arXiv:2512.22898v1 [physics.class-ph] 28 Dec 2025

# 薛定谔板中的能量传输

Serge N. Gavrilov[1,2,3], Anton M. Krivtsov[1,2,4],和 Ekaterina V. Shishkina[1,2,3]

[1]HSE University，俄罗斯圣彼得堡[2]雅罗斯拉夫智者诺夫哥罗德国立大学，俄罗斯大诺夫哥罗德[3]俄罗斯科学院机械工程问题研究所，俄罗斯圣彼得堡[4]彼得大帝圣彼得堡理工大学（SPbPU），俄罗斯圣彼得堡

2025年12月30日

**摘要**

本文提出“薛定谔板”的概念。这是一种置于特殊类型线性弹性地基上的无限二维线性微极弹性介质，具有面外自由度。板的任意自由运动都可对应于单粒子在外势场 $V$ 中运动的二维薛定谔方程解。势 $V$ 对位置的特定依赖关系体现在板弹性地基的性质中。本文采用直接方法，将板的控制方程推导为二维受约束的科塞拉特连续体方程。板动力学可由经典的板 Germain–Lagrange 方程描述，但其应变能不同于经典基尔霍夫–洛夫板理论所采用的应变能。具体而言，薛定谔板不能被视为由各向同性线性材料构成的薄弹性体。薛定谔板的主要性质如下：机械能在板中的传播方式与概率密度按照相应薛定谔方程传播的方式完全相同。

## 1 引言

一百年前，即1926年，Erwin Schr¨odinger 在一系列四篇论文中 Schr¨odinger [1926a,b,c,d][1]，推导出了如今被视为现代量子力学基础的方程。在前三篇论文中，他指出，新的波动力学应建立在定态波动方程（即亥姆霍兹方程）的特定形式之上，该方程具有变系数，如今被称为量子粒子的含时 Schr¨odinger 方程。这个方程包含一个未知参数，其含义是粒子能量。在第四篇论文开头，Schr¨odinger [1926d], 去除这一参数以推导相应的含时方程；Schr¨odinger 得到了一个空间四阶、时间二阶方程，参照 Courant 与 Hilbert 的著作 Courant and Hilbert [1924]，该方程被解释为板方程。这个方程有时被称为 Schr¨odinger 的实波动方程 Chen [1990, 1993], Karam [2020], Makris [2023]。对所得板方程中的微分算子进行因式分解后，Schr¨odinger 得以获得现代形式的单个量子粒子在外势场中的含时方程。尽管“实 Schr¨odinger 波动方程”与经典 Germain–Lagrange 方程相似，后者用于基尔霍夫–洛夫板理论，但它还包含一些附加项。

本文尝试理解该方程究竟对应于何种力学模型。我们考虑二维情形，并引入“薛定谔板”的概念。这是一种无限的二维线性微极弹性介质，具有面外自由度，置于一种特殊类型的线性弹性地基上。板的任意自由运动都可以对应于外势为 $V$ 的外场中单个量子粒子的薛定谔方程解。外势 $V$ 对位置的具体依赖关系体现在板弹性地基的性质中。板的控制方程采用直接方法，作为二维受约束的科塞拉特连续体方程推导得到。板动力学由“薛定谔实波动方程”描述；由于弹性地基的存在，方程中出现了附加项。然而，板应变能不同于经典 Kirchhoff–Love 板理论中所采用的应变能。我们表明，不能将薛定谔板设想为由各向同性线性材料构成的薄弹性体，即不能将其视为 Kirchhoff–Love 板。

[1]薛定谔基础论文的英文译本可见于¨薛定谔¨ [1928著作] 及其后续版本 s.

本文讨论的另一个问题是波函数的复数性质。事实上，现代形式的薛定谔方程的解被假定为复值，而表征板振动的变量则为实值。最初，薛定谔认为波函数 $\psi$ 的实部才具有物理意义；参见原论文的开头、薛定谔 ¨d], 致 Lorenz Przibram 的信件 [1967]„ 以及 Chen [1990, 1993], Karam [2020] 中的讨论。尽管稍后他接受了波函数[2], 绝对值的平方 $|\psi|^2 = \psi\psi^*$ ——而不是波函数本身——才是具有物理意义的量，薛定谔 [1926d，1928a], , 但他仍对复波函数并不满意；参见薛定谔[1926d] 以及 Chen [1990, 1993] 的最后评论。另一方面，波函数的复数性质是最重要的问题，它使得对于主要具有经典力学背景的研究人员而言，量子力学难以理解。在本文中，我们对波函数提出了一种相当简单的机械能量解释。也就是说，就薛定谔板而言，其实部和虚部（符号可能相差一个正负号）分别等于动能密度和势能密度的平方根。在自由粒子的情形下，Chen [1993] 以及我们此前关于一维情形下薛定谔方程的论文 Gavrilov 等人 [2025], 中都曾提出过类似的力学类比。因此，根据量子力学的哥本哈根（统计）解释，波函数绝对值的平方，即与概率密度成正比的量[3]„ 等于板的总机械能密度。由此，薛定谔板的主要性质如下：机械能在板中的传播方式，与相应薛定谔方程中概率密度的传播方式完全相同。

薛定谔¨方程的解与描述板（二维）和梁（一维）行为的方程之间的关系，也在相关研究中有所讨论，参见 Engstrom [2023], Erofeev [1992], Korikov 等人 [2021],Orsingher 和 D'Ovidio [2011], Volovich [2025]。本文的创新之处在于引入了波函数的能量解释。即使在零势 $V$ 的情况下，这种解释也并非显而易见，正如Chen [1993],所讨论的那样；其提出的公式仅直接适用于梁的一维情形。在二维情形下，薛定谔板并非经典的 Kirchhoff–Love 板。据我们所知，此前文献从未讨论过这一事实。我们还首次针对非零外势的情形提出了能量解释。

本文结构如下。第 2 节推导薛定谔板的基本方程。为建立线弹性板的基本方程，我们采用一种相当一般的板壳理论变体，参见 Altenbach 和 Eremeyev [2009], Altenbach 和 Zhilin [1988, 2004], Eremeyev 和 Zubov [2007, 2006],Grekova 和 Zhilin[2001], Zhilin [1976, 1982, 2006], 。该理论由直接方法发展而来，其源自 Ericksen 和 Truesdell [1957]的研究。按照这种板理论变体，板被建模为二维线性弹性微极 Cosserat 曲面。该曲面上的每个点都是一个基本刚体，具有六个自由度；在三维情况下，线性 Cosserat 连续体理论见 Cosserat 和 Cosserat[1909], Eringen [2012], Kafadar 和 Eringen [1971], Pal' mov [1964]的研究。第 2.1 节从一个物理意义清晰的模型入手，该模型描述了置于某种特殊线性弹性地基上的无限 Cosserat 平面。运动方程可以解耦为面外和面内两个方程组。我们仅考虑面外运动。所研究的板弹性地基会产生彼此独立的外力和外力矩。第 2.2 节中，我们通过假设附加机械约束来简化模型，该约束与 Kirchhoff–Love 理论框架中采用的约束相同（即 Kirchhoff 假设）。这也可以解释为转向约束 Cosserat 连续体模型，Aero and Kuvshinskii [1961], Grekova 等人 [2020], Grioli [1960], Mindlin 和 Tiersten [1962], Schaefer [1967], Toupin [1964] 也称为伪 Cosserat 模型。由于在伪 Cosserat 连续体框架中，只有一个外部机械作用，而不再有彼此独立的力和力矩，因此本文采用的弹性地基模型在物理意义上不那么清晰。由此得到的板控制方程是 Kirchhoff–Love 板的 Germain–Lagrange 方程，并含有若干对应于弹性地基的附加项。另一方面，该方程可以改写为实薛定谔波动方程的形式。第 3 节将展示这一点，并讨论初始条件相关的问题：在量子框架中初始条件为复值，而在力学情形下则为实值。我们证明，板的任意自由运动都可以对应于单粒子二维薛定谔方程的特定解。实现这一点有多种方式；最简单的方法是像薛定谔本人那样，将板位移对应于波函数的实部。另一种方式是为波函数提出一种能量解释。第 4 节讨论零外势 $V$ 情况下薛定谔板中的能量传输。此时不存在弹性地基，机械能等于动能与应变能之和。板的控制方程与 Germain–Lagrange 方程一致，其中只涉及一个弹性模量（弯曲刚度）。与此同时，应变能密度的表达式涉及两个相互独立的弹性模量。第二个模量仅出现在偶应力张量的本构方程中。对于薛定谔板¨，我们要求能量密度沿板传播的方式与根据波函数计算得到的概率密度完全相同。这一限制给出了两个弹性模量之间的特定关系。在第

[2]此处星号表示复共轭[3]哥本哈根诠释Messiah [1961], Omn`es [1992], Stapp [1997] 这一诠释源于 M. Born、N. Bohr 和 W. Heisenberg 的研究，但从未被接受Hoffmann [1984] 薛定谔¨提出。

板传播的方式与根据波函数计算得到的概率密度完全相同。这一限制给出了两个弹性模量之间的特定关系。第5节中，我们比较薛定谔板与经典 Kirchhoff–Love 板的应变能表达式¨。后者可以用板材三维材料的弹性模量表示，即用胡克模量、泊松比和板厚表示。我们证明，只要板材的三维材料具有一个被禁止的泊松比值（$\nu = 1$），两者的能量就完全相同。因此，薛定谔板并非 Kirchhoff–Love 板的特例。尽管如此，在直接方法框架下，薛定谔板的方程仍然是允许的，即使其应变能不是正定的，而且非零应变也可能对应零应变能。第 6节中，我们考察非零外势情况下更一般的能量传输。此时，机械能由动能、板应变能和地基势能组成。在用于薛定谔板的约束理论框架下，地基势能失去了原有的含义，其定义也存在歧义。因此，我们可以引入修正势能，使总能量密度再次以与根据波函数计算得到的概率密度完全相同的方式沿板传播。结论（第 7节）讨论本文的主要结果。

本文的研究结果基于 A.M. Krivtsov 未发表的工作，其中建立了在一维情形下梁中的修正能量传输与概率密度之间的等价关系。二维特定结果以及波函数的能量解释由 S.N. Gavrilov 和 E.V. Shishkina 得出。

# 2 Schr¨odinger 板的基本方程

## 2.1 平面 Cosserat 曲面面外运动的基本方程

我们主要遵循 Altenbach 和 Eremeyev [2009], 的研究，读者还可以在其中找到大量参考文献，这些文献涵盖了采用直接方法研究板和壳理论的相关工作。

在该方法的框架下，我们的板被建模为二维平面材料 Cosserat 曲面

$$S: \quad x_3 = 0 \tag{2.1}$$

嵌入三维空间中，其位置矢量为

$$\boldsymbol{x} = x_j \boldsymbol{i}_j. \tag{2.2}$$

这里， $x_j$ 是笛卡尔坐标，向量 $\boldsymbol{i}_j$ 满足

$$\boldsymbol{i}_j \cdot \boldsymbol{i}_k = \delta_{jk}, \tag{2.3}$$

符号 ·定义 点积， $\delta_{jk}$ 是克罗内克δ。材料表面上各点的位置矢量 is

$$\tilde{\boldsymbol{x}} = x_\alpha \boldsymbol{i}_\alpha. \tag{2.4}$$

因此，

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_3 \tag{2.5}$$

是该表面的法向量。这里采用爱因斯坦求和约定：拉丁字母下标取值为 1、2 或 3；希腊字母下标取值为 1 或2。通常，此类表面上的每一点都是一个基本刚体，具有六个自由度。其中三个是平移自由度，对应于位移向量 $\boldsymbol{u}(t, \tilde{\boldsymbol{x}})$，其中 $t$ 是时间。另三个是转动自由度，在线性情况下对应于微旋转向量 $\boldsymbol{\theta}(t, \tilde{\boldsymbol{x}})$。下文中将省略张量积的符号 $\otimes$；例如参见 Grekova 和 Zhilin [2001]。

微分形式下的线性控制方程为Altenbach 和 Eremeyev [2009]:

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{T} + \boldsymbol{F} = \rho \ddot{\boldsymbol{u}}, \tag{2.6}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{M} + \mathbf{T}_\times + \boldsymbol{L} = \boldsymbol{\Theta} \cdot \ddot{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.7}$$

˜此处， $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}_\alpha \dfrac{\partial}{\partial x_\alpha}$ 是面内二维纳布拉算子，点号表示对时间求导 $t$；$\mathbf{T}(t, \tilde{\boldsymbol{x}})$ 和 d $\mathbf{M}(t, \tilde{\boldsymbol{x}})$ 是 应力张量和偶应力张量，使得

$$\boldsymbol{n} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0}, \qquad \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{M} = \mathbf{0}; \tag{2.8}$$

$\mathbf{T}_\times$ 是张量$\mathbf{T}$的矢量不变量：

$$\mathbf{T}_\times \equiv \left(T_{jk} \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_k\right)_\times \stackrel{\text{def}}{=} T_{jk} \boldsymbol{i}_j \times \boldsymbol{i}_k; \tag{2.9}$$

$\boldsymbol{F}(t,\ \tilde{\boldsymbol{x}})$ 和 $\boldsymbol{L}(t,\ \tilde{\boldsymbol{x}})$ 分别是外力和外力矩； $\rho$ 是质量密度，符号 $\times$ 表示叉积。张量 $\boldsymbol{\Theta}(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 是基本刚体单位质量的惯性张量，假设其为横观各向同性：

$$\boldsymbol{\Theta} = \eta\, \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{n} + \mu \mathbf{A}, \tag{2.10}$$

其中， $\eta$、 $\mu$为相应的惯性矩，

$$\mathbf{A} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{\mathbf{I}} = \mathbf{I} - \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{n} \tag{2.11}$$

是面内二维单位张量，$\mathbf{I} = \delta_{jk} \boldsymbol{i}_j \boldsymbol{i}_k$ 是三维单位张量。我们采用如下记号

$$\tilde{\boldsymbol{z}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{z}, \tag{2.12}$$

$$\tilde{\mathbf{Z}} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbf{A} \cdot \mathbf{Z} \cdot \mathbf{A} \tag{2.13}$$

表示任意向量 $\boldsymbol{z}$ 和二阶张量 $\mathbf{Z}$。因此，带波浪号的量是相应向量量或张量量在板平面上的投影。

应力张量和偶应力张量的本构方程为 Altenbach 和 Eremeyev [2009]:

$$\mathbf{T} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{E}}, \tag{2.14}$$

$$\mathbf{M} = \frac{\partial W}{\partial \mathbf{K}}, \tag{2.15}$$

其中张量

$$\mathbf{E} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{u} + \mathbf{A} \times \boldsymbol{\theta}, \tag{2.16}$$

$$\mathbf{K} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \boldsymbol{\theta} \tag{2.17}$$

是应变度量。标量 $W(\mathbf{E},\ \mathbf{K})$ 是应变能密度，假定其为自变量的各向同性函数。

方程（2.6）、（2.7）、（2.14）、（2.15）描述了板的面外运动和面内运动。这两种运动可以解耦。本文接下来假设板只进行纯面外运动。因此，我们假设Altenbach 和 Eremeyev [2009]:

$$\mathbf{T} = \tilde{\boldsymbol{t}}\, \boldsymbol{n}, \tag{2.18}$$

˜其中 $\boldsymbol{t}$ 是一个面内向量；

$$\mathbf{M} = \tilde{\mathbf{M}}, \tag{2.19}$$

$$\boldsymbol{u} = w\boldsymbol{n}, \tag{2.20}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.21}$$

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}, \tag{2.22}$$

$$\boldsymbol{F} = F\boldsymbol{n}, \tag{2.23}$$

$$\boldsymbol{L} = \tilde{\boldsymbol{L}}, \tag{2.24}$$

$$\mathbf{K} = \tilde{\mathbf{K}}. \tag{2.25}$$

In 在这种情况下，各向同性应变能密度 $W$ 为 Altenbach 和 Eremeyev [2009]:

$$2W = \alpha \boldsymbol{n} \cdot \mathbf{E}^{\top} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n} + \beta_1 \operatorname{tr}^2 \tilde{\mathbf{K}} + \beta_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{K}}^2 + \beta_3 \operatorname{tr} \left( \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}^{\top} \right), \tag{2.26}$$

其中 $\alpha$， $\beta_1$， $\beta_2$， $\beta_3$ 是四个独立的弹性模量（材料常数），符号tr$(\cdot)$表示二阶张量的迹。由（2.14）、（2.15）可得本构方程:

$$\mathbf{T} = \alpha \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{n} = \alpha (\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w + \tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}, \tag{2.27}$$

$$\tilde{\mathbf{M}} = \beta_1 \mathbf{A} \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{K}} + \beta_2 \tilde{\mathbf{K}}^{\top} + \beta_3 \tilde{\mathbf{K}}. \tag{2.28}$$

在此，为了推导方程（2.27）右端，以下关系式很有用:

$$\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} w \boldsymbol{n} + (\mathbf{A} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \boldsymbol{n} \boldsymbol{n} = (\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w + \tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{n}) \boldsymbol{n}, \tag{2.29}$$

$$(\mathbf{A} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \boldsymbol{n} = \left( (\mathbf{I} - \boldsymbol{n}\, \boldsymbol{n}) \times \tilde{\boldsymbol{\theta}} \right) \cdot \boldsymbol{n} = (\mathbf{I} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}) \cdot \boldsymbol{n} = -\boldsymbol{n} \cdot (\mathbf{I} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}) = \tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{n}. \tag{2.30}$$

将本构方程代入控制方程（2.6）、（2.7），可得到位移 $\tilde{w}$和微旋转 $\boldsymbol{\theta}$的方程:

$$\alpha(\tilde{\Delta} w\, \boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + F\boldsymbol{n} = \rho \ddot{w} \boldsymbol{n}, \tag{2.31}$$

$$(\beta_1 + \beta_2)\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}} + \beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \alpha(\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{\theta}}) + \tilde{\boldsymbol{L}} = \mu(\tilde{\boldsymbol{\theta}})^{\cdot\cdot}, \tag{2.32}$$

这里 $\tilde{\Delta} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nabla}}$ 是面内二维拉普拉斯算子。为推导方程（2.31）、（2.32），我们使用了

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n} = \tilde{\Delta} w \boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{n})\boldsymbol{n} = \tilde{\Delta} w \boldsymbol{n} + \boldsymbol{n} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}})\boldsymbol{n} = \tilde{\Delta} w \boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.33}$$

$$(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n})_\times = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n} + (\tilde{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{n}) \times \boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{\theta}} \tag{2.34}$$

根据方程（2.29）。以下关系也很有用:

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\mathbf{A}\,\mathrm{tr}\,\tilde{\mathbf{K}}) = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.35}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}^\top = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{\theta}})^\top = \tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}}, \tag{2.36}$$

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\mathbf{K}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nabla}}\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.37}$$

现在，我们引入板弹性地基。令

$$F = -k(\tilde{\boldsymbol{x}})w, \tag{2.38}$$

$$\tilde{\boldsymbol{L}} = -\varkappa(\tilde{\boldsymbol{x}})\tilde{\boldsymbol{\theta}}. \tag{2.39}$$

这里，$k(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 和 $\varkappa(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 分别是板地基的平动刚度和转动刚度。外力 $F$ 和力矩 $\boldsymbol{L}$ 可与外势能密度 $\Pi$关联:

$$2\Pi = k(\tilde{\boldsymbol{x}})w^2 + \varkappa(\tilde{\boldsymbol{x}})\tilde{\boldsymbol{\theta}}^2. \tag{2.40}$$

外势 $\Pi$ 的物理意义由以下关系给出:

$$F = -\frac{\partial \Pi}{\partial w}, \qquad \tilde{\boldsymbol{L}} = -\frac{\partial \Pi}{\partial \tilde{\boldsymbol{\theta}}}. \tag{2.41}$$

应变能 $W$ 可解释为内势能。因此，接下来我们将该量称为

$$U = W + \Pi \tag{2.42}$$

势能密度。

## 2.2 过渡到约束 Cosserat 曲面

现在，我们接受 Kirchhoff 运动学假设，从而得到一种 Kirchhoff–Love 型理论。[4]在直接方法的框架下，该假设可形式化地表述如下Eliseev [1999],Krommer 和 Vetyukov [2020],Zhilin [2006]:

$$\tilde{\boldsymbol{\theta}} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n}. \tag{2.43}$$

注 2.1。 接受 Kirchhoff 假设（2.43）意味着从具有面外自由度的二维 Cosserat 连续体模型过渡到相应的约束 Cosserat 连续体（也称为伪 Cosserat 连续体）。事实上，考虑位置为$\boldsymbol{x}_0$的点邻域内的位移场。在三维空间中，有

$$\begin{aligned}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0 + \mathrm{d}\boldsymbol{x}) &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^S + \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^A \\ &= \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^S - \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot \mathbf{I} \times \boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) + \mathrm{d}\boldsymbol{x} \cdot (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^S + \boldsymbol{\varphi} \times \mathrm{d}\boldsymbol{x},\end{aligned} \tag{2.44}$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{2}\left((\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{u})^A\right)_\times = \frac{1}{2}\boldsymbol{\nabla} \times \boldsymbol{u} \tag{2.45}$$

表示宏观旋转矢量；上标 $S$ 和 $A$分别表示相应二阶张量的对称分量和反对称分量， $\boldsymbol{\nabla} = \boldsymbol{i}_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ 是面内三维纳布拉算子。对于伪 Cosserat 连续体, —

[4]经典 Kirchhoff–Love 板理论采用各向同性材料平面薄体的三维线弹性方程建立，Love [1944], 而我们采用直接方法。

通常认为微旋转等于宏观旋转Aero andKuvshinskii [1961],Grekova 等人 [2020],Grioli [1960], Mindlin 和 Tiersten [1962], Schaefer [1967],Toupin [1964]:

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\varphi}. \tag{2.46}$$

与此同时，在具有面外自由度的二维连续体中，一个 ha s

$$\begin{aligned} w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0 + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{n} = w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0)\boldsymbol{n} + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\nabla}} w\boldsymbol{n} = w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0)\boldsymbol{n} + \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} \cdot (\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w) = w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0)\boldsymbol{n} - \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{I} \times \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \\ = w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0)\boldsymbol{n} - \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}} \cdot \mathbf{A} \times \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = w(\tilde{\boldsymbol{x}}_0)\boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{\varphi}} \times \mathrm{d}\tilde{\boldsymbol{x}}, \end{aligned} \tag{2.47}$$

其中

$$\boldsymbol{\varphi} \equiv \tilde{\boldsymbol{\varphi}} = \frac{1}{2}\big(\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w\boldsymbol{n} - \boldsymbol{n}\tilde{\boldsymbol{\nabla}} w\big)_{\times} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n} \tag{2.48}$$

是宏观旋转矢量。现在接受式（2.46）可得式（2.43）。

为考虑式（2.43），令

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n} - \tilde{\boldsymbol{\theta}} \equiv (\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n})_{\times} \to \mathbf{0}, \tag{2.49}$$

$$\alpha \to \infty, \tag{2.50}$$

其中使用了式（2.34）。根据式（2.27），

$$\mathbf{T}_{\times} = \alpha(\mathbf{E} \cdot \boldsymbol{n}\boldsymbol{n})_{\times}. \tag{2.51}$$

因此，$\mathbf{T}_{\times}$ cann 不再通过本构方程（2.27）求得。相反，$\mathbf{T}_{\times}$ 应通过方程 f 求得 or 动量平 衡（2.7）：

$$\mathbf{T}_{\times} = -\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} - \tilde{\boldsymbol{L}}. \tag{2.52}$$

其中关系

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \tilde{\boldsymbol{\theta}} = 0, \tag{2.53}$$

由式（2.43）得到的关系也予以考虑，同时还采用了额外的简化

$$\boldsymbol{\Theta} = \mathbf{0} \tag{2.54}$$

也予以考虑。另一方面，由于式（2.18）

$$\mathbf{T}_{\times} = \tilde{\boldsymbol{t}} \times \boldsymbol{n}. \tag{2.55}$$

因此，

$$\tilde{\boldsymbol{t}} = (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \times \boldsymbol{n}, \tag{2.56}$$

$$\mathbf{T} = (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \times \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n}, \tag{2.57}$$

$$\begin{aligned} \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot \mathbf{T} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \cdot (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \times \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \cdot \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \\ = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times (\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\boldsymbol{\theta}} + \tilde{\boldsymbol{L}}) \cdot \boldsymbol{n}\,\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \big(\beta_3 \tilde{\Delta}(\tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times w\boldsymbol{n}) + \tilde{\boldsymbol{L}}\big) = -\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\Delta} w\boldsymbol{n} + \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\boldsymbol{L}}. \end{aligned} \tag{2.58}$$

因此，式（2.6）转化为位移方程，称为 Germain–Lagrange 方程 Eliseev[1999], Korikov 等人 [2021], Zhilin [2006]针对 Kirchhoff–Love 板：

$$(\beta_3 \tilde{\Delta}\tilde{\Delta} w + \rho\ddot{w})\boldsymbol{n} = \tilde{\boldsymbol{\nabla}} \times \tilde{\boldsymbol{L}} + F\boldsymbol{n}. \tag{2.59}$$

注释 2.2. 在文献中，传统上，推导 Germain–Lagrange 方程时通常不考虑右端第一项，该项对应外力矩。据我们所知，唯一考虑这一项的研究是 Eliseev [1999]，，其中通过直接方法得到了 Kirchhoff–Love 板理论。然而，在 Eliseev [1999] 中，Kirchhoff–Love 理论并非像我们这样作为更一般的基于 Cosserat 的理论的极限情形得到。

根据式（$W$2.26）、（2.49）、（2.50），应变能的表达式为：

$$2W = \beta_2 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{K}}^2 + \beta_3 \operatorname{tr} \tilde{\mathbf{K}} \cdot \tilde{\mathbf{K}}^{\top}, \tag{2.60}$$

˜参见式（2.26）。这里$\mathbf{K}$ 由式（2.13）、（2.17）、（2.43）定义。相应的偶应力张量本构方程为

$$\tilde{\mathbf{M}} = \beta_2 \tilde{\mathbf{K}}^{\top} + \beta_3 \tilde{\mathbf{K}}, \tag{2.61}$$

见方程（2.28）。现在我们只有两个独立的材料常数 $\beta_2$、 $\beta_3$。

注释 2.3。 可以看出，尽管 Germain-Lagrange 方程只涉及一个材料常数 $\beta_3$，但˜相应应变能的表达式 $W$ 以及 M 的本构方程涉及两个材料常数。注意，二维 Cosserat 连续体的位移方程（2.31）、（2.32）涉及四个材料常数中的三个独立材料常数 $\alpha$、$\beta_1+\beta_2$、$\beta_3$。三维微极弹性中也存在类似情况 Eringen [2012], Pal'mov [1964]。

可得

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times\tilde{\boldsymbol{L}}=-\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times(\varkappa\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times w\boldsymbol{n})=\varkappa\tilde{\Delta}w\boldsymbol{n}-(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\varkappa)\times(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times w\boldsymbol{n})=\big(\varkappa\tilde{\Delta}w+(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\varkappa)\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}w\big)\boldsymbol{n} \tag{2.62}$$

由方程（2.39）。因此，方程（2.59）右端为

$$\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times\tilde{\boldsymbol{L}}+F\boldsymbol{n}=\big(\varkappa\tilde{\Delta}w+(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\varkappa)\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}w-kw\big)\boldsymbol{n} \tag{2.63}$$

由方程（2.38）。考虑到（2.43），方程（2.59）可改写为薛定谔板的控制方程：¨

$$\beta_3\tilde{\Delta}\tilde{\Delta}w+\rho\ddot{w}-\big(\varkappa\tilde{\Delta}w+(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\varkappa)\cdot\tilde{\boldsymbol{\nabla}}w\big)+kw=0. \tag{2.64}$$

最后一个方程还需补充如下形式的初始条件：

$$w(0,\tilde{\boldsymbol{x}})=w^0(\tilde{\boldsymbol{x}}),\qquad \dot{w}(0,\tilde{\boldsymbol{x}})=\dot{w}^0(\tilde{\boldsymbol{x}}), \tag{2.65}$$

其中 $w^0(\tilde{\boldsymbol{x}})$、$\dot{w}^0(\tilde{\boldsymbol{x}})$ 是给定的实值函数。本文仅考虑无限板，因此方程（2.64）和初始条件（2.65）对所有 $\tilde{\boldsymbol{x}}$。

现在可将外势 $\Pi$ 的表达式（2.40）计算为

$$2\Pi=k(\tilde{\boldsymbol{x}})w^2+\varkappa(\tilde{\boldsymbol{x}})(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}\times w\boldsymbol{n})^2=k(\tilde{\boldsymbol{x}})w^2+\varkappa(\tilde{\boldsymbol{x}})(\tilde{\boldsymbol{\nabla}}w)^2. \tag{2.66}$$

注2.4。由于在伪 Cosserat 连续体框架下，只有一种外部机械作用，而不是彼此独立的力和力矩，即方程（2.59）右侧的情形，因此类似于（2.41）的公式不再成立。因此，$\Pi$ 仍可为伪 Cosserat 连续体定义势，但其原有的物理意义已不复存在。

还需要一些边界条件。我们只关注具有有限能量的局域解。因此，要求

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(t,\tilde{\boldsymbol{x}})\,\mathrm{d}S<\infty \tag{2.67}$$

对所有 $t\geq 0$均成立。这里，

$$\mathcal{E}=\mathcal{K}+U=\mathcal{K}+W+\Pi \tag{2.68}$$

是总机械能密度，

$$2\mathcal{K}=\rho\dot{w}^2 \tag{2.69}$$

是两倍动能密度。

控制方程（2.64）与初始条件和边界条件（分别为（2.65）和（2.67））共同确定了薛定谔板的行为。然而，正如第¨节所述，4，下文将为这种板再引入一项限制，用以规定材料常数 $\beta_2$ 和 $\beta_3$之间的附加关系。这项限制使得我们无法（见第5节）将薛定谔板视为置于弹性地基上的经典 Kirchhoff–Love 板。

# 3 薛定谔板与薛¨定谔方程的关系

为简便起见，由于本文只考虑板的面外运动，因此在下文中，我们省略面内量和算子符号上方的波浪号。

描述质量为 $m$ 的单个量子粒子在具有实值定态势 $V(\boldsymbol{x})$ 的外场中行为的二维含时薛¨定谔方程，其未知量为 $\Psi$，形式如下：

$$\mathrm{i}\hbar\dot{\Psi}+\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\Psi-V(\boldsymbol{x})\Psi=0; \tag{3.1}$$

参见经典教材 Messiah [1961]。它可以改写如下：

$$\mathcal{S}_+\Psi=\mathrm{i}a\dot{\Psi}+b\Delta\Psi-V(\boldsymbol{x})\Psi=0, \tag{3.2}$$

$$\mathcal{S}_+\stackrel{\text{def}}{=}\mathrm{i}a\frac{\partial}{\partial t}+\mathcal{L}, \tag{3.3}$$

$$\mathcal{L}=b\Delta-V(\boldsymbol{x}), \tag{3.4}$$

其中 i 是虚数单位。在量子框架中，

$$a = \hbar = \frac{h}{2\pi} > 0, \qquad b = \frac{\hbar^2}{2m} > 0, \tag{3.5}$$

其中， $\hbar$是约化普朗克常数， $h$是普朗克常数。

注 3.1。 Unknown $\Psi$ 在薛¨定谔方程的语境中，通常被称为量子粒子的波函数。然而，在本文中，我们将把一种不同的量称为波函数 $\psi$ ，它同样满足薛¨定谔方程。该量将在式（3.25）中予以介绍。

与式（3.1）一起，考虑带有算子的复共轭方程是有用的

$$\mathcal{S}_- \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_+^*. \tag{3.6}$$

这里，星号 ∗ 符号表示复共轭。两个方程都可以表述为以下形式

$$\mathcal{S}_\pm \Psi_\pm = 0, \tag{3.7}$$

$$\Psi_+ \equiv \Psi. \tag{3.8}$$

考虑薛¨定谔型方程（3.7）的初值问题。初始条件为

$$\Psi_\pm(0, \boldsymbol{x}) = \Psi_\pm^0(\boldsymbol{x}), \tag{3.9}$$

其中 $\Psi_\pm^0(\boldsymbol{x})$ 是给定的复值函数。方程（3.7）在区域 $t > 0$ 对所有 $\boldsymbol{x}$成立。如果要求 $\Psi_\pm$ 的初始数据互为复共轭：

$$\big(\Psi_\pm^0(\boldsymbol{x})\big)^* = \Psi_\mp^0(\boldsymbol{x}), \tag{3.10}$$

then

$$\big(\Psi_\pm(t, \boldsymbol{x})\big)^* = \Psi_\mp(t, \boldsymbol{x}), \tag{3.11}$$

对所有 $t$。

可得

$$\mathcal{S}_-\mathcal{S}_+\Psi_+ + \mathcal{S}_+\mathcal{S}_-\Psi_- = 0 \tag{3.12}$$

or

$$\mathcal{P} w = 0, \tag{3.13}$$

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_\pm\mathcal{S}_\mp = \mathcal{S}_\pm\mathcal{S}_\pm^* = \mathcal{L}^2 + a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2}, \tag{3.14}$$

$$\mathcal{L}^2 = (b\Delta - V)^2 = b^2\Delta^2 - b\Delta V - bV\Delta + V^2, \tag{3.15}$$

$$w = 2\,\mathrm{Re}\,\Psi = \Psi_+ + \Psi_-. \tag{3.16}$$

方程（3.13）可以改写为 Schr¨odinger 板的控制方程（2.64）的形式，即 Germain–Lagrange 方程（2.59）的形式，其中外力和力矩分别由方程（2.38）和（2.39）给出。事实上，我们有

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^2\Psi_\pm = (b\Delta - V)^2\Psi_\pm &= b^2\Delta^2\Psi_\pm - b\Delta(V\Psi_\pm) - bV\Delta\Psi_\pm + V^2\Psi_\pm \\ &= b^2\Delta^2\Psi_\pm - 2b(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi_\pm - 2bV\Delta\Psi_\pm + (V^2 - b\Delta V)\Psi_\pm,\end{aligned} \tag{3.17}$$

$$\Delta(V\Psi_\pm) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{\nabla}(V\Psi_\pm) = \boldsymbol{\nabla}\cdot\big((\boldsymbol{\nabla}V)\Psi_\pm + V(\boldsymbol{\nabla}\Psi_\pm)\big) = (\Delta V)\Psi_\pm + 2(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot\boldsymbol{\nabla}\Psi_\pm + V\Delta\Psi_\pm, \tag{3.18}$$

$$\mathcal{P} \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{S}_\pm\mathcal{S}_\mp = \mathcal{S}_\pm\mathcal{S}_\pm^* = a^2\frac{\partial^2}{\partial t^2} + b^2\Delta^2 - 2b(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot\boldsymbol{\nabla} - 2bV\Delta + (V^2 - b\Delta V). \tag{3.19}$$

现在，取

$$\rho = a^2, \qquad \beta_3 = b^2, \qquad \varkappa = 2bV, \qquad k = V^2 - b(\Delta V) \tag{3.20}$$

or

$$a = \sqrt{\rho}, \qquad b = \sqrt{\beta_3}, \qquad V = \frac{\varkappa}{2b}, \qquad k = V^2 - b(\Delta V) \tag{3.21}$$

我们确实将方程（3.13）改写成了方程（2.64）的形式。

注记 3.2. 在 Volovich [2025], 通过一种完全不同的方法得到了类似的方程，并将其解释为一维情况下的“带势广义欧拉-伯努利方程”。

注记 3.3. 用描述薛定谔板的变量表示时，外势 $V(\boldsymbol{x})$ 与基础旋转刚度 $\varkappa(\boldsymbol{x})$ 成正比。

由方程（3.2）、（3.6）和（3.7）可得

$$\dot{w}(t,\boldsymbol{x}) = \frac{\mathrm{i}}{a}\mathcal{L}\big(\Psi_+ - \Psi_+^*\big) = -\frac{2}{a}\operatorname{Im}\mathcal{L}\Psi(t,\boldsymbol{x}). \tag{3.22}$$

因此， $w$ 的初始条件为

$$w(0,\boldsymbol{x}) = w^0(\boldsymbol{x}) = 2\operatorname{Re}\Psi^0(\boldsymbol{x}), \tag{3.23}$$

$$\dot{w}(0,\boldsymbol{x}) = \dot{w}^0(\boldsymbol{x}) = -\frac{2}{a}\operatorname{Im}\mathcal{L}\Psi^0(\boldsymbol{x}). \tag{3.24}$$

注 3.4. 要得到薛定谔板控制方程¨（2.64）的左端，只需考虑方程（3.12）左端的两个项中的任意一个。以此方式反向推导，埃尔温·薛定谔得到了现代形式的著名方程（3.1），见 薛定谔¨ [1926等]。然而在后一种情况下，与（3.9）对应的初始数据通常是复数，尽管对于板而言它们应当是实数。此外，初始值 $\Psi_\pm^0$ 和 $\dot{\Psi}_\pm^0$ 并不独立，而是按照薛定谔型方程（3.7）相互关联；但对于板而言，它们应当相互独立，见 Gavrilov 等人 [2025], Volovich [2025]。

注释3.5。正如引言中已经讨论过的那样，薛定谔最初认为，只有¨的实部具有物理意义（即板位移）。不过，稍后他发现， $\Psi$才是唯一有意义的量，但他未能为这个量提出力学类比Chen [1993]。

为了使解的绝对值平方在薛定谔板的框架下成为有意义的量，现在引入以下复值波函数 $\psi$:

$$\psi(t,\boldsymbol{x}) \stackrel{\text{def}}{=} -\mathrm{i}a\dot{w} + \mathcal{L}w = \mathcal{S}_- w = 2\mathcal{L}\Psi_+(t,\boldsymbol{x}), \tag{3.25}$$

其中，最后一个等式由式（3.16）、（3.22）得出。由于

$$\mathcal{S}_+\mathcal{L} = \mathcal{L}\mathcal{S}_+, \tag{3.26}$$

函数 $\psi(t,\ \boldsymbol{x})$ 满足薛定谔方程

$$\mathcal{S}_+\psi = 0 \tag{3.27}$$

以及初始条件，它对应于在 $t = 0$处考察的式（3.23）、（3.24），并考虑了式（3.25）。现在，薛定谔板的任意运动 $w(t,\ \boldsymbol{x})$ ，其参数由式（3.20）定义，都可以对应于一个解，即 $\psi$，它是单粒子在外势场 $V$中的二维薛定谔方程的复值波函数。根据哥本哈根诠释， $p\{\psi\}$ 的绝对值平方 $\psi$，由式（A.1）定义，除相差由式（A.2）定义的乘法常数 $\lambda$ 外，等于自由粒子在势为 $V$的外场中的量子概率密度。另一方面，显然

$$|\operatorname{Im}\psi|^2 = 2\mathcal{K}. \tag{3.28}$$

如果我们能够以某种方式选取板的参数，使得下列恒等式成立

$$|\operatorname{Re}\psi|^2 = 2U, \tag{3.29}$$

那么，板的总机械能密度 $\mathcal{E}$ 就等于量子概率密度，二者仅相差一个乘法常数:

$$p = 2\lambda\mathcal{E}. \tag{3.30}$$

于是，量子概率密度 $p\{\psi\}$对于 $\psi$ 的计算结果将沿着板传播，其方式与能量密度 $\mathcal{E}$完全相同。另一方面，边界条件（2.67）则转化为波函数平方可积的条件；在量子力学框架下，这一条件通常被接受Messiah[1961],薛¨定谔 [1926方]:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty} \psi(t,\boldsymbol{x})\psi^*(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S < \infty. \tag{3.31}$$

在本文余下部分，我们将考察能量沿板的传输，并找出在何种条件下，波函数实部的能量解释（3.29）在某种意义上成立。

# 4 零外势情况下的能量传输

考察薛定谔板中的能量传输时，我们首先将讨论范围限定在 $V=0$ 的情形，即，

$$U = W. \tag{4.1}$$

现在，我们来计算 $W$ 由式（2.60在笛卡尔平面坐标系中定义的 $x_1$， $x_2$:

命题 1. 在笛卡尔平面坐标系 $x_1$， $x_2$中，表达式（2.60）右端关于 $W$的各项可改写如下:

$$\operatorname{tr}\mathbf{K}^2 = -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2, \tag{4.2}$$

$$\operatorname{tr}\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^\top = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2. \tag{4.3}$$

证明。有

$$\operatorname{tr}\mathbf{K}^2 = \operatorname{tr}\left((\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})\right) = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n}), \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{\nabla}\times w\boldsymbol{n} = (\partial_1\boldsymbol{i}_1+\partial_2\boldsymbol{i}_2)\times w\boldsymbol{n} = -\frac{\partial w}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_1, \tag{4.5}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{K} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\times w\boldsymbol{n} &= (\partial_1\boldsymbol{i}_1+\partial_2\boldsymbol{i}_2)\left(-\frac{\partial w}{\partial x_1}\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial w}{\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\right)\\ &= -\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1,\end{aligned} \tag{4.6}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\mathbf{K}^2 = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n}) &= \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1\right)\\ \cdot\cdot\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1\right) &= -2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2,\end{aligned} \tag{4.7}$$

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^\top = (\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\times\boldsymbol{n})^\top &= \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1\right)\\ \cdot\cdot\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_2 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\boldsymbol{i}_1\boldsymbol{i}_1 + \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\boldsymbol{i}_2\boldsymbol{i}_1\right)^\top &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2 + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2.\end{aligned} \tag{4.8}$$

这里，我们使用了一个关于两个张量变量均为线性的运算 Grekova 和 Zhilin [2001], Lurie [1990 ]:

$$\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B} \stackrel{\text{def}}{=} (\boldsymbol{a}_1\cdot\boldsymbol{b}_2)(\boldsymbol{a}_2\cdot\boldsymbol{b}_1) \tag{4.9}$$

如果$\mathbf{A} = \boldsymbol{a}_1\boldsymbol{a}_2$ 和$\mathbf{B} = \boldsymbol{b}_1\boldsymbol{b}_2$。 □

命题 2。 应变能 $W$ 由式（2.60）定义，可等价地表示为替代应变度量 $\mathbf{K}_1$的函数:

$$\mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1^\top = \boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w, \tag{4.10}$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_1\times\boldsymbol{n}, \tag{4.11}$$

如下所示:

$$2W = c_1\operatorname{tr}^2\mathbf{K}_1 + c_2\operatorname{tr}\mathbf{K}_1^2; \tag{4.12}$$

$$c_1 = -\beta_2, \qquad c_2 = \beta_3+\beta_2; \tag{4.13}$$

$$\beta_2 = -c_1, \qquad \beta_3 = c_1+c_2. \tag{4.14}$$

这里， $c_1$、 $c_2$ 是替代材料常数。

证明。根据（4.8），

$$\operatorname{tr}\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^{\top}=\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2=(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w). \tag{4.15}$$

因此，考虑到（2.60）、（4.7）、（4.8），可得

$$\begin{aligned}
2W&=\beta_3\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right)+\beta_2\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right)\\
&=\big((\beta_3+\beta_2)-\beta_2\big)\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right)+\beta_2\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right)\\
&=(\beta_3+\beta_2)\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right)-\beta_2\left(\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\right)^2+2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}+\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2}\right)^2\right)\\
&=(\beta_3+\beta_2)(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)-\beta_2(\Delta w)^2\equiv c_1(\Delta w)^2+c_2(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)\cdot\cdot(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w).
\end{aligned}\tag{4.16}$$

□

注 4.1. 可以证明，本构方程（2.61）可用应变度量 $\mathbf{K}_1$和弹性模量 $c_1$ 以及 $c_2$ 按以下方式表示 Eliseev [1999]:

$$\mathbf{M}=c_1(\operatorname{tr}\mathbf{K}_1)\mathbf{A}\times\mathbf{n}+c_2\mathbf{K}_1\times\mathbf{n}. \tag{4.17}$$

在考虑 Kirchhoff–Love 板和 Schr¨odinger 板的能量传输时，替代表述（4.12）更为有用。该表述见 Eliseev [1999], ，其中采用直接方法研究 Kirchhoff–Love 板。选择替代常数还有助于我们得到能量传输公式，其形式类似于 Gavrilov 等人 [2025] 为一维情形推导的公式。

若 $V=0$，则由方程（$\mathcal{P}$ 3.19）定义的算子可改写如下:

$$\mathcal{P}\big|_{V=0}=\rho\frac{\partial^2}{\partial t^2}+(c_1+c_2)\Delta^2. \tag{4.18}$$

这里考虑了方程（3.21）、（4.14）。

假设 $w$ 是一个实值函数，通过将方程（3.13）乘以 $\dot{w}$，可以得到板的能量平衡方程。经过一些变换后，我们得到

$$\dot{\mathcal{E}}=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}, \tag{4.19}$$

其中

$$2\mathcal{E}=2\mathcal{K}+2W=a^2\dot{w}^2+c_1(\Delta w)^2+c_2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w, \tag{4.20}$$

$$\boldsymbol{Q}=\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2, \tag{4.21}$$

$$\boldsymbol{Q}_1=c_1\big(\dot{w}(\boldsymbol{\nabla}\Delta w)-(\Delta w)(\boldsymbol{\nabla}\dot{w})\big), \tag{4.22}$$

$$\boldsymbol{Q}_2=c_2\big(\dot{w}(\boldsymbol{\nabla}\Delta w)-(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\dot{w})\big). \tag{4.23}$$

这里，$\mathcal{E}$ 是机械能密度，$\boldsymbol{Q}$ 是机械能通量，对应于 Germain-Lagrange 方程的解 $w$。事实上，

$$\begin{aligned}
\dot{\mathcal{E}}&=a^2\dot{w}\ddot{w}+c_1\big(\Delta w\big)\big(\Delta\dot{w}\big)+c_2\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\dot{w}\\
&=c_1\big((\Delta w)(\Delta\dot{w})\ -\big(\Delta^2 w\big)\dot{w}\big)+c_2\big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\dot{w}-(\Delta\Delta w)\ \dot{w}\big)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{Q}_1+\boldsymbol{Q}_2),
\end{aligned}\tag{4.24}$$

$$c_1\big((\Delta w)(\Delta\dot{w})\ -(\Delta\Delta w)\ \dot{w}\big)=c_1\boldsymbol{\nabla}\cdot\big((\Delta w)(\boldsymbol{\nabla}\dot{w})-\dot{w}(\boldsymbol{\nabla}\Delta w)\big)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}_1, \tag{4.25}$$

$$c_2\big(\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w\cdot\cdot\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}\dot{w}-(\Delta\Delta w)\dot{w}\big)=c_2\boldsymbol{\nabla}\cdot\big((\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla}w)\cdot(\boldsymbol{\nabla}\dot{w})-\dot{w}(\boldsymbol{\nabla}\Delta w)\big)=-\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}_2. \tag{4.26}$$

这里，在计算公式（4.24）右侧时，需要考虑公式（3.13）。

根据公式（4.19）、（2.67）

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S\right)=0 \tag{4.27}$$

在 $\boldsymbol{Q}\to 0$ 当 $\boldsymbol{x}\to\infty$ 时，即根据奥斯特罗格拉德斯基–高斯定理，板的全局机械能守恒。

我们来计算量子概率密度 $p\{\psi\}$，其定义见方程（A.1），其中 $\psi$ 定义见方程（3.25）。根据方程（3.21）、（4.14），可得

$$p = \lambda\big(\rho\dot{w}^2 + (c_1 + c_2)(\Delta w)^2\big). \tag{4.28}$$

比较公式（4.20）与公式（4.28）可见，当且仅当薛定谔¨板的应变能满足以下条件时，公式（3.30）才成立

$$c_2 = 0, \tag{4.29}$$

即，

$$2W = c_1\big(\Delta w\big)^2 = b^2\big(\Delta w\big)^2 \tag{4.30}$$

根据公式（3.21）、公式（4.14）以及

$$\mathbf{M} = b^2(\Delta w)\,\mathbf{A}\times\boldsymbol{n} \tag{4.31}$$

根据公式（4.17）。在后一种情况下，具有密度 ¨ 的薛定谔板的机械能 $\mathcal{E} = \mathcal{K} + U$ 与相应的概率密度 $p$ 以相同的方式传播。用 $p$表示时，能量平衡方程（4.19）现在可改写为公式（A.7）、公式（A.8）的形式。

注 4.2。 容易证明，通量 $\boldsymbol{Q}$和 $\boldsymbol{q}$ 之间也满足类似于公式（3.30）的关系：

$$\boldsymbol{q} = 2\lambda\boldsymbol{Q}. \tag{4.32}$$

# 5 与 Kirchhoff-Love 板的比较

在经典 Kirchhoff–Love 板理论框架下，该理论基于各向同性材料平面薄体的三维线弹性方程建立，板运动方程为 Love [1944]:

$$\mathcal{D}\Delta\Delta w + \rho\ddot{w} = F, \tag{5.1}$$

其中

$$\mathcal{D} = \frac{1}{12}\frac{Eh^3}{1-\nu^2} \tag{5.2}$$

为弯曲刚度。相应的应变能表达式为 Courant 和 Hilbert [1989], Love [1944],Ventsel 和 Krauthammer [2001]:

$$2\mathcal{W} = \mathcal{D}\left((\Delta w)^2 + (1-\nu)\left(-2\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} + 2\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x_1\,\partial x_2}\right)^2\right)\right), \tag{5.3}$$

其中 $\nu$ 为三维材料的泊松比， $E$ 为三维材料的杨氏模量， $h$为板厚。有:

$$2\mathcal{W} = \mathcal{D}\left(\underbrace{\operatorname{tr}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^\top\right) - \operatorname{tr}\mathbf{K}^2}_{(\Delta w)^2} + (1-\nu)\operatorname{tr}\mathbf{K}^2\right) = \mathcal{D}\left(\operatorname{tr}\left(\mathbf{K}\cdot\mathbf{K}^\top\right) - \nu\operatorname{tr}\mathbf{K}^2\right). \tag{5.4}$$

取 $W = \mathcal{W}$，并比较方程（2.60）和（5.4），可得:

$$\mathcal{D} = \beta_3 = c_2 + c_1, \qquad \nu = -\frac{\beta_2}{\mathcal{D}} = \frac{c_1}{c_1 + c_2}. \tag{5.5}$$

对于薛定谔板，方程（¨4.29）成立，因此

$$\nu = 1. \tag{5.6}$$

回想一下，在线性各向同性弹性中，泊松比的取值应满足以下不等式

$$-1 < \nu < 1/2, \tag{5.7}$$

使三维弹性材料的应变能为正定。因此，泊松比的取值（5.6）是不可接受的 Lurie [2005]。然而，在直接方法的框架下，式（4.30）定义的应变能是可以接受的。因此，薛定谔板并非 Kirchhoff–Love 板的特例。

注 5.1。 容易证明，式（4.16）定义的应变能为正定，当且仅当满足以下条件：

$$\beta_3 > 0 \qquad \text{and} \qquad \beta_3 + \beta_2 > 0 \qquad \text{and} \qquad \beta_3 - \beta_2 > 0. \tag{5.8}$$

证明。 根据公式（4.16），

$$2W = \mathcal{X}^\top \mathcal{M} \mathcal{X}, \tag{5.9}$$

$$\mathcal{X} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 w}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2} \\ \frac{\partial^2 w}{\partial x_2^2} \end{pmatrix}, \qquad \mathcal{M} = \begin{pmatrix} 2(\beta_3 + \beta_2) & 0 & 0 \\ 0 & \beta_3 & -\beta_2 \\ 0 & -\beta_2 & \beta_3 \end{pmatrix}. \tag{5.10}$$

应用西尔维斯特判据，参见例如 Akivis 和 Goldberg [1972], 可得矩阵 $\mathcal{M}$当且仅当不等式（5.8成立时为正定。 □

注 5.2。 公式（4.30）定义的应变能不是正定的，而是半正定的。当 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} w \neq \mathbf{0}$时，它可以为零，因为 $\beta_3$ 和 $\beta_2$ 由公式（5.5）、（5.6）定义的量不满足第二个不等式（5.8）： $\beta_3 + \beta_2 = 0$。一个满足 $w \neq 0$ 的例子是 $\boldsymbol{\nabla}\boldsymbol{\nabla} w \neq \mathbf{0}$ 但 $W$ 由公式（4.30）定义的量等于零，即

$$w = x_1 x_2. \tag{5.11}$$

# 6 非零外部势情况下的能量传输

在 $V$ 的情况下 $\neq 0$，我们研究弹性地基上的薛定谔板，并预期总机械 al
能量与密 度 $\mathcal{E} = \mathcal{K} + W + \Pi$ 守恒：

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left( \iint_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{E}(t, \boldsymbol{x}) \, \mathrm{d}S \right) = 0. \tag{6.1}$$

应变能密度 $W$ 由式（4.30）定义。与弹性地基相关的势能 $\Pi$ 定义如下

$$2\Pi = (V^2 - b\Delta V) w^2 + 2bV(\boldsymbol{\nabla} w)^2 \tag{6.2}$$

根据式（2.66）、（3.20）。因此，

$$2\mathcal{E} = a^2 \dot{w}^2 + b^2 \big(\Delta w\big)^2 + (V^2 - b\Delta V) w^2 + 2bV(\boldsymbol{\nabla} w)^2. \tag{6.3}$$

将式（3.13）乘以 $\dot{w}$，经过一些变换，可得到能量平衡方程 $\mathcal{E}$

$$\dot{\mathcal{E}} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{Q}, \tag{6.4}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}\{w\} = \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_V, \tag{6.5}$$

$$\boldsymbol{Q}_V = -2bV(\boldsymbol{\nabla} w)\dot{w}. \tag{6.6}$$

这里， $\boldsymbol{Q}$ 是密度为 $\mathcal{E}$的能量通量。

证明。

$$\begin{aligned} \dot{\mathcal{E}} &= a^2 \dot{w}\ddot{w} + b^2 \big(\Delta w\big)\big(\Delta \dot{w}\big) + (V^2 - b\Delta V) w\dot{w} + 2bV(\boldsymbol{\nabla} w)(\boldsymbol{\nabla}\dot{w}) \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{Q}_1 + (V^2 - b\Delta V) w\dot{w} + 2bV(\boldsymbol{\nabla} w) \cdot \boldsymbol{\nabla}\dot{w} + \big(2b(\boldsymbol{\nabla} V) \cdot (\boldsymbol{\nabla} w)\dot{w} + 2bV(\Delta w) - (V^2 - b\Delta V) w\big)\dot{w} \\ &= -\boldsymbol{\nabla} \cdot \boldsymbol{Q}_1 + 2b(\boldsymbol{\nabla} V) \cdot (\boldsymbol{\nabla} w)\dot{w} + 2bV(\Delta w)\dot{w} + 2bV(\boldsymbol{\nabla} w) \cdot \boldsymbol{\nabla}\dot{w} = -\boldsymbol{\nabla} \cdot (\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_V). \end{aligned} \tag{6.7}$$

这里使用了公式（4.24）、（4.25）。 □

因此，只要 $\boldsymbol{Q} \to 0$ 为 $\boldsymbol{x} \to \infty$，密度为 $\mathcal{E}$ 的全局机械能便根据奥斯特罗格拉茨基–高斯定理守恒，即满足公式（6.1）。

注释 6.1。 请注意，关于具有类似结构弹性地基的板中能量传输的问题，研究 Erofeev 和 Lisenkova [2023]。

现在我们来计算由方程（A.1）定义的量子概率密度 $p\{\psi\}$，其中 $\psi$ 由方程（3.25）给出。根据方程（3.21）、（4.14）、（4.29），我们有

$$p = \lambda\Big(a^2\dot{w}^2 + \big((b\Delta - V)w\big)^2\Big). \tag{6.8}$$

比较方程（6.8）与方程（6.3），其中右端各项分别由方程（2.69）、（4.30）和（6.2）定义，可以看出

$$p \neq 2\lambda\mathcal{E} \tag{6.9}$$

根据方程（3.30），对于 $V = 0$[5]，我们有。由于对于薛定谔¨板，外势能原有的物理意义已经丧失（见注释2.4），而能量现在仅是一个全局守恒的量（见方程（6.1）），因此我们可以引入一个具有如下密度的修正能量

$$\mathcal{E}^M = \mathcal{E} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{d} = \mathcal{K} + W + \mathit{\Pi}^M, \tag{6.10}$$

其中 $\boldsymbol{d}$ 满足

$$\boldsymbol{d} \to 0, \quad \dot{\boldsymbol{d}} \to 0 \quad \text{as} \quad \boldsymbol{x} \to \infty \tag{6.11}$$

and

$$p = 2\lambda\mathcal{E}^M, \qquad \lambda = \text{const.} \tag{6.12}$$

这里,

$$\mathit{\Pi}^M = \mathit{\Pi} - \boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{d} \tag{6.13}$$

是基底的修正势能。具有密度 $\mathcal{E}^M$ 的薛定谔¨板的全局机械能守恒:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}^M(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S\right) = 0, \tag{6.14}$$

并且概率密度 $p$ 以与 $\mathcal{E}^M$ 相同的方式传播；类似地，它是在第 4 节针对情形$V = 0$得到的。此外，与密度 $\mathcal{E}$ 和 $\mathcal{E}^M$ 相对应的全局能量彼此相等:

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S = \iint_{-\infty}^{+\infty}\mathcal{E}^M(t,\boldsymbol{x})\,\mathrm{d}S, \tag{6.15}$$

因为

$$\iint_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{d}\,\mathrm{d}S = 0 \tag{6.16}$$

由于（6.11）。

命题3。设

$$\boldsymbol{d} = -\frac{b}{2}\boldsymbol{\nabla}(Vw^2) + bV\boldsymbol{\nabla}(w^2). \tag{6.17}$$

则 $\mathcal{E}^M$ 由公式（6.10）定义的量满足

$$2\mathcal{E}^M = a^2\dot{w}^2 + \big((b\Delta - V)w\big)^2. \tag{6.18}$$

证明。

$$\mathcal{E}^M - \mathcal{E} = -bVw\Delta w + \frac{b}{2}(\Delta V)w^2 - bV(\boldsymbol{\nabla}w)^2 = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{d}. \tag{6.19}$$

□

命题4。密度为 $\mathcal{E}^M$ 时的能量平衡方程可写为:

$$\dot{\mathcal{E}}^M = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}^M, \tag{6.20}$$

其中

$$\boldsymbol{Q}^M = \boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_V^M, \tag{6.21}$$

$$\boldsymbol{Q}_V^M = b\big(Vw\boldsymbol{\nabla}\dot{w} - V(\boldsymbol{\nabla}w)\dot{w} - (\boldsymbol{\nabla}V)w\dot{w}\big). \tag{6.22}$$

这里，$\boldsymbol{Q}^M$ 是密度为 $\mathcal{E}^M$ 的能量通量。

[5]这一事实可由以下文字清楚地证明。

证明。

$$\dot{\mathcal{E}}^M = a^2\dot{w}\ddot{w} + \big((b\Delta - V)w\big)\big((b\Delta - V)\dot{w}\big) \\ = \big((b\Delta - V)w\big)\big((b\Delta - V)\dot{w}\big) - \big((b\Delta - V)^2 w\big)\dot{w} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{Q}_1 + \boldsymbol{Q}_V^M), \tag{6.23}$$

$$\big((b\Delta - V)w\big)\big((b\Delta - V)\dot{w}\big) - \big((b\Delta - V)^2 w\big)\dot{w} \\ = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}_1 + b\big(V(\Delta w)\dot{w} - Vw\Delta\dot{w} + 2(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot(\boldsymbol{\nabla}w)\dot{w} + (\Delta V)w\dot{w}\big), \tag{6.24}$$

$$b\big(V(\Delta w)\dot{w} - Vw\Delta\dot{w} + 2(\boldsymbol{\nabla}V)\cdot(\boldsymbol{\nabla}w)\dot{w} + (\Delta V)w\dot{w}\big) \\ = -b\boldsymbol{\nabla}\cdot\big(Vw\boldsymbol{\nabla}\dot{w} - V(\boldsymbol{\nabla}w)\dot{w} - (\boldsymbol{\nabla}V)w\dot{w}\big) = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{Q}_V^M. \tag{6.25}$$

这里使用了公式（4.24）、（4.25）。 □

因此，具有密度 $\mathcal{E}^M = \mathcal{K} + W + U^M$ 的修正后的薛¨定谔板及其相应的概率密度 $p$ 以相同的方式传播。就 $p$而言，能量平衡方程（4.19）现在可以改写为公式（A.7）、（A.8）的形式。

注 6 .2. 容易证明，通量 $\boldsymbol{Q}^M$ 和 $\boldsymbol{q}$ 之间也满足与公式（3.30）类似的关系式 :

$$\boldsymbol{q} = 2\lambda\boldsymbol{Q}^M. \tag{6.26}$$

# 7 结论

在本文中，我们引入了“薛¨定谔板”，并证明了这种板的任意运动都可以对应于受外势作用的量子粒子的薛¨定谔方程（3.1）的一个解。外势对位置的具体依赖关系体现在板弹性地基的性质中。也就是说，外势与板地基的平移刚度和转动刚度均有关，并且与转动刚度成正比；见公式（3.20）。

我们所讨论的对应关系可以通过多种方式建立。第一种方式由式（3.16）给出，即将板位移与解的实部联系起来： $\Psi$ 薛定谔方程¨。从本质上说，薛¨定谔本人正是以这种方式推导出他那著名的方程。由此，虚部$\mathrm{Im}\,\Psi$ 也获得了力学解释，见式（3.22）。然而，唯一有意义的量 $|\Psi|^2 = \Psi\Psi^*$ 并没有明确的力学解释；参见备注3.5。此外还有另一种能量解释。薛定谔¨板的任意运动都可以对应于由式（ $\psi$ 3.25）定义的波函数¨，该波函数同样满足薛定谔方程。虚部显然满足式（3.28），我们计划检验实部是否满足式（3.29）。因此，通过这种方式，我们将提出一个力学系统，使其总机械能的传播方式与量子概率密度完全相同（A.1）。

我们在自由量子粒子的 Schr¨ödinger 方程（零外势）情形下成功实现了我们的计划 $V = 0$；参见第4节。我们已经证明，可以通过适当选择板参数，使得方程（3.29）成立。有趣的是，为此我们需要将 Schr¨ödinger 板的应变能取为一种形式，而这种形式对于经典 Kirchhoff–Love 板而言是不可接受的；参见第5节。 [6] 此外，Schr¨ödinger 板的应变能不是正定的（但为半正定；参见注5.2）。

对于非零外势 $V$的情形（参见第6节），我们未能通过适当选择参数使方程（3.29）成立。然而，通过引入基底的修正势能 $\Pi^M$ （6.13），我们实现了目标。这种能量“并不逊于”原始能量 $\Pi$。事实上，相应的总机械能 $\mathcal{E}^M$ （6.10）同样在全局上守恒，而外势能原有的物理意义则丧失了；参见注2.4。因此，我们成功提出了这样一种力学系统，其中能量以与概率密度相同的方式传播，这也是本文的主要成果。需要注意的是，本文可以形式化地改写为一维情形，从而为具有非零外势的一维 Schr¨ödinger 方程提供力学解释，拓展我们前一篇论文 Gavrilov 等人 [2025], 所取得的结果，其中考虑了$V = 0$ 这一情形。有趣的是，在三维情形下，能否获得类似的力学解释；在该情形中，取代 Schr¨ödinger 板的是伪 Cosserat 连续体。

我们想强调的是，这两种理论，即适用 Schr¨odinger 方程的经典量子力学和 Schr¨odinger 板理论，都是更一般理论的近似；在这些更一般的理论中，扰动以有限速度传播，分别对应相对论量子力学和非经典 Cosserat 板理论。

最后，我们希望在能量动力学框架下，进一步揭示板中的波传播与含时薛定谔方程相应解之间更深层次的类比。能量动力学是

[6] 尽管在 $V = 0$ 的情况下，Schr¨odinger 板和 Kirchhoff–Love 板的运动都由同一个 Germain–Lagrange 方程支配。

近期由Baimova 等人提出 [2023], Krivtsov [2022],Kuzkin [2023] 作为一种框架，使我们能够以合理的方式将波粒二象性引入经典力学。

## 作者贡献声明

本文的研究结果基于 A.M. Krivtsov 尚未发表的工作；该工作针对一维情形，确立了梁中修正能量传输与概率密度之间的等价关系。二维特定结果以及波函数的能量解释由 S.N. Gavrilov 和 E.V. Shishkina 得出。稿件初稿由 S.N. Gavrilov 撰写。A.M. Krivtsov 和 E.V. Shishkina 对稿件进行了审阅和编辑。


## 致谢

作者感谢 A.A. Sokolov 让我们注意到这个问题，并感谢 H. Altenbach、V.A. Ere- meyev、E.F. Grekova、E.A. Ivanova、V.A. Kuzkin 和 Yu.A.Mochalova 参与讨论。


## 概率密度的传输

设波函数 $\psi_\pm = \psi_\mp^*$ 满足复共轭的薛定谔型方程¨（3.7）以及复共轭的初始条件（3.10），参见注 3。现在考虑量子力学哥本哈根诠释框架中所称的量子概率密度这一量的传输：

$$p\{\psi_+\} = p\{\psi_-\} \stackrel{\text{def}}{=} \lambda\psi_\pm\psi_\pm^* = \lambda|\psi_\pm|^2 = \lambda\psi_\pm\psi_\mp. \tag{A.1}$$

Here

$$\lambda = \left(\iint_{-\infty}^{+\infty} |\psi_\pm(t,\boldsymbol{x})|^2 \,\mathrm{d}S\right)^{-1} \tag{A.2}$$

是归一化 因子，若条件（3.31）成立，该因子便是有限的。从本质上说，附录 A 中我们 re 由薛 定¨本人在 薛¨定 [1926得]。

首先，我们为.....列出平衡方程

$$p_0 = \frac{p}{\lambda}. \tag{A.3}$$

将组（3.7）中的两个方程分别乘以 $\psi_\mp$，再用第一个方程减去第二个方程，得到

$$\dot{p_0} = \frac{\mathrm{i}b}{a}\left(\psi_\pm^*\Delta\psi_\pm - \psi_\pm\Delta\psi_\pm^*\right) \tag{A.4}$$

or

$$\dot{p_0} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}_0, \tag{A.5}$$

$$\boldsymbol{q}_0 = \frac{2b}{a}\,\mathrm{Im}\left(\psi_\pm^*\boldsymbol{\nabla}\psi_\pm\right). \tag{A.6}$$

在量子框架中，通常认为Messiah [1961], 薛定谔¨方程 [1926d] 满足 $\boldsymbol{q} \to \boldsymbol{0}$ 因为 $\boldsymbol{r} \to \infty$。因此，根据奥斯特罗格拉茨基–高斯定理，归一化乘子 $\lambda$ 是一个常数，见公式（A.5）。这是量子力学中众所周知的结果。因此，概率密度的平衡方程为

$$\dot{p} = -\boldsymbol{\nabla}\cdot\boldsymbol{q}, \tag{A.7}$$

$$\boldsymbol{q} = \boldsymbol{q}_0\lambda, \tag{A.8}$$

其中， $\boldsymbol{q}$ 是概率流。

# 参考文献

E. L. Aero 和 E. V. Kuvshinskii. 具有旋转相互作用粒子的弹性介质理论基本方程. 《苏联物理学：固体》, 2:1272–1281, 1961. M. A. Akivis 和 V. V. Goldberg. 线性代数导论. Prentice-Hall, 恩格尔伍德克利夫斯, N.J, 1972. ISBN 0-13-501965-6. H. Altenbach 和 V. A. Eremeyev. 微极板的线性理论. ZAMM, 89(4):242–256, 2009. H. Altenbach 和 P. A. Zhilin. Obschaya teoriya uprugikh prostykh obolochek [弹性简单壳的一般理论]. 《力学进展》 *[力学进展]*, 11(4):107–148, 1988. 俄文. H. Altenbach 和 P.A. Zhilin. 简单弹性壳理论. 收录于 R. Kienzler、I. Ott 和 H. Altenbach 编, 《板壳理论：批判性综述与新应用》。《应用与计算力学讲义》16. Springer, 柏林 海德堡, 2004. ISBN 9783540399056. J. A. Baimova, N. M. Bessonov 和 A. M. Krivtsov. 标量谐晶格中局域扰动的运动. Physical Review E, 107(6):065002, 2023. R. L. W. Chen. 实波函数作为 Schr¨odinger 量子力学基本观点不可或缺的一部分：关于 F. Steiner 论文《Schr¨odinger 对相干态的发现》的详细评论. 《物理学B》, 167(2):183–184, 1990. R. L. W. Chen. Schr¨odinger 的实波动方程（续）：他为何未能推导出其一般形式? 《物理学B》, 190(2):256–258, 1993. E. Cosserat 和 F. Cosserat. Th´eorie des corps d´eformables. A. Hermann et fils, 巴黎, 1909. R. Courant 和 D. Hilbert. Methoden der mathematischen Physik, 第1卷. Verlag von Julius Springer, 1924. R. Courant 和 D. Hilbert. 数学物理方法, 第1卷. Wiley-VCH, Weinheim, 1989. ISBN 0471504475. V. V. Eliseev. Mekhanika Uprugikh Tel *[弹性体力学]*. 圣彼得堡国立技术大学, 1999. 俄文. T. A. Engstrom. 由最小耦合量子同构描述的若干欧拉–伯努利杆与环的动力学. Physical Review E, 107(6):065005, 2023. V. Eremeyev 和 L. Zubov. 弹性壳非线性理论中的本构不等式. ZAMM, 87(2):94–101, 2007. V. A. Eremeyev 和 L. I. Zubov. Mekhanika Uprugikh Obolochek *[弹性壳力学]*. 科学出版社, 莫斯科 , 2006. J. L. Ericksen 和 C. Truesdell. 杆与壳中应力与应变的精确理论 . Archive for Rational Mechanics and Analysis, 1(1):295–323, 1957. A. C. Eringen. 微连续体场理论：I. 基础与固体. Springer Science & Business Media, 纽约, 2012. V. I. Erofeev. Solitony ogibayuschikh pri rasprostranenii izgibnykh voln v nelineynouprugom sterzhne [非线性弹性杆中弯曲波传播时的包络孤子]. 《声学杂志》 *[《声学物理》]*,38(1):172–173, 1992. 俄文 . V. I. Erofeev and E. E. Lisenkova. 双参数弹性地基上板中弯曲波的色散与能量特性. 《声学物理》, 69(3):285–291, 2023. S. N. Gavrilov, A. M. Krivtsov 和 E. V. Shishkina. 用 Schr¨odinger 波函数描述自由欧拉–伯努利梁中的能量传输. 《力学研究通讯》, 144:104382, 2025. E. Grekova 和 P. Zhilin. 开尔文介质的基本方程及其与铁磁体的类比. 《弹性学杂志》, 64(1):29–70, 2001.

E. F. Grekova、A. V. Porubov 和 F. dell'Isola。约化线性约束弹性与黏弹性均匀 Cosserat 介质作为声学超材料。Symmetry，12(4):521，2020年。G. Grioli。非对称弹性。Annali di Matematica Pura ed Applicata，50(1):389–417，1960年。D. Hoffmann。Erwin Schr¨odinger。Vieweg+Teubner Verlag，莱比锡，1984年。ISBN 9783322920645。C. B. Kafadar 和 A. C. Eringen。微极介质——I：经典理论。《International Journal of Engineering Science》，9(3):271–305，1971年。R. Karam。薛定谔最初在复波函数方面遭遇的困难。American Journal of Physics，88(6): 433–438，2020年。D. Korikov、B. Plamenevskii 和 O. Sarafanov。带角点区域中的薛定谔方程与 Germain-Lagrange 方程，Operator Theory: Advances and Applications 第284卷，第245–293页。Springer，2021年。ISBN 9783030653729。A. M. Krivtsov。物质与能量动力学。ZAMM — Journal of Applied Mathematics and Mechanics，103(4)，2022年。¨M. Krommer 和 Yu. Vetyukov。梁、板与壳。载于 H. Altenbach 和 Ochsner A.（编），连续介质力学百科全书，第159–166页。Springer，2020年。V. A. Kuzkin。链-链界面的声学透明性。Physical Review E，107(6):065004，2023。A. E. H. Love。弹性数学理论论著。Courier Corporation，1944年。A. I. Lurie。非线性弹性理论。Elsevier，纽约，1990年。ISBN 0444874399。A. I. Lurie。弹性理论。Springer-Verlag，柏林、海德堡，2005年。ISBN 3-540-24556-1。N. Makris。重新审视薛定谔的四阶实值波动方程及其所导出的能级的意义。Royal Society Open Science，10(12)，2023。A. Messiah。量子力学，第1卷。North-Holland，阿姆斯特丹，1961。R. D. Mindlin 和 H. F. Tiersten。偶应力对线性弹性的影响。Archive for Rational Mechanics and Analysis，11(1):415–448，1962年。R. Omn`es。量子力学的一致性诠释。Reviews of Modern Physics，64(2):339–382，1992年。E. Orsingher 和 M. D'Ovidio。杆、板的振动与分数阶振动及菲涅耳伪过程。Journal of Statistical Physics，145(1):143–174，2011年。V. A. Pal'mov。非对称弹性理论的基本方程。Journal of Applied Mathematics and Mechanics，28(3):496–505，1964年。K. Przibram（编）。波动力学书信集：薛定谔、普朗克、爱因斯坦、洛伦兹。Philosophical Library，纽约，1967年。H. Schaefer。Cosserat 连续体。ZAMM，47(8):485–498，1967年。E. Schr¨odinger。作为本征值问题的量子化。Annalen der Physik，384(4):361–376，1926a。E. Schr¨odinger。作为本征值问题的量子化。Annalen der Physik，384(6):489–527，1926b。E. Schr¨odinger。作为本征值问题的量子化。Annalen der Physik，385(13):437–490，1926c。E. Schr¨odinger。作为本征值问题的量子化。Annalen der Physik，386(18):109–139，1926d。E. Schr¨odinger。波动力学四讲：1928年3月5日、7日、12日和14日在伦敦皇家研究院讲授。Blackie & Son Limited，伦敦、格拉斯哥，1928a。E. Schr¨odinger。波动力学论文集。Blackie & Son Limited，伦敦和格拉斯哥，1928b。H. P. Stapp。哥本哈根诠释。The Journal of Mind and Behavior，18(2/3):127–154，1997年。

R. A. Toupin。偶应力弹性理论。*Archive for Rational Mechanics and Analysis*，17(2):85–112，1964年1月。E. Ventsel 和 T. Krauthammer。薄板与薄壳：理论、分析与应用。Marcel Dekker，纽约，2001年。ISBN 0824705750。I. V. Volovich。论量子力学中的薛定谔方程与弹性理论中的欧拉-伯努利方程¨。《*p*进数、超度量分析及其应用》，17(1):78–84，2025年。P. A. Zhilin。可变形定向曲面力学。《国际固体与结构杂志》，12(9): 635–648，1976年。P. A. Zhilin。Osnovnye uravneniya neklassicheskoi teorii uprugikh obolochek [壳的非经典理论基本方程]。*Trudy LPI [列宁格勒理工大学学报]*, 386：29–46，1982年。俄文。P. A. Zhilin。*Prikladnaya mekhanika. Osnovy teorii obolochek [应用力学。壳理论基础]*。圣彼得堡国立理工大学，圣彼得堡，2006年。俄文。