arXiv:2512.22940v1 [math.AC] 28 Dec 2025

单项式理想与 Simis 理想的 Waldschmidt 常数

BIJENDER 和 AJAY KUMAR

ABSTRACT. 2017 年，Cooper 等人提出了一个猜想，为单项式理想的 Waldschmidt 常数给出了下界。我们证实了该猜想对若干类单项式理想成立。最近，M´endez、Pinto 和 Villarreal 提出了一个猜想：若 I 是一个不含嵌入关联素理想、具有极小不可约分解且为 Simis 理想的单项式理想，则存在一个 Simis 平方自由单项式理想 J 和一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$. 。本文验证了该猜想对若干类单项式理想成立。

1. INTRODUCTION

齐次理想的符号幂与普通幂之间的比较研究，在解决交换代数和代数几何中的重大问题方面发挥着关键作用。与缺乏直接几何意义的普通幂不同，符号幂具有丰富而引人关注的几何性质。然而，以代数方式确定符号幂通常颇具挑战性。这些考量促使人们提出比较符号幂与普通幂这一基本问题。设 $I \subset R = K[\mathbb{P}^{n-1}] = K[x_1, \ldots, x_n]$， $n \geq 2$ 为一个齐次理想。对于正整数 $s \in \mathbb{N}$， I 的 s 次符号幂，记作 $I^{(s)}$，定义为

$$I^{(s)} = \bigcap_{\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)} \left(I^s R_{\mathfrak{p}} \cap R\right),$$

其中，Ass(*I*) 是 I 的关联素理想集合，而 $R_{\mathfrak{p}}$ 表示在素理想 $\mathfrak{p}$. 处对 R 进行局部化。已知， $I^r \subset I^{(s)}$ 当且仅当 $r \geq s$. 。然而，关于将 I 的符号幂包含于普通幂中的包含问题，是一个更具挑战性的问题。该包含问题旨在确定满足包含关系 $I^{(r)} \subset I^s$ 的正整数 r 和 s 。Hochster 和 Huneke [18] 对所有 $r \geq 1$. 建立了包含关系 $I^{(r(n-1))} \subset I^r$ 。此外，对于某些类别的理想，Harbourne 对所有 $r \geq 1$. 建立了更强的包含关系 $I^{(r(n-1)-n+2)} \subset I^r$ 。为进一步加强这些包含关系，Harbourne 和 Huneke [15] 在其研究中提出了若干包含猜想。在 [6] ，Cooper 等人利用符号多面体得到了一些包含关系

日期：2025年12月30日。2020 数学主题分类。主要分类：13C70、05E40、13A70、13F20。关键词与短语。加权单项式理想、符号幂、反弹指数、渐近反弹指数、Waldschmidt 常数。

将单项式理想的符号幂包含于普通幂中。这些包含关系给出了不变量 $\alpha(I) = \min\{d \mid I_d \neq 0\}$. 的界。此外，对于 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中由点构成的理想 I，不同作者（参见 $[4, 25, 26]$）得到了不变量 $\alpha(I)$ 的界。在 Chudnovsky $[4]$ 猜想

$$\frac{\alpha\left(I^{(s)}\right)}{s} \geq \frac{\alpha(I)+n-2}{n-1},$$

其中 I 是 $\mathbb{P}^{n-1}$ 中的点理想，其中 $n \geq 2$ 和 $s \geq 1$. 。众所周知，极限 $\lim_{s\to\infty} \frac{\alpha(I^{(s)})}{s}$ 存在，并记为 $\hat{\alpha}(I)$，称为 I. 的*Waldschmidt* 常数。因此，上述猜想也可以用 I. 的 Waldschmidt 常数来表述

设 $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个大高度为 h. 的单项式理想。当 $h = n$ 时，极大理想 $\mathfrak{m} = \langle x_1, \ldots\ldots, x_n \rangle$ 是 I 的一个关联素理想。因此，对于所有 $s \geq 1$，符号幂与普通幂相同，$I^{(s)} = I^s$（见 $[6,$ 引理 3.3$]$），从而 $\hat{\alpha}(I) = \alpha(I)$。因此，$\hat{\alpha}(I)$ 满足 Chudnovsky 猜想的下界。假设 $h \leq n-1$，Cooper 等人 $[6]$ 在单项式理想的背景下提出了一个类似的猜想。

猜想 1.1。设 $I \subset K[x_1, \ldots, x_n]$ 是一个大高度为 h. 的单项式理想，则

$$\hat{\alpha}(I) \geq \frac{\alpha(I)+h-1}{h}.$$

Bocci 等人 $[2]$ 证明了平方自由单项式理想这一类满足猜想 1.1。受其工作的启发，本文的第一个目标是研究无嵌入关联素理想的单项式理想这一类中的猜想 1.1。

在第 3 节中，我们证明了某些单项式理想类满足猜想 1.1，首先研究具有标准线性权重的单项式理想类（见定义 2.6）。

定理 3.9。设 $I \subset R$ 是一个单项式理想。如果 I 具有标准线性权重，且 h表示 I的大高度，则猜想 *1.1* 对 I.成立

现在介绍记号。设 $I \subset R$ 是一个不含嵌入关联素理想的单项式理想，设 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ 是其最小不可约分解。由于对于每个 $1 \leq j \leq r$，$\mathfrak{q}_j$ 都是不可约的，因此可写为 $\mathfrak{q}_j = \langle x^{w_{j,\,i}}{}_{i} : \ i \in A_j \rangle$，其中 $A_j \subset [n]$. 。I 的根理想 $\sqrt{I}$ 可视为一个超图的覆盖理想，我们将其记为 $\mathcal{H}_I$. 。如果 $\mathcal{H}_I$ 是一个图，则记为 G_I. 。通过假设 $\mathcal{H}_I$ 是一个带胡须超图（见定义 3.10），并对整数 $w_{j,\,i}$.施加某些条件，我们证明了单项式理想 I满足猜想 1.1。

定理 3.12。设 $I \subset R$ 是一个没有嵌入关联素理想且具有最小不可约分解的单项式理想。假设 $\mathcal{H}_I$ 是一个带胡须超图，其胡须 A_{j_1}、……、A_{j_t} 分别附着在顶点 i_1、……、i_t上。假设满足以下条件：

(i) $w_{j_k,i} \geq w_{j_k,i_k}$ *for all* $1 \leq k \leq t$ *and* $i \in A_{j_k}$, *and*

(ii) 对于每个 $j \neq j_1$、……、j_t，存在一个 $1 \leq k \leq t$，使得 $i_k \in A_j$ 满足 $w_{j,\ i_k} \leq w_{j_k,\ i_k}$.如果 h 是 I的大高度，则猜想 ***1.1*** 对 I. 成立

若对所有 $s \geq 1.$，都有 $I^{(s)} = I^s$，则称单项式理想 $I \subset R$ 为***Simis*** 理想。为 Simis 理想提供组合刻画仍然是一个具有挑战性的开放问题。对于平方自由单项式理想，此问题与 Conforti 和 Cornuejols 提出的经典装填猜想相一致（见 [5]）。这一问题已在若干重要情形下得到解决（见 $[1, 7, 9, 11, 12, 17, 21, 22, 24]$）。这些结果运用了组合优化和图论中的技巧。M´éndez 等人在 [23]中提出了以下猜想。

猜想 1.2。*[23,* 猜想 *5.7]*设 I 为一个没有任何嵌入关联素理想的单项式理想。若 I 的不可约分解是极小的，且 I 是一个 ***Simis*** 理想，则存在一个 ***Simis*** 平方自由单项式理想 J 以及一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$.

这一猜想已对加权有向图的边理想得到验证 [14]。最近，[3]中的作者为一类支撑数为 2 的单项式理想证明了该猜想。本文的第二个目标是研究某些类别的单项式理想中的猜想 1.2。这些类别的单项式理想是通过对其关联素理想的生成集施加特定条件而得到的。在第 4 节中，我们证明以下结果。

定理 4.7。 假设对于每个 $j \in [r] \setminus \{k, l\}$，以及满足条件 $w_{k,i} \neq w_{l,i}$ 的每一对 (k, l)，$A_j \not\subset A_k \cup A_l$ 对某个 $i \in A_k \cap A_l$. 成立。那么，猜想 ***1.2*** 对 I. 成立。

The定理 4.9。 如果对于所有 $\mathfrak{p} \in Ass(I)$，都有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$，那么猜想 ***1.2*** 对 I 成立。.

在 [23,定理 7.4], M´endez 中，Pinto 和 Villarreal 证明：若 D 是一个底层图为 G的加权有向图，则 $J(D)^{(2)} = J(D)^2$ 当且仅当 $V^+(D)$ 中的每个顶点都是汇点，且 G 是二分图（加权有向图及相关术语的定义见 [23] ）。这启发我们研究一类更一般的单项式理想的符号幂。

推论 4.10。 设 $I \subset R$ 是一个没有嵌入关联素理想的单项式理想，并且对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)$，都有 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ 。则以下条件等价:

(i) I 是一个 ***Simis*** 理想。(ii) $I^{(2)} = I^2$.(iii) G_I 是二分图，
且 I 具有标准线性权重。

2. Preliminaries

设 K是一个域，并令 R表示多项式环 $K[x_1, \ldots, x_n]$.

定义 2.1 .单项式 $f \in R$的支集 是集合 $\mathrm{supp}(f) = \{i \in [n] \colon x_i \mid f\}$.

定义 2.2. 设 $I \subset R$ 是一个理想。

(a) 若存在 $f \in R$ 使得 ann$(f+I) = \mathfrak{p}$，则称素理想 $\mathfrak{p}$ 是 I 的关联素理想，其中 ann$(f+I) = \{g \in R : fg \in I\}$ 表示 $f+I$. 的湮灭子。I 的所有关联素理想的集合记为 Ass(I)。(b) 如果 I 的关联素理想 $\mathfrak{p}$ 满足：存在 I 的关联素理想 $\mathfrak{p}'$ 使得 $\mathfrak{p}' \subsetneq \mathfrak{p}$.，则称 $\mathfrak{p}$ 是 I 的嵌入素理想。(c) 理想 $I \subset R$ 的大高度是其关联素理想的高度中的最大值。(d) 将 I 表示为交 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$，其中 $\mathfrak{q}_1$、.....、$\mathfrak{q}_r$ 是准素理想，这样的表示称为 I. 的准素分解。如果对于所有 $j \neq k$ 都有 $\sqrt{\mathfrak{q}_j} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_k}$，且对于所有 $1 \leq j \leq r.$ 都有 $\bigcap_{k \neq j} \mathfrak{q}_k \not\subset \mathfrak{q}_j$，则该准素分解称为极小准素分解。

— —

注记 2.3. 设 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$ 是 I 的一个极小准素分解，并且对所有 $1 \leq j \leq r.$，$\sqrt{q_j} = \mathfrak{p}_j$。那么 Ass($I$) $= \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.

定义 2.4. 若理想 $\mathfrak{q} \subset R$ 不能写成两个严格包含 $\mathfrak{q}$. 的理想的交，则称其为不可约理想。

注记 2.5. 设 $\mathfrak{q}$ 和 I 是 $R.$ 的单项式理想。

(i) 根据 [16, 推论 1.3.2]，$\mathfrak{q}$ 不可约，当且仅当存在某个 $\{i_1, \ldots, i_a\} \subset [n]$ 及整数 $w_1, \ldots, w_a \in \mathbb{N}_+.$，使得 $\mathfrak{q} = \langle x_{i_1}^{w_1}, \ldots, x_{i_a}^{w_a} \rangle$。在这种情况下，$\mathfrak{q}$ 是 $\langle x_{i_1}, \ldots, x_{i_a} \rangle$- 准素的。(ii) 根据 [16, 定理 1.3.1]，I 可写成不可约单项式理想的交。将 I 表示为不可约单项式理想的交，称为 $I.$ 的不可约分解。由于不可约理想是准素理想，I 的不可约分解是 $I.$ 的准素分解。

我们分别用 $\mathbb{N}$ 和 $\mathbb{N}_+$表示非负整数集和正整数集。

定义 2.6. 设 $w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ 是一个线性函数，使得 $w(\mathbb{N}_+^n) \subset \mathbb{N}_+^n.$

(a) 线性函数 w 称为 $R.$上的线性权重 (b) 对于每个 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{N}^n$，令 x^a 表示 $R.$ 的单项式$x_1^{a_1} \cdots x_n^{a_n}$。$w$ 上的线性权重将单项式 $x^a.$映射到一个新的单项式 $x^{w(a)}$ 。(c) 单项式理想 $I \subset R$的加权单项式理想 记为 I_w，定义如下：

$$I_w = \langle x^{w(a)} : x^a \in I \rangle \subset R.$$

(d) 如果存在正整数 $w_1, \ldots, w_n$，使得对于所有 $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n.$，都有线性权重 w 在 R 上满足 $w(a) = (w_1 a_1, \ldots, w_n a_n)$，则称其为标准 线性权重。对于标准线性权重 $w.$，记为 $w = (w_1, \ldots, w_n)$。

(e) 如果存在一个平方自由单项式理想 $J \subset R$ 以及其上的标准线性权重 $w =$（w_1，.. .，w_n），使得 $I = J_w.$，则称单项式理想 $I \subset R$ 具有标准线性权重 。

定义 2.7。设 $I \subset R$ 是一个非零单项式理想，且令 $\alpha(I) = \min\{d : I_d \neq 0\}$。$I$ 的 *Waldschmidt* 常数 定义为

$$\hat{\alpha}(I) = \lim_{s\to\infty} \frac{\alpha(I^{(s)})}{s}.$$

定义 2.8。设 $I \subset R$ 是一个理想。

(a) I 的反弹指数 定义为

$$\rho(I) = \sup\left\{\frac{s}{t} : s,t \in \mathbb{N}_+ \text{ and } I^{(s)} \not\subset I^t\right\}.$$

(b) I 的渐近反弹指数定义为

$$\rho_a(I) = \sup\left\{\frac{s}{t} : s,t \in \mathbb{N}_+ \text{ and } I^{(sp)} \not\subset I^{tp} \text{ for } p >> 0\right\}.$$

我们以引入极化的概念结束本节。

定义 2.9。设 $I = \langle f_1,\ldots,f_m\rangle \subset R$ 是一个单项式理想。对每个 $1 \le j \le m$，假设 $f_j = x^{w_{j,1}}\cdots x^{w_{j,n}}$。令 $w_i = \max\{w_{j,i} : 1 \le j \le m\}$，其中 $1 \le i \le n$. 在多项式环 $T = K[x_{1,1},\ldots,x_{1,w_1},\ldots,x_{n,1},\ldots,x_{n,w_n}]$中，考虑无平方因子单项式 $f_1,\ldots,f_m$，其中

$$\tilde{f}_j = (x_{1,1}\cdots x_{1,w_{j,1}})\cdots(x_{n,1}\cdots x_{n,w_{j,n}}).$$

平方自由单项式理想 $I = \langle f_1,\ldots,f_m\rangle \subset T$称为 I.的极化

3. The Waldschmidt Constant of a Standard Weighted Monomial Ideal

本节中，我们将证明猜想 1.1 对若干类单项式理想成立。首先，我们证明渐近反弹指数在标准线性权重下保持不变，并为具有标准线性权重的单项式理想的渐近反弹指数给出一个上界。

定义 3.1。设 $\mathcal{H}$ 为一个超图。那么，$\mathcal{H}$ 的色数 $\chi(\mathcal{H})$定义为满足以下条件的顶点着色所需的最少颜色数：每条边上至少有两个顶点颜色不同。

定义 3.2。设 $I \subset R$ 为一个单项式理想。我们将 $\mathcal{H}_I$ 定义为顶点集为 $[n]$ 且覆盖理想为 $\sqrt{I}$的超图。特别地，若 $\mathcal{H}_I$ 是一个图，我们将其记为 G_I.

定理 3.3。设 $I \subset R$ 为一个单项式理想，且 w 为R. 上的标准线性权重。那么 $\rho(I_w) = \rho(I)$ 且 $\rho_a(I_w) = \rho_a(I)$。此外，若 h 是 I 的大高度，且 I 具有标准线性权重，则

$$\rho_a(I) \le h - \frac{1}{\chi(\mathcal{H}_I)}.$$

证明。设 $s,t,p \in \mathbb{N}_+$. 那么 $I^{(sp)} \not\subset I^{tp}$ 当且仅当 $(I^{(sp)})_w \not\subset (I^{tp})_w$. 鉴于 [20,引理 1] 和 [23, 引理 4.3], 这当且仅当 $(I_w)^{(sp)} \not\subset (I_w)^{tp}$. 这意味着$\rho_a(I_w) = \rho_a(I)$。在上述等价陈述中取 $p = 1$，我们得到 $\rho(I_w) = \rho(I)$。最后一个断言由 [19, 定理 3.12] 推出。□

注 3.4。 设 $I \subset R$ 是一个大高度为 h. 的单项式理想。假设 I 具有标准线性权重 w. 那么 $I = J_w$ 对于某个平方自由单项式理想 $J \subset R$. 注意到$\alpha(I) \geq \alpha(J)$ 且 $\hat{}\alpha(I) \geq \hat{}\alpha(J)$。利用 [2, 定理 5.3], 我们得到

$$\hat{\alpha}(I) \geq \hat{\alpha}(J) \geq \frac{\alpha(J)+h-1}{h}.$$

人们可能会认为，$\hat{}\alpha(J)$ 的一个下界可以为 $\hat{}\alpha(I)$ 提供一个形式相同的下界。 然而，由于不等式 $\alpha(I) \geq \alpha(J)$ 意味着

$$\frac{\alpha(J)+h-1}{h} \leq \frac{\alpha(I)+h-1}{h},$$

上述估计无法结合起来推出

$$\hat{\alpha}(I) \geq \frac{\alpha(I)+h-1}{h}.$$

这表明，$\hat{}\alpha(J)$ 的一个下界并不能自动转化为 $\hat{}\alpha(I)$ 的形式相同的下界。

I以下我们固定本文其余部分所用的记号 .

记号 3.5. 设 $s \in \mathbb{N}_+$，且设 $I \subset R$ 是一个没有嵌入素理想的单项式理想。此外，设

$$I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$$

是 I. 的最小不可约分解。也就是说，对于所有 $j \neq k$， $\sqrt{\mathfrak{q}_j} \neq \sqrt{\mathfrak{q}_k}$，且每个 $\mathfrak{q}_j$ 都是不可约单项式理想。因此，对于每个 $1 \leq j \leq r$，我们有 $\mathfrak{q}_j = \langle x^{w_{j,i}}{}_i : \text{对于某个 } A_j \subset [n]., i \in A_j \rangle$。如果 $\mathfrak{p}_j = \sqrt{\mathfrak{q}_j} = \langle x_i : i \in A_j \rangle$，那么 Ass$(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}.$。注意，超图 $\mathcal{H}_I$ 的边理想是 $\mathcal{E}(\mathcal{H}_I) = \{A_1, \ldots, A_r\}$.

注 3.6. 设 $I \subset R$ 是按记号 3.5 定义的单项式理想。那么我们观察到以下结论:

(i) 根据 [23, 引理 2.6], , I 的 s 次符号幂为 $I^{(s)} = \bigcap_{j=1}^{r} \langle x^{w_{j,i}}{}_i : i \in A_j \rangle^s$.。

(ii) 根据 [8, 命题 2.5]，, I 的极化为

$$\tilde{I} = \bigcap_{j=1}^{r} \bigcap_{\substack{i \in A_j \\ 1 \leq d_i \leq w_{j,i}}} \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle.$$

˜应用 [23, 引理 2.6], , s次 I 的符号幂为

$$\tilde{I}^{(s)} = \bigcap_{j=1}^{r} \bigcap_{\substack{i \in A_j \\ 1 \leq d_i \leq w_{j,i}}} \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s.$$

(iii) 如果 I 具有标准线性权重，那么存在一个平方自由单项式理想 J以及一个标准线性权重 $w = (w_1, \ldots, w_n)$，定义在 R上，使得 $I = J_w$. 由 [23, 引理 4.1] 可知 $I = J_w = \bigcap_{j=1}^{r} (\langle x_i : i \in A_j \rangle)_w = \bigcap_{j=1}^{r} \langle x_i^{w_i} : i \in A_j \rangle$.

引理 3.7。 采用记号 *3.5*，若 I 具有标准线性权重，则 $\alpha(I^{(s)}) = \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。

证明。 对于单项式理想 L， $\alpha(L)$ 是 L. 中非零单项式的最小次数。假设 $f \in I^{(s)}$ 是一个单项式，且 $\deg(f) = \alpha(I^{(s)})$。 那么 f 是 $I^{(s)}$.的一个单项式生成元。根据注 3.6，对于每个 $1 \le j \le r$，存在$\langle x_i^{w_i}$的一个单项式生成元 f_j： $i \in A_j\rangle^s$，使得 $f = \operatorname{lcm}(f_1, \ldots\ldots, f_r)$。令 $1 \le j \le r$ 和 $i \in A_j$.。那么存在 $s_{j,\,i} \in \mathbb{N}$，使得 $\sum_{i\in A_j} s_{j,\,i} = s$

$$f_j = \prod_{i\in A_j} x_i^{w_i s_{j,i}}.$$

若 $s_i = \max\{s_{j,i}$： $i \in A_j\}$，则 $f = \prod_{i\in[n]} x_i^{w_i s_i}$.。此外，令

$$\tilde{f}_j = \prod_{i\in A_j} (x_{i,1} \cdots x_{i,w_i})^{s_{j,i}}$$

且 $\tilde{f} = \operatorname{lcm}(\tilde{f}_1, \ldots\ldots, \tilde{f}_r)$。 注意， $\tilde{f} = \prod_{i\in[n]} (x_{i,\,1} \cdots x_{i,\,w_i})^{s_i}$，且 $\deg(\tilde{f}) = \deg(f) = \alpha(I^{(s)})$。那么，对于每个 $i \in A_j$ 和 $1 \le d_i \le w_i$，单项式 $\prod_{i\in A_j} x^{s_{j,\,i}}{}^{i}{}_{,\,d_i}$ 整除 $\tilde{f}_j$.。由于

$$\prod_{i\in A_j} x_{i,d_i}^{s_{j,i}} \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j\rangle^s,$$

˜我们得到 $f_j \in \langle x_{i,\,d_i}$： $i \in A_j\rangle^s$ 对所有 $1 \le d_i \le w_i$. 均成立。这意味着

$$\tilde{f}_j \in \bigcap_{\substack{1\le d_i\le w_i\\ i\in A_j}} \langle x_{i,d_i} : i \in A_j\rangle^s.$$

因此，由注 3.6， $\tilde{f} \in \tilde{I}^{(s)}$，从而 $\alpha(I^{(s)}) \ge \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。

为证明反向不等式，假设 $\tilde{g} \in \tilde{I}^{(s)}$ 是一个单项式，且 $\deg(\tilde{g}) = \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。 那么$\tilde{g}$ 是 $\tilde{I}^{(s)}$. 的一个单项式生成元。对于 $1 \le j \le r$，令 $i \in A_j$ 和 $1 \le d_i \le w_i$.。于是，由注 3.6，存在 $\tilde{g}_{j,\,d} \in \langle x_{i,\,d_i}$： $i \in A_j\rangle^s$ 使得

$$\tilde{g} = \operatorname{lcm}\left(\tilde{g}_{j,d} : 1 \le j \le r \text{ and } 1 \le d_i \le w_i \text{ for all } i \in A_j\right),$$

其中 d 是 $|A_j|$-元组 $(d_i$： $i \in A_j)$。 令 $s_{j,\,i,\,d_i} \in \mathbb{N}$ 满足 $\sum_{i\in A_j} s_{j,\,i,\,d_i} = s$ 并且

$$\tilde{g}_{j,d} = \prod_{i\in A_j} x_{i,d_i}^{s_{j,i,d_i}}.$$

如果对于每个 $i \in [n]$ 和 $1 \le p \le w_i$，我们令 $t_{i,\,p} = \max\{s_{j,i,d_i}$： $i \in A_j$ 和 $d_i = p\}$，那么

$$\tilde{g} = \prod_{i\in[n]} x_{i,1}^{t_{i,1}} \cdots x_{i,w_i}^{t_{i,w_i}}.$$

令 $g = \prod_{i\in[n]} x^{t_i}{}_{,1+\cdots+t_i}{}_{,i}{}^{w_i}$.，则 $\deg(g) = \deg(\tilde{g}) = \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。我们证明 $g \in I^{(s)}$.。选取$1 \le e_i \le w_i$，使得 $t_{i,e_i} = \min\{t_{i,1}, \ldots, t_{i,w_i}\}$.。单项式 $g' = \prod_{i\in[n]} x^{w_i t_i}{}_{,i}{}^{e_i}$整除 g.。令 g_j 表示单项式 $\prod_{i\in A_j} x^{w_i s_j}{}_{,i}{}_{,i}{}^{e_i}$.。可以验证 $g_j \in \langle x_i^{w_i}$： $i \in A_j\rangle^s$.。由于$s_{j,i,e_i} \le t_{i,e_i}$，因此 g_j 整除 g'.。这意味着 $g' \in \langle x_i^{w_i}$： $i \in A_j\rangle^s$，故由注 3.6， $g \in I^{(s)}$.。因此， $\alpha(\tilde{I}^{(s)}) \ge \alpha(I^{(s)})$. □

在下文中 例如，若 I 不具备标准线性权重，则引理 3.7 不成立 .

例 3.8。 设 $I = \langle x_1, x_2^2\rangle \cap \langle x_2, x_3^2\rangle \subset K[x_1, x_2, x_3]$. 那么 I 不具有标准线性权重。根据注 3.6，我们看到 I 的极化为

$$\tilde{I} = \langle x_{1,1}, x_{2,1}\rangle \cap \langle x_{1,1}, x_{2,2}\rangle \cap \langle x_{2,1}, x_{3,1}\rangle \cap \langle x_{2,1}, x_{3,2}\rangle.$$

考虑单项式 $f = \text{lcm}(x_1x_2^2, x_2^2) \in I^{(2)}$. 如引理 3.7 的证明所示，单项式$\tilde{f} \in \tilde{I}^{(2)}$ 由 $\tilde{f} = \text{lcm}(x_{1,1}x_{2,1}x_{2,2}, x_{2,1}^2)$。 在 Macaulay2 [13] 上的计算表明$\alpha(I^{(2)}) = \deg(f) = 3$且 $\alpha(\tilde{I}^{(2)}) = \deg(\tilde{f}) = 4$. 因此 $\alpha(I^{(2)}) \neq \alpha(\tilde{I}^{(2)})$。

定理 3.9. 设 $I \subset R$ 是一个单项式理想。若 I 具有标准线性权重，且 h表示 I的大高度，则猜想 *1.1* 对 I.成立

证明。 由引理 3.7 可知，对于所有 $s \in \mathbb{N}_+$，有 $\alpha(I^{(s)}) = \alpha(\tilde{I}^{(s)})$，因此 $\hat{\alpha}(I) = \hat{\alpha}(\tilde{I})$。 注意， I 的大高度与 I. 的大高度相同。利用 [2, 定理 5.3], ，我们得到

$$\hat{\alpha}(I) = \hat{\alpha}(\tilde{I}) \geq \frac{\alpha(\tilde{I}) + h - 1}{h} = \frac{\alpha(I) + h - 1}{h}.$$

□

定义 3.10. 设 $\mathcal{H}$是一个顶点集为 $[n]$、边集为 $\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{A_1, \ldots, A_r\}$.的超图。若存在两两不相交的边 $A_{j_1}, \ldots, A_{j_t}$以及一个子集 $V_1 = \{i_1, \ldots, i_t\} \subset [n]$，使得该超图 $\mathcal{H}_I$称为带悬挂边的

- $A_j \subset V_1$对于所有 $j \neq j_1$、.....、j_t；并且
- $V_1 \cap A_{j_k} = \{i_k\}$ 对于所有 $1 \leq k \leq t$.

我们称 $\mathcal{H}_I$ 为带胡须超图，其胡须为 A_{j_1}、.....、 A_{j_t}，分别连接到顶点 i_1、.....、 i_t。

例 3.11。 考虑边集为如下的超图 $\mathcal{H}$

$$\mathcal{E}(\mathcal{H}) = \{\{1, 2, 3\}, \{2, 3, 4\}, \{1, 5\}, \{2, 6, 7\}, \{3, 8\}, \{4, 9, 10\}\}.$$

如果 $A_{j_1} = \{1, 5\}$、 $A_{j_2} = \{2, 6, 7\}$、 $A_{j_3} = \{3, 8\}$ 和 $A_{j_4} = \{4, 9, 10\}$，那么 A_{j_1}、 A_{j_2}、 A_{j_3}、 A_{j_4} 是连接到 $V_1 = \{1, 2, 3, 4\}$. 的顶点上的胡须。因此， $\mathcal{H}$ 是带胡须超图。

定理 3.12。 设 $I \subset R$ 是按记号 *3.5* 定义的单项式理想。假设 $\mathcal{H}_I$ 是带胡须超图，其胡须为 A_{j_1}、.....、A_{j_t}，分别连接到顶点 i_1、.....、 i_t。假设以下条件成立：

(i) $w_{j_k,\, i} \geq w_{j_k,\, i_k}$ 对所有 $1 \leq k \leq t$ 和 $i \in A_{j_k}$，并且(ii) 对于每个 $j \neq j_1$、.....、j_t，存在 $1 \leq k \leq t$ 使得 $i_k \in A_j$满足 $w_{j,\, i_k} \leq w_{j_k,\, i_k}$.

如果 h 是 I的大高度，那么猜想 *1.1* 对 I.成立

证明。 令 $s \in \mathbb{N}_+$和 $\ell = s(w_{j_1,\, i_1} + \cdots + w_{j_t,\, i_t})$。 首先证明 $\alpha(I^{(s)}) \geq \ell$. 考虑单项式理想 $J = \mathfrak{q}_{j_1} \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j_t}$.利用 [23,引理 2.6],，得到 $J_{(s)} = \mathfrak{q}_{j_1}^s \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_{j_t}^s$.如果 g是

单项式理想 $J^{(s)}$的一个单项式生成元，那么对于每个 $1 \le k \le t$，都存在 $g_k = \prod_{i \in A_{j_k}} x^{w_{j_k,i} s_{k,i}} \in \mathfrak{q}_{j_k}^{s}$，使得 $g = \mathrm{lcm}(g_1, \ldots, g_t)$，其中对于每个 $i \in A_{j_k}$，$s_{k,i} \in \mathbb{N}$ 且 $\sum_{i \in A_{j_k}} s_{k,i} = s$. 由于$A_{j_1}, \ldots A_{j_t}$是 $\mathcal{H}_I$的胡须，我们得到，对于所有 $k \neq l.$，$A_{j_k} \cap A_{j_l} = \emptyset$。这意味着 $g = g_1 \cdots g_t$ 且 $\deg(g) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{i \in A_{j_k}} w_{j_k,i} s_{k,i}$. 利用条件 (i)，得到

$$\deg(g) \ge \sum_{k=1}^{t} \sum_{i \in A_{j_k}} w_{j_k,i_k} s_{k,i} = \ell.$$

这证明了 $\alpha(J^{(s)}) \ge \ell$. 由于 $I^{(s)} \subset J_{(s)}$，因此可得 $\alpha(I^{(s)}) \ge \alpha(J_{(s)}) \ge \ell$. 接下来，我们证明 $\ell \ge \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。令 $\tilde{f} = \prod_{k=1}^{t} (x_{i_k,1} \cdots x_{i_k,w_{j_k,i_k}})^s$. 那么 $\deg(\tilde{f}) = \ell$. 我们声称$\tilde{f} \in \tilde{I}^{(s)}$. 令 $1 \le j \le r$，并且对每个 $i \in A_j$，令$1 \le d_i \le w_{j,i}$. 根据注 3.6，只需证明 $\tilde{f} \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s$. 我们考虑以下几种可能性。

- 假设 $j = j_k$ 对某个 $1 \le k \le t$. 注意到 $x_{i_k,d_{i_k}}^s \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s$. 由于 $\tilde{x}_{i_k,d_{i_k}}^s \mid f$，因此可得 $f \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s$.
- 假设对于所有 $1 \le k \le t$. 都有 $j \neq j_k$。根据条件 (ii)，存在 $1 \le k \le t$，满足 $i_k \in A_j$，使得$w_{j,i_k} \le w_{j_k,i_k}$. 因此$d_{i_k} \le w_{j_k,i_k}$ 且$x_{i_k,d_{i_k}}^s \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s$. $\tilde{\text{这意味着}} x_{i_k,d_{i_k}}^s \mid f$，进而意味着$f \in \langle x_{i,d_i} : i \in A_j \rangle^s$.

因此 $\tilde{f} \in \tilde{I}^{(s)}$. 这证明了 $\ell = \deg(\tilde{f}) \ge \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。结合我们的结果可得，$\alpha(I^{(s)}) \ge \alpha(\tilde{I}^{(s)})$。因此，$\hat{\alpha}(I) \ge \hat{\alpha}(\tilde{I})$。可以验证，$\alpha(I) = \alpha(\tilde{I})$。现在，由 [2, 定理 5.3] 可知

$$\hat{\alpha}(I) \ge \hat{\alpha}(\tilde{I}) \ge \frac{\alpha(\tilde{I}) + h - 1}{h} = \frac{\alpha(I) + h - 1}{h}.$$

□

4. The Mendez-Pinto-Villarreal Conjecture

本节中，我们证明猜想 1.2 对某些类别的单项式理想成立。我们先固定本节的记号和基本设定。对于整数矩阵 M，我们用 $M^\top$ 表示其转置。对于 $a, b \in \mathbb{N}^p$，若对所有 $1 \le i \le p$.都有 $a_i \le b_i$，则记作 $a \le b$

设定 4.1. 设 $I \subset R$ 是一个没有嵌入素理想的单项式理想。根据记号 3.5，I 的最小不可约分解为 $I = \mathfrak{q}_1 \cap \cdots \cap \mathfrak{q}_r$，其中对每个 $1 \le j \le r$，都有 $\mathfrak{q}_j = \langle x^{w_{j,i}} : i \in A_j \rangle$、$\mathfrak{p}_j = \sqrt{\mathfrak{q}_j}$，且 $A_j \subset [n]$.。此外，$\mathrm{Ass}(I) = \{\mathfrak{p}_1, \ldots, \mathfrak{p}_r\}$.。不失一般性，我们可以假设 $[n] = A_1 \cup \cdots \cup A_r$.。令 X_I 表示集合

$$\{(k,l) : 1 \le k < l \le r, \text{ there exists } i \in A_k \cap A_l \text{ with } w_{k,i} \neq w_{l,i}\}.$$

为方便起见，我们记作 $A = A_1 \times \cdots \times A_r$，并对于 $i \in [n]$，定义

$$B_i = \{a \in A : \pi_j(a) = i \text{ for some } 1 \le j \le r\},$$

其中 π_j： $A \to A_j$ 是 j 次投影映射。如果 $a \in A$，则记 $\pi_j(a) = a_j$. 因此，我们有 $a = (a_1、\ldots\ldots、a_r)$。在为集合 A 中的元素固定一个顺序后，我们将 $\mathbb{N}^{p\times|A|}$ 视为所有列由 A. 中的元素索引、具有非负项的 $p \times |A|$ 矩阵的集合。我们将一个矩阵 $P_I \in \mathbb{N}^{n\times|A|}$ 与 I 关联起来，定义为 $P_I = [c_{i,a}]$，其中

$$c_{i,a} = \max\{w_{j,a_j} : 1 \le j \le r,\ i = a_j\}$$

对于 $a \in B_i$，以及 $c_{i,\ a} = 0$ 对于 $a \notin B_i$.

注 4.2。 采用设定 **4.1** 中的记号，若 $X_I = \emptyset$，则 $w_{j,\ i} = w_{k,\ i}$ 对所有 $j \ne k$. 对于每个 $i \in [n]$，令 $w_i = w_{j,\ i}$，其中 $1 \le j \le r$ 满足 $i \in A_j$. 于是 $w = (w_1, \ldots\ldots, w_n)$ 是 R. 上的标准线性权重。此外，若 $J = \sqrt{I}$，则 $I = J_w$ （见注 3.6）。

引理 4.3。 采用设定 *4.1* 中的记号，单项式 $f = x_1^{\alpha_1}\cdots x_n^{\alpha_n} \in I^t$ 当且仅当存在 $[m_a] \in \mathbb{N}^{1\times|A|}$ 使得 $\sum_{a\in A} m_a = t$ 并且

$$P_I[m_a]^\top \le [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top.$$

证明。 注意到

$$I = \langle \operatorname{lcm}\left(x_{a_1}^{w_{1,a_1}}, \ldots, x_{a_r}^{w_{r,a_r}}\right) : (a_1, \ldots, a_r) \in A\rangle.$$

首先假设 $f \in I^t$. 那么，对于每个 $a = (a_1, \ldots, a_r) \in A$，存在一个整数 $m_a \ge 0$，使得 $\sum_{a\in A} m_a = t$ ，从而单项式

$$g = \prod_{a\in A} \left(\operatorname{lcm}\left(x_{a_1}^{w_{1,a_1}}, \ldots, x_{a_r}^{w_{r,a_r}}\right)\right)^{m_a}$$

整除 f. 可以观察到 $g = x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$，其中 $\beta_i = \sum_{a\in A} c_{i,a}m_a$. 由于 $g \mid f$，可得 $\beta_i = \sum_{a\in A} c_{i,\ a}m_a \le \alpha_i$ 对所有 $1 \le i \le n$. 均成立。这意味着 $P_I[m_a]^\top \le [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top$.

Conv反过来，假设存在 $[m_a] \in \mathbb{N}^{1\times|A|}$ ，使得 $\sum_{a\in A} m_a = t$ 并且

$$P_I[m_a]^\top \le [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top.$$

如果 $\beta_i = \sum_{a\in A} c_{i,a}m_a$，那么单项式 $g = x_1^{\beta_1}\cdots x_n^{\beta_n}$整除 f，且 $g \in I^t$. 因此 $f \in I^t$. □

引理 4.4. 采用设定 *4.1* 中的记号，若 $X_I \ne \emptyset$ 且对每个 $(k, l) \in X_I$，对所有 $j \in [r] \setminus \{k, l\}$ 均有 $A_j \not\subset A_k \cup A_l$ ，则 I 不是 *Simis* 理想。

证明。 取 $(k, l) \in X_I$ 和 $i_0 \in A_k \cap A_l$. 。若设 $w_1 = \min\{w_{j,i_0} : 1 \le j \le r,\ i_0 \in A_j\}$和 $w_2 = \max\{w_{j,i_0} : 1 \le j \le r,\ i_0 \in A_j\}$，则 $w_1 < w_2$。通过重新标记，我们可以选择$1 \le t < s \le r$ 使得

- $i_0 \in A_1 \cap \cdots \cap A_s$；并且
- $w_{j,\ i_0} = w_1$ 对所有 $1 \le j \le t$, $w_{j,\ i_0} > w_1$ 对所有 $t + 1 \le j \le s$ 和 $w_{s,\ i_0} = w_2$.

注意，$(1, s) \in X_I$. 对于每个满足 $j \neq s$ 的 $t+1 \leq j \leq r$，令 $i_j \in A_j \setminus (A_1 \cup A_s)$ 和 $i_s \in A_s \setminus A_1$. 根据带余除法，我们写作 $w_2 = \alpha w_1 + \beta$，其中 $0 \leq \beta < w_1$. 我们考虑单项式 $f = \operatorname{lcm}(f_1, \ldots\ldots, f_r)$，其中对于每个 $1 \leq j \leq r$，

$$f_j = \begin{cases} x_{i_0}^{(\alpha+1)w_1} & \text{if } 1 \leq j \leq t; \\ x_{i_0}^{w_{j,i_0}} x_{i_j}^{\alpha w_{j,i_j}} & \text{if } t+1 \leq j \leq s; \\ x_{i_j}^{(\alpha+1)w_{j,i_j}} & \text{if } s < j \leq r. \end{cases}$$

于是 $f \in I^{(\alpha+1)}$ 且 $\operatorname{supp}(f) = \{i_0, i_{t+1}, \ldots, i_r\}$.。若 $f = x_1^{\gamma_1} \cdots x_n^{\gamma_n}$，则 $\gamma_{i_0} = (\alpha+1)w_1$ 且 $\gamma_{i_s} = \alpha w_{s,\, i_s}$.。我们证明 $f \notin I^{\alpha+1}$.。为导出矛盾，假设 $f \in I^{\alpha+1}$.。于是，根据引理 4.3，存在 $[m_a] \in \mathbb{N}^{1\times|A|}$，使得 $\sum_{a\in A} m_a = \alpha+1$ 且

$$P_I[m_a]^\top \leq [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top.$$

这意味着

$$\sum_{a\in B_{i_0}} m_a c_{i_0,a} \leq (\alpha+1)w_1 \tag{4.1}$$

and

$$\sum_{a\in B_{i_s}} m_a c_{i_s,a} \leq \alpha w_{s,i_s}. \tag{4.2}$$

令 $B = \{a \in A : a_j \in \operatorname{supp}(f) \text{ 对所有 } j \in [r]\}$. 成立。然后，我们注意到，对所有 $a \in A \setminus B.$，$m_a = 0$ 成立。利用 $\sum_{a\in A} m_a = \alpha+1$，我们得到 $\sum_{a\in B} m_a = \alpha+1.$。若 $a \in B$，则 $a_1 \in \operatorname{supp}(f)$。由于对所有 $t+1 \leq j \leq r$，$i_j \notin A_1$ 成立，因此 $a_1 = i_0.$。这意味着 $a \in B_{i_0}$，从而 $B \subset B_{i_0}$.。若设 $P = \{a \in B : c_{i_0,\, a} = w_1\}$ 且 $Q = \{a \in B : c_{i_0,\, a} > w_1\}$，则 $B = P \cup Q.$。根据不等式 (4.1)，我们看到

$$\begin{aligned} (\alpha+1)w_1 &\geq \sum_{a\in B} m_a c_{i_0,a} + \sum_{a\in B_{i_0}\setminus B} m_a c_{i_0,a} \\ &\geq \sum_{a\in P} m_a w_1 + \sum_{a\in Q} m_a (w_1+1) \\ &= \sum_{a\in B} m_a w_1 + \sum_{a\in Q} m_a \\ &= (\alpha+1)w_1 + \sum_{a\in Q} m_a. \end{aligned}$$

这意味着对于所有 $a \in Q$，$m_a = 0$，进而意味着 $\sum_{a\in P} m_a = \alpha+1.$。假设 $a \in P.$，则 $a_s \in \operatorname{supp}(f)$ 且 $c_{i_0,\, a} = w_1.$。由于 $w_{s,\, i_0} = w_2 > w_1$，因此可得 $a_s \neq i_0$.。再次，由于对于所有满足 $j \neq s$ 的 $t+1 \leq j \leq r$，$i_j \notin A_s$，我们得到 $a_s = i_s.$。因此 $c_{i_s,\, a} \geq w_{s,\, i_s}$，并且 $P \subset B_{i_s}.$。利用不等式 (4.2)，我们得到

$$\alpha w_{s,i_s} \geq \sum_{a\in P} m_a w_{s,i_s} + \sum_{a\in B_{i_s}\setminus P} m_a c_{i_s,a} \geq (\alpha+1)w_{s,i_s}.$$

这就产生了矛盾。 □

引理 4.5. 采用设定 *4.1* 中的记号，设 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ 对所有 $\mathfrak{p} \in Ass(I)$成立。若 $X_I \neq \emptyset$, 且对每个 $(k,l) \in X_I$，都有 $A_j \not\subset A_k \cup A_l$ 对每个 $j \in [r] \setminus \{k,l\}$成立，则 $I^{(2)} \not\subset I^2$.

证明。 取 $(k,l) \in X_I$ 且 $i_0 \in A_k \cap A_l$. 。若令 $w_1 = \min\{w_{j,i_0} : 1 \leq j \leq r,\ i_0 \in A_j\}$，并令 $w_2 = \max\{w_{j,i_0} : 1 \leq j \leq r,\ i_0 \in A_j\}$，则 $w_1 < w_2$.通过重新标记，我们可以选取 $1 \leq t < s \leq r$ 使得

- $i_0 \in A_1 \cap \cdots \cap A_s$; 并且
- $w_{j,\ i_0} = w_1$ 对所有 $1 \leq j \leq t$, $w_{j,\ i_0} > w_1$ 对所有 $t+1 \leq j \leq s$ 以及 $w_{s,\ i_0} = w_2$.

由于 $(1,\ s) \in X_I$，对每个满足 $j \neq s$ 的 $2 \leq j \leq r$，我们有 $A_j \not\subset A_1 \cup A_s$. 。对每个满足 $j \neq s$ 的 $2 \leq j \leq r$，令 $i_j \in A_j \setminus (A_1 \cup A_s)$、$i_1 \in A_1 \setminus A_s$ 和 $i_s \in A_s \setminus A_1$. 。我们考虑以下两种情形。

情形 1。 当 $2w_1 \leq w_2$. 时。在这种情况下，我们令

$$f = x_{i_0}^{w_2} x_{i_s}^{w_{s,i_s}} \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq s}}^{r} x_{i_j}^{2w_{j,i_j}}.$$

首先证明 $f \in I^{(2)}$. 。由于 $I^{(2)} = \bigcap_{j=1}^{r} \mathfrak{q}_j^2$，只需证明对所有 $1 \leq j \leq r$. 都有 $f \in \mathfrak{q}^2$ 。我们考虑以下几种可能性。

- 若 $j = 1$，则 $x_{i_0}^{2w_1} \in \mathfrak{q}_1^2$. 由于 $2w_1 \leq w_2$，我们得到 $x_{i_0}^{2w_1}$整除 f. 因此 $f \in \mathfrak{q}_1^2$.
- 若 $j = s$，则 $x_{i_0}^{w_2} x^{w_s}{}_{,\ i_s}{}^{i_s} \in \mathfrak{q}_s^2$. 由于 $x_{i_0}^{w_2} x^{w_s}{}_{,\ i_s}{}^{i_s}$整除 f，我们得到 $f \in \mathfrak{q}_s^2$.
- 若 $j \neq 1,\ s$，则 $x^{2w_j}{}_{,\ i_j}{}^{i_j} \in \mathfrak{q}_j^2$且 $x^{2w_j}{}_{,\ i_j}{}^{i_j}$整除 f. 因此 $f \in \mathfrak{q}_j^2$.

因此 $f \in I^{(2)}$. 接下来我们证明 $f \notin I^2$. 注意到 $I \subset \mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_s$，因此 $I^2 \subset (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_s)^2$.由于 $\mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_1 = \mathrm{ht}\,\mathfrak{p}_s = 2$，我们可以写成 $\mathfrak{q}_1 = \langle x_{i_0}^{w_1},\ x^{w_1}{}_{,\ i_1}{}^{i_1} \rangle$ 且 $\mathfrak{q}_s = \langle x_{i_0}^{w_2},\ x^{w_s}{}_{,\ i_s}{}^{i_s} \rangle$. 这意味着

$$\begin{aligned}(\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_s)^2 &= \left(\left\langle x_{i_0}^{w_2}, x_{i_0}^{w_1} x_{i_s}^{w_{s,i_s}}, x_{i_1}^{w_{1,i_1}} x_{i_s}^{w_{s,i_s}} \right\rangle\right)^2 \\ &= \left\langle x_{i_0}^{2w_2}, x_{i_0}^{w_1+w_2} x_{i_s}^{w_{s,i_s}}, x_{i_0}^{w_2} x_{i_1}^{w_{1,i_1}} x_{i_s}^{w_{s,i_s}}, x_{i_0}^{2w_1} x_{i_s}^{2w_{s,i_s}}, x_{i_0}^{w_1} x_{i_1}^{w_{1,i_1}} x_{i_s}^{2w_{s,i_s}}, x_{i_1}^{2w_{1,i_1}} x_{i_s}^{2w_{s,i_s}} \right\rangle.\end{aligned}$$

因此， $f \notin (\mathfrak{q}_1 \cap \mathfrak{q}_s)^2$, , 从而 $f \notin I^2$.

情形2. 当 $2w_1 > w_2$ 时。在这种情况下，根据带余除法，我们可以写成 $w_2 = w_1 + \beta$，其中 $0 \leq \beta < w_1$. 现在，只需仿照引理 4.4 的证明步骤，并取 $\alpha = 1$ ，即可证明 $I^{(2)} \not\subset I^2$. 证明完毕。□

引理 4.6. 使用设定 *4.1* 中的记号，令 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ 对所有 $\mathfrak{p} \in Ass(I)$均成立。若 $X_I \neq \emptyset$, 则 $I^{(2)} \not\subset I^2$.

证明。 若对每个 $(k,l) \in X_I$，都有 $A_j \not\subset A_k \cup A_l$ 对每个 $j \in [r] \setminus \{k,l\}$成立，则由引理 4.5 可得结论。接下来，我们假设存在 $(k,l) \in X_I$ 和 $p \in [r] \setminus \{k,l\}$

使得 $A_p \subset A_k \cup A_l$. 由于 $(k,l) \in X_I$，存在 $i_0 \in A_k \cap A_l$，满足 $w_{k,i_0} \neq w_{l,i_0}$. 令$w_1 = \min\{w_{j,i_0} : i_0 \in A_j\}$ 且 $w_2 = \max\{w_{j,i_0} : i_0 \in A_j\}$. 通过重新标记，我们可以选取$1 < s \leq r$ 使得

- $i_0 \in A_1 \cap \cdots \cap A_s$；以及
- $w_1 = w_{1,\ i_0} \leq \cdots \leq w_{k,\ i_0} < w_{l,\ i_0} \leq \cdots \leq w_{s,\ i_0} = w_2$.

对于每个 $1 \leq j \leq s$，写作 $A_j = \{i_0, i_j\}$. 于是必有 $A_p = \{i_k, i_l\}$. 现在，我们考虑以下两种情形。

情形 1。当 $w_1 \leq w_{k,\ i_0} < w_{l,\ i_0} = w_2$. 在这种情况下，我们有 $A_j \not\subset \{i_0, i_k, i_l\}$，其中 $s+1 \leq j \leq r$ 以及 $j \neq p$. 对于每个 $1 \leq j \leq r$，令

$$f_j = \begin{cases} x_{i_0}^{2w_{j,i_0}} & \text{if } 1 \leq j \leq k; \\ x_{i_0}^{w_{j,i_0}} x_{i_j}^{w_{j,i_j}} & \text{if } k+1 \leq j \leq s; \\ x_{i_k}^{w_{p,i_k}} x_{i_l}^{w_{p,i_l}} & \text{if } j = p; \\ x_{i_j}^{2w_{j,i_j}} & \text{if } s+1 \leq j \leq r,\ j \neq p \text{ and } i_j \in A_j \setminus \{i_0, i_k, i_l\}. \end{cases}$$

于是单项式

$$f = \operatorname{lcm}(f_1, \ldots, f_r) \in I^{(2)}.$$

若 $f = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$，则 $\alpha_{i_k} = w_{p,i_k}$, $\alpha_{i_0} = \max\{2w_{k,i_0}, w_2\}$ 和 $\alpha_{i_l} = \max\{w_{l,i_l}, w_{p,i_l}\}$. 我们证明 $f \notin I^2$. 为得到矛盾，假设 $f \in I^2$. 那么，根据引理 4.3，存在 $[m_a] \in \mathbb{N}^{1\times A}$ 使得

$$\sum_{a\in A} m_a = 2 \tag{4.3}$$

and

$$P_I[m_a]^\top \leq [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top.$$

这意味着

$$\sum_{a\in B_{i_0}} m_a c_{i_0,a} \leq \max\{2w_{k,i_0}, w_2\}, \tag{4.4}$$

$$\sum_{a\in B_{i_k}} m_a c_{i_k,a} \leq w_{p,i_k}, \tag{4.5}$$

and

$$\sum_{a\in B_{i_l}} m_a c_{i_l,a} \leq \max\{w_{l,i_l}, w_{p,i_l}\}. \tag{4.6}$$

我们考虑以下两个子情形。

子情形 1(a)。当 $w_{l,\ i_l} = \max\{w_{l,i_l}, w_{p,i_l}\}$. 考虑集合 $C_1 = \{a \in B_{i_l} : c_{i_l,\ a} \geq w_{l,\ i_l}\}$以及 $C_2 = \{a \in B_{i_l} : c_{i_l,\ a} < w_{l,\ i_l}\}$. 于是我们有 $B_{i_l} = C_1 \cup C_2$. 令 $a \in A \setminus C_1$. 若 $a_l = i_l$，则

$a \in B_{i_l}$ 以及 $c_{i_l,\ a} \geq w_{l,\ i_l}$，这意味着 $a \in C_1$，矛盾。因此，$a_l = i_0$，从而$a \in B_{i_0}$ 以及 $c_{i_0,\ a} = w_2$。因此，$A \setminus C_1 \subset B_{i_0}$. 利用不等式 (4.6)，我们得到

$$\sum_{a \in C_1} m_a w_{l,i_l} \leq \sum_{a \in C_1} m_a c_{i_l,a} + \sum_{a \in C_2} m_a c_{i_l,a} \leq w_{l,i_l}.$$

由此得到 $\sum_{a \in C_1} m_a \leq 1$. 若 $\sum_{a \in C_1} m_a = 0$，则由方程 (4.3) 可得 $\sum_{a \in A \setminus C_1} m_a = 2$.鉴于不等式 (4.4)，我们得到

$$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq \sum_{a \in A \setminus C_1} m_a c_{i_0,a} = 2w_2.$$

这与不等式 $0 < w_{k,\ i_0} < w_2$. 矛盾。因此 $\sum_{a \in C_1} m_a = 1$. 由方程 (4.3)，我们有 $\sum_{a \in A \setminus C_1} m_a = 1$. 由于 $a_k \in A_k = \{i_0, i_k\}$，我们可以写成

$$\sum_{a \in C_1, a_k = i_0} m_a + \sum_{a \in C_1, a_k = i_k} m_a = 1.$$

我们证明 $\sum_{a \in C_1,\ a_k = i_k} m_a = 0$. 。利用不等式 (4.6)，我们得到

$$w_{l,i_l} \geq \sum_{a \in C_1} m_a c_{i_l,a} + \sum_{a \in C_2} m_a c_{i_l,a} \geq w_{l,i_l} + \sum_{a \in C_2} m_a c_{i_l,a}.$$

因此，我们有 $\sum_{a \in C_2} m_a c_{i_l,\ a} = 0$，从而 $m_a = 0$ 对所有 $a \in C_2$. 均成立。由于 $B_{i_l} = C_1 \cup C_2$，我们得到 $A \setminus C_1 = C_2 \cup (A \setminus B_{i_l})$。因此，我们得到 $\sum_{a \in A \setminus B_{i_l}} m_a = \sum_{a \in A \setminus C_1} m_a = 1$. 对于每个 $a \in A \setminus B_{i_l}$，都有 $a_p \neq i_l$. 由于 $a_p \in A_p = \{i_k, i_l\}$，可知 $a_p = i_k$，从而$a \in B_{i_k}$. 这证明了 $A \setminus B_{i_l} \subset B_{i_k}$，并且 $c_{i_k,\ a} \geq w_{p,\ i_k}$ 对所有 $a \in A \setminus B_{i_l}$. 均成立。此外，我们还有$\{a \in C_1 : a_k = i_k\} \subset B_{i_k}$. 进一步，由于 $C_1 \subset B_{i_l}$，我们得到

$$\{a \in C_1 : a_k = i_k\} \cap (A \setminus B_{i_l}) = \emptyset.$$

利用不等式 (4.5)，我们得到

$$w_{p,i_k} \geq \sum_{a \in A \setminus B_{i_l}} m_a c_{i_k,a} + \sum_{a \in C_1, a_k = i_k} m_a c_{i_k,a} \geq w_{p,i_k} + \sum_{a \in C_1, a_k = i_k} m_a c_{i_k,a}.$$

这证明了 $\sum_{a \in C_1,\ a_k = i_k} m_a = 0$. 因此，$\sum_{a \in C_1,\ a_k = i_0} m_a = 1$. 由于 $A \setminus C_1 \subset B_{i_0}$且 $\{a \in A : a_k = i_0\} \subset B_{i_0}$，可得

$$\begin{aligned} B_{i_0} = B_{i_0} \cap A = B_{i_0} \cap ((A \setminus C_1) \cup C_1) &= (A \setminus C_1) \cup (B_{i_0} \cap C_1) \\ &\supset (A \setminus C_1) \cup (\{a \in A : a_k = i_0\} \cap C_1). \end{aligned}$$

因此，由不等式 (4.4)，我们得到

$$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq \sum_{a \in A \setminus C_1} m_a c_{i_0,a} + \sum_{a \in C_1, a_k = i_0} m_a c_{i_0,a}.$$

注意，对所有满足 $a_k = i_0$. 的 $a \in C_1$，都有 $c_{i_0,\ a} \geq w_{k,\ i_0}$ 因此，max $\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq w_2 + w_{k,\ i_0}$. 这与不等式 $0 < w_{k,\ i_0} < w_2$. 矛盾

子情形 1(b). 当 $w_{p,\ i_l} = \max\{w_{l,i_l}, w_{p,i_l}\}$. 考虑集合 $D_1 = \{a \in B_{i_l} : c_{i_l,\ a} \geq w_{p,\ i_l}\}$和 $D_2 = \{a \in B_{i_l} : c_{i_l,\ a} < w_{p,\ i_l}\}$. 于是我们有 $B_{i_l} = D_1 \cup D_2$. 令 $a \in A \setminus D_1$. 若 $a_p = i_l$，

则 $a \in B_{i_l}$ 且 $c_{i_l,\ a} \geq w_{p,\ i_l}$，这意味着 $a \in D_1$，矛盾。因此， $a_p = i_k$，从而 $a \in B_{i_k}$ 且 $c_{i_k,\ a} \geq w_{p,\ i_k}$. 因此， $A \setminus D_1 \subset B_{i_k}$. 利用不等式 (4.6)，我们得到

$$\sum_{a\in D_1} m_a w_{p,i_l} \leq \sum_{a\in D_1} m_a c_{i_l,a} + \sum_{a\in D_2} m_a c_{i_l,a} \leq w_{p,i_l}.$$

这给出 $\sum_{a\in D_1} m_a \leq 1$. 若 $\sum_{a\in D_1} m_a = 0$，则由方程 (4.3)，有 $\sum_{a\in A\setminus D_1} m_a = 2$. 根据不等式 (4.5)，我们得到 $w_{p,\ i_k} \geq \sum_{a\in A\setminus D_1} m_a c_{i_k,\ a} \geq 2w_{p,\ i_k}$，矛盾。因此 $\sum_{a\in D_1} m_a = 1$. 由方程 (4.3)，有 $\sum_{a\in A\setminus D_1} m_a = 1$. 由于 $A \setminus D_1 \subset B_{i_k}$，可得

$$B_{i_k} = B_{i_k} \cap A = B_{i_k} \cap ((A \setminus D_1) \cup D_1) = (A \setminus D_1) \cup (B_{i_k} \cap D_1).$$

因此，由不等式 (4.5)，我们得到

$$w_{p,i_k} \geq \sum_{a\in A\setminus D_1} m_a c_{i_k,a} + \sum_{a\in B_{i_k}\cap D_1} m_a c_{i_k,a} \geq w_{p,i_k} + \sum_{a\in B_{i_k}\cap D_1} m_a c_{i_k,a}.$$

这意味着 $\sum_{a\in B_{i_k}\cap D_1} m_a c_{i_k,\ a} = 0$，因此对所有 $a \in B_{i_k} \cap D_1.$，都有 $m_a = 0$。利用不等式 (4.6)，我们得到

$$w_{p,i_l} \geq \sum_{a\in D_1} m_a c_{i_l,a} + \sum_{a\in D_2} m_a c_{i_l,a} \geq w_{p,i_l} + \sum_{a\in D_2} m_a c_{i_l,a}.$$

这证明了 $\sum_{a\in D_2} m_a c_{i_l,a} = 0$，这意味着对所有 $a \in D_2.$，都有 $m_a = 0$。由于 $B_{i_l} = D_1 \cup D_2$，我们得到 $A \setminus D_1 = D_2 \cup (A \setminus B_{i_l})$. 因此，我们得到 $\sum_{a\in A\setminus B_{i_l}} m_a = \sum_{a\in A\setminus D_1} m_a = 1.$。若 $a \in D_1 \setminus B_{i_0}$，则 $a_k \neq i_0.$。由于 $a_k \in A_k = \{i_0, i_k\}$，我们得到 $a_k = i_k$，从而 $a \in B_{i_k} \cap D_1$。因此，对所有 $a \in D_1 \setminus B_{i_0}.$，都有 $m_a = 0$。将 D_1 分解为

$$D_1 = (B_{i_0} \cap D_1) \cup (D_1 \setminus B_{i_0}),$$

我们得到 $\sum_{a\in B_{i_0}\cap D_1} m_a = \sum_{a\in D_1} m_a = 1.$。若 $a \in A\setminus B_{i_l}$，则 $a_l \neq i_l.$。由于 $a_l \in A_l = \{i_0, i_l\}$，我们得到 $a_l = i_0$，从而 $a \in B_{i_0}$ 和 $c_{i_0,a} = w_2.$。这意味着 $(A\setminus B_{i_l})\cup(B_{i_0}\cap D_1) \subset B_{i_0}$。由于 $D_1 \subset B_{i_l}$，可推出 $(A \setminus B_{i_l}) \cap (B_{i_0} \cap D_1) \subset B_{i_0}.$。因此，由不等式 (4.4)，我们得到

$$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq \sum_{a\in A\setminus B_{i_l}} m_a c_{i_0,a} + \sum_{a\in B_{i_0}\cap D_1} m_a c_{i_0,a}.$$

令 $a \in B_{i_0} \cap D_1.$，则 $a_k \in A_k = \{i_0, i_k\}.$。若 $a_k = i_k$，则 $a \in B_{i_k} \cap D_1$ 且 $m_a = 0.$。由此得到

$$\sum_{a\in B_{i_0}\cap D_1} m_a c_{i_0,a} = \sum_{\substack{a\in B_{i_0}\cap D_1,\\ a_k=i_0}} m_a c_{i_0,a}.$$

由于 $c_{i_0,\ a} \geq w_{k,\ i_0}$ 对所有满足 $a_k = i_0$ 的 $a \in B_{i_0}\cap D_1$ 均成立，因此 $\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq w_2 + w_{k,\ i_0}$，这与不等式 $0 < w_{k,\ i_0} < w_2.$ 矛盾

情形2。 当 $w_1 \leq w_{k,\ i_0} < w_{l,\ i_0} < w_2.$ 假设对于某个 $j \geq s+1$ 满足 $j \neq p$，有 $A_j \subset \{i_k, i_l, i_s\}.$ 那么必然有 $A_j = \{i_k, i_s\}$ 或 $A_j = \{i_l, i_s\}.$ 在这种情况下，我们可以

通过取 $p = j$. 完全按照情形 1 进行。因此，我们假设对于所有满足 $j \neq p$. 的 $j \geq s+1$，都有 $A_j \not\subset \{i_k, i_l, i_s\}$。对于每个 $1 \leq j \leq r$，令

$$f_j = \begin{cases} x_{i_0}^{2w_{j,i_0}} & \text{if } 1 \leq j \leq k; \\ x_{i_0}^{w_{j,i_0}} x_{i_j}^{w_{j,i_j}} & \text{if } k+1 \leq j \leq s; \\ x_{i_l}^{2w_{p,i_l}} & \text{if } j = p; \\ x_{i_j}^{2w_{j,i_j}} & \text{if } s+1 \leq j \leq r,\ j \neq p \text{ and } i_j \in A_j \setminus \{i_0, i_k, i_l, i_s\}. \end{cases}$$

那么，单项式

$$f = \operatorname{lcm}(f_1, \ldots, f_r) \in I^{(2)}.$$

如果 $f = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$，那么 $\alpha_{i_k} = 0, \alpha_{i_0} = \max\{2w_{k,i_0}, w_2\}$ 和 $\alpha_{i_s} = w_{s,\ i_s}$. 我们证明 $f \notin I^2$. 为导出矛盾，假设 $f \in I^2$. 那么，根据引理 4.3，存在 $[m_a] \in \mathbb{N}^{1\times A}$使得

$$\sum_{a\in A} m_a = 2 \tag{4.7}$$

and

$$P_I[m_a]^\top \leq [\alpha_1 \cdots \alpha_n]^\top.$$

这意味着

$$\sum_{a\in B_{i_0}} m_a c_{i_0,a} \leq \max\{2w_{k,i_0}, w_2\}, \tag{4.8}$$

$$\sum_{a\in B_{i_k}} m_a c_{i_k,a} = 0, \tag{4.9}$$

and

$$\sum_{a\in B_{i_s}} m_a c_{i_s,a} \leq w_{s,i_s}. \tag{4.10}$$

利用不等式 (4.9)，我们得到对所有 $a \in B_{i_k}$. 均有 $m_a = 0$。考虑集合 $E_1 = \{a \in B_{i_s} : c_{i_s,\ a} \geq w_{s,\ i_s}\}$ 和 $E_2 = \{a \in B_{i_s} : c_{i_s,\ a} < w_{s,\ i_s}\}$. 那么我们有 $B_{i_s} = E_1 \cup E_2$. 令 $a \in A \setminus E_1$. 如果 $a_s = i_s$，那么 $a \in B_{i_s}$ 和 $c_{i_s,\ a} \geq w_{s,\ i_s}$，这意味着 $a \in E_1$，矛盾。因此，$a_s = i_0$，从而 $a \in B_{i_0}$ 和 $c_{i_0,\ a} = w_2$. 因此，$A \setminus E_1 \subset B_{i_0}$. 利用不等式 (4.10)，我们得到

$$\sum_{a\in E_1} m_a w_{s,i_s} \leq \sum_{a\in E_1} m_a c_{i_s,a} + \sum_{a\in E_2} m_a c_{i_s,a} \leq w_{s,i_s}.$$

这给出 $\sum_{a\in E_1} m_a \leq 1$. 若 $\sum_{a\in E_1} m_a = 0$，则由方程 (4.3) 可得 $\sum_{a\in A\setminus E_1} m_a = 2$.根据不等式 (4.8)，我们得到

$$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq \sum_{a\in A\setminus E_1} m_a c_{i_0,a} = 2w_2.$$

这与不等式 $0 < w_{k,\ i_0} < w_2$. 矛盾。因此 $\sum_{a\in E_1} m_a = 1$. 由方程 (4.7)，我们有 $\sum_{a\in A\setminus E_1} m_a = 1$. 若 $a \in E_1$ 且 $a_k = i_k$，则 $a \in B_{i_k}$，这意味着 $m_a = 0$. 因此，我们得到

$$\sum_{a\in E_1, a_k=i_0} m_a = \sum_{a\in E_1, a_k=i_0} m_a + \sum_{a\in E_1, a_k=i_k} m_a = \sum_{a\in E_1} m_a = 1.$$

由于 $A \setminus E_1 \subset B_{i_0}$ 和 $\{a \in A :\ a_k = i_0\} \subset B_{i_0}$，因此可得

$$\begin{aligned} B_{i_0} = B_{i_0} \cap A = B_{i_0} \cap ((A \setminus E_1) \cup E_1) &= (A \setminus E_1) \cup (B_{i_0} \cap E_1) \\ &\supset (A \setminus E_1) \cup (\{a \in A : a_k = i_0\} \cap E_1). \end{aligned}$$

因此，由不等式 (4.8) 可得

$$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq \sum_{a\in A\setminus E_1} m_a c_{i_0,a} + \sum_{a\in E_1, a_k=i_0} m_a c_{i_0,a}.$$

注意，对所有满足 $a_k = i_0$. 的 $a \in E_1$，$c_{i_0,\ a} \geq w_{k,\ i_0}$。因此，$\max\{2w_{k,i_0}, w_2\} \geq w_2 + w_{k,\ i_0}$.。这与不等式 $0 < w_{k,\ i_0} < w_2$. 矛盾 □

定理 4.7。采用设定 ***4.1*** 中的记号，假设对每个 $j \in [r] \setminus \{k, l\}$ 都有 $A_j \not\subset A_k \cup A_l$，并且对所有 $(k, l) \in X_I$. 都成立。那么，I 是 ***Simis*** 理想，当且仅当存在一个 ***Simis*** 平方自由单项式理想 J 和一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$.。特别地，猜想 ***1.2*** 对 I. 成立

证明。假设存在一个 Simis 平方自由单项式理想 J 和一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$. 那么，根据 [23, 推论 5.5]，I 是 Simis。反过来，若 I 是 Simis，那么由引理 4.4 可得 $X_I = \emptyset$. 由注 4.2 可知，$I = J_w$，其中 w是 R 上的标准线性权重，且 $J = \sqrt{I}$.。根据 [23, 推论 5.5]，J 是一个 Simis 理想。□

下面的推论是定理 4.7 的直接推论。

推论 4.8。采用设定 ***4.1*** 中的记号，假设对所有 $1 \leq j \leq r.$，$A_j \not\subset \bigcup_{k\neq j} A_k$ 成立。那么，I 是一个 ***Simis*** 理想，当且仅当存在一个 ***Simis*** 平方自由单项式理想 J 和一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$.。特别地，猜想 ***1.2*** 对 I.成立。

定理 4.9。沿用设定 ***4.1*** 的记号，假设 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ 对所有 $\mathfrak{p} \in Ass(I)$均成立。则 I 是 ***Simis*** 理想，当且仅当存在一个 ***Simis*** 平方自由单项式理想 J 和一个标准线性权重 w，使得 $I = J_w$. 特别地，猜想 ***1.2*** 对 I.成立

证明。可以 使用引理 4.6，并按照定理 4 的证明中的类似步骤进行。 7. □

推论 4.10。沿用设定 ***4.1*** 的记号，令 $\mathrm{ht}(\mathfrak{p}) = 2$ 对所有 $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}(I)$均成立。则以下条件等价：

(i) I 是 ***Simis*** 理想。(ii) $I^{(2)} = I^2$.(iii) G_I 是一个二分图，且 I 具有标准线性权重。

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii) 直接得出。

(ii) $\Rightarrow$(iii) 设 $J(G_I)$ 是 G_I. 的覆盖理想。那么 $J(G_I) = \sqrt{I}$.根据引理 4.6，我们得到 $X_I = \emptyset$.由注 4.2 可知， $I = J(G_I)_w$，其中某个标准线性权重为 w.。利用 [23,推论 5.5],，我们得到 $J(G_I)^{(2)} = J(G_I)^2$.。现在， [23,命题 6.2]表明 G_I 是一个二分图。

(iii) $\Rightarrow$ (i) 设 $J \subset R$ 是一个平方自由单项式理想，并设 w 是一个标准线性权重，使得 $I = J_w$.。那么 $J(G_I) = J$.由 [10,推论 2.6] 可知， $J(G_I)$ 是 Simis。根据 [23, 推论 5.5], ，我们看到 I 是 Simis。□

Declarations

致谢。 作者感谢 Macaulay2 [13] 的开发者为本文提供计算支持。

利益披露声明。 作者声明不存在任何利益冲突。

数据可用性声明。 本研究期间未生成或分析任何数据集。

References

[1]Arindam Banerjee、Bidwan Chakraborty、Kanoy Kumar Das、Mousumi Mandal 和 S. Selvaraja。加权有向图的边理想的普通幂与符号幂相等。《通讯代数》，51(4):1575–1580，2023。[2] Cristiano Bocci、Susan Cooper、Elena Guardo、Brian Harbourne、Mike Janssen、Uwe Nagel、Alexandra Seceleanu、Adam Van Tuyl 和 Thanh Vu。无平方单项式理想的 Waldschmidt 常数。《代数组合学杂志》，44:875–904，2016。[3] Paromita Bordoloi、Kanoy Kumar Das 和 Rajiv Kumar。具有 Simis 性质的支撑数为 2 的单项式理想，2025。[4] G. V. Chudnovsky。复超曲面上的奇点与多维 Schwarz 引理。载于巴黎数论研讨会，*1979–80*，第 12 卷，《数学进展》，第 29–69 页。Birkh¨auser，波士顿，马萨诸塞州，1981。[5] Michele Conforti 和 G´erard Cornu´ejols。平衡矩阵的分解定理。整数规划与组合优化，74:147–169，1990。[6] Susan M. Cooper、Robert J. D. Embree、Huy T`ai H`a 和 Andrew H. Hoefel。单项式理想的符号幂。《爱丁堡数学会会刊》*(2)*，60(1):39–55，2017。[7] Kanoy Kumar Das。若干类单项式理想的普通幂与符号幂相等。《图与组合》，40(1):第 12 号论文，17 页，2024。[8] Sara Faridi。通过平方自由单项式理想研究单项式理想。载于交换代数，第 244 卷，《纯粹与应用数学讲义》，第 85–114 页。Chapman & Hall/CRC，博卡拉顿，佛罗里达州，2006。[9] Isidoro Gitler、Enrique Reyes 和 Rafael H. Villarreal。二分图顶点覆盖理想的爆破代数。载于《代数结构及其表示》，第 376 卷，《当代数学》，第 273–279 页。美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，2005。[10] Isidoro Gitler、Enrique Reyes 和 Rafael H Villarreal。二分图顶点覆盖理想的爆破代数。《当代数学》，376(273-280):69，2005。

[11] Isidoro Gitler、Enrique Reyes 和 Rafael H. Villarreal。平方自由单项式理想的爆破代数及其与组合优化问题的一些联系。《落基山数学杂志》，39(1):71–102，2009。[12] Isidoro Gitler、Carlos E. Valencia 和 Rafael H. Villarreal。关于 Rees 代数与最大流最小割性质的一则注记。《Beiträge zur Algebra und Geometrie》，48(1):141–150，2007。[13] Daniel R. Grayson 和 Michael E. Stillman。Macaulay2：用于代数几何研究的软件系统。网址：http://www.math.uiuc.edu/Macaulay2/。[14] Gonzalo Grisalde、Jos´e Mart´ınez-Bernal 和 Rafael H. Villarreal。加权有向图的正规无挠边理想。《通讯代数》，52(4):1672–1685，2024。[15] Brian Harbourne 和 Craig Huneke。符号幂是否已经高度演化？《拉马努金数学学会杂志》，28A:247–266，2013。[16] J¨urgen Herzog 和 Takayuki Hibi。单项式理想，《数学研究生教材》第 260 卷。Springer-Verlag London, Ltd.，伦敦，2011。[17] J¨urgen Herzog、Takayuki Hibi、Ngˆo Viˆet Trung 和 Xinxian Zheng。标准分次顶点覆盖代数、圈与叶。《美国数学会汇刊》，360(12):6231–6249，2008。[18] Melvin Hochster 和 Craig Huneke。理想的符号幂与普通幂的比较。《数学发明》，147(2):349–369，2002。[19] AV Jayanthan、Arvind Kumar 和 Vivek Mukundan。关于齐次理想的反弹指数与渐近反弹指数。《数学杂志》，302(4):2407–2434，2022。[20] Kazem Khashyarmanesh、Mehrdad Nasernejad 和 Jonathan Toledo。单项式运算下的符号强持续性，以及覆盖理想的强持续性。《罗马尼亚科学院数学科学公报（新辑）》，64(2):105–131，2021。第 64 卷（112），第 2 期。[21] Mousumi Mandal 和 Dipak Kumar Pradhan。加权有向图中的符号幂。《国际代数与计算杂志》，31(3):533–549，2021。[22] Mousumi Mandal 和 Dipak Kumar Pradhan。比较加权有向图的边理想的符号幂。《代数组合学杂志》，56(2):453–474，2022。[23] Fernando O. M´endez、Maria Vaz Pinto 和 Rafael H. Villarreal。符号幂：Simis 理想与加权单项式理想。《代数及其应用杂志》，24(13n14):2541001，2025。[24] Aron Simis、Wolmer V. Vasconcelos 和 Rafael H. Villarreal。关于图的理想理论。《代数杂志》，167(2):389–416，1994。[25] H. Skoda。算子估计及其算术应用。载于 S´eminaire Pierre Lelong（分析）（1975/76 年）；解析函数研讨会（图卢兹，1976），《数学讲义》第 578 卷，第 314–323 页。Springer，柏林—纽约，1977。[26] Michel Waldschmidt。多变量函数的算术性质。II。载于 S´eminaire Pierre Lelong（分析）（1975/76 年）；解析函数研讨会（图卢兹，1976），《数学讲义》第 578 卷，第 108–135 页。Springer，柏林—纽约，1977。电子邮箱：bijender@lnmiit.ac.in

–

Department of Mathematics, The LNM Institute of Information Technology, Jaipur, India - 302031.

电子邮箱地址: ajay.kumar@iitjammu.ac.in

Department of Mathematics, Indian Institute of Technology Jammu, J&K, India - 181221.