh'+2z_m)^2}\left(nh^2+2\tau_m-2(n-2)h'z_m-2z_m^2\right).$$

现在考虑函数

$$H=nh^2+2\tau_m-2(n-2)h'z_m-2z_m^2. \tag{6.6}$$

于是我们推得

$$\begin{aligned}H'=\frac{2}{h}\Big(&2z_m^3+3(n-2)h'z_m^2+\left((n-2)^2(h')^2-(n-2)h^2-2\tau_m\right)z_m\\&+nh^2h'-(n-2)\tau_m h'\Big).\end{aligned} \tag{6.7}$$

接下来我们断言

$$H>0,\quad \forall R>0.$$

证明采用反证法。首先利用（6.5）得到

$$z_m(R)=m-\frac{(n-2)m}{2(2m+n)}R^2+o(R^2),\ \text{as } R\to 0,$$

并进一步利用

$$\begin{aligned}h(R)&=\sinh R=R+o(R^2),\\h'(R)&=\cosh R=1+\frac{1}{2}R^2+o(R^2),\ \text{as } R\to 0,\end{aligned}$$

我们得到

$$H=\frac{n^2+4m}{2m+n}R^2+o(R^2),\ \text{as } R\to 0.$$

由此可知，存在一个 $R_m>0$，使得在 $(0,\ R_m)$ 上有 $H>0$。假设结论不成立。令

$$R_0=\inf\{R\big|H(R)=0\}.$$

于是 $R_0>0$。此外，我们有 $H'(R_0)\ \leq 0$。取 $R=R_0$ 在（6.6）中。于是得到

$$2z_m^2(R_0)=(nh^2+2\tau_m-2(n-2)h'z_m)\big|_{R=R_0}.$$

将此表达式代入（6.7），可得

$$H'(R_0)=\frac{2}{h}(2h^2z_m+\frac{n^2}{2}h^2h')\big|_{R=R_0}>0,$$

这就产生了矛盾。现在注意到

$$G(0)=H(0)=0.$$

对于 $m\geq 1$，所需结论可以直接得到。

（2）对于 $m=0$，考虑函数

$$J=\eta_{(0)}\sinh R=\frac{h^n}{\int_0^R h^{n-1}dr}.$$

于是我们有

$$J' = \frac{h^{n-1}}{(\int_0^R h^{n-1}dr)^2}\left(nh'\int_0^R h^{n-1}dr - h^n\right).$$

Set

$$K = nh'\int_0^R h^{n-1}dr - h^n.$$

注意到 $K(0) = 0$。此外，我们有

$$K' = nh''\int_0^R h^{n-1}dr > 0.$$

于是 $K > 0$. 此外， $J' > 0$。由此可知， $^{\eta(0)}\sinh\ R$ 在 $(0, +\infty)$ 上严格递增。因此证明完成。□

7. Proofs of sharp bounds for eigenvalues on warped productmanifolds

首先我们给出定理18的证明。

定理 *18*的证明。首先，我们断言

$$z_m = hy_m$$

在 $(0, R]$上递增。由 (6.4) 可知

$$z_m' = -\frac{z_m^2 + (n-2)h'z_m - \tau_m}{h}.$$

Set

$$F = z_m^2 + (n-2)h'z_m - \tau_m.$$

注意到 $F(0) = 0$。因此，我们的目标是证明 $F \le 0$。注意

$$\begin{aligned} F' &= 2z_m z_m' + (n-2)h''z_m + (n-2)h'z_m' \\ &= -\frac{2z_m + (n-2)h'}{h}F + (n-2)h''z_m. \end{aligned}$$

由此可得

$$F' + c(r)F \le 0, \tag{7.1}$$

其中

$$c(r) = \frac{2z_m + (n-2)h'}{h}.$$

于是可知，当 $\epsilon > 0$ 充分小时，

$$(e^{\int_\epsilon^r c(t)dt}F)' \le 0. \tag{7.2}$$

将两边从 ϵ 到 R 在（7.2）上积分，可得

$$e^{\int_\epsilon^R c(t)dt}F(R) \le F(\epsilon).$$

注意，

$$\int_{\epsilon}^{R} c(t)dt \to +\infty, \text{ as } \epsilon \to 0+.$$

我们有

$$F(R) \leq e^{-\int_{\epsilon}^{R} c(t)dt} F(\epsilon) \to 0, \text{ as } \epsilon \to 0+,$$

这导出 $F(R) \leq 0$。因此结论成立。

接下来假设 $n \geq 4$，并证明 $\xi_{(m)}$ 的下界。令

$$G = h^{n+2}(u_m')^2 - m^2(n+2m)\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr.$$

于是 $G(0) = 0$。此外，我们有

$$G' = h^{n-1}u_m^2\left(-m^2(n+2m) + 2\tau_m z_m - (n-4)h'z_m^2\right).$$

接下来考虑函数

$$H = -m^2(n+2m) + 2\tau_m z_m - (n-4)h'z_m^2. \tag{7.3}$$

根据（6.4），我们得到

$$h' = \frac{\tau_m - hz_m' - z_m^2}{(n-2)z_m}. \tag{7.4}$$

将此表达式代入（7.3），可得

$$H = -m^2(n+2m) + \frac{n}{n-2}\tau_m z_m + \frac{n-4}{n-2}(z_m^3 + hz_m z_m').$$

回忆一下 $n \geq 4$，并且（参见 [50] 中的命题 12）

$$z_m \geq m, \quad z_m' \geq 0.$$

由此可得

$$H \geq H\big|_{z_m=m, z_m'=0} = 0. \tag{7.5}$$

于是 $G' \geq 0$。此外，我们有 $G \geq 0$。由此可得

$$\xi_{(m)} \geq m^2(n+2m)\frac{1}{h^3(R)}.$$

此外，当 $H = 0$ 时，由（7.5）我们得到

$$z_m \equiv m, \quad z_m' \equiv 0.$$

此外，由（7.4）可得 $h' \equiv 1$。于是 $h(r) \equiv r$。

现在注意到，上述论证可用于证明（1.4）中的上界，其中 $n = 2$。事实上，对于 $n = 2$，我们有（参见 [50]）中的定理 2

$$z_m = \frac{hu_m'}{u_m} = h\sigma_{(m)} = m.$$

于是（7.3）变为

$$H = 2m^2(h' - 1) \leq 0. \tag{7.6}$$

因此 $G' \leq 0$，从而得到 $G \leq 0$。由此可知

$$\xi_{(m)} \leq m^2(2+2m)\frac{1}{h^3(R)}.$$

此外，当 $H = 0$时，由（7.6）可得 $h' \equiv 1$。于是 h（r）$\equiv r$。

接下来我们考虑 $n \leq 3$ 的情形，并证明 $\xi_{(m)}$的下界。令

$$I = \frac{h^{n+2}(u_m')^2}{h'} - m^2(n+2m)\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr.$$

于是 $I(0) = 0$。此外，我们有

$$\begin{aligned} I' &= h^{n-1}u_m^2\left(-(n-4)z_m^2 + \frac{2\tau_m z_m}{h'} - m^2(n+2m)\right) - \frac{h^{n+2}(u_m')^2}{(h')^2}h'' \\ &\geq h^{n-1}u_m^2\left(-(n-4)z_m^2 + \frac{2\tau_m z_m}{h'} - m^2(n+2m)\right) \\ &\geq h^{n-1}u_m^2\left(-(n-4)m^2 + 2m\tau_m - m^2(n+2m)\right) \\ &= 0. \end{aligned}$$

于是 $I \geq 0$，这意味着

$$\xi_{(m)} \geq m^2(n+2m)\frac{h'(R)}{h^3(R)}.$$

此外，当 $I' = 0$ 时，我们可以验证 $h'' \equiv 0$ 和 $h' \equiv 1$。由此可得 $h(r) \equiv r$. 因此，证明完成。□

注34. 在定理18的证明中，我们证明了 z_m 在 $(0, R]$ 上递增。此外，若将条件 $h'' \leq 0$ 和 $h' \leq 1$ 替换为 $h'' \geq 0$ 和 $h' \geq 1$，则可以证明 z_m 在 $(0, R]$ 上递减。注意 $z_m = hu_m'/u_m = h\sigma_{(m)}$。因此，上述结论包含定理15（其中 $h(r) = \sin r$ 或 $h(r) = \sinh r$），而上述论证也为其提供了另一种证明。

接下来我们给出定理的证明22。

定理22的证明。我们将论证分为两种情况。

(1) 令 $m \geq 1$。首先，我们证明（1.8）中的上界。令

$$F(R) = h^n u_m^2 - (n+2m)\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr.$$

注意，$F(0) = 0$。此外，我们有

$$F'(R) = nh^{n-1}h'u_m^2 + 2h^n u_m u_m' - (n+2m)h^{n-1}u_m^2.$$

Let

$$G(R) = nh'u_m + 2hu_m' - (n+2m)u_m.$$

注意到 $G(0) = 0$。此外，我们有

$$G'(R) = nh''u_m + nh'u_m' + 2h'u_m' + 2hu_m'' - (n+2m)u_m'$$

$$\leq \left(-(n-4)h' - (n+2m)\right) u'_m + \frac{2\tau_m}{h} u_m$$
$$= -\left((n-4)h' + (n+2m)\right) \frac{G}{2h}$$
$$- \left((n+2m) - nh'\right) \left((n+2m) + (n-4)h'\right) \frac{u_m}{2h} + \frac{2\tau_m}{h} u_m.$$

现在我们声称

$$I := 4\tau_m - \left((n+2m) - nh'\right) \left((n+2m) + (n-4)h'\right) \leq 0.$$

注意到

$$I = -8m - n^2 + 4(n+2m)h' + n(n-4)(h')^2.$$

无论是 $n \geq 4$ 还是 $2 \leq n \leq 3$，我们都有

$$I \leq I\big|_{h'=1} = 0. \tag{7.7}$$

由该断言，

$$G' + c_1(r)G \leq 0, \tag{7.8}$$

其中

$$c_1(r) = \frac{(n-4)h' + (n+2m)}{2h}.$$

采用与处理（7.1）相同的论证，我们由（7.8）得到 $G(R) \leq 0$。于是 $F(R) \leq 0$。因此

$$\eta_{(m)} \leq (n+2m)\frac{1}{h}.$$

此外，当 $G = 0$时，由 (7.7) 可得 $h' \equiv 1$。于是 $h(r) \equiv r$。

接下来证明 (1.8) 中的下界。令

$$H(R) = \frac{h^n u_m^2}{h'} - (n+2m) \int_0^R h^{n-1} u_m^2 dr.$$

注意到 $H(0) = 0$。此外，我们有

$$H'(R) = \frac{nh^{n-1}h'u_m^2 + 2h^n u_m u'_m}{h'} - \frac{h^n u_m^2}{(h')^2} h'' - (n+2m)h^{n-1}u_m^2$$
$$\geq -2mh^{n-1}u_m^2 + \frac{2h^n u_m u'_m}{h'}.$$

由 [50] 中的命题 12 可知

$$\frac{u'_m}{u_m} \geq m\frac{h'}{h}. \tag{7.9}$$

由此可得

$$H'(R) \geq -2mh^{n-1}u_m^2 + 2mh^{n-1}u_m^2 = 0.$$

于是 $H(R) \geq 0$，这意味着

$$\eta_{(m)} \geq (n+2m)\frac{h'}{h}.$$

此外，当 $H'=0$时，由式（7.9）可得 $z_m=mh'$。由于

$$z_m \geq m, \quad h' \leq 1,$$

由此可得 $h'\equiv 1$。于是 $h(r)\equiv r$。

最后我们证明（1.9）。令

$$K(R)=(n+2m)\frac{u_{m+1}^2}{u_m^2}\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr-(n+2m+2)\int_0^R h^{n-1}u_{m+1}^2 dr.$$

注意，$K(0)=0$。此外，我们有

$$K'(R)=(n+2m)\frac{2u_m^2u'_{m+1}u_{m+1}-2u_mu_{m+1}^2u'_m}{u_m^4}\int_0^R h^{n-1}u_m^2\,dr - 2h^{n-1}u_{m+1}^2.$$

Let

$$\begin{aligned} L(R)&=(n+2m)\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr-\frac{h^{n-1}u_m^3u_{m+1}}{u_mu'_{m+1}-u_{m+1}u'_m}\\ &=(n+2m)\int_0^R h^{n-1}u_m^2 dr-\frac{h^{n-1}u_m^2}{\Delta y}, \end{aligned}$$

其中 $\Delta y:=y_{m+1}-y_m$。

由于

$$\Delta y=y_{m+1}-y_m=\sigma_{m+1}-\sigma_m,$$

由命题 12 可知

$$\Delta y\geq\frac{1}{h}>0.$$

那么 $L(R)$ 和 $K'(R)$ 符号相同。

接下来注意到

$$h\Delta y|_{R=0}=z_{m+1}(0)-z_m(0)=1,$$

这意味着 $L(0)=0$。接着我们可以验证

$$L'(R)=\frac{h^{n-1}u_m^2}{\Delta y}\left((n+2m-1)\Delta y+\frac{n+2m-1}{h^2\Delta y}-\frac{2(n-1)h'}{h}-4y_m\right).$$

定义

$$M(R)=(n+2m-1)\Delta y+\frac{n+2m-1}{h^2\Delta y}-\frac{2(n-1)h'}{h}-4y_m.$$

根据算术–几何平均不等式，我们有

$$M(R)\geq\frac{2(2m+n-1)}{h}-\frac{2(n-1)h'}{h}-4y_m.$$

Set

$$N(R)=(2m+n-1)u_m-(n-1)h'u_m-2hu'_m.$$

由于

$$h'' \leq 0, \quad u''_m = \frac{\tau_m}{h^2}u_m - \frac{(n-1)h'}{h}u'_m,$$

我们有

$$\begin{aligned} N'(R) &= (2m+n-1)u'_m - (n-1)h''u_m - (n-1)h'u'_m - 2h'u'_m - 2hu''_m \\ &\geq \left((2m+n-1) + (n-3)h'\right)u'_m - \frac{2\tau_m}{h}u_m \\ &= \big((2m+n-1)^2 - 2(2m+n-1)h' - (n-1)(n-3)(h')^2 \\ &\quad -4m(m+n-2)\big)\frac{u_m}{2h} - \frac{(2m+n-1)+(n-3)h'}{2h}N. \end{aligned}$$

Let

$$\begin{aligned} J =&(2m+n-1)^2 - 2(2m+n-1)h' \\ &- (n-1)(n-3)(h')^2 - 4m(m+n-2). \end{aligned}$$

于是我们有

$$J \geq J\big|_{h'=1} = 0. \tag{7.10}$$

由此可得

$$N' + c_2(r)N \geq 0, \tag{7.11}$$

其中

$$c_2(r) = \frac{(2m+n-1)+(n-3)h'}{2h}.$$

采用与处理式（7.1）相同的论证，由式（7.11）可得 $N(R) \geq 0$。于是 $M(R) \geq 0$。此外，我们有 $L(R) \geq 0$。由此可得 $K(R) \geq 0$。因此，我们有

$$\frac{\eta_{(m+1)}}{\eta_{(m)}} \geq \frac{n+2m+2}{n+2m}.$$

此外，当 $N' = 0$时，由（7.10）可得 $h' \equiv 1$。于是 $h(r) \equiv r$。因此，我们完成了 $m \geq 1$的证明。

（2）对于 $m = 0$，首先考虑函数

$$P = h^n - nh' \int_0^R h^{n-1}dr.$$

那么 $P(0) = 0$。此外，我们有

$$P' = -nh'' \int_0^R h^{n-1}dr \geq 0.$$

因此我们有 $P \geq 0$。由此可得

$$\eta_{(0)} \geq \frac{nh'}{h}.$$

此外，当 $P' = 0$时，我们有 $h'' \equiv 0$。于是 $h(r) \equiv r$。

接下来，我们令

$$Q = h^n - n\int_0^R h^{n-1}dr.$$

那么 $Q(0) = 0$。此外，我们有

$$Q' = nh^{n-1}(h' - 1) \le 0.$$

因此我们有 $Q \le 0$。由此可得

$$\eta_{(0)} \le \frac{n}{h}.$$

此外，当 $Q' = 0$ 时，我们有 $h' \equiv 1$。由此可得 $h(r) \equiv r$。最后一组

$$U = nu_1^2\int_0^R h^{n-1}dr - (n+2)\int_0^R h^{n-1}u_1^2dr.$$

那么 $U(0) = 0$。此外，我们有

$$U' = 2nu_1u_1'\int_0^R h^{n-1}dr - 2h^{n-1}u_1^2.$$

现在考虑函数

$$V = n\int_0^R h^{n-1}dr - \frac{h^{n-1}u_1}{u_1'} = n\int_0^R h^{n-1}dr - \frac{h^n}{z_1}.$$

于是 $V(0) = 0$。此外，由式 (6.4) 可得

$$\begin{aligned} V' &= nh^{n-1} - \frac{nh^{n-1}h'z_1 - h^nz_1'}{z_1^2} \\ &= \frac{(n-1)h^{n-1}}{z_1^2}(z_1^2 - 2h'z_1 + 1) \\ &\ge \frac{(n-1)h^{n-1}}{z_1^2}(z_1^2 - 2z_1 + 1) \\ &= \frac{(n-1)h^{n-1}}{z_1^2}(z_1 - 1)^2 \\ &\ge 0, \end{aligned}$$

其中第一个不等式得益于 $h' \le 1$。因此我们有 $V \ge 0$。于是 $U \ge 0$。由此可得

$$\frac{\eta_{(1)}}{\eta_{(0)}} \ge \frac{n+2}{n}.$$

此外，当 $V' = 0$ 时，我们有 $h' \equiv 1$。由此可得 $h(r) \equiv r$。至此，证明完成。
□

8. Further problems

最后，我们想提出几个在本文中仍未解决的开放问题。

问题 35。 *(1)* 在双曲空间 $\mathbb{H}^n$ （$n \geq 3$）中，对于四阶 *Steklov*特征值 $\eta_{(m)}$, 我们能否得到以下量的单调性 $\eta_{(m)}R$、 $\eta_{(m)}\tanh(R/2)$ 和 $\eta_{(m)}\sinh(R/2)$? *(2)* 在满足定理 *18*中的假设时，对于 $n = 3$，是否可以确定不等式

$$\xi_{(m)} \geq m^2(n+2m)\frac{1}{h^3}$$

or

$$\xi_{(m)} \leq m^2(n+2m)\frac{1}{h^3}$$

是否成立?

（*3*）在满足定理 *18*中的假设时，我们能否建立关于 $\xi_{(m+1)}/\xi_{(m)}$的比值估计?

References

[1] Sergei Artamoshin, *Lower bounds for the first Dirichlet eigenvalue of the Laplacian for domains in hyperbolic space* **160** 2016 ，《剑桥哲学学会数学论文集》（），第 2, 191 208 2 –期。

[2] Frank E. Baginski, *Upper and lower bounds for eigenvalues of the Laplacian on a spherical cap* **48** 1990 3, 569 573 ，《应用数学季刊》（），第–期。 2

[3] Frank E. Baginski, *Errata:"Upper and lower bounds for eigenvalues of the Laplacian on a spherical cap"* **49** 1991 2, 399 2 ，《应用数学季刊》（），第期。

[4] Catherine Bandle, *Isoperimetric inequality for some eigenvalues of an inhomogeneous free membrane* **22** 1972 142 147 4, 6 ，《SIAM 应用数学杂志》（），–。

[5] Catherine Bandle, *Isoperimetric inequalities and applications*, 《数学专著与研究丛书》第7卷, Pitman（Advanced Publishing Program），波士顿，马萨诸塞州—伦敦, 1980 4, 6 。

[6] Cleon S. Barroso 和 G. Pacelli Bessa, *A note on the first eigenvalue of spherically symmetric manifolds* ，《第十四届微分几何学校》（葡萄牙语），Mat. Contemp. 30（2006），63–69。

[7] Elvise Berchio, Filippo Gazzola 和 Enzo Mitidieri, *Positivity preserving property for a class of biharmonic elliptic problems* **229** 2006 ，《微分方程杂志》（），第1期，1 23 15。

[8] Stine Marie Berge, *Eigenvalues of the Laplacian on balls with spherically symmetric metrics* **13** 2023 1, 14, 20 ，《数学物理分析》（），论文编号，第[9] 页。

[9] C. Betz、G. A. Camera 和 H. Gzyl, *Bounds for the first eigenvalue of a spherical cap* **10** 1983 3, 193 202 2 ，Appl. Math. Optim.（），第–期。

[10] Denis Borisov 和 Pedro Freitas, *The spectrum of geodesic balls on spherically symmetric manifolds* **25** 2017 3, 507 544 ，《分析与几何通讯》（），第–期。 2

[11] D. Buoso 和 J. Kennedy, *The Bilaplacian with Robin boundary conditions*，《SIAM 数学分析杂志》 **54** 2022 1, 36 78 2 （），第–期。

[12] G. A. Camera, *On a Sturm-Liouville problem* **30** 1994 2, ，Appl. Math. Optim.（），第–期。 159 169 2

[13] Shiu Yuen Cheng, *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. 143（1975），第3期，289–297。4，7

[14] Bruno Colbois、Alexandre Girouard、Carolyn Gordon 和 David Sher, *Some recent developments on the Steklov eigenvalue problem* **37** 2024 , Rev. Mat. Complut.（） , 第1期, 1 161 2–。[15] G. Del Grosso、A. Gerardi 和 F. Marchetti, *A diffusion model for patch formation on cellular surfaces* **7** 1981 2, 125 135 , Appl. Math. Optim.（） , 第–期。[16] ´ *The geometry of the first non-zero Stekloff eigenvalue* Jose F. Escobar, , 《J. Funct. Anal.》 **150** 1997 2, 544 556 4 （） , 第–期。Jose F. Escobar, [17] ´ *An isoperimetric inequality and the first Steklov eigenvalue*, 《J. Funct. Anal.》 **165** 1999 1, 101 116 4, 10 （） , 第–期。Jose F. Escobar, *A comparison theorem for the first non-zero Steklov eigenvalue*, 《J. Funct. Anal.》178（2000）, 第1期, 143–155。2, 4, 6, 7, 14[18] ´ [19] Alberto Ferrero、Filippo Gazzola 和 Tobias Weth, *On a fourth order Steklov eigenvalue problem* **25** 2005 4, 315 332 , Analysis（慕尼黑） （） , 第–期。[20] 15 S. Friedland 和 W. K. Hayman, *Eigenvalue inequalities for the Dirichlet problem on spheres and the growth of subharmonic functions* **51** 1976 , Comment. Math. Helv.（） , 第 2, 133 161 2 –期。Michael E. Gage, [21] *Upper bounds for the first eigenvalue of the Laplace-Beltrami operator* **29** 1980 6, 897 912 , Indiana Univ. Math. J.（） , 第–期。[22] 2 A. Girouard 和 I. Polterovich, *Spectral geometry of the Steklov problem*, 《J. Spectr. Theory》7（2017）, 第2期, 321–359。2, 14[23] Alexander Grigor'yan, *Isoperimetric inequalities and capacities on Riemannian manifolds* 1 1998 139 153, , Maz'ya 纪念文集, 第（罗斯托克, ）卷, –, 《算子理论：进展与应用》, **109**, ¨ 1999 2 Birkhauser, 巴塞尔, 。Scott Harman, *Scaling inequalities and limits for Robin and Dirichlet eigenvalues*, 《J. Math. Anal. Appl.》 **544** 2025 2, 129082, 33 2, 4 （） , 论文编号, 第页。A. Hurtado、S. [24] [25] Markvorsen 和 V. Palmer, *Estimates of the first Dirichlet eigenvalue from exit time moment spectra* **365** 2016 3 4, 1603 1632 , Math. Ann.（） , 第- –期。[26] 2 *An upper bound for small eigenvalues of the Laplacian* Neil N. Katz, , 《大阪数学杂志》40（2003）, 第2期, 449–454。2[27] Alexandru Krist´aly, *New features of the first eigenvalue on negatively curved spaces*, 《Adv. Calc. Var.》 **15** 2022 3, 475 495 2 （） , 第–期。J. R. Kuttler, *Remarks on a Stekloff eigenvalue problem*, [28] 《SIAM 数值分析杂志》9（ 1972 1 5 10 ）, –。J. R. Kuttler 和 V. G. Sigillito, [29] *Inequalities for membrane and Stekloff eigenvalues*, 《J. Math. Anal. Appl.》 **23** 1968 148 160 2, 14, 15 （） , –。N. Kuznetsov、T. Kulczycki、M. Kwasnicki、A. Nazarov、[30] S. Poborchi、I. Polterovich 和 B. Siudeja, *The legacy of Vladimir Andreevich Steklov*, 《美国数学学会通报》 **61** 2014 1, 9 22 2 （） , 第–期。Jeffrey J. Langford 和 Richard S. Laugesen, [31] *Scaling inequalities for spherical and hyperbolic eigenvalues* **13** 2023 1, 263 296 1, 4, 7 , 《J. Spectr. Theory》 （） , 第–期。[32] Tadayuki Matsuzawa 和 Shˆukichi Tanno, *Estimates of the first eigenvalue of a big cup domain of a 2-sphere* **47** 1982 1, 95 100 , Compositio Math.（） , 第–期。[33] 2 H. P. McKean, *An upper bound to the spectrum of ∆ on a manifold of negative curvature* **4** 1970 359 366 , 《微分几何杂志》 （） , –。[34] 2 *Some isoperimetric inequalities for harmonic functions* L. E. Payne, 《SIAM 数学分析杂志》1（1970）, 354–359。2, 15[35] Peter Petersen, *Riemannian geometry Third edition*, 《数学研究生教材》第 **171**, 2016 12 卷, Springer, Cham, 。Mark A. Pinsky, [36] *The spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. I* , 《微分几何杂志》 （） , 第–期。 **13** 1978 1, 87 91 2 [37] Mark A. Pinsky, *Spectrum of the Laplacian on a manifold of negative curvature. II*, 《微分几何杂志》14（1979）, 第4期, 609–620。2

[38] Mark A. Pinsky, *The first eigenvalue of a spherical cap*, 《应用数学与优化》7 (1981), 第 2, 137 139 2 期–。Mark A. Pinsky, *An upper bound for the first eigenvalue of a spherical cap*, [39] 《应用数学与优化》30 (1994), 第 2 期, 171–174。2[40] Simon Raulot 和 Alessandro Savo, *Sharp bounds for the first eigenvalue of a fourth order Steklov problem* **25** 2015 3, 1602 1619 15 , 《几何分析杂志》 (), 第 – 期。[41] Sadao Sato, *Barta's inequalities and the first eigenvalue of a cap domain of a* 2*-sphere*, 《数学杂志》181 (1982), 第 3 期, 313–318。2[42] Alessandro Savo, *On the lowest eigenvalue of the Hodge Laplacian on compact, negatively curved domains* **35** 2009 1, 39 62 , 《全球分析与几何 2 年刊》 (), 第 – 期。[43] *Sur les problèmes fondamentaux de la physique mathéématique* W. Stekloff, , 《法国高等师范学校科学年刊》 (3) 19 (1902), 191–259。2[44] Feng Yu Wang, *Estimates of the first Dirichlet eigenvalue by using diffusion processes*, 《概率论及相关领域》 **101** 1995 3, 363 369 2 (), 第 – 期。Q. L. Wang 和 C. Y. [45] Xia, *Sharp bounds for the first non-zero Stekloff eigenvalues*, 《泛函分析杂志》257 (2009), 第 8 期, 2635–2644。10[46] Qiaoling Wang 和 Changyu Xia, *Sharp Lower Bounds for the First Eigenvalues of the Bi-Laplace Operator* 1802 05502 5 10 , arXiv: 。v 。[47] Changyu Xia 和 Qiaoling Wang, *Inequalities for the Steklov eigenvalues*, 《混沌、孤子与分形》48 (2013), 61–67。10[48] Changyu Xia 和 Qiaoling Wang, *Eigenvalues of the Beltzell-Laplace operator and of the fourth order Steklov problems* **264** 2018 , 《微分方程杂志》 (), 第 10 期, 6486 6506 14–。[49] Chao Xia 和 Changwei Xiong, *Escobar's conjecture on a sharp lower bound for the first nonzero Steklov eigenvalue* **7** 2024 759 778 4, 10 , 《北京数学杂志》 (), –。[50] Changwei Xiong, *Optimal estimates for Steklov eigenvalue gaps and ratios on warped product manifolds* 2021, 22, 16938 16962 4, 6, 11, , 《国际数学研究通知》IMRN 第 – 期, 36, 38, 39[51] Changwei Xiong, *On the spectra of three Steklov eigenvalue problems on warped product manifolds* **32** 2022 5, 153, 35 4, 9, 10, 11, , 《几何分析杂志》 (), 第 期, 论文编号: 页码: 12, 14, 15, 16[52] Changwei Xiong, *A weighted Reilly formula for differential forms and sharp Steklov eigenvalue estimates* **68** 2025 10 1007 11425 , 《中国科学: 数学》 ()。https://doi.org/。/s - 024-2432-1 4

School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, Sichuan, P. R. China

Email address: 15828971863@163.com

School of Mathematics, Sichuan University, Chengdu 610065, Sichuan, P. R. China

Email address: changwei.xiong@scu.edu.cn (a)

School of Mathematical Sciences University of Chinese Academy of ,,, Sciences Beijing 100049 P. R. China; (b)

Institute of Applied Mathematics Academy of Mathematics and Systems ,,,, Science Chinese Academy of Sciences Beijing 100190 P. R. China

Email address: zouyuxun25@mails.ucas.ac.cn