arXiv:2512.22954v1 [math.CO] 28 Dec 2025

Lov´asz–Saks–Schrijver 理想与图的正交表示簇的不可约分支

Emiliano Liwski

鲁汶大学数学系，Celestijnenlaan 200B，B-3001 鲁汶，比利时

2025年12月30日

摘要

给定一个有限简单图 G 和一个正整数 d，可以为 G 关联 Lov´asz–Saks–Schrijver 理想 $L_G(d)$，它是由正交条件所对应的二次多项式生成的理想。相应的簇 $\mathbb{V}(L_G(d))$，记作 $\mathrm{OR}_d(G)$，是补图 G的正交表示簇：其点是从 G 的顶点集到 $\mathbb{K}^d$ 的映射，并将 G 中相邻的顶点映射为正交向量。本文研究 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解以及 $L_G(d)$ 的主分解。我们主要关注 G 为森林的情形。在这一假设下，我们确定 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支，计算其维数，并描述其定义方程，从而得到 $L_G(d)$ 的主分解。关键在于一个拟阵理论框架：我们为每个森林 G 关联一个铺砌拟阵 $\mathcal{M}(G)$。

数学主题分类： 05E40, 05C90, 05B35, 05C05, 05E9 9.

关键词： LSS 理想、图的正交表示、不可约分支、主分解、拟阵。

致谢。本研究得到了博士奖学金 1126125N 的支持，并部分由 FWO 资助项目 G0F5921N（奥德修斯）、G023721N 和鲁汶大学资助项目 iBOF/23/064 提供资助。

目录

1 引言 1 2 预备知识 4 3 森林图的 OR 不可约分解$_d(G)$53.1 簇 U_G .5 3.2 分解为簇 V_S .6 3.3 拟阵 $\mathcal{M}(G)$.6 3.4 确定极大簇 V_S .8 3.5 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解.10**4 簇的维数 V_S 和 OR$_d(G)$ 5 的主分解** $L_G(d)$ **12**5.1 簇的理想 $\overline{V_S}$ .12 5.2 $L_G(d)$ 的主分解.15**6 例子 16**

—

—

1 引言

动机。 图的正交表示由 Lov´asz 于 1979[10] 年提出，作为研究图的香农容量的工具。后续研究表明，

这类表示与图的若干基本组合性质密切相关。正交表示为图的每个顶点 G 赋予一个 $\mathbb{K}^d$ 向量，使得对应于非相邻顶点的向量彼此正交。

图的所有正交表示构成 G 上的 $[n]$ 一个代数簇，该代数簇位于 $\mathbb{K}^{nd}$中。其定义方程编码了正交约束，并由此导出*Lov´asz–Saks–Schrijver* 理想 （LSS 理想）。对这些理想的研究处于交换代数与组合学的交汇处。正如 [2],中所述，它们也与一些经典主题有着自然联系，例如行列式簇的坐标截面。

LSS 理想。我们沿用 [2], 中的约定，回顾 Lov´asz–Saks–Schrijver 理想的定义：LSS 理想的簇上的点对应于图的补图的正交表示。回顾一下，图 G 的补图是具有相同顶点集的图 G，其中 $\{i,j\} \in E(G)$ 当且仅当 $\{i,j\} \notin E(G)$。 —

定义 1.1。设 d 为正整数。给定一个简单图 $G = ([n],\ E)$，其顶点集为 $[n] = \{1,\dots,n\}$，考虑不定元矩阵 $n \times d$ $X = (x_{i,\ j})$，并令 $\mathbb{K}[X]$ 表示相应的多项式环。对每条边 $e = \{i,j\} \in E$，定义

$$f_e := \sum_{k=1}^{d} x_{i,k}x_{j,k}. \tag{1.1}$$

所谓的*Lov´asz–Saks–Schrijver* 理想（或称*LSS* 理想）在维数 d 中为

$$L_G(d) = (f_e : e \in E) \subset \mathbb{K}[X].$$

我们将 $\mathrm{OR}_d(G) \coloneqq \mathbb{V}(L_G(d)) \subset \mathbb{K}^{nd}$ 记作相应的簇。点$\mathbf{v} \in \mathrm{OR}_d(G)$ 对应于一个由向量组成的 n 元组 $(v_1、\dots、v_n) \in (\mathbb{K}^d)^n$，满足正交关系 $v_i \cdot v_j = 0$，其中 $\{i,j\} \in E$。

关于 $L_G(d)$ 和 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的奠基性工作由 [11] 完成。在该工作中，作者研究了由处于一般位置的正交表示的闭包所给出的子簇（可能为空），也就是说，任何 d 个向量都线性无关的表示。他们证明，当且仅当 G 是 $(n-d)$-连通的时，该子簇不可约且非空。

主要问题。本文探讨的核心问题如下。

问题 1。当 G 是森林且 $d \geq 3$ 时，确定 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解以及$L_G(d)$ 的主分解。

在整个过程中，我们都在域 $\mathbb{K} = \mathbb{C}$上工作，假设 $d \geq 3$，并取 G 为森林。我们回答域 $\mathbb{C}$ 上的问题 1 ，并计算 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支的维数。

相关工作。 当 $d = 1$时，理想 $L_G(d)$ 化为 边理想 G的单项式理想，这是一个研究充分的对象（参见 [13]） 。对于 $d = 2$，式 (2) 的主分解和根性在 L_G中得到确定：该理想在特征 [6]的域上是根理想，而在特征 2 的域上，它是根理想当且仅当 G 是二部的。如果该域包含 $\sqrt{-1}$，那么 $L_G(2)$ 同构于永久式边理想 Π_G [6, 节 3] ；或者当 G 为二部的时，同构于 G [6,注 1。5]的二项式边理想。

文献 [7], 研究的奇偶二项式边理想在变量替换后与特征为$\neq 2$ 时的 LSS 理想一致；文中还描述了它们的极小素理想和介素分解。

这项工作 [2] 首次给出了非根理想的例子 $L_G(d)$，针对 $d > 2$，引入了不变量 $\mathrm{pmd}(G)$，并证明了 $L_G(d)$ 在 $d \geq \mathrm{pmd}(G)$ 时是根完全交，在 $d \geq \mathrm{pmd}(G)+1$时是素理想。该工作还揭示了 LSS 理想与行列式理想的坐标截面之间的联系。

对于森林， [2] 证明，只要 d 大于 G中某个顶点的最大度， $L_G(d)$就是素理想，从而解决了 d充分大时的分解问题。我们的工作则着重于确定在 $\mathbb{C}$上，对所有 $d \geq 3$， $L_G(d)$的主分解。

另有若干论文探讨了 LSS 理想的代数性质，包括完全交与素性、正则性、正规性、Gr¨obner 基以及与张量的联系；参见 [8, 15, 3, 9, 1, 4]。

策略概述。 设 G是 $[n]$上的一张森林图。我们的方法依赖于与 G相关的两个构造：（1）子集 $S \subseteq [n]$对应的簇 V_S；（2）铺砌拟阵 $\mathcal{M}(G)$，其定义如下。

定义 1.2 (定义 3.3)。 对于 $S \subseteq [n]$，令

$$U(S) := \left\{ \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OR}_d(\overline{G}) \;\middle|\; v_i = 0 \text{ if and only if } i \in S \right\} \subset (\mathbb{C}^d)^n,$$

并令 $V_S := U(S)$为其扎里斯基闭包。

如命题 3.5所示，每个 V_S 都是不可约的，而并集 $\cup_{S\subseteq[n]} V_S$ 给出了 OR 的不可约但冗余的分解$_d(G)$。为提取其极大分量，我们引入一个与 G相关的拟阵。

定义 1.3 （定义3.6）。拟阵 $\mathcal{M}(G)$ 是秩为d 的铺砌拟阵，其相关超平面恰好是以下集合

$$N_G(i) \qquad \text{for all } i \in [n] \text{ with } |N_G(i)| \geq d,$$

其中， $N_G(i)$ 表示 i 在 G 中的邻域。

簇 V_S 与拟阵 $\mathcal{M}(G)$ 之间的关键联系如下：对于一般点 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots\ldots, v_n) \in V_S$，与非零向量（$v_i$： $i \notin S$）相关联的可实现拟阵——也就是说，其相关集反映这些向量之间的线性依赖——恰好是 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$；见引理 3.14。这使我们能够确定冗余分解中的极大簇：它们恰好对应于定义3.15中引入的容许子集。

我们的贡献。 现在总结本文的主要结果。所有陈述均涉及森林 G 的 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解及其各分支的维数，以及相关 LSS 理想 $L_G(d)$ 的主分解。

定理（A）。 设 G 是定义在 $[n]$ 上的森林。$\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解为

$$\mathrm{OR}_d(\overline{G}) = \bigcup_S V_S, \qquad \text{(Theorem 3.18)}$$

其中，求并遍历 $[n]$ 的所有 G-容许子集，也就是说，遍历满足对每个 $i \in S$ 均有以下性质的所有子集 $S \subseteq [n]$，

$\big|N_G(i) \cap ([n] \setminus S)\big| \geq d$ 且 $N_G(i) \cap ([n] \setminus S) \not\subseteq N_G(j) \cap ([n] \setminus S)$ 对每个 $j \in [n] \setminus S$，

如定义3.15所示。

我们还确定了 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支的维数。

定理（B）。设 S 是 $[n]$ 的一个 G-容许子集。那么

$$\dim(V_S) = d(n-|S|) - |E(G_{[n]\setminus S})|. \qquad \text{(Theorem 4.2)}$$

最后，我们得到 LSS 理想 $L_G(d)$ 的主分解。

定理（C）。设 G 是一个森林。那么 $L_G(d)$ 的主分解为

$$L_G(d) = \bigcap_S \left((x_{i,j} : i \in S) + \sqrt{I_{G_{[n]\setminus S}}}\right), \qquad \text{(Theorem 5.8)}$$

其中，交遍历所有 G-容许子集 $[n]$。对于森林 G，理想I_G 在定义 5.3 中给出。

论文结构。第2 节介绍全文所用的拟阵理论必要背景。第3 节引入簇 V_S 和铺砌拟阵 $\mathcal{M}(G)$，并利用它们描述当G 是森林时 $\mathrm{OR}_d(G$的不可约分支。第4节致力于计算这些分支的维数。第5 节确定簇 V_S 的定义理想，并推导 LSS 理想 $L_G(d)$ 的主分解。最后，第6 节将前几节的结果应用于若干经典森林图族，给出 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支及其维数的明确描述。

2 预备知识

我们首先回顾拟阵理论中的若干基本概念，这些概念将在全文中用到。关于该主题的全面介绍，请参阅 [14]。

定义 2.1。一个拟阵 M 由一个基集 $[n]$ 以及其子集族 $\mathcal{I}(M)$构成，其中 $[n]$的这些子集称为独立集，并满足：

(i) $\emptyset \in \mathcal{I}$；(ii) 若 $I \in \mathcal{I}$ 且 $I' \subseteq I$，则 $I' \in \mathcal{I}$；(iii) 若 I_1，$I_2 \in \mathcal{I}$ 且 $|I_1| < |I_2|$，则存在 $e \in I_2 \setminus I_1$ 使得 $I_1 \cup \{e\} \in \mathcal{I}$。

$[n]$ 的非独立子集称为依赖的。对于任意 $F \subseteq [n]$，其秩记为 $\mathrm{rk}(F)$，等于 F的最大独立子集的大小。M 的秩为 $\mathrm{rk}([n])$。

我们在本文中将使用的一类特别重要的拟阵是铺砌拟阵族。有人猜想，渐近地看，几乎所有拟阵都属于这一类。

定义 2.2。秩为 d 的拟阵 M 称为铺砌拟阵，如果基集的每个 $(d-1)$-子集都是独立的。M 的依赖超平面是一个极大相关集，其中每个大小为 d 的子集都是相关的。

下面这个引理来自 [5]，它给出了铺砌拟阵的超图论刻画。

引理 2.3。设 d和 n 为满足 $n \geq d+1$的整数。假设 $\mathcal{L}$ 是 $[n]$的子集族，且对所有 $l \in \mathcal{L}$均满足 $|l| \geq d$。那么，$\mathcal{L}$ 构成 $[n]$ 上秩为 d 的铺砌拟阵的相关超平面族，当且仅当

$$|l_1 \cap l_2| \leq d-2 \qquad \textit{for all distinct } l_1, l_2 \in \mathcal{L}. \qquad (2.1)$$

例 2.4. 考虑以下集合

$$\mathcal{L} = \{\{1,2,4\},\{1,3,7\},\{1,5,6\},\{2,3,5\},\{2,6,7\},\{3,4,6\},\{4,5,7\}\}.$$

对于 $d = 3$，容易验证 $\mathcal{L}$ 满足条件（2.1）。因此， $\mathcal{L}$ 给出了上秩 3 的铺砌拟阵的相关超平面族，这个拟阵称为 法诺平面。

3 森林图的 $\mathrm{OR}_d(G)$不可约分解

本节将描述当 G 是森林且 $d \geq 3$ 时 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支；这些假设在全文中保持不变。回忆一下，我们将 $\mathrm{OR}_d(G)$ 中的每个点 $\mathbf{v} \in$ 视为由向量组成的 n 元组 $(v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$，当 $\{i,j\} \in E(G)$ 时，该元组满足正交关系 $v_i \cdot v_j = 0$。

3.1 簇 UG

我们首先引入一个子簇 U_G，它将在后续讨论中发挥重要作用。

定义 3.1. 我们定义

$$U_G := \{\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OR}_d(\overline{G}) : v_i \neq 0 \text{ for every } i\} \subset \mathbb{C}^{nd}.$$

这是一个准仿射簇，也就是说，它是一个闭集与一个开集的交，因为它由定义 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的消失条件以及非消失约束 $v_i \neq 0$ 确定。

接下来我们证明 U_G 非空且不可约。

引理3.2. U_G 非空且不可约。

证明。 我们对顶点数 n 使用归纳法。基础情形 $n = 1$ 显然成立。假设该结论对至多有 $n-1$ 个顶点的所有森林都成立。设 G 是顶点集为 $[n]$ 的一个森林。

由于 G 是森林，因此存在一个度至多为一的顶点 $i \in [n]$。考虑导出子图 $G_{[n]\setminus\{i\}}$，它仍是一个顶点数更少的森林。根据归纳假设， $U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}$ 非空且不可约。我们分两种情况讨论：

情况1： $\deg(i) = 0$。在这种情况下，顶点 i 不施加任何正交条件。因此，向量 v_i 可以是 $\mathbb{C}^d$ 中的任意非零向量，并且我们有一个同构

$$U_G \cong (\mathbb{C}^d)^* \times U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}. \tag{3.1}$$

由此可知， U_G 非空且不可约。

情况 2： $\deg(i) = 1$。令 $j \in [n]$ 为与 i相邻的唯一顶点。为证明其非空，任取一个

$$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_n) \in U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}.$$

通过选取任意与 v_j 正交的非零向量 v_i 来扩展$\mathbf{v}$，即可得到 U_G中的一个点，从而证明其非空。为证明其不可约，考虑投影映射

$$\pi : U_G \to U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}, \quad \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \mapsto (v_1, \ldots, v_{i-1}, \hat{v}_i, v_{i+1}, \ldots, v_n), \tag{3.2}$$

其中 $\hat{}v_i$ 表示移除 v_i。点 $\mathbf{v}$ 上方的纤维由超平面中与 v_j正交的所有非零向量v_i 组成，该纤维同构于 $(\mathbb{C}^{d-1})^*$。因此， π 是 $U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}$上的一个 $(\mathbb{C}^{d-1})^*$-纤维化。由于底空间是不可约的，U_G 也是不可约的。 □

3.2 分解为簇 V_S

现在，我们为每个子集 $S \subseteq [n]$定义一个相关的簇。

定义 3.3。对于 $S \subseteq [n]$，令

$$U(S) := \left\{ \mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OR}_d(\overline{G}) \,\middle|\, v_i = 0 \text{ if and only if } i \in S \right\} \subset (\mathbb{C}^d)^n.$$

我们用 $V_S := U(S) \subset \overline{\mathbb{C}^{nd}}$ 表示 $U(S)$ 在 $\mathbb{C}^{nd}$ 中的扎里斯基闭包。

例 3.4。考虑图 G，见图 1，其顶点集为 $[11]$，并令$d = 4$。考虑子集 $S = \{9, 10, 11\}$。那么，

$$U(S) = \{\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_{11}) \in \mathrm{OR}_4(\overline{G}) : v_i = 0 \text{ for } i \in \{9, 10, 11\} \text{ and } v_i \neq 0 \text{ for } i \in [8]\}.$$

簇 V_S 是 U_S 在 $\mathbb{C}^{44}$ 中的闭包。

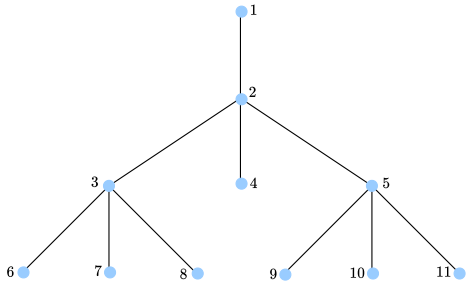


图 1：一张森林图。

下一个命题给出了 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的一个不可约但冗余的分解。

命题 3.5。簇 $\mathrm{OR}_d(G)$ 具有如下不可约分解：

$$\mathrm{OR}_d(\overline{G}) = \bigcup_{S \subseteq [n]} V_S. \tag{3.3}$$

证明。包含关系 $\supseteq$ 是显然的，因为根据定义，每个 $U(S)$ 都包含于 $\mathrm{OR}_d(G)$ 中。对于反向包含，任取 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in \mathrm{OR}_d(G)$，并定义

$$S := \{ i \in [n] : v_i = 0 \}.$$

由于 $\mathbf{v} \in \mathrm{OR}_d(\overline{G})$，因此 $\mathbf{v} \in U(S)$，这就证明了（3.3）中的等式。

由于每个 $U(S)$ 都同构于 $U_{G_{[n]\setminus S}}$，引理 3.2 表明 $U(S)$ 是不可约的，其闭包 V_S也同样不可约。这就证明了（3.3）中分解的不可约性。

□

3.3 拟阵 $\mathcal{M}(G)$

在本小节中，我们介绍与任意森林图 $\mathcal{M}(G)$ 相关联的铺砌拟阵 G。该拟阵将在确定（3.3）中的极大簇时发挥核心作用。

定义3.6。 设 G 是顶点集 $[n]$上的森林。我们按如下方式为 G 关联一个拟阵 $\mathcal{M}(G)$，其底集为 $[n]$ 。拟阵 $\mathcal{M}(G)$是秩为 d 的铺砌拟阵，其相关超平面恰好是以下集合

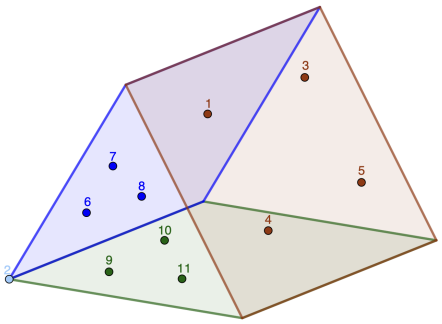
$$N_G(i) \qquad \text{for all } i \in [n] \text{ with } |N_G(i)| \geq d,$$

其中 $N_G(i)$ 表示 G 中 i 的邻域。

由于 G 是森林，因此不含 4-圈，所以任意两个这样的子集至多相交于一个顶点，尤其是至多相交于 $d-2$ 因为 $d \geq 3$。因此，由（2.1），这个铺砌拟阵定义良好。

例3.7。 考虑例 G 中的森林图 3.4；见图 1。令 $d=4$。 G 中度至少为四的顶点只有 2、3 和 5。因此，相应的拟阵 $\mathcal{M}(G)$ 是一个定义在 $[11]$上的四秩铺砌拟阵，其相关超平面为

$$\{N_G(2), N_G(3), N_G(5)\} = \big\{\{1,3,4,5\},\{2,6,7,8\},\{2,9,10,11\}\big\}.$$



Fi图 2：拟阵 $\mathcal{M}(G)$，来自例 3.7，对应于图1中的森林 .

记号3.8。 对于向量组 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$，我们将 $\mathcal{M}(\mathbf{v})$ 记作定义在 $[n]$ 上的可实现拟阵，其相关集恰为 $[n]$ 中与$\mathbf{v}$中的向量之间的线性依赖相对应的那些子集。我们称$\mathbf{v}$ 实现了拟阵 N，如果 $\mathcal{M}(\mathbf{v}) = N$。

例3.9。 考虑图 $\mathcal{M}(G)$ 和例 2 中的拟阵3.7。如图所示，这个拟阵可以由 $\mathbb{P}^3$中的 11 个点构成的构型来实现，见图 2。在这种表示中，四个点共处于一个超平面，当且仅当基集中的对应元素属于 $\mathcal{M}(G)$ 中同一个依赖超平面。从 $\mathbb{P}^3$中的这一实现还可以得到 $\mathbb{C}^4$中的一种实现。

现在我们注意到，由任意$\mathbf{v} \in U_G$ 确定的拟阵包含 $\mathcal{M}(G)$的所有依赖关系。

引理3.10。 若$\mathbf{v} \in U_G$，则 $\mathcal{M}(G)$ 的每个相关集在 $\mathcal{M}(\mathbf{v})$中也都是相关的。

证明。 只需验证， $\mathcal{M}(G)$ 的每个依赖超平面在 $\mathcal{M}(\mathbf{v})$中的秩至多为$d-1$。设 $N_G(i)$是这样一个超平面，且 $|N_G(i)| \geq d$。由于$\mathbf{v} \in \mathrm{OR}_d(G)$，向量 $\{v_j : j \in N_G(i)\}$ 都与 v_i正交；又因为 $v_i \neq 0$，它们都位于与 v_i正交的超平面中。因此，这些向量张成的空间维数至多为 $d-1$，从而得证。 □

我们还需要下面这个引理。我们称向量的 n 元组$\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$ 是 G 的忠实正交表示，当且仅当 $v_i \cdot v_j = 0$ 当且仅当 $\{i,j\} \in E(G)$。

引理 3.11。 设 G 是 $[n]$ 上的森林，并设 $\mathcal{M}(G)$ 为其关联拟阵。那么存在一个向量组 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$，使得：

- $\mathbf{v}$ 是 G 的忠实正交表示；
- $\mathbf{v}$ 实现了 $\mathcal{M}(G)$。

证明。 我们对 n 使用归纳法。当 $n = 1$ 时，结论显然成立。假设对于至多有 $n-1$ 个顶点的所有森林结论都成立，并令 G 为一个以 $[n]$ 为顶点集的森林。

由于 G 是一个森林，因此存在一个度至多为一的顶点 $i \in [n]$。根据归纳假设，存在一个向量组 $(v_1, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n)$，其中的向量属于 $\mathbb{C}^d$，该向量组是 $G_{[n]\setminus\{i\}}$ 的忠实正交表示，并实现了 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus\{i\}})$。现在我们通过定义 v_i 来扩展这个向量组，分两种情况讨论。

情况 1： $\deg(i) = 0$。 此时 i 不施加任何正交条件。取 v_i 为 $\mathbb{C}^d$ 中的任意向量，使其不与任何 v_k 正交，且不属于 $\mathbf{v}$ 的任意 $d-1$ 个向量的张成空间。这样得到的向量组 $\mathbf{v}' = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i, v_{i+1}, \dots, v_n)$ 同时满足这两个条件。

情况 2： $\deg(i) = 1$。 设 i 的唯一邻点为 j。我们必须选择 v_i，使扩展后的元组满足：

(i) $v_i \in v_j^{\perp}$，(ii) 对每个 $k \neq j$，$v_i \notin v_k^{\perp}$；(iii) 对每个大小为 $d-1$ 且满足 $A \not\supseteq N_G(j)$ 的子集 $A \subset [n] \setminus \{i\}$，$v_i \notin \operatorname{span}(v_k : k \in A)$。

这些条件可以保证命题中的条件成立。由于元组 $\mathbf{v}$ 实现了 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus\{i\}})$，对于 $k \neq j$，向量 v_k 均与 v_j 不同，因此对于 $k \neq j$，超平面 $v_k^{\perp}$ 均与 $v_j^{\perp}$ 不同。因此集合

$$v_j^{\perp} \setminus \bigcup_{k \in [n]\setminus\{i,j\}} v_k^{\perp}$$

在 $v_j^{\perp}$ 中非空且扎里斯基稠密。满足条件 (i) 和 (ii) 等价于从该集合中任选一个向量作为 v_i。

对于 (iii)，设 $A \subset [n] \setminus \{i\}$ 是一个大小为 $d-1$ 且满足 $A \not\supseteq N_G(j)$ 的子集，并令 $H_A := \text{张成空间}(v_k : k \in A)$。我们断言 $H_A \neq v_j^{\perp}$。事实上，如果 $H_A = v_j^{\perp}$，那么所有满足 $k \in A$ 的 v_k 都将与 v_j 正交，而根据表示 $\mathbf{v}$ 的忠实性，这将推出 $A \subset N_G(j)$，矛盾。因此，$H_A \neq v_j^{\perp}$。

因此，$v_j^{\perp}$ 中存在一些向量，它们位于每个满足 $k \neq j$ 的 $v_k^{\perp}$ 之外，也位于上述每个 H_A 之外。选取这样的一个 v_i 并扩展元组 $\mathbf{v}'$，即可满足引理的条件，从而完成归纳步骤。 □

3.4 识别极大簇 V_S

在本小节中，我们识别出现在（3.3）中的极大簇。为此，我们引入辅助子簇 $F(S)$。

定义 3.12。 对于子集 $S \subseteq [n]$，我们定义

$$F(S) \subset U(S)$$

为由所有满足以下条件的元组 $\mathbf{v} = (v_1, \dots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$ 构成的子簇：

- $v_i = 0$ 对于每个 $i \in S$；
- 限制 $\mathbf{v}|_{[n]\setminus S}$ 是 $G_{[n]\setminus S}$ 的忠实正交表示；

- 限制 $\mathbf{v}\big|_{[n]\setminus S}$ 实现了拟阵 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$。

例3.13。 设 G， d和 S 如例 3.4中所述。那么集合 $F(S)$ 由满足以下条件的所有元组组成：$(v_1,\dots,v_{11}) \in (\mathbb{C}^4)^{11}$

- $v_9 = v_{10} = v_{11} = 0$;
- $v_2 \perp v_i$对所有 $i \in \{1,3,4,5\}$， $v_3 \perp v_i$对所有 $i \in \{2,6,7,8\}$，以及 $v_j \not\perp v_k$对所有其他成对元素 j， $k \in [8]$;
- 元组 $(v_1,\dots,v_8)$ 实现了拟阵 $\mathcal{M}(G_{[8]})$，它是定义在 $[8]$ 上、具有依赖超平面 $\{1,3,4,5\}$ 和 $\{2,6,7,8\}$ 的秩四铺砌拟阵。

接下来我们将看到，每个 $F(S)$ 都是 V_S 的稠密子集。

引理 3.14. $F(S)$ 在 V_S 中稠密。

证明。 我们首先证明 $F(S)$ 在 V_S 中是开集。从 $U(S)$ 的定义条件可以很容易看出， $U(S)$ 在 V_S 中是开集。接下来只需证明 $F(S)$ 在 $U(S)$ 中是开集。$\mathbf{v}\big|_{[n]\setminus S}$ 的忠实性显然是一个开条件，因为它由向量 v_j 和 v_k 对于 $\{j,k\} \notin E(G)$ 中满足 $j,k \in [n]\setminus S$ 的情形彼此不正交这一条件给出。

另一方面，根据引理 3.10，我们知道，对于每个 $\mathbf{v} \in U(S)$，与限制相关联的拟阵 $\mathbf{v}\big|_{[n]\setminus S}$ 在其依赖关系中包含$\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$ 的依赖关系。因此，说 $\mathbf{v}\big|_{[n]\setminus S}$ 实现了拟阵 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$，等价于说不存在额外的依赖关系；这显然是 $U(S)$ 中的一个开条件。因此， $F(S)$ 在 $U(S)$ 中是开集，因而也在 V_S 中是开集。

此外，根据引理 3.2，可知 $U(S)$ 不可约，其闭包 V_S也不可约；根据引理 3.11，可知 $F(S)$ 非空。因此，由于 $F(S)$ 是不可约簇 V_S中的非空开集，所以它在该簇中稠密。□

现在我们描述能够产生（3.3）中极大簇的子集 $S \subseteq [n]$ 。这些子集构成以下一类。

定义 3.15。 若子集 $S \subseteq [n]$ 对每个 $i \in S$ 都满足以下条件，则称其为 G-可容许的：

$$\big|N_G(i)\cap([n]\setminus S)\big| \geq d \quad \text{and} \quad N_G(i)\cap([n]\setminus S) \not\subseteq N_G(j)\cap([n]\setminus S) \text{ for every } j \in [n]\setminus S. \tag{3.4}$$

注意，这个条件等价于

$$\operatorname{rk}\big(N_G(i)\cap([n]\setminus S)\big) = d \quad \text{in } \mathcal{M}(G_{[n]\setminus S}). \tag{3.5}$$

例 3.16。 考虑例 G 中的森林图 3.4 （见图 1），并设$d = 4$。由于 G 的每个顶点的度至多为 4，且任意两个度为 4 的顶点都没有相同的邻点集，因此条件（3.4）可化简为

$$\big|N_G(i)\cap([n]\setminus S)\big| = 4$$

对所有 $i \in S$ 均成立。因此， G-容许子集恰好是

$$\big\{\emptyset,\{2\},\{3\},\{5\},\{3,5\}\big\}.$$

命题 3.17。 设 $S \subseteq [n]$。则 V_S 关于包含关系，在 （3.3）中的簇里是极大的，当且仅当 S 是 G-可容许的。

证明。我们首先证明，若 S 不是 G-可容许的，则 V_S 在（3.3）中是冗余的。由于 S不是 G-可容许的，且根据公式（3.5），存在一个顶点 $i \in S$ 使得

$$\mathrm{rk}\big(N_G(i) \cap ([n] \setminus S)\big) < d \qquad \text{in } \mathcal{M}(G_{[n]\setminus S}). \tag{3.6}$$

我们声称，在这种情况下

$$F(S) \subset \overline{U(S \setminus \{i\})},$$

这意味着

$$V_S = \overline{F(S)} \subset \overline{U(S \setminus \{i\})} = V_{S\setminus\{i\}},$$

其中第一个等式由引理 3.14 得出。

任取一个向量组 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots\ldots, v_n) \in F(S)$。根据定义，$\mathbf{v}$ 在 $[n] \setminus S$ 上的限制实现了拟阵 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$。将此与（3.6）结合，可得

$$\mathrm{rk}\{v_k : k \in N_G(i) \cap ([n] \setminus S)\} < d.$$

因此，存在一个非零向量 $w \in \mathbb{C}^d$，它与所有这些向量正交，即

$$w \perp v_k \text{ for every } k \in N_G(i) \cap ([n] \setminus S), \qquad w \neq 0. \tag{3.7}$$

对于每个 $\lambda \in \mathbb{C}^*$，定义一个新的元组 $\mathbf{v}_\lambda = (v_\lambda^1, \ldots\ldots, v_\lambda^n)$，定义如下

$$v_\lambda^j = \begin{cases} v_j, & j \neq i, \\ \lambda w, & j = i. \end{cases}$$

由 (3.7) 中的正交性、$\mathbf{v} \in U(S)$，以及由于 $\lambda w \neq 0$，可得$\mathbf{v}_\lambda \in U(S \setminus \{i\})$ 对所有 $\lambda \in \mathbb{C}^*$均成立。令 $\lambda \to 0$，则有 $\mathbf{v}_\lambda \to \mathbf{v}$，这表明$\mathbf{v} \in U(S \setminus \{i\})$。由于 $\mathbf{v}$是任意的，这就证明了 $F(S) \subset U(S \setminus \{i\})$，证毕。

现在证明反向结论：若 S 是 G-可容许的，则 V_S 在 (3.3) 中是不可约冗余的。反设存在一个子集 $S' \neq S$，使得 $V_S \subseteq V_{S'}$。任取 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in F(S) \subset U(S)$。由于 $\mathbf{v} \in U(S) \subset V_{S'}$，根据定义可知，对所有 $j \in S'$，都有$v_j = 0$。另一方面，由于 $\mathbf{v} \in F(S)$，当且仅当 $j \in S$时，$v_j = 0$ 成立，因此必有 $S' \subsetneq S$。

选择 $i \in S \setminus S'$。由于 S 是 G-可容许的，且$\mathbf{v}$ 在 $[n] \setminus S$ 上的限制是 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S})$ 的一个实现，根据 (3.5)，存在一个由 d个顶点$\{i_1, \ldots, i_d\} \subset N_G(i)$ 组成的子集$\cap ([n] \setminus S)$，使得$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}\}$ 在 $\mathbb{C}^d$ 中线性无关。

根据引理3.10，对于每个 $\mathbf{w} \in U(S')$，$\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S'})$ 中的每个相关集在 $\mathcal{M}(\mathbf{w})$ 中也相关，因此对于每个 $\mathbf{w} \in V_{S'}$ 也成立。特别地，由于 $\mathbf{v} \in U(S) \subset V_{S'}$，可知 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S'})$ 中的每个相关集在 $\mathcal{M}(\mathbf{v})$ 中也相关。此外，$\{i_1, \ldots, i_d\} \subset N_G(i) \cap ([n] \setminus S')$，且由于 $i \in [n] \setminus S'$，这个含有 d 个元素的集合在 $\mathcal{M}(G_{[n]\setminus S'})$ 中相关。因此，$\{v_{i_1}, \ldots, v_{i_d}\}$ 必定线性相关，这与它们线性无关相矛盾。

这一矛盾表明 V_S 是不可约的，从而完成证明。 □

3.5 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解

现在我们可以描述 G 为森林时 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解。

定理 3.18。 设 G 是定义在 $[n]$上的森林。$\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解为

$$\mathrm{OR}_d(\overline{G}) = \bigcup_S V_S, \tag{3.8}$$

其中，取并集时遍历 G- $[n]$的所有容许子集。

证明。 结论直接由命题 3.5 和 3.17得出。 □

例 3.19。 考虑例 G3.4 中的森林图 （见图 1），并令$d = 4$。正如例 3.16中所观察到的， G-容许子集恰好为

$$\big\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}\big\}.$$

It t于是由定理3.18 可知 $\mathrm{OR}_4(G)$ 恰有五个不可约分支 s.

本节最后，我们重新得到此前在 [2,定理 1.5]中证明的一个结果。

推论 3.20。 设 G 是一棵森林，令 $\Delta(G)$ 表示 G中顶点的最大度。若 $d \geq \Delta(G) + 1$，则簇 $\mathrm{OR}_d(G)$ 不可约。

证明。 根据 G-容许子集的刻画（见 3.4），可知在假设 $d \geq \Delta(G) + 1$ 下，唯一的 G-容许子集是 $\emptyset$。将定理 3.18 应用于此情形，可得 $\mathrm{OR}_d(G)$是不可约的。 □

4 V_S 簇和 OR_d的维数（G）

本节确定 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的维数以及其不可约分支的维数。为此，我们将使用下面的引理。

引理 4.1。 设 G 是 $[n]$上的森林。那么

$$\dim(U_G) = dn - |E(G)|.$$

证明。 我们对顶点数 n进行归纳。当 $n = 1$时，结论显然成立。假设对于至多含有 $n-1$ 个顶点的所有森林，结论均成立；设 G 是一个含有 $[n]$个顶点的森林。

由于 G 是森林，因此存在一个度至多为一的顶点 $i \in [n]$ 。导出子图 $G_{[n]\setminus\{i\}}$ 仍然是森林，但现在顶点数较少。根据归纳假设，

$$\dim\big(U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}\big) = d(n-1) - |E(G_{[n]\setminus\{i\}})| = dn - |E(G)| - (d - \deg(i)). \tag{4.1}$$

我们区分两种情况：

情况 $\deg(i) = 0$。 在这种情况下，利用式（3.1）中的同构，可得

$$\dim(U_G) = \dim(U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}) + d,$$

结果由（4.1）即可推出。

情况 $\deg(i) = 1$。 这里，式（$\mathbb{C}^{d-1}$）*中所述的纤维化（3.2）意味着

$$\dim(U_G) = \dim(U_{G_{[n]\setminus\{i\}}}) + (d-1),$$

结合（4.1），即可得到所需公式。 □

现在我们给出 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分支的维数。

定理 4.2。 设 S 是 $[n]$ 的一个 G-可容许子集。那么

$$\dim(V_S) = d(n - |S|) - |E(G_{[n]\setminus S})|.$$

证明。 根据定义，我们有 $U(S) \cong U_{G_{[n]\setminus S}}$。应用引理 4.1，得到

$$\dim(V_S) = \dim(\overline{U(S)}) = \dim(U(S)) = \dim(U_{G_{[n]\setminus S}}) = d(n - |S|) - |E(G_{[n]\setminus S})|.$$

□

推论 4.3。 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的维数为

$$\dim(\mathrm{OR}_d(\overline{G})) = \max\left\{ d\big(n - |S|\big) \ - \ |E(G_{[n]\setminus S})| \ : \ S \ is \ G\text{–}admissible \right\}.$$

例 4.4。 考虑例 G 3.4 中的森林图（见图 1），并设 $d = 4$。$\mathrm{OR}_4(G)$ 的不可约分支的维数为

$$\dim(V_\emptyset) = \dim(V_{\{2\}}) = \dim(V_{\{3\}}) = \dim(V_{\{5\}}) = \dim(V_{\{3,5\}}) = 34.$$

由此可得 $\dim(\mathrm{OR}_4(G)) = 34$。

5 $L_G(d)$ 的主分解

本节中，我们确定森林图 G 上 $L_G(d)$ 的主分解。我们首先计算对应于不可约分支 V_S 的理想，由此得到主分解。

5.1 簇 V_S的理想

在本小节中，我们着重确定理想 $\mathbb{I}(V_S)$。回顾一下，这些理想包含在坐标环 $\mathbb{C}[X]$中，其中 $X = (x_{i,j})$是一个不定元矩阵，如定义 1.1 所示。由于 $U(S) \cong U_{G_{[n]\setminus S}}$ 且 $\mathbb{I}(V_S) = \mathbb{I}(U_S)$，问题归结为理解理想 $\mathbb{I}(U_G)$。我们用 F_G 表示 U_G 的子簇，它由所有满足以下条件的元组 $\mathbf{v} = (v_1, \ldots, v_n) \in (\mathbb{C}^d)^n$ 组成：

- $\mathbf{v}$ 是 G的忠实正交表示；
- $\mathbf{v}$ 实现拟阵 $\mathcal{M}(G)$。

由引理 3.14，子簇 F_G 在 U_G中稠密，也就是说，$F_G = U_G$。特别地，相应的理想相同：

$$\mathbb{I}(U_G) = \mathbb{I}(F_G).$$

注 5.1。 设 G 是 $[n]$上的一片森林，并固定一个顶点 $i \in [n]$。选取不同的 $d-1$个邻点 i_1、…、$i_{d-1} \in N_G(i)$。对于任意的$\mathbf{v} = (v_1$、……、$v_n) \in F_G$，有

$$v_i \perp \{v_{i_1}, \ldots, v_{i_{d-1}}\}.$$

由于向量 $v_{i_1}, \ldots, v_{i_{d-1}}$线性无关，且 $v_i \neq 0$，因此 v_i除相差一个非零标量外，是由 v_{i_1}，$\ldots, v_{i_{d-1}}$张成的超平面的法向量。等价地，若

$$A = (v_{i_1} \mid \cdots \mid v_{i_{d-1}}),$$

那么，除相差一个非零标量外， v_i 的坐标由 A的带符号的极大子式给出:

$$(v_i)_j = (-1)^j \det(A_{[d]\setminus\{j\}}), \qquad j = 1, \dots, d.$$

这一关系转化为 $\mathbb{I}(F_G)$ 中的一个代数条件。具体而言，若$P \in \mathbb{I}(F_G) \subset \mathbb{C}[X]$，那么将变量$x_{i,1}, \dots, x_{i,d}$替换为矩阵的带符号的极大子式后，由 P 得到的多项式

$$X_{\{i_1,\dots,i_{d-1}\}}$$

也属于 $\mathbb{I}(F_G)$。这里， $X_{\{i_1,\dots,i_{d-1}\}}$ 表示 X 的子矩阵，其行由$i_1, \dots, i_{d-1}$索引。

例 5.2. 考虑图 G（见图 1），并令 $d = 4$。由于 $\{6, 7, 8\}$是 3 的邻点，我们得到如下结论：若 $P \in \mathbb{I}(F_G) \subset \mathbb{C}[X]$，那么将变量 $x_{3,1}$,$x_{3,2}$,$x_{3,3}$,$x_{3,4}$ 替换为带符号的极大子式后，由 P 得到的多项式

$$-\det\begin{pmatrix} x_{6,2} & x_{6,3} & x_{6,4} \\ x_{7,2} & x_{7,3} & x_{7,4} \\ x_{8,2} & x_{8,3} & x_{8,4} \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} x_{6,1} & x_{6,3} & x_{6,4} \\ x_{7,1} & x_{7,3} & x_{7,4} \\ x_{8,1} & x_{8,3} & x_{8,4} \end{pmatrix} \quad -\det\begin{pmatrix} x_{6,1} & x_{6,2} & x_{6,4} \\ x_{7,1} & x_{7,2} & x_{7,4} \\ x_{8,1} & x_{8,2} & x_{8,4} \end{pmatrix} \quad \det\begin{pmatrix} x_{6,1} & x_{6,2} & x_{6,3} \\ x_{7,1} & x_{7,2} & x_{7,3} \\ x_{8,1} & x_{8,2} & x_{8,3} \end{pmatrix} \tag{5.1}$$

也属于 $\mathbb{I}(F_G)$。

利用前面的注记，我们现在为任意森林 G 构造一个与之相关的理想 I_G 。

定义 5.3。 设 G 是一棵森林。我们按如下方式构造理想 I_G :

- 定义 X_0 为生成理想 $L_G(d)$ 的多项式集合，即 f_e <style id='14'}（1.1）中的多项式，其中 $e \in E(G)$ 。对于 $j \geq 1$，递归定义集合 X_j ，使其包含由 X_{j-1} 中的多项式按备注 5.1所述的替换过程修改其中某些变量（也可以不作修改）后得到的所有多项式。于是，我们得到一个升链

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq X_2 \subseteq \cdots .$$

- 对于每个 $j \geq 0$，令 I_j 表示由 X_j 中的多项式生成的理想。Th en

$$I_0 \subseteq I_1 \subseteq I_2 \subseteq \cdots .$$

由于多项式环 $\mathbb{C}[X]$ 是诺特的，这条链最终稳定。我们将稳定理想记为 I_G。

例 5.4。 设 G 为图 1 中的森林图 1，并令 $d = 4$。我们有 $f_{\{1,2\}} \in I_0$。由于 $\{3, 4, 5\}$ 是 2 的邻点，因此

$$\det(X_{\{1,3,4,5\}}) \in I_1.$$

此外，由于 $\{6, 7, 8\}$ 是 3 的邻点，将 $X_{\{1,3,4,5\}}$的行列式中的变量 $x_{3,1}$, $x_{3,2}$,$x_{3,3}$,$x_{3,4}$ 替换为（5.1）中的带符号极大子式后得到的多项式属于 I_2。最后，所有这些多项式都属于 I_G。

注5.5。 若 $P \in I_G$，则通过按照注 5.1 中所述的步骤修改 P 中的某些变量而得到的任意多项式也属于 I_G。

由注 5.1 和归纳论证可知

$$I_G \subseteq \mathbb{I}(F_G). \tag{5.2}$$

等价地， I_G 由通过迭代过程得到的所有多项式生成：该过程将 X 某一行对应的 d 变量替换为 X 中由其任意 $d-1$ 个相邻顶点所确定的子矩阵的带符号 Pl¨ucker 子式。

现在我们证明，理想 I_G 在根理想意义下，为 U_G的 Zariski 闭包提供了一组完整的定义方程。

定理 5.6。 对于任意森林 G，有

$$\overline{U_G} \;=\; \mathbb{V}(I_G). \tag{5.3}$$

特别地， $\mathbb{I}\left(U_G\right) \;=\sqrt{I_G}$。

证明。 由（5.2），可得 $F_G \subseteq \mathbb{V}\left(I_G\right)$。由于 F_G 在 U_G中稠密，因此

$$\overline{U_G} = \overline{F_G} \subseteq \mathbb{V}(I_G),$$

这就证明了（⊂）中的包含关系“5.3”。

对于反向包含关系，设 $\mathbf{v} \;=(v_1,\ldots,v_n) \;\in \mathbb{V}(I_G)$; 我们必须证明 $\mathbf{v} \;\in U_G$。我们证明 $\mathbf{v}$ 属于 U_G 的欧几里得闭包：对于每个 $\epsilon>0$，我们构造 $\tilde{}\mathbf{v} \;\in U_G$，使得 $\|\mathbf{v}-\tilde{}\mathbf{v}\|<\epsilon$。令

$$\mathbf{v}(0)=\{\, i\in[n] : v_i=0\,\}.$$

我们对 $m \;=\; |\mathbf{v}(0)|$ 使用归纳法。若 $m \;=\; 0$，则根据定义$\mathbf{v} \;\in U_G$。对于归纳步骤，假设对于 $\mathbb{V}(I_G)$ 中零向量少于 m 个的所有元组，结论均成立；现在证明结论对 $\mathbf{v} \;\in \mathbb{V}(I_G)$ 也成立，其中 $|\mathbf{v}(0)|=m$。

步骤 1。 假设存在 $i \in \mathbf{v}(0)$，使得

$$\mathrm{rk}\{v_j : j\in N_G(i)\} = d-1.$$

选取 $i_1,\ldots,i_{d-1} \in N_G(i)$，使得 $v_{i_1},\ldots,v_{i_{d-1}}$ 是线性无关集。定义$\mathbf{v}'=(v_1',\ldots,v_n')$，令 $v_j' = v_j$ for $j\neq i$，并令 v_i'为由 $v_{i_1},\ldots,v_{i_{d-1}}$ 张成的超平面的法向量的一个非零标量倍数，选取该倍数使得

$$\|\mathbf{v}'-\mathbf{v}\|<\epsilon/2.$$

我们断言$\mathbf{v}' \in \mathbb{V}(I_G)$。事实上，对于任意 $P\in I_G$，

$$P(\mathbf{v}') = \overline{P}(\mathbf{v}),$$

其中，$\overline{P}$是由 P替换变量$x_{i,\,1}$，…，$x_{i,\,d}$为矩阵的带符号的极大子式而得到的

$$X_{\{i_1,\ldots,i_{d-1}\}}.$$

由于 I_G 在此替换下封闭（定义5.3），我们有 $P\in I_G$，因此$P(\mathbf{v}') \;=0$。于是$\mathbf{v}' \in \mathbb{V}(I_G)$。

由于现在 $|\mathbf{v}'(0)|=m-1$，由归纳假设可得 $\tilde{}\mathbf{v} \;\in U_G$，其中 $\|\tilde{}\mathbf{v}-\mathbf{v}'\|<\epsilon/2$。因此

$$\|\widetilde{\mathbf{v}}-\mathbf{v}\| \le \|\mathbf{v}-\mathbf{v}'\| + \|\mathbf{v}'-\widetilde{\mathbf{v}}\| < \epsilon,$$

符合要求。

步骤 2. 现在假设

$$\mathrm{rk}\{v_j : j \in N_G(i)\} \le d-2 \qquad \text{for all } i \in \mathbf{v}(0). \tag{5.4}$$

由于 G 是一片森林，我们可以对$\mathbf{v(0)}$中的顶点排序为 $x_1,\dots,x_m$，使得每个 x_i 与 $\{x_1,\dots,x_{i-1}\}$ 中至多一个顶点相邻。我们构造元素

$$\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \dots, \mathbf{v}'_m \in \mathrm{OR}_d(\overline{G}),$$

其中每个 $\mathbf{v}'_i$都是一个元组 $\mathbf{v}'_i = (v_{i,1},\dots,v_{i,n}) \in (\mathbb{C}^d)^n$，满足

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'_1\| < \frac{\epsilon}{m} \qquad \text{and} \qquad \|\mathbf{v}'_{i+1} - \mathbf{v}'_i\| < \frac{\epsilon}{m}.$$

对于$\mathbf{v}'_1$，保留 $v_{1,j} = v_j$ 用于 $j \neq x_1$，并选取一个非零

$$v_{1,x_1} \in \mathrm{span}\{v_j : j \in N_G(x_1)\}^{\perp},$$

w它由 (5.4) 保证存在，并选择它使得 $\|\mathbf{v}'_1 - \mathbf{v}\| < \epsilon/m$。注意，$\mathbf{v}'_1 \in \mathrm{OR}_d(G)$ ¯ .

归纳地，通过仅修改坐标 x_i 来定义$\mathbf{v}'_i$，并选择

$$v_{i,x_i} \in \mathrm{span}\{v_{i-1,j} : j \in N_G(x_i)\}^{\perp} \setminus \{0\},$$

这是可行的，因为每个 x_i 在 $\{x_1,\dots,x_{i-1}\}$ 中至多有一个邻点，而 (5.4) 保证相关张成空间的维数至多为 $d-1$。再次选择 v_{i,x_i}，使得$\|\mathbf{v}'_i - \mathbf{v}'_{i-1}\| < \epsilon/m$。

经过 m 步，我们得到所有项均非零的$\overline{\mathbf{v}'_m} \in \mathbf{OR}_d(G)$，因此$\mathbf{v}'_m \in U_G$. Mor此外，

$$\|\mathbf{v} - \mathbf{v}'_m\| \le \|\mathbf{v} - \mathbf{v}'_1\| + \sum_{i=1}^{m-1} \|\mathbf{v}'_{i+1} - \mathbf{v}'_i\| < \frac{\epsilon}{m} \cdot m = \epsilon.$$

因此$\mathbf{v} \in \overline{U_G}$，证明完毕。 □

现在我们描述簇 V_S 的定义理想。

定理 5.7. 对于任意子集 $S \subseteq [n]$，V_S 的理想为

$$\mathbb{I}(V_S) = (x_{i,j} : i \in S, j \in [d]) + \sqrt{I_{G_{[n]\setminus S}}}.$$

证明。 这可由定理 5.6立即推出，并注意到 $U(S$限制到由 $[n] \setminus S$索引的坐标后，与 $U_{G_{[n]\setminus S}}$同构。 □

5.2 $L_G(d)$ 的主分解

现在我们描述 $L_G(d)$ 的主分解，它反映了 $\mathrm{OR}_d(G)$ 分解的代数对应形式。回顾一下，我们的理想位于坐标环 $\mathbb{C}[X]$中，其中 $X = (x_{i,j})$ 是一个 $n \times d$ 不定元矩阵，如定义1.1中所述。

Th定理 5.8。 设 G 是一片森林。*LSS* 理想 $L_G(d)$ 的主分解为

$$L_G(d) = \bigcap_S \left((x_{i,j} : i \in S, j \in [d]) + \sqrt{I_{G_{[n]\setminus S}}}\right),$$

其中，交集遍历 $[n]$的所有 G-容许子集。

证明。 将方程（3.8）的分解转化为理想后，结合定理 $\mathbb{I}(V_S)$ 中给出的5.7的描述，并利用 $L_G(d)$ 是根理想，即可得到该结果；参见 [2,定理 1。5]。 □

例 5.9。 考虑图 G，如图 1 所示，并令 $d = 4$。正如例 3.16中所观察到的， G-容许子集为

$$\{\emptyset, \{2\}, \{3\}, \{5\}, \{3,5\}\}.$$

因此， $L_G(4)$ 的主分解为

$$L_G(4) = \sqrt{I_G} \cap \big((x_{2,j} : j \in [4]) + \sqrt{I_{G\setminus\{2\}}}\big) \cap \big((x_{3,j} : j \in [4]) + \sqrt{I_{G\setminus\{3\}}}\big)$$
$$\cap \big((x_{5,j} : j \in [4]) + \sqrt{I_{G\setminus\{5\}}}\big) \cap \big((x_{3,j}, x_{5,j} : j \in [4]) + \sqrt{I_{G\setminus\{3,5\}}}\big).$$

6 个例子

本节中，我们将应用前几节的结果，特别是定理 3.18和 4.2，研究若干经典森林图族，包括 星图、毛毛虫树和二叉树。

星图。 A 星图 G 是二部图 $K_{1,\ n-1}$ 其顶点为 $\{1, \dots, n\}$，边集为

$$\{\{1, i\} : 2 \le i \le n\},$$

见图 3。为了确定 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解，我们必须找出所有G-容许子集 $S \subseteq [n]$。回想一下，S 是 G-容许的，当且仅当对每个 $i \in S$，

$$\big|N_G(i) \cap ([n]\setminus S)\big| \ge d \quad \text{and} \quad N_G(i) \cap ([n]\setminus S) \not\subset N_G(j) \cap ([n]\setminus S), \text{ 对每个 } j \in [n]\setminus S. \tag{6.1}$$

由于顶点 1 是唯一度大于 1 的顶点，因此唯一可能的 G-可容许集为 $S = \emptyset$ 和 $S = \{1\}$。此外，根据（6.1），集合 $S = \{1\}$ 仅在以下情况下可容许：

$$|N_G(1)| = n - 1 \ \ge \ d.$$

应用定理 3.18，得到：

- $\mathrm{OR}_d(\overline{G})$ 在 $d > n - 1$ 时不可约；

若 $n - \overline{1} \ge d$，则 $\mathrm{OR}_d(G)$ 有两个不可约分支： $V_\emptyset$ 和 $V_{\{1\}}$。

此外，根据定理 4.2，我们得到

$$\dim(V_\emptyset) = dn - (n-1) \qquad \text{and} \qquad \dim(V_{\{1\}}) = dn - d.$$

因此，

$$\dim(\mathrm{OR}_d(\overline{G})) \ = \ \max\{\, dn - (n-1),\ dn - d \,\}.$$

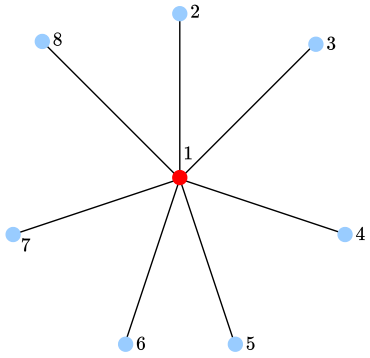


图 3：星图 $K_{1,\ 7}$。

例 6.1。 考虑图 $G\ =\ K_{1,\ 7}$ 如图 3所示。如果 $d\ >\ 7$，则 $\mathrm{OR}_d(G)$ 是不可约的；如果 $d \leq 7$，则 $\mathrm{OR}_d(G)$ 恰有两个不可约分支，并且

$$\dim(\mathrm{OR}_d(\overline{G})) = \max\{8d-7, 7d\}.$$

毛毛虫树。一棵毛毛虫树是一棵树，其中每个顶点到指定中心路径的距离至多为 1，见图 4。设 G 是一个定义在 $[n]$ 上的毛毛虫树，其中心路径为集合 $\{1,\ldots,k\}$。每个顶点 $i \in \{k+1,\ldots,n\}$ 都是叶顶点，与 $[k]$中的恰好一个顶点相邻。对于每个 $i \in [k]$，定义

$$t_i \ = \ \big|N_G(i) \setminus [k]\big|.$$

于是，该毛毛虫树在同构意义下完全由 da 确定。 ta

$$k, \qquad t_1,\ldots,t_k.$$

例如，对于图 4中的毛毛虫树，我们有 $k \ = \ 9$ 和$\{t_1,\ldots,t_9\} = \{0,4,0,2,1,2,3,3,0\}$。为了描述 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解，我们必须确定所有 G-容许子集 $S \subseteq [n]$，即满足（6.1）的子集。由于$d \geq 3$，且度至少为 3 的唯一顶点都在 $[k]$中，因此必然有

$$S \subseteq [k].$$

此外，由于 $\{k+1,\ldots,n\}$ 中的每个顶点都是与$[k]$中唯一一个顶点相邻的叶顶点，容许条件（6.1）可简化为

$$\big|N_G(i) \cap ([n] \setminus S)\big| \ \geq \ d \qquad \text{for all } i \in S.$$

对于这样的 $i \in S \subseteq [k]$，我们可以分解为

$$N_G(i) \cap ([n] \setminus S) = \big(N_G(i) \setminus [k]\big) \ \amalg \ \big(N_G(i) \cap ([k] \setminus S)\big),$$

因此

$$\big|N_G(i) \cap ([n] \setminus S)\big| \ = \ t_i + \big|N_G(i) \cap ([k] \setminus S)\big|.$$

根据定理 3.18，OR_d（G）的不可约分支恰好对应于满足以下条件的那些子集 $S \subseteq [k]$：

$$t_i + \big|N_G(i) \cap ([k] \setminus S)\big| \ \geq \ d \qquad \text{for all } i \in S. \tag{6.2}$$

这一条件可以理解为要求，对于每个 $i \in S$，以下条件至少有一个成立：

(1) $t_i \geq d$; (2) $t_i = d-1$ 和 i 在 $[k] \setminus S$ 中至少有一个邻点；(3) $t_i = d-2$ 和 i 在 $[k] \setminus S$ 中恰有两个邻居。

此外，对于任意这样的 S，定理4.2 给出

$$\dim(V_S) = d(n-|S|) - |E(G_{[n]\setminus S})| = d(n-|S|) - |E(G_{[k]\setminus S})| - \sum_{i\in[k]\setminus S} t_i. \quad (6.3)$$

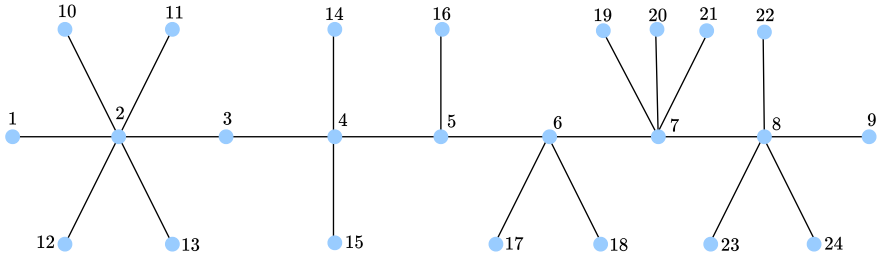


图 4：一棵毛毛虫树。

例 6.2。考虑图 G中的毛毛虫树 4，其顶点集为 $[24]$, ，并令$d = 5$。这里中心路径的长度为 $k = 9$，且

$$(t_1, \ldots, t_9) = (0, 4, 0, 2, 1, 2, 3, 3, 0).$$

利用条件 (1)–(3)，我们发现 S必须是 $\{2, 7, 8\}$的子集，因为所有其他 $i \in [9]$都满足 $t_i < 3 = d-2$。此外， S 不能同时包含 7 和 8，因为这样每个顶点都需要在 $[k] \setminus S$中有两个邻点，这是不可能的。

因此， G-容许子集为

$$\{\emptyset,\ \{7\},\ \{8\},\ \{2\},\ \{2,7\},\ \{2,8\}\},$$

因此 $\mathrm{OR}_d(G)$ 恰有 6 个不可约分支。最后，利用（6.3），这些分支的维数为

$$\dim(V_\emptyset) = 97, \quad \dim(V_{\{7\}}) = 97, \quad \dim(V_{\{8\}}) = 97,$$
$$\dim(V_{\{2\}}) = 98, \quad \dim(V_{\{2,7\}}) = 98, \quad \dim(V_{\{2,8\}}) = 98.$$

二叉树。 A二叉树 是每个顶点至多有两个子节点的有根树；见图5。设 G是定义在 $[n]$ 上的二叉树，且 $d \geq 3$。为了描述 $\mathrm{OR}_d(G)$ 的不可约分解，我们必须确定所有 G-容许子集 $S \subseteq [n]$，也就是说，确定满足（6.1）的子集。由于 G 的每个顶点的度至多为三，若 $d \geq 4$，则没有顶点满足容许条件，因此唯一的容许子集是 $S = \emptyset$。根据定理 3.18，可知在这种情况下 $\mathrm{OR}_d(G)$ 是不可约的。

现在考虑 $d = 3$ 的情形。在此，任何可容许子集 S 都必须包含于度为三的顶点集合中。此外，对于这样的 S，不难验证，(6.1) 等价于要求

$$N_G(i) \cap S = \emptyset \qquad \text{for all } i \in S.$$

因此，根据定理 3.18，$\mathrm{OR}_3(G)$ 的不可约分支与所有满足以下条件的子集 S 一一对应：子集中的顶点均为度为三的顶点，且任意两个顶点都不相邻。对于任意这样的 S，定理 4.2 给出

$$\text{维数}(V_S) \;=\; 3(n-|S|) \;-\; |E(G_{[n]\setminus S})| \;=\; 3(n-|S|) \;-\; (|E(G)| - 3|S|) \;=\; 2n+1, \quad (6.4)$$

其中，第二个等式利用了 S 的任意两个顶点都不相邻这一事实，最后一个等式利用了 $|E(G)| = n-1$。因此，$\mathrm{OR}_3(G)$ 是等维的，且每个不可约分支的维数为 $2n+1$。

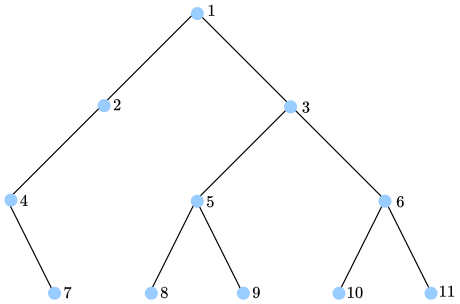


图 5：一棵二叉树。

例 6.3。考虑图 G（见图 5），其顶点集为 $[11],$，并令$d = 3$。度为 3 的顶点为 $\{3,5,6\}$。因此，G-容许子集为

$$\{\emptyset, \{5\}, \{6\}, \{5,6\}, \{3\}\},$$

因此，$\mathrm{OR}_3(G)$ 恰有五个不可约分支。它们的维数均为 23。

参考文献

[1] M. Amalore Nambi、N. Kumar 和 C. Venugopal。（几乎）完全交叉 Lov´asz–Saks–Schrijver 理想及其幂的正则性。《代数及其应用杂志》，第 2650093 页，2025 年。[2] A. Conca 和 V. Welker。Lov´asz–Saks–Schrijver 理想与行列式簇的坐标截面。《代数与数论》，13(2):455–484，2019年。[3]S. Gharakhloo 和 V. Welker。超图 LSS 理想与对称张量的坐标截面。《代数通讯》，51(9):4033–4043，2023年。[4] M. F. Ghouchan 和 A. A. Y. Pour。与树相关的 Lov´asz–Saks–Sherijver 理想的 Gr¨ obner 基与 Krull 维数。《代数杂志》，678:224–252，2025年。[5]J. Hartmanis。广义划分的格论。《加拿大数学杂志》，11:97–106，1959年。[6] J. Herzog、A. Macchia、S. S. Madani 和 V. Welker。关于图在 r2 中的正交表示理想。《应用数学进展》，71:146–173，2015年。[7] T. Kahle、C. Sarmiento 和 T. Windisch。奇偶二项式边理想。《代数组合学杂志》，44(1):99–117，2016年。

[8] G. Kapon。图簇的奇点性质。*arXiv* 预印本 *arXiv:1905.05847*，2019年。[9] A. Kumar。Lov´asz–Saks–Schrijver 理想与图的奇偶二项式边理想。《欧洲组合学杂志》，93:103274，2021年。[10] L. Lov´asz。论图的香农容量。《*IEEE* 信息论汇刊》，25(1):1–7，1979。[11] L. Lov´asz、M. Saks 和 A. Schrijver。图的正交表示与连通性。《线性代数及其应用》，114:439–454，1989年。[12] D. Mayhew、M. Newman、D. Welsh 和 G. Whittle。关于连通拟阵的渐近比例。《欧洲组合学杂志》，32(6):882–890，2011年。[13] S. Morey 和 R. H. Villarreal。边理想：代数与组合性质。《交换代数进展》，1:85–126，2012年。[14] J. Oxley。拟阵理论。第二版，牛津大学出版社，2011年。[15] E. Tolosa Villarreal。Lov´asz–Saks–Schrijver 环的正规性、唯一分解性与强 F-正则性。《交换代数杂志》，17(2):219–240，2025年。

作者地址

Emiliano Liwski ，鲁汶大学 emiliano.liwski@kuleuven.be