arXiv:2512.22967v1 [math.GT] 28 Dec 2025

环面链环的 Panhandle 多项式及其几何应用

安德烈·米罗诺夫*[1,2,3]，希沙姆·萨蒂†[4,5]，维韦克·库马尔·辛格‡[4]和亚历山大·斯托伊梅诺夫§[6]

[1]列别捷夫物理研究所，莫斯科 119991，俄罗斯。[2]库尔恰托夫国家研究中心，莫斯科 123182，俄罗斯。[3]信息传输问题研究所，莫斯科 127994，俄罗斯。[4]量子与拓扑系统中心（CQTS），纽约大学阿布扎比分校研究所，纽约大学阿布扎比分校，邮政信箱 129188，阿布扎比，阿联酋[5]库朗数学科学研究所，纽约大学，纽约。[6] 东国大学 WISE校区，数学教育系，Dongdae-ro 123号，邮编 38066，庆州市，大韩民国

2025年12月30日

摘要

我们利用量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的基本表示张量分解和 Rosso-Jones 公式，确立了环面纽结和链环的反向平行体 HOMFLY-PT 多项式具有独特的“把手柄”形状。鉴于其内在性质类似把手柄，HOMFLY-PT 多项式被称为“把手柄多项式”。借助 ℓ-不变量，我们将关于环面纽结弧指数和最大 Thurston-Bennequin 不变量的 Etnyre-Honda 结果推广到了链环。此结果还带来了一些几何推论，涉及辫指数、带化链环和 Whitehead 倍增链环的最小弦 Bennequin 曲面的存在性、Bennequin 锐化问题，以及拟正性与强拟正性的等价性。我们将这些性质推广到环面链环，并将其与分支逐一的 Thurston-Bennequin 不变量分类联系起来。最后，我们讨论一般链环的ℓ-不变量的定义。

*mironov@itep.ru
†hsati@nyu.edu
‡vks2024年@纽约大学.edu
§stoimeno@stoimenov.net

目录

1 引言 **3**

2 环面结与链环的 Panhandle 多项式 4

2.1 背景与定义.4 2.2 反向二缆环面纽结 T (m, n) 的 HOMFLY-PT 多项式.7 2.3 环面纽结 Panhandle 定理的证明.13 2.4 推广到环面链环.15

3 几何性质 **18**

3.1 弧指数与 Thurston-Bennequin 不变量.18 3.2 辫指数与编织曲面.19 3.3 拟正性与强拟正性.20 3.4 环面纽结的性质.21

4 环面链环的应用 **23**

4.1 不变量.23 4.2 几何性质.29 4.3 Whitehead 倍增链环.35 4.4 将任意链环的 ℓ-不变量推广.35

1 引言

多项式不变量为纽结理论和《拓扑学》提供了深刻的见解。其中，研究最为广泛的纽结多项式不变量包括亚历山大多项式 [Al], 、琼斯多项式 [Jo],以及 HOMFLY- PT 多项式 [H+]。在本文中，我们展示了环面纽结和环面链环的反向平行的后一个多项式所呈现的一种奇特形状。我们固定 K $=T_{m,n}=T(m,n)$，其中

$$(m,n)=1,\quad m<n,$$

垂直框架 t $=t_v$（见式 (3)）以及下文的约定 (5)。我们的主要结果如下：

定理 1.1（Panhandle 定理）。令 X $=[M;\underline{M}]_v$ 表示一个满足以下条件的多项式：

$$\min\deg_v X=\underline{M}\quad and\quad \max\deg_v X=M. \tag{1}$$

那么，反向 2- 缆绕环面纽结 $C_2(T_{m,n},t)$ 的 HOMFLY-PT 多项式具有如下形式：

$$P(C_2(T_{m,n},t))=[1-2m;2m-1]_v+\underbrace{(m-1)zv\frac{v^{2n}-v^{2m}}{v^2-1}}_{\text{panhandle}}.$$

条件 m $<$n 至关重要：要恢复环面纽结 T (m, n) 关于 m 和 n 的对称性（拓扑框架），当 m $>$n 时，Laurent 多项式 $[1-2m;2m-1]_v$ 中某些首项系数必须为零。

直接从 skein 关系 (5) 推导定理 1.1 颇为繁琐。因此，我们采用表示论方法。HOMFLY-PT 不变量的构造，记为 $\mathscr{H}(C_2(T_{m,n},t))$，自然依赖于表示张量积的分解（见 [RT][MMM2]），该张量积分解为不可约分量

$$R\otimes\bar{R}=\bigoplus_i Q_i,\qquad Q_i\in\mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{sl}_N)).$$

这里，R 表示与量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的一个杨表相对应的基本表示，而 $\bar{R}$ 是它的共轭表示。在此背景下，纽结$C_2(T_{m,n},t)$ 的 HOMFLY-PT 多项式可写成相关表示的贡献之和，即标量表示 ($Q_1=\Phi$) 和伴随表示 ($Q_2=$Adj)：

$$P\big(C_2(T_{m,n},t_v)\big):=\mathscr{H}\big(C_2(T_{m,n},t_v)\big)=\frac{1}{\mathscr{H}_R(U)}\Big(\mathscr{H}_\Phi\big(T_{m,n}\big)+\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T_{m,n}\big)\Big). \tag{2}$$

Here

$$t_v=(1-m)n \tag{3}$$

表示垂直框架（见定义 2.3 和 2.10），U 是平凡结。标量表示的 HOMFLY-PT 多项式 $\mathscr{H}_\Phi(K)=1$ 与之不同，伴随表示的 HOMFLY-PT 多项式 $\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(K)$ 通常并非平凡。这个表述为分析 $P\big(C_2(T_{m,n},t)\big)$ 的结构提供了一个自然框架。定理 1.1 可由表达式 (2) 结合 Rosso-Jones 公式 ([LZ, 定理 5.1][RJ, 定理 8]) 得出；该公式为理解环面纽结 $\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{m,n})$ 的伴随多项式提供了系统的方法。我们将在 §2 中对此进行说明，并在 §2.3 中给出定理 1.1 的一般证明。定理 1.1 中 m $=2$ 的特殊情形由第四作者使用 skein 代数编程在[JLS2] 中证明。Diao 和 Morton 还确定了 m $=2$ 时 panhandle 的首项（v 次数），见 [DM，定理 2.7]。

定理 1.1 的主要动机并非多项式的特殊形式。它源于与截然不同领域相关的明确计算。具体而言，它与一种估计纽结弧指数和最大 Thurston-Bennequin 不变量的新方法有关 [JLS2]。该方法依赖于一个名为 ℓ-不变量的量，并由此为 Etnyre-Honda 关于环面纽结的部分研究提供了代数证明 [EH] 。[JLS 2] 中的工作使我们得以进一步探讨反向平行的辫指数（见 [DM]）及其最小

弦 Bennequin 曲面的存在性（见 [BMe][HS]）、Bennequin锐化问题（问题 3.8），以及某些链环的拟正性与强拟正性之间的等价性。我们在 §3 中概述这些应用。

定理 1.1 也可以扩展到环面链环的情形，我们将在 §2.4 中讨论这一扩展。该扩展可直接由基础定义 2.32 及 §2.4 中发展的论证得出。我们在下述定理中陈述这一结果（见定理 2.34 ）。

定理 1.2（链环的平直段）。反向二重缆 l 分支环面链环 $C_2(T_{m,\ n},t_v)$ 的 HOMFLY-PT 多项式具有如下形式

$$P\big(C_2(T_{m,n},t_v)\big) = \Big[1-2m;\, 2n\,\frac{l-1}{l} + \frac{2m}{l} - 1\Big]\Big]_v + \underbrace{\zeta_{m,l}\ zv\ \frac{v^{2n}-v^{2m}}{v^2-1}}_{\text{panhandle}},$$

其中

$$\zeta_{m,l} := \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l+k} \frac{l!}{(l-k)!} \left(\frac{m}{l}\right)^k.$$

因此，链环把手的长度等于 2(n – m)/l。

在 §4 中，我们将上述应用扩展到环面链环。除了确定它们的弧指数外，我们还在 §4.1.2 中完整描述了它们分支逐一的瑟斯顿-贝内昆不变量。接着，在 §4.2 中，我们将针对环面纽结概述的进一步几何应用大多推广到环面链环，并加入 Baker-Motegi 问题（§4.2.4）。§4（以及本文）的结论基于对环面链环性质的研究，讨论了 ℓ-不变量向一般链环的扩展。

2 环面纽结和链环的 Panhandle 多项式

2.1 背景和定义

定义 2.1（环面纽结）。设 m,n $\in \mathbb{Z}_{>0}$，满足 gcd(m, n) = 1。环面纽结 $T_{m,n}$ =T (m, n) 定义为辫词的闭包

$$T_{m,n} := \widehat{(\sigma_1\sigma_2\cdots\sigma_{m-1})^n} \in B_m,$$

其中 B_m 是由 m 股组成的辫群，其标准 Artin 生成元为 $\sigma_1,\ldots,\sigma_{m-1}$。闭包运算 $\widehat{\ }$ 将辫的对应顶端和底端端点连接起来，形成一个纽结。

例 2.2。环面纽结 $T_{4,3}$ 是辫 $(\sigma_1\sigma_2\sigma_3)^3 \in B_4$ 的闭包。图 1 展示了示意图。

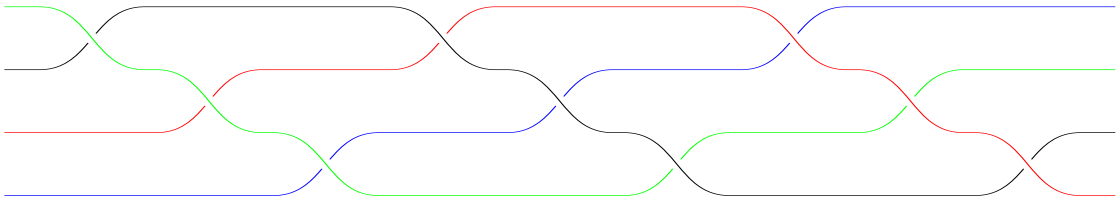


图 1：环面纽结 T (4,3) 的辫表示。

定义 2.3（反向二缆纽结）。设 K = β 是辫 $\beta \in B_m$的闭包。定义 β的反向二缆为辫 $\phi(\beta) \in B_{2m}$，它是通过对 β 的每股进行“加倍并反转方向”得到的，框架为 t。框架 $t \in \mathbb{Z}$ 由 $q^{t\kappa_\lambda}$ 的因子定义（见（10））， 该因子使带框架的 HOMFLY-PT 多项式与不变量多项式（拓扑框架）相异。方向反转时，框架的符号也会改变。我们将使用垂直框架 [AM],；对于环面纽结 T (m,n)，它由（3）给出。具体来说，对于 Artin 生成元

$$\phi : B_m \longrightarrow B_{2m}, \qquad \phi\left(\sigma_i\right) = \sigma_{2i}\sigma_{2i+1}\sigma_{2i-1}\sigma_{2i} \quad (1 \le i \le m-1). \tag{4}$$

那么，二缆纽结 $C_2(K,t)$ 为

$$C_2(K,t) := \widehat{\phi(\beta)} \in S^3.$$

S反向二缆环面纽结 $T^{4,5}$ （框架为 $t = -15$）的示意图见图 2。

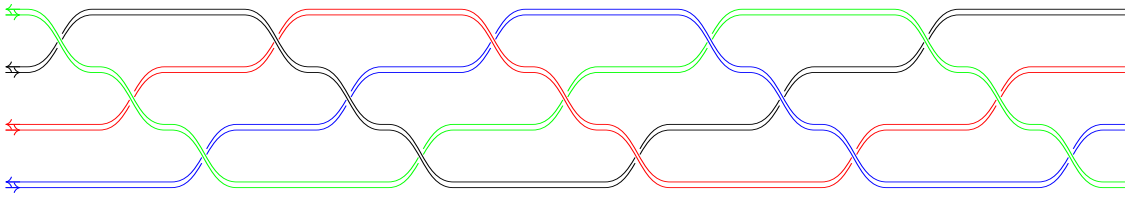


图 2：反向二缆环面结 $T^{4,5}$ 的辫表示。

定义 2.4（HOMFLY-PT 多项式[H+]）。对于一个纽结 K，（无色）HOMFLY-PT 多项式 P(K) 通过 skein 关系（Morton 约定）定义：

$$v^{-1}P(L_+) - vP(L_-) = zP(L_0), \quad P(U) = 1. \tag{5}$$

这里，U 表示平凡结，且 $z = q - q^{-1}$。

正如引言中所强调的，我们着重研究反向二缆环面纽结的 HOMFLY-PT 多项式及其几何应用。直接应用 skein 关系（见定义 2.4）通常相当复杂。因此，我们通过表示论[RT], 来处理这个问题，重点考察 R-着色的 HOMFLY-PT 不变量 $H_R(K)$，其中杨表 R 对应于 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的一个表示（见定义 2.6）。特别地，当 $R = [1]$（基本表示）时，该不变量化简为通常的 HOMFLY-PT 多项式 (5)，即：

$$H_{[1]}(K) = H(K) = P(K).$$

备注 2.5（归一化）。HOMFLY-PT 多项式有两种归一化：归一化（约化）多项式满足 $H_R(U) = 1$，其中 U 表示平凡结（平凡纽结）；另一种是未归一化（未约化）多项式。在这两种情况下，我们分别使用记号 H_R 和 $\mathscr{H}_R$，因此，对于结 K，有 $\mathscr{H}_R(K) = \mathscr{H}_R(U) \cdot H_R(K)$，多项式 P(K) 也同理。

定义 2.6（杨表图表示 [KR][KS]）。量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ ($|q| < 1$) 的表示 R 可由其最高权 Λ 对应的杨表唯一确定

$$R = [R_1, R_2, \ldots, R_{N-1}], \qquad R_1 \geq R_2 \geq \cdots \geq R_{N-1} \geq 0. \tag{6}$$

若最高权表示为

$$\Lambda_R = \sum_{i=1}^{N-1} a_i \omega_i, \tag{7}$$

其基本权为 $\{\omega_i\}_{i=1}^{N-1}$，则式 (6) 中杨表的项与式 (7) 中的系数 a_i 之间的关系为

$$R_i = \sum_{j=i}^{N-1} a_j, \quad \text{for } i = 1, \ldots, N-1.$$

对于一般的 N，共轭表示 R 对应的最高权为

$$\Lambda_R^* := \sum_{i=1}^{N-1} a_{N-i} \omega_i,$$

它与共轭杨表相关联。

定义 2.7（复合表示 [Ko]）。复合表示是 $\mathfrak{sl}_N$ 的最一般有限维不可约最高权表示，它与以下形式的杨图相关联：

$$(R,P)=\Big[R_1+P_1,\dots,R_{l_R}+P_1,\underbrace{P_1,\dots,P_1}_{N-l_R-l_P},P_1-P_{l_P},P_1-P_{l_P-1},\dots,P_1-P_2\Big],$$

其中 l_P 表示杨图 P 中的行数。这个 (R, P) 是对乘积 R $\otimes$P 有贡献的第一个（“最大”）表示，¯。它可以通过公式 [Ko]，从张量积（即作为从¯R $\otimes$P 得到的投影算子）显式地获得。

$$(R,P)=\sum_{Y,Y_1,Y_2}(-1)^{l_Y}N^R_{YY_1}N^P_{Y^TY_2}\,Y_1\otimes\overline{Y_2}, \tag{8}$$

其中上标 “T” 表示杨图的转置。

例 2.8（基本表示）。基本表示 R =[1] 及其共轭表示 ¯R $=\overline{[1]}$ （属于U$q(\mathfrak{sl}_N)$）的杨表图如下：

$$[1]=\square\quad\text{and}\quad[\bar{1}]=\underbrace{[1,1,\dots,1]}_{N-1}=\left[1^{N-1}\right]=\left.\begin{array}{c}\square\\\square\\\square\\\vdots\\\square\\\square\end{array}\right\}N-1\ .$$

¯这里，[1] 可以视为复合表示（Φ,[1]），其中 Φ 是平凡表示。

例 2.9（伴随表示）。另一个简单例子是U$q(\mathfrak{sl}_N)$的伴随表示：

$$\mathrm{Adj}=([1],[1])=[2,\underbrace{1,\dots,1}_{N-2}]=\left[2,1^{N-2}\right]=\left.\begin{array}{c}\square\ \square\\\square\\\square\\\vdots\\\square\\\square\end{array}\right\}N-1\ .$$

定义 2.10（C_2(K,t) 的 HOMFLY-PT 多项式）。设 K 为一个纽结，$\mathscr{H}_R$(K) 表示由群U$q(\mathfrak{sl}_N)$的杨表表示 R 着色的 K 的 R着色HOMFLY-PT多项式。给定

$$R\otimes\bar{R}=\bigoplus_i Q_i,$$

对于每个 $Q_i\in$ Rep(U$q(\mathfrak{sl}_N)$)，反向二缆纽结（它是一个链环）的 R-着色 HOMFLY-PT 多项式（未归一化）记为 C_2(K,t)，其表达式为

$$\mathscr{H}_R(C_2(K,t_{\mathrm{v}})):=\sum_i\mathscr{H}_{Q_i}(K).$$

特别地，　对于基本表示（最简单的表示），即 R $=[1]$，我们有

$$R\otimes\bar{R}=\Phi\oplus\mathrm{Adj},$$

其中 Φ 表示平凡表示，而 Adj $=[2,1^{N-2}]$ 表示 U$q(\mathfrak{sl}_N)$ 的伴随表示。因此，反向二缆纽结的基本表示归一化 HOMFLY-PT 多项式为

$$P(C_2(K,t_{\mathrm{v}}))=\frac{1}{\mathscr{H}_{[1]}(U)}\big(\mathscr{H}_\Phi(K)+\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(K)\big), \tag{9}$$

其中 $\mathscr{H}_\Phi$(K) $=1$，并且 $\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}$(K) 表示结 K 在伴随表示下的 HOMFLY-PT 多项式　　.

注 2.11（垂直框架）。与任何源自表示论的公式一样，该公式仅当多项式采用垂直框架 [AM] 时才成立。因此，本文中的所有 HOMFLY-PT 多项式均假定采用垂直框架。

注 2.12（统一 HOMFLY-PT 多项式）。用一个（固定的）表示 R（杨图）着色的 HOMFLY-PT 多项式是关于 q 和 v 的 Laurent 多项式，在特化 $v = q^N$ 后化为 $\mathfrak{sl}_N$ 不变量 $J^{\mathfrak{sl}_N}_R(q)$。对于伴随表示，$R = [2,1^{N-2}]$ 如上所述，因此颜色 R 与 v 具体相关联。我们通过以下特化定义 $H^{\mathrm{Adj}}(K)$

$$H_{\mathrm{Adj}}(K)\Big|_{v=q^N} = J^{\mathfrak{sl}_N}_{[2,1^{N-2}]}(q),$$

对所有充分大的 N [ChE][HM]。该多项式在 [MMM], 中称为统一 HOMFLY-PT 多项式，并且同样的构造也适用于任意复合表示。

注意，公式 (9) 给出了纽结 $C_2(K,t^v)$ 的 HOMFLY-PT 多项式，这与定义 2.4 中的 skein 关系一致。此外，我们想强调的是，相较于使用 skein 关系，采用公式 (9) 更为方便。

记号 2.13. 本文中，我们用以下简写 $[x]_q$ 表示 q 数，用 $\{x\}$ 表示反对称括号

$$[x]_q = \frac{q^x - q^{-x}}{q - q^{-1}}, \quad \{x\} = x - \frac{1}{x},$$

特别地，我们令 $z = \{q\}$。

在接下来的小节中，我们将详细研究垂直框架下反向二缆环面纽结 $C_2(T(m,n),t)$ 的 HOMFLY-PT 多项式，然后将讨论推广到环面链环。

2.2 反向二缆环面纽结 T (m, n) 的 HOMFLY-PT 多项式

为了计算纽结 $C_2(K,t^v)$ 的 HOMFLY-PT 多项式，我们首先计算纽结 K 的伴随表示 HOMFLY-PT 多项式。为此，我们先回顾杨图表示 R 的量子维数。这些量子维数及其性质与纽结 K 相关。参见 [KS][KRT]。

定义 2.14（表示 R 的量子维数）。对于杨图 R，引入一个以 R 标记的 q 和 v 两个变量的函数:

$$D_R(q,v) := \prod_{i,j\in R} \frac{\{vq^{j-i}\}}{\{q^{h(i,j)}\}}$$

其中 h(i, j) 为钩长，乘积遍历杨图中的所有方格。令 R 为与量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的表示相关联的杨图，则该表示的量子维数定义为 $D_R(q, q^N)$。

例 2.15（伴随表示的量子维数）。$R = [2,1] = \ydiagram{2,1}$ 是长度为 $|R| = 3$ 的杨图。那么

$$D_{[2,1]}(q,v) = \frac{v - v^{-1}}{q^3 - q^{-3}} \cdot \frac{vq - v^{-1}q^{-1}}{q - q^{-1}} \cdot \frac{vq^{-1} - v^{-1}q}{q - q^{-1}},$$

其中钩长分别为 $h(1,1) = 3$、$h(1,2) = 1$ 和 $h(2,1) = 1$。当 $N = 3$ 时，该表示为伴随表示。对于一般的 N，伴随表示对应的杨图为 $R = \mathrm{Adj} = [2,1^{N-2}]$，即

$$D_{[2,1^{N-2}]} = \frac{\{q^{N-1}\}}{\{q\}} \cdot \prod_{i=1}^{N} \frac{\{q^{2-i}v\}}{\{q^i\}},$$

因此，选择 $v = q^N$ 后，伴随量子维数为

$$D_{\mathrm{Adj}} = \frac{\{vq\}\{v/q\}}{\{q\}^2}.$$

注 2.16（量子维数的性质）。D_R(q,v) 是 q 和 v 的有理函数，并满足以下性质：

$$\begin{aligned}
&\text{(i)} \quad D_R(q,v) = D_R(q^{-1},v^{-1}),\\
&\text{(ii)} \quad D_R(q^{-1},v) = D_{R^T}(q,v),\\
&\text{(iii)} \quad D_R(q,v) = v^{|R|}q^{c(R)}A_R(q) + \cdots + (-1)^{|R|}v^{-|R|}q^{-c(R)}A_R(q),
\end{aligned}$$

其中 R^T 表示杨图 R 的转置，$c(R) = \sum(j-i)$，以及$A_R(q) = \prod \{q^{h(i,j)}\}^{-1}$.(i,j)∈R (i,j)∈R

注意，当杨图表示 R 的长度，即分拆长度 |R|，与群的秩 N 无关时，性质 (iii) 成立。

注 2.17（平凡结多项式的性质）。R 的量子维数等于以 R 着色的平凡结 HOMFLY-PT 多项式，$\mathscr{H}_R$(U ; q, v) = D_R(q, v)，即 $\mathscr{H}_R$(K) =D_R(q, v)·H_R(K)。因此，注 2.16 中的三条性质刻画了平凡结的 HOMFLY-PT 多项式。

注 2.18（HOMFLY-PT 多项式的性质）。一般而言，在参数反转时，结 K 的 HOMFLY-PT 多项式变换为

$$\begin{aligned}
&H_R(K) \xrightarrow{q\mapsto q^{-1},\ v\mapsto v^{-1}} H_R(!K),\\
&H_R(K) \xrightarrow{q\mapsto q^{-1}} H_{R^T}(K),
\end{aligned}$$

其中，H_R(!K) 表示镜像结 !K 的多项式。

现在，我们转而讨论纽结的伴随多项式，尤其关注环面纽结 T (m,n)。下述定理给出了环面结的带色 HOMFLY-PT 不变量的 Rosso-Jones 公式（[LZ，定理 5.1][RJ，定理 8]）。

定理 2.19。设 K 为环面纽结 T (m, n)，其中 m 和 n 互质。设 R ⊢ s 为一个分拆。则垂直框架下的约化带色 HOMFLY-PT 多项式为：

$$\mathscr{H}_R(K) = q^{n\kappa_R}\cdot\sum_{\mu\vdash m\ s} c_\mu^R\cdot q^{-n\kappa_\mu/m}\cdot D_\mu(q,v),$$

其中

- v = qN,
- κ_R =(Λ_R Λ_R +2ρ) 是表示 μof $\mathfrak{sl}$ 中二次 Casimir 算子的特征值 $_N$,

$$\kappa_R = 2\sum_{i,j\in R}(j-i) - \frac{s^2}{N} + sN, \tag{10}$$

- ρ是魏尔向量,
- 而 cR_μ 是由 Adams运算（m-重 plethystic 展开）确定的整数：

$$\widehat{Ad}_m\, S_R(x_1,x_2,\dots) := S_R(x_1^m,x_2^m,\dots) = \sum_{\mu\vdash m\ s} c_R^\mu\cdot s_\mu(x_1,x_2,\dots).$$

该公式　可显式计算环面结的带色 HOMFLY-PT 多项式　.

注 2.20（约定）。与 [LZ 的公式 5.1][RJ 定理 8] 中关于 $\mathscr{H}_R$(K) 的公式相比（其中多项式采用拓扑框架），我们加入了因子 $q^{-(m-1)n\kappa_R}$，因为为了处理公式（9），我们需要使用垂直框架下的多项式。该因子中的指数 −(m − 1)nκ_R，是定义 2.1 中给出环面纽结的 Artin 生成元 σ_i的数量，即 (m − 1)n；每个生成元都对应于逆 $\mathfrak{R}$ 矩阵（因此带负号），而 q^{κ_R} e 则源于这些生成元在拓扑框架和垂直框架中的归一化不同。

注记 2.21（一致性）。定理 2.19 中的 HOMFLY-PT 多项式对应于 Reshetikhin-Turaev 不变量 [D+]，该不变量由逆 R 矩阵构造而成，而逆 R 矩阵与镜像纽结相关。这对应于不变量中的替换 $\mathrm{v} \to \mathrm{v}^{-1}$、$\mathrm{q} \to \mathrm{q}^{-1}$。与此同时，skein 关系（5）只与替换 $\mathrm{v} \to \mathrm{v}^{-1}$相关。然而，一旦我们考虑伴随表示，并且其多项式在替换 $\mathrm{q} \to \mathrm{q}^{-1}$下保持不变，skein 关系便与定理 2.19 一致。

应用定理 2.19，我们可以推导出反向二缆环面纽结的 HOMFLY-PT 多项式。后续小节将讨论其细节。

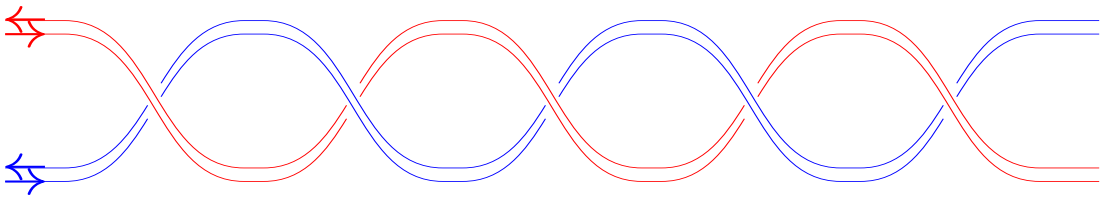


图 3：$C_2(T2,\ 5,-10)$ 的辫表示。

例 2.22（环面纽结 T (2, n) 的 HOMFLY-PT 多项式）。如定理 2.19 所述，环面纽结 $T2,_n$ 的伴随多项式可以显式计算为 [MMM]:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(\mathrm{T}_{2,n}) = v^{2n} - D_{([1,1],[2])}(q,v) - D_{([2],[1,1])}(q,v) + q^{-2n} D_{([2],[2])}(q,v) + q^{2n} D_{([1,1],[1,1])}(q,v).$$

Here

$$\begin{aligned} D_{([2],[2])}(q,v) &= \frac{\{v\}^2\{vq^3\}\{v/q\}}{\{q^2\}^2\{q\}^2}, \qquad D_{([1,1],[1,1])}(q,v) = \frac{\{vq\}\{v\}^2\{v/q^3\}}{\{q^2\}^2\{q\}^2}, \\ D_{([1,1],[2])} &= D_{([2],[1,1])}(q,v) = \frac{\{vq^2\}\{vq\}\{v/q^2\}\{v/q\}}{\{q^2\}^2\{q\}^2}. \end{aligned}$$

利用公式 (9) 的结果，我们进而得到 $C_2(T2,\ _n, -n)$ 的 HOMFLY-PT 多项式

$$P(C_2(T(2,n),-n)) = \frac{1}{D_{[1]}}\left(1 + \mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{2,n})\right),$$

其中

$$D_{[1]} = \frac{(-1+v^2)}{(vz)} = \frac{\{v\}}{\{q\}}.$$

为便于说明，我们在表 1 和表 2 中列出了一些具有代表性的例子及其相关的几何性质。

(z\v)	**-3**	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**
-1	-9	21	-16	4	0	0	0
1	-24	71	-50	5	1	1	1
3	-22	84	-63	1	0	0	0
5	-8	45	-37	0	0	0	0
7	-1	11	-10	0	0	0	0
9	0	1	-1	0	0	0	0

表 1：HOMFLY-P $C_2(T2,\ 5,-5)$ 纽结的 T 多项式；黄色方框突出显示了一个类似锅柄的结构 e.

(z\v)	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21
-1	-36	96	-85	25	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	-420	1131	-910	201	1	1	1	1	1	1	1	1	1
3	-1897	5319	-4032	610	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	-4352	13237	-9805	920	0	0	0	0	0	0	0	0	0
7	-5776	19678	-14673	771	0	0	0	0	0	0	0	0	0
9	-4744	18643	-14275	376	0	0	0	0	0	0	0	0	0
11	-2486	11642	-9262	106	0	0	0	0	0	0	0	0	0
13	-832	4846	-4030	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	-172	1330	-1159	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
17	-20	231	-211	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	-1	23	-22	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 2：$C_2(T2,\ 11,-11)$ 的 HOMFLY-PT 多项式。

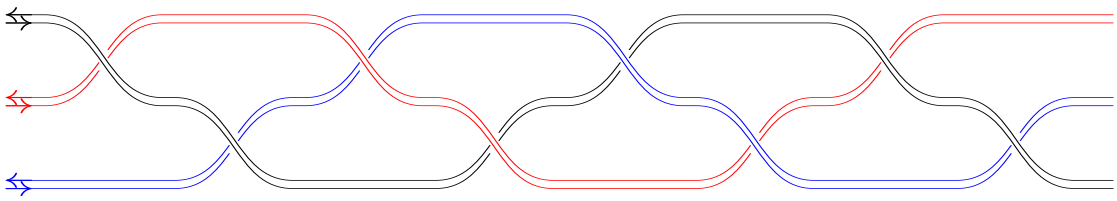


图4：反向双缆环面结 $C_2(T3,\ 4,-8)$ 的辫表示。

例 2.23（反向二缆环面纽结 T (3,n) 的 HOMFLY-PT 多项式）。根据定理 2.19，与环面纽结 T3，n 相关的伴随多项式有一个显式表达式 [MMM]:

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{3,n}) = 2v^{2n} + D_{X_3} + q^{-4n}D_{Y_a} + q^{4n}D_{Y_b} - q^{-2n}D_{C_a} - q^{2n}D_{C_b}, \tag{11}$$

其中

$$Y_a = ([3],[3]), \quad Y_b = ([1,1,1],[1,1,1]), \quad C_a = ([2,1],[3]) + ([3],[2,1]),$$
$$C_b = ([2,1],[1,1,1]) + ([1,1,1],[2,1]), \quad X_3 = ([2,1],[2,1]) + ([3],[1,1,1]) + ([1,1,1],[3]),$$

and

$$\begin{aligned}
D_{Y_a} &= \frac{\{vq^5\}\{vq\}^2\{v\}^2\{v/q\}}{\{q^3\}^2\{q^2\}^2\{q\}^2}; \qquad D_{Y_b} = \frac{\{v/q^5\}\ \{v/q\}^2\{v\}^2\{vq\}}{\{q^3\}^2\{q^2\}^2\{q\}^2}, \\
D_{X_3} &= 2\frac{\{vq^3\}\{vq\}\{vq^2\}\{v/q^2\}\{v/q\}\{v/q^3\}}{\{q^3\}^2\{q^2\}^2\{q\}^2} + \frac{\{vq^3\}\{vq\}^2\ \{v/q\}^2\ \{v/q^3\}}{\{q^3\}^2\{q\}^4}, \\
D_{C_b} &= \frac{2\{v\}^2\{\frac{v}{q^4}\}\{\frac{v}{q^2}\}\{vq\}\{vq^2\}}{\{q^3\}^2\{q^2\}\{q\}^3}; \qquad D_{C_a} = \frac{2\{v\}^2\{vq^4\}\{vq^2\}\{v/q\}\{v/q^2\}}{\{q^3\}^2\{q^2\}\{q\}^3}.
\end{aligned}$$

将 这些代入公式 (9)，即可得到反向二缆环面纽结 T 的 HOMFLY-PT 多项式 $_{3,n}$

$$P(C_2(T_{3,n},\ -2n)) = \frac{1}{D_{[1]}}\left(1 + \mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{3,n})\right).$$

为便于说明，我们在表3和表4中列出了一些示例及其对应的几何性质。

根据定理 2.19，要计算环面纽结 T (m,n) 的伴随多项式，首先需要构造 m-重 plethystic 展开，然后求出第二卡西米尔算子的量子维数和特征值。为作说明，我们明确给出 4-重 plethystic 展开作为示例。

(z\v)	**-5**	**-3**	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**
-1	-25	75	-85	45	-11	1	0
1	-100	350	-408	206	-44	2	2
3	-160	630	-757	349	-62	0	0
5	-130	585	-705	287	-37	0	0
7	-56	308	-363	121	-10	0	0
9	-12	93	-105	25	-1	0	0
11	-1	15	-16	2	0	0	0
13	0	1	-1	0	0	0	0

表 3：C_2(T3，4，-8) 纽结的 HOMFLY-PT 多项式（Panhandle 多项式） .

(z\v)	**-5**	**-3**	**-1**	**1**	**3**	**5**	**7**	**9**	**11**	**13**
-1	-144	528	-760	536	-185	25	0	0	0	0
1	-1584	5920	-8234	5261	-1459	102	2	2	2	2
3	-7524	28596	-38772	22812	-5272	160	0	0	0	0
5	-20328	79028	-104710	57190	-11310	130	0	0	0	0
7	-34716	139820	-181104	91696	-15752	56	0	0	0	0
9	-39492	167820	-212434	98838	-14744	12	0	0	0	0
11	-30769	141165	-174526	73512	-9383	1	0	0	0	0
13	-16610	84645	-102103	38115	-4047	0	0	0	0	0
15	-6193	36349	-42715	13719	-1160	0	0	0	0	0
17	-1562	11090	-12672	3355	-211	0	0	0	0	0
19	-254	2346	-2601	531	-22	0	0	0	0	0
21	-24	327	-351	49	-1	0	0	0	0	0
23	-1	27	-28	2	0	0	0	0	0	0
25	0	1	-1	0	0	0	0	0	0	0

表 4：C_2(T3，7，-14) 纽 t.

例 2.24. 生成 Adams系数的伴随 Schur 函数的 4-重 plethystic 展开为

$$\begin{aligned}\widehat{Ad}_4 S_{\mathrm{Adj}} = 3 &+ S_{([1^4],[1^4])} - S_{([1^4],[2,1,1])} + S_{([1^4],[3,1])} - S_{([1^4],[4])} - S_{([2,1,1],[1^4])} \\ &+ S_{([2,1,1],[2,1,1])} - S_{([2,1,1],[3,1])} + S_{([2,1,1],[4])} + S_{([3,1],[1^4])} - S_{([3,1],[2,1,1])} \\ &+ S_{([3,1],[3,1])} - S_{([3,1],[4])} - S_{([4],[1^4])} + S_{([4],[2,1,1])} - S_{([4],[3,1])} + S_{([4],[4])} .\end{aligned}$$

伴随多项式为

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{4,n}) = v^{2n}\left(3 + \sum_{\mu} \varepsilon_\mu D_\mu(v,q) q^{-\kappa_\mu n/4}\right),$$

其中， ε_μ是由上述 Adams运算产生的符号因子。该公式中量子维数和第二卡西米尔算子的特征值的显式表达式见 [BMi，附录 A]。

在一般情形下，我们需要以下结果。

‾引理 2.25（伴随多项式）。(i) 将 Adams运算 Ad_m 作用于 SL(N)群在伴随表示中的特征标，当 $N \geq m$ 时，会产生 $m-1$ 个标量项：

$$\widehat{Ad}_m\, S_{\mathrm{Adj}} = (m-1) + \sum_{\mu} c_\mu S_\mu(v,q),$$

带有一些数值系数 c_μ。

（ii）$T_{m,\ n}$ 的伴随多项式具有以下形式：

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T_{m,n}) = v^{2n}\left((m-1)+\sum_{\mu} c_{\mu} D_{\mu}(q,v) q^{-\kappa_{\mu} n/m}\right). \tag{12}$$

证明。首先，可以使用公式 (10) 和定理 2.19，并注意到若 R = 伴随表示，则 $\kappa_{\mathrm{Adj}} = 2N$，因此公因子确实是 v^{2n}。由于 SL(N)群的特征标等于舒尔多项式，我们关注作用于 Schur函数 $S^{\mathrm{Adj}}(x)$ 的 Adams运算 Ad_m 所产生的标量贡献；后者是变量 x_i、i = 1、.....、N 的对称多项式。这些变量是基本表示中群元素的特征值。

现在我们注意到，在这种情况下，伴随 Schur 函数等于

$$S_{\mathrm{Adj}} = S_{[2,1^{N-2}]}(x) = (N-1)\mathfrak{m}_{[1^N]}(x) + \mathfrak{m}_{[2,1^{N-2}]}(x), \tag{13}$$

其中 $\mathfrak{m}_R(x)$ 是单项式对称函数。也就是说，由于

$$\mathfrak{m}_{[1^N]}(x) = \prod_{i=1}^{N} x_i, \qquad \mathfrak{m}_{[2,1^{N-2}]}(x) = \sum_{\sigma} x_{i_1}^2 x_{i_2} x_{i_3} \ldots x_{i_{N-1}} x_{i_N}^0,$$

其中求和遍历集合 1、2、.....、N 的所有可能排列 σ，那么[1]

$$S_{[2,1^{N-2}]}(x) = \prod_{k=1}^{N} x_k \sum_{i,j=1}^{N} \frac{x_i}{x_j} - \prod_{i=1}^{N} x_k. \tag{14}$$

公式 (13) 反映了这样一个事实：只有两个科斯特卡数 $K_{[2,1^{N-2}],\mu}$ 非零（定义和性质见 [Mac, §I.6]）：对角项（其值始终为 1）以及 $K_{[2,1^{N-2}],[1^N]} = N - 1$。

Adams运算 Ad_m 与该公式的 m-复合相关，对应于代换 $x_i \to x_i^m$。Ad_m 的标量贡献与 Schur函数 $S[m, m \ldots, m] = \prod_{i=1}^{N} x_i^m$ 相关，因为在 $\underbrace{\quad}_{N \text{ times}}$SL(N)情形下，$\prod_{i=1}^{N} x_i = 1$。因此，我们需要从 $\mathrm{Ad}_m(S^{\mathrm{Adj}})$ 中取出项 $S[m, m \ldots, m]$。为此，我们 $\underbrace{\quad}_{N \text{ times}}$使用 [Mac, §VI.9], 中的“另一种标量积”，Schur函数关于此标量积彼此正交：

$$\begin{aligned} \langle f | g \rangle : &= \frac{1}{N!} \oint \prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{x_k} \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right) f(x) g(x^{-1}) \\ \langle S_R, S_Q \rangle &= \delta_{RQ}. \end{aligned} \tag{15}$$

这里，积分路径围绕零点，且测度经过归一化，使得 $\oint_{dx\ x} = 1$。于是，标量贡献为

$$\left\langle \widehat{Ad}_m(S_{\mathrm{Adj}}(x)) \,\middle|\, S_{[\underbrace{m,m,\ldots,m}_{N \text{ times}}]} \right\rangle = \left\langle S_{[2,1^{N-2}]}(x^m) \,\middle|\, \prod_{i=1}^{N} x_i^m \right\rangle.$$

现在，我们使用（14），并注意到

$$\left\langle \prod_{i-1}^{N} x_i^m \,\middle|\, \prod_{i=1}^{N} x_i^m \right\rangle = \frac{1}{N!} \oint \prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{x_k^{m+1}} \prod_{i \neq j} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right) \prod_{n=1}^{N} x_n^m = 1$$

并且

[1]获得该公式的另一种方法是注意到，伴随表示由展开式得到（见注 2.10）$[1] \otimes [\bar{1}] = \Phi \oplus \mathrm{Adj}$，即 $\left(\sum_{i=1}^{N} x_i\right) \prod_{i=1}^{N} x_i \left(\sum_{i=1}^{N} x_i^{-1}\right) = \prod_{i=1}^{N} x_i + S^{\mathrm{Adj}}$。

$$\left\langle \prod_{k=1}^{N} x_k^p \sum_{i,j=1}^{N} \frac{x_i^m}{x_j^m} \,\middle|\, \prod_{i=1}^{N} x_i^m \right\rangle = \frac{1}{N!} \oint \prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{x_k^{m+1}} \prod_{i\neq j} \left(1-\frac{x_i}{x_j}\right) \sum_{n,m=1}^{N} \frac{x_n^m}{x_m^m} \prod_{s=1}^{N} x_s^m$$
$$= \frac{1}{N!} \oint \prod_{k=1}^{N} \frac{dx_k}{x_k} \prod_{i\neq j} \left(1-\frac{x_i}{x_j}\right) \sum_{n,m=1}^{N} \frac{x_n^m}{x_m^m}$$
$$= \min(m,N)\,.$$

因此，我们最终由（14）得到

$$\left\langle S_{[2,1^{N-2}]}(x^m) \,\middle|\, S_{[\underbrace{m,m,\ldots,m}_{N \text{ times}}]} \right\rangle = \min(m,N)-1\,,$$

当 N 足够大时，它等于 $m-1$。证明至此完成。 □

现在我们对引理 2.25 中求和的通用结构作如下断言。

引理 2.26（求和的结构）。考虑进入引理 2.25 中求和的杨图 μ。则有以下结论：

(i) 量子维数 Dμ(q,v) 都是关于 v 的 Laurent 多项式，最高次数为 2m，最低次数为 $-2m$。(ii) $\kappa_\mu - 2mN$ 不依赖于 N。

证明。图 μ都与复合表示 [Ko] 相关联。此外，由于这些表示属于伴随表示的 m 次幂 ([1],[1])，它们全都具有形式 (R, P)，其中 $|R|=|P|:=\mathfrak{p}\le m$。复合表示的量子维数由 [MM，公式 (28)]，给出，可改写为

$$D_{(R,P)}(q,v) = D_R\left(q, vq^{-l_P}\right) D_P\left(q, vq^{-l_R}\right) \prod_{i=1}^{l_R}\prod_{j=1}^{l_P} \frac{[N+R_i+P_j+1-i-j]_q}{[N-i-j+1]_q}\,, \tag{16}$$

其中 l_R 表示杨图 R 中的行数。由于量子维数在整数 N 处不能有极点，分母中的因子会与分子中的某些因子相消。根据定义 2.14 可直接得出，含有 $v=q^N$ 的因子总数为 $|P|+|R|=2\mathfrak{p}$，这些因子均具有形式 $\{vq^\alpha\}$，其中 α 为某个值。因此，表示 (R,P) 的量子维数是关于 $v=q^N$ 的 Laurent 多项式，最高次数为 $|P|+|R|=2\mathfrak{p}$，最低次数为 $-|P|-|R|=-2\mathfrak{p}$。

也可以用 $|R|=|P|=\mathfrak{p}R$ 求出复合表示中第二卡西米尔算子的特征值。其表达式为 (R,P)

$$\kappa_{(R,P)} = 2N\mathfrak{p} + \kappa_R - \kappa_{P^T}\,. \tag{17}$$

现在注意，根据这个公式和引理 2.25 (ii)，量子维数 Dμ 前面的系数在 HOMFLY-PT 多项式中关于 v 的次数为 $2n(m-\mathfrak{p})/m$。这个次数是非负偶数，而对于纽结，m 和 n 互素，因此有 $\mathfrak{p}=m$，并且

$$\kappa_{(R,P)} - 2Nm = \kappa_R - \kappa_{P^T}\,.$$

这就证明了该引理。 □

2.3 环面纽结的 Panhandle 定理证明

由引理 2.25 和引理 2.26，可以立即证明主定理。

定理 1.1 的证明。事实上，根据引理 2.25 和引理 2.26(ii)，依赖于 n 的项可以表示为

$$(m-1)zv\frac{v^{2n}-v^{2m}}{v^2-1}.$$

现在，由于分子 在 $v=\pm 1$ 处消失，且 P($C_2(T_{m,n},t)$) 是关于 v 的多项式，因此差值也是

$$P\left(C_2\left(T_{m,n},t\right)\right)-(m-1)zv\frac{v^{2n}-v^{2m}}{v^2-1}.$$

现在，由引理 2.26(i) 可知，这个差值除以 $D^{[1]}$，（记作 X）后为 $[1-2m;\ 2m-1]_v$，但我们需要说明在 (1) 中

$$\min\deg_v X=1-2m,\quad \max\deg_v X=2m-1 \tag{18}$$

取代 $\min\deg_v X\geq 1-2m$、$\max\deg_v X\leq 2m-1$ 的原因。也就是说，我们要证明，在 (12) 的 μ- 求和中，最高次或最低次 v 项不会发生抵消。（这一论证的一个修改版本见 [St1], , 此处为完整起见再次给出。）

我们只考虑 $X=[P(C_2(T_{m,n},t))]_{z^{-1}}$，并用这种方式证明 (18)。从辫子理论 [LM]中众所周知，

$$[P(C_2(K,t))]_{z^{-1}}=v^{2t}(v^{-1}-v)([P(K)]_{z^0})^2. \tag{19}$$

注意，对于 $K=T_{m,n}$，我们有

$$\min\deg_v P(K)=(m-1)(n-1)=2g(K), \tag{20}$$

其中 g(K) 为亏格。因此，要证明（18），只需证明以下两个断言

$$[P(K)]_{z^0v^{(n\pm 1)(m-1)}}\neq 0. \tag{21}$$

为此，我们使用辫子理论以及中村的观察 [Na]。设 $\beta\in B_r$ 是一个正辫子词（由 Artin 生成元 σ_j 构成）。那么对于固定的 $\beta_{[i]}=\beta\sigma_j^i$ 和 $j=1,\dots,r-1$，以及任意的 $x,s\in\mathbb{Z}$，对于 $L_i=\hat{}\beta_{[i]}$ 和 $L=L_0$，我们有

$$\left|[P(L_2)]_{z^xv^{s+2}}\right|=\left|[P(L_1)]_{z^{x-1}v^{s+1}}\right|+\left|[P(L)]_{z^xv^s}\right|. \tag{22}$$

我们用 χ(L) 表示链环 L 的塞弗特曲面的最大欧拉示性数，并用 l(L) 表示 L 的分支数。现在在（22）中令 $x=1-l(L)$、$s=1-\chi(L)$，以及 $r=m$。

若 $\beta_1\in\{\alpha,\alpha\sigma_j\}$ 且 $\beta_2=\alpha\sigma_j^2$ 对于正辫子词 α，记作 $\beta_1\succ\beta_2$。我们还允许在 β_i 中循环置换字母。将这一关系传递闭包扩张 ≻，使其成为一个偏序。

ˆ 假设 β 是一个正辫，因此存在一个序列（$\beta=\beta_k$、β_{k-1}、...、β_0），满足 $\beta_0=T_{m,n}$ 以及 $\beta_{i-1}\succ\beta_i$。ˆ 那么对于具有 $=\beta$ 和 l(L) 个分支的 L，以及 $y\geq 0$,

$$\left|[P(T_{m,n})]_{z^0v^{(m-1)(n-1)+y}}\right|\geq\left|[P(L)]_{z^{1-l(L)}v^{1-\chi(L)+y}}\right|. \tag{23}$$

由（22）可得。注意，当 $l(L_1)=l(L)-1$（而不是 $l(L)+1$）时，（22）右侧的第一项为零。

我们从 $\beta_0=\tau_{m,n}:=(\sigma_1\dots\sigma_{m-1})^n$ 开始。这个辫包含中心扭转 $\Delta_m^2=(\sigma_1\dots\sigma_{m-1})^m$，很容易看出，对于任意正词 α、γ，都有 $\Delta_m^2\alpha\gamma\succ\Delta_m^2\gamma$。这是因为对于每个 $j=1$、...、$m-1$，都可以将 $\Delta_m^2=\delta\sigma_j$ 写成一个正词 δ。因此

$$\tau_{m,n}\succ\tau_{m,m}=\Delta_m^2. \tag{24}$$

由（23）可知，对于（21），只需验证当 L 是 $\beta_k=\Delta_m^2$ 和 $y=0$、$y=2(m-1)$ 的闭包时，（23）的右侧非零即可。但这个 L 是一个由 m 个平凡结分支组成的 m 分支链环。我们有

$$[P(L)]_{z^{1-m}}=v^{1-\chi(L)}(v^{-1}-v)^{m-1}$$

由（19）的已知推广可得。因此，（21）成立。 □

2.4 环面链环的推广

对于链环的情形，Rosso-Jones 公式（[LZ，定理 5.1][RJ，定理 8]）为：

定理 2.27．设 L 为具有 l 个分支的环面链环 T (m,n)，其中 m/l 和 n/l 为互素整数。设 R ⊢s 为一个分拆。则在垂直框架下，所有分支均以 R 着色的 L 的约化带色 HOMFLY-PT 多项式为：

$$\mathscr{H}_R(L) = q^{n\kappa_R} \cdot \sum_{\mu \vdash sm} c_\mu^R \cdot q^{-n\kappa_\mu/m} \cdot D_\mu(q,v),$$

其中 c_μ^R为由下式确定的整数

$$\left(\widehat{Ad}_{m/l}\, S_R(x_1,x_2,\dots)\right)^l = \left(S_R\left(x_1^{m/l},x_2^{m/l},\dots\right)\right)^l = \sum_{\mu \vdash ms} c_R^\mu \cdot s_\mu(x_1,x_2,\dots).$$

注2.28．该定理最初在 [LZ][RJ] 中表述为：对于各分支分别以 l 个通常互不相同的分拆着色的链环。然而，在这里我们不需要这一更一般的情形。

环面链环 T (2,2n) 和 T (3, 3n) 的例子可见于 [MMM]。现在，让我们考察一般的链环。在两个关键的引理 2.25 和 2.26 中，前一个引理对于链环的类似结论为：

⁀引理 2.29（伴随多项式）。(i) 对 SL(N)群的伴随表示的特征标应用 Adams运算 Ad_m，并将其提升到 l 次方，可得到 $\zeta_{m,l}$ 个标量项，在 N ≥m 处满足

$$\zeta_{m,l} := \sum_{k=0}^{l} (-1)^{l+k} \frac{l!}{(l-k)!} \left(\frac{m}{l}\right)^k \tag{25}$$

因此 $\zeta_{m,\ l} \neq 0$ 除非 m = l = 1。

(ii) T (m,n) 的伴随多项式具有以下形式：

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(T(m,n)) = v^{2n}\left(\zeta_{m,l} + \sum_{\mu} c_\mu^{\mathrm{Adj}} D_\mu(q,v) q^{-\kappa_\mu n/m}\right). \tag{26}$$

证明。首先，利用公式 (10) 和定理 2.27，并注意到对于 R =伴随表示，$\kappa_{\mathrm{Adj}} = 2N$，可以得出公因子为 v^{2n}。为了求出 $\zeta_{m,\ l}$，我们再次利用伴随 Schur 函数由 (13) 给出这一点，并且根据 Rosso-Jones 定理 2.27，我们关注 Adams运算 $\left(⁀\mathrm{Ad}^{m/l} S_\lambda(x_1,x2,\dots)\right)^l$ 对 l 次项的标量贡献。

Adams运算的标量贡献与 Schur函数 S[m, m . . . ,m 相关 $\underbrace{\qquad}_{\text{N 次}}] = \prod_{i=1}^N x_i^m$，

因为在 SL(N) 情形下，$\prod_{i=1}^N x_i = 1$。因此，我们需要从 $\left(⁀\mathrm{Ad}^{m/l} S_\lambda(x_1,x2,\dots)\right)^l$ 中选取项 $S[\underbrace{m, m \dots, m}_{\text{N 次}}]$.

为此，我们再次使用“另一个标量积”（15）。于是，标量贡献为

$$\left\langle \left(\widehat{Ad}_{m/l}(S_{\mathrm{Adj}}(x))\right)^l \,\middle|\, S_{\underbrace{[m,m,\dots,m]}_{N\ times}} \right\rangle = \left\langle \left(S_{[2,1^{N-2}]}\left(x^{m/l}\right)\right)^l \,\middle|\, \prod_{i=1}^N x_i^m \right\rangle.$$

现在，我们使用（14），

$$\left(S_{[2,1^{N-2}]}\left(x^{m/l}\right)\right)^l = \prod_{j=1}^N x_j^m \left(\sum_{i,j=1}^N \frac{x_i^{m/l}}{x_j^{m/l}} - 1\right)^l = \prod_{j=1}^N x_j^m \sum_{k=0}^l (-1)^{l+k} \binom{l}{k} \left(\sum_{i,j=1}^N \frac{x_i^{m/l}}{x_j^{m/l}}\right)^k \tag{27}$$

并注意到，当 N ≥ pk/l 时，

$$\left\langle \prod_{j=1}^N x_j^m \left(\sum_{i,j=1}^N \frac{x_i^{m/l}}{x_j^{m/l}}\right)^k \,\middle|\, \prod_{i=1}^N x_i^m \right\rangle = \frac{1}{N!} \oint \prod_{j=1}^N \frac{dx_j}{x_j^{m+1}} \prod_{i\neq j} \left(1 - \frac{x_i}{x_j}\right) \left(\sum_{i,j=1}^N \frac{x_i^{m/l}}{x_j^{m/l}}\right)^k \prod_{s=1}^N x_s^m = k! \left(\frac{m}{l}\right)^k.$$

该公式与（27）一起意味着，当 N ≥m 时，

$$\left\langle \left(S_{[2,1^{N-2}]}\left(x^{m/l}\right)\right)^{l} \,\middle|\, S_{\underbrace{[m,m,\ldots,m]}_{N \text{ times}}} \right\rangle = \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l+k}\binom{l}{k}\left\langle \prod_{j=1}^{N} x_j^m \left(\sum_{i,j=1}^{N}\frac{x_i^{m/l}}{x_j^{m/l}}\right)^k \,\middle|\, \prod_{i=1}^{N} x_i^m \right\rangle$$
$$= \sum_{k=0}^{l}(-1)^{l+k}\frac{l!}{(l-k)!}\left(\frac{m}{l}\right)^k,$$

这与 (25) 中的 $\zeta_{m,l}$ 完全一致。证明至此完成。 □

注 2.30（一致性检验）。公式 (25) 确实等于纽结的 m − 1，即当 l = 1 时。此外，当 m = 2、l = 2 时，它等于 1；当 m = 3、l = 3 时，它等于 2，这与 [MMM] 中的答案完全吻合。

L引理 2.31（伴随多项式）。设 X = $[[\mathrm{M};\mathrm{M}]]_v$ 表示满足以下条件的多项式：

$$\min\deg_v X \geq \underline{M} \quad and \quad \max\deg_v X \leq M. \tag{28}$$

(i) 伴随多项式 (26) 可以表示为以下形式

$$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(m,n)\big) = v^{2n}\zeta_{m,l} + \sum_{k=1}^{l}\big[\big[-2mk/l;2mk/l\big]\big]_v v^{2n(l-k)/l}. \tag{29}$$

(ii) 将该伴随多项式按平凡结归一化后，得到

$$\frac{1}{\mathscr{H}_{[1]}(U)}\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(m,n)\big) = z\frac{P(v)}{\{v\}} + \sum_{k=1}^{l}\big[\big[-2mk/l+1;2mk/l-1\big]\big]_v v^{2n(l-k)/l} \tag{30}$$

其中 P(v) 是仅关于 v 的多项式。

证明。首先注意到，与纽结情形类似，图 μ是具有如下形式的复合表示：(R, P)，其中 |R| = |P| = p ≤ m。在链环情形中，根据引理 2.29 和公式 (17)，图 μ在 HOMFLY-PT 多项式中对应的 v 次数为 2n(m − p)/m，这是一个非负偶整数。由于对于 l 分支链环，n 和 m 都能被 l 整除，因此可知，(26) 中可能出现任意 p = mk/l，其中 k = 1，.....，l。现在利用引理 2.26(i)，可知公式 (26) 具有形式 (29)。这就证明了 (i) 部分。

直接分析公式 (16) 可知，复合表示 (R,P) 的量子维数在 $v^2 = 1$ 附近的行为为

$$D_{(R,P)}(q,v) \approx \sum_{k=0} d_k(q)\{v\}^k \tag{31}$$

且系数 d_0 与 q 无关。这就证明了 (ii)。 □

链环情形中还需要修正的另一处是定义 2.10。注意，对于环面链环，必须将垂直框架 (3) 修改为

$$t_{\mathrm{v}} = \Bigg(\underbrace{\Big(1-\frac{m}{l}\Big)\frac{n}{l},\ldots,\Big(1-\frac{m}{l}\Big)\frac{n}{l}}_{l \text{ times}}\Bigg). \tag{32}$$

定义 2.32（反向 2-缆链环的 HOMFLY-PT 多项式）。设 L 是一个有 l 个分支的链环，且$\mathscr{H}_{\{R_\alpha\}}$(L) 表示 L 的带色 HOMFLY-PT 多项式，其着色由群 $U_q(\mathfrak{sl}_N)$ 的一组杨表表示 Rα, α = 1, . . . , l 给出。给定

$$R^{(\alpha)} \otimes \bar{R}^{(\alpha)} = \bigoplus_i Q_i^{(\alpha)},$$

其中每个 $Q_i^{\alpha} \in \mathrm{Rep}(U_q(\mathfrak{sl}_N))$，反向 2-缆链环的带色 HOMFLY-PT 多项式（未归一化）由下式给出

$$\mathscr{H}_{\{R_1,\dots,R_l\}}\big(C_2(L,t_{\mathrm{v}})\big) := \sum_{i_1,\dots,i_l} \mathscr{H}_{Q_{i_1}^{(1)},\dots,Q_{i_l}^{(l)}}(L).$$

HOMF　具有 l 个分支的反向 2-缆链环 T (m, n) 的 LY-PT 多项式（已归一化）　is

$$P\big(C_2(T(m,n),t_{\mathrm{v}})\big) = \frac{1}{\mathscr{H}_{[1]}(U)} \sum_{k=0}^{l} \binom{l}{k} \mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\Big(T\big(mk/l, nk/l\big)\Big), \tag{33}$$

其中我们置 $\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(\mathrm{T}\ (0,0)) = 1$。

例 2.33（2-缆链环 T (2,n) 和 T (3, n)）。反向 2-缆链环 T (2,n) 的基本表示归一化 HOMFLY-PT 多项式:

$$P\big(C_2(T(2,n),t_{\mathrm{v}})\big) = \frac{1}{\mathscr{H}_{[1]}(U)}\Big(1 + 2\underbrace{\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(1,n/2)\big)}_{D_{\mathrm{Adj}}} + \mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(2,n)\big)\Big). \tag{34}$$

类似地，反向 2-缆链环 T (3,n) 是

$$P\big(C_2(T(3,n),t_{\mathrm{v}})\big) = \frac{1}{\mathscr{H}_{[1]}(U)}\Big(1 + 3D_{\mathrm{Adj}} + 3\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(2,2n/3)\big) + \mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}\big(T(3,n)\big)\Big). \tag{35}$$

以下内容将定理 1.1 推广到链环情形。类比于 (1) 和 (28)，称 $[\mathrm{M};\ \mathrm{M}]_v$ 表示一个多项式 X，且 $\min \deg_v \mathrm{X} = \mathrm{M}$ 和 $\max\deg_v \mathrm{X} \leq \mathrm{M}$。

定理 2.34（链环的平直段）。反向二重缆 l 分支环面链环 $C_2(T_{m,n},t_{\mathrm{v}})$ 的 HOMFLY-PT 多项式具有如下形式

$$P\big(C_2(T_{m,n},t_{\mathrm{v}})\big) = \left[1 - 2m;\ 2n\ \frac{l-1}{l} + \frac{2m}{l} - 1\right]\Bigg]_v + \underbrace{\zeta_{m,l} z v \frac{v^{2n} - v^{2m}}{v^2 - 1}}_{\text{panhandle}}. \tag{36}$$

因此，链环把手的长度等于 $2(\mathrm{n} - \mathrm{m})/\mathrm{l}$。

证明。由引理 2.31(i) 和公式 (33) 可得此结论。特别地，(36) 中来自 $\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(\mathrm{T}\ (\mathrm{mk}/\mathrm{l},\ \mathrm{nk}/\mathrm{l}))$ 的平柄贡献会产生 $\mathrm{v}^{2nk/l}$ 项，这些项是多项式 $\left[1 - 2\mathrm{m};\ 2\mathrm{n}\ l-1\ l + 2\mathrm{m}/\mathrm{l}\ -1\right]_v$ 在 $\mathrm{k} \neq \mathrm{l}$ 时的部分。还需证明定理中的多项式 $\left[1 - 2\mathrm{m};\ 2\mathrm{n}\ l-1\ l + 2\mathrm{m}/\mathrm{l}\ -1\right]\Big]_v$ 恰好就是该多项式，而不只是 $\left[\left[1 - 2\mathrm{m};\ 2\mathrm{n}\ l-1\ l + 2\mathrm{m}/\mathrm{l}\ -1\right]\right]_v$，也就是说，证明 v^{1-2m} 前的系数不为零。为此，我们采用 (18) 的证明；该证明在此仍然成立，但不再赘述。□

注 2.35（一致性检验）。当 $\mathrm{l} = 1$ 时，此定理退化为定理 1.1。还需注意，当 $\mathrm{m} = \mathrm{n}$ 时，我们仍然得到 $\max \deg_v \mathrm{P}(\mathrm{C}_2(\mathrm{T}_{m,n},\mathrm{t_v})) = 2\mathrm{n} - 1$，因为式 (18) 背后的论证仍然成立。

例 2.36（链环 T (3, 12)）。作为该定理的示例，T (3, 12) 的系数列于表 5。可以看到，从 z^{23}, 开始，只有标量贡献（黄色方框）；在 z^{17},处，还出现了来自 $\mu =$ 伴随表示的贡献（绿色方框）；从 z^{11}, 开始，出现了 $\mathfrak{p} = 2$ 对应的贡献（蓝色方框）；最后，从 z^{5}, 开始，出现了 $\mathfrak{p} = 3$对应的贡献。事实上，由于公式 (35)，$\mathscr{H}_{\mathrm{Adj}}(\mathrm{T}\ (2,\ 8))$ 也对该表有所贡献：从 z^{15}, 开始，有其泛柄贡献[2],，而 $\mathfrak{p} = 1$ 和 $\mathfrak{p} = 2$ 对应的贡献则分别从 z^{9} 和 z^{3} 处首次出现。表中每一行的数字之和都等于零，这正是康威多项式消失的情形，因为该链环围成一个不连通的塞弗特曲面。

[2]例如，项 $\mathrm{z\ v}^{15}$ 来自以下各项之和：式 (26) 中 (T (3,12)) 的伴随表示的 $-9\mathrm{zv}^{15}$ 贡献——在此情形下为 $\mathrm{c}^{\mathrm{Adj}}\,\mathrm{Adj} = 9$——、来自 (T (3,12)) 的 $2\mathrm{zv}^{15}$ 泛柄贡献，以及来自 (T (2,8)) 的 $3\mathrm{zv}^{15}$ 泛柄贡献；总和为 $-4\mathrm{zv}^{15}$。

(z\v)	-5	-3	-1	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
-5	-11	-11	-10	26	5	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
-3	-2138	-3123	-475	3789	1911	30	18	-18	6	0	0	0	0	0	0
-1	-73146,	-112956	-9402	124628	70234	522	330	-282	72	0	-9	9	0	0	0
1	-996684	-1584078	-95046	1681752	987298	5984	2126	-1624	272	-4	-4	2	2	2	2
3	-7184691	-11634737	-592970	12111874	7254903	43737	5676	-4164	372	0	0	0	0	0	0
5	-31609050	-51945059	-2466115	53420915	32403009	194098	7770	-5790	222	0	0	0	0	0	0
7	-92427173	-153901035	-7147177	156866451	96049439	558115	6012	-4692	60	0	0	0	0	0	0
9	-189895362	-320221087	-14912425	323970681	199954829	1102890	2730	-2262	6	0	0	0	0	0	0
11	-284749628	-486266654	-22982519	488654927	303785858	1557932	720	-636	0	0	0	0	0	0	0
13	-319999214	-553472921	-26692421	552641876	345909242	1613432	102	-96	0	0	0	0	0	0	0
15	-274472117	-480911809	-23716007	477208635	300647119	1244179	6	-6	0	0	0	0	0	0	0
17	-181826796	-322794482	-16287176	318353438	201834960	720056	0	0	0	0	0	0	0	0	0
19	-93628147	-168439053	-8695805	165120651	105329345	313009	0	0	0	0	0	0	0	0	0
21	-37521836	-68412618	-3613274	66665888	42780334	101506	0	0	0	0	0	0	0	0	0
23	-11653501	-21535255	-1163599	20862369	13465831	24155	0	0	0	0	0	0	0	0	0
25	-2774868	-5197330	-287336	5005906	3249538	4090	0	0	0	0	0	0	0	0	0
27	-496702	-942884	-53355	903021	589454	466	0	0	0	0	0	0	0	0	0
29	-64640	-124350	-7206	118434	77730	32	0	0	0	0	0	0	0	0	0
31	-5771	-11249	-668	10656	7031	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
33	-316	-624	-38	588	390	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
35	-8	-16	-1	15	10	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表 5：$C_2(T_{3,12},(0,0,0))$ 的 HOMFLY-PT 多项式。

注释 2.37（n 较大时的行为）。事实上，当 n 足够大时，由于泛柄贡献，$C_2(T_{m,n},t_v)$ 中的各项（z 的一次项除外）在 v 的次数上彼此分离。这由引理 2.31(ii)可知。

例 2.38（$n = 42$）。例如，对于 $C_2(T_{3,42},(0,0,0))$，可以观察到

$$\begin{aligned} C_2\big(T_{3,42},(0,0,0)\big) &= z^{-5}\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}\right)+\\ &+ z^{-3}\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}\right)+\\ &+ z^{-1}\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}+9(v^2-1)v^{55}\right)+\\ &+ z\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}-6v\frac{v^{56}-v^{28}}{v^2-1}+2v\frac{v^{84}-1}{v^2-1}\right)+\\ &+ z^{3}\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}\right)+\\ &\cdots\\ &+ z^{35}\left([-5,5]_v+[-3,3]_v v^{28}\right). \end{aligned} \tag{37}$$

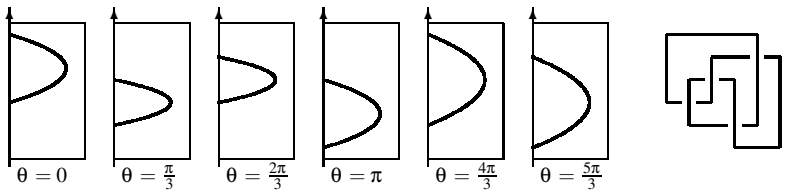
公式中的多项式 $[-5,5]_v$ 和 $[-3,3]_v$ 在 z 的不同次数项上必然不同。由于表格太大，我们不展示这种情况的表格。

3 几何性质

在接下来的小节中，我们概述定理 1.1 的几何推论。不过，我们不打算深入讨论细节，因为这需要引入一系列不同的工具。相关内容请参阅后续论文[JLS1][JLS2][St1], ，本文仅总结这些论文中相关的部分。

3.1 弧指数和 Thurston-Bennequin 不变量

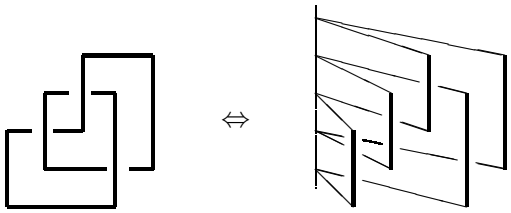
纽结或链环 L 的弧表示，是指 L 的一个环境同痕像，它包含于有限个半平面的并集中；这些半平面称为页，并具有一条公共边界线，且每个半平面都包含一条适当嵌入的单弧。



链环 L 的所有弧表示中所需页数的最小值称为 L 的弧指数，记作 a(L)。参见 [MB]。

网格图是一种结图，由有限条水平边和数量相同的垂直边组成，且垂直边总是从水平边上方交叉而过。不难看出，每个纽结都存在一个网格图。

下图说明弧表示与网格图一一对应。



令 ι(D) 表示网格图的大小，即水平线段（或等价地，垂直线段）的数量。因此

$$a(K) = \min\{\iota(D) : D \text{ is a grid diagram of } K\}.$$

若 ι(D) = a(K)，则称 D 是 K 的最小网格图。

还有一种对应关系：将 K 的网格图旋转 $\pi/4$ 后，可以将其视为 K 的某个 Legendrian 嵌入的 Legendrian 前沿图。参见 [LN][Ta1][FT]。

Legendrian 同痕有一个不变量，称为 Thurston-Bennequin 不变量/数。这里我们用网格图等价地定义它。

定义 3.1。网格图 D 的 Thurston-Bennequin 不变量记作 TB(D)，定义为

$$TB(D) = -Z(D) + w(D), \tag{38}$$

其中，w(D) 是 D 的扭绕数（将 D 视为 K 的平面图），Z(D) 是 D 中西北角或东南角的数量。

定义 3.2。纽结 K 的最大 Thurston-Bennequin 不变量记作 TB(K)，定义为

$$TB(K) = \max\{TB(D) \,|\, D \text{ is a grid diagram of } K\}.$$

3.2 辫指数与辫曲面

设 b(K) 为 K 的辫指数，即 K 的辫代表中弦线数量的最小值。根据 MFW 不等式 [Mo][FW], , L 的一个 r 弦辫代表的扭绕数 w 满足

$$w + r - 1 \geq \max \deg_v P(L) \geq \min \deg_v P(L) \geq w - r + 1, \tag{39}$$

因此

$$\mathrm{MFW}(L) := \tfrac{1}{2} \operatorname{span}_v P(L) + 1 \leq b(L), \tag{40}$$

其中左侧是不变量 L 的辫指数 b(L) 的 MFW界。如果 MFW(L) =b(L)，则称 L 是 MFW-尖锐的。

Artin 生成元 σ_i （见（4））被推广为带生成元 [BKL]

$$\sigma_{i,j} = \sigma_i \ldots \sigma_{j-2}\sigma_{j-1}\sigma_{j-2}^{-1} \ldots \sigma_i^{-1}, \tag{41}$$

使得 $\sigma_i = \sigma_{i,\ i+1}$。

辫 β 及其闭包链环 L = ^β 的表示，作为 $\sigma_i^{\pm 1,\ j}$ 中的一个词，称为带表示。β 的带表示自然张成链环 L 的塞弗特曲面 S：在股上粘接圆盘，并沿着 $\sigma_{i,\ j}$ 用半扭带将它们连接起来。所得曲面称为 L 的编织塞弗特曲面。在

事实上，Rudolph 的一个结果 [Ru2]（后来由 M. Hirasawa 独立重新发现）指出，任何塞弗特曲面都具有这种形式。

亏格最小的编织塞弗特曲面 S 称为 Bennequin 曲面（见 [BMe]）。如果 S 可以实现为 b(L) 股上的 Bennequin 曲面，则称 S 为 L 的最小弦 Bennequin 曲面。根据 Bennequin 和 Birman-Menasco [BMe], , 三股辫链环 L 存在最小弦 Bennequin 曲面。然而，由 [HS], 可知，四股辫结早已不满足这一结论。关于最小弦 Bennequin 曲面的更多研究，参见 [St2]。

3.3 拟正性与强拟正性

如果一个链环是某个形如 β 的辫的闭包，则称其为拟正链环

$$\beta = \prod_{k=1}^{\iota} w_k \sigma_{i_k} w_k^{-1}, \tag{42}$$

其中 w_k 是任意辫词，σ_{i_k} 是辫群的一个（正）标准 Artin 生成元（见 [BO]）。如果词 $w_k \sigma_{i_k} w_k^{-1}$具有 (41) 中 $\sigma_{i_k,\ j_k}$ 的形式，那么

$$\beta = \prod_{k=1}^{\iota} \sigma_{i_k, j_k}, \tag{43}$$

因此可以将它们视为嵌入带。以这种方式得到的链环，即具有此类正带表示的链环，称为强拟正链环。关于这一主题的概述见 [Ru1]。

问题 3.3。（Rudolph；参见 [St3，第 8.3 条注释。3]）若 L 是强拟正的，是否存在一个以 b(L) 股表示 L 的强拟正辫代表?

例如，在例行的表格编制过程中，第四位作者已确认，对于交叉数不超过 16 的强拟正素结，这一结论成立。

我们仍用 χ(L) 表示 L 的最大欧拉示性数，如 §2.3 中定理 1.1 的证明所述；w(β) 表示辫 β 的扭绕数／指数和。

ˆ 定理 3.4（Bennequin [Be]）。对于 $\beta = L$，对于 $\beta \in B_r$，有

$$-\chi(L) \geq w(\beta) - r\,.$$

因此，Bennequin 的工作表明，任何强拟正塞弗特曲面——即仅含正带的编织塞弗特曲面——都是 Bennequin 曲面：若链环 L 有一个位于 r 股上、带有 ι 条带的强拟正塞弗特曲面 S，则 $\chi(L) = \chi(S) = r - \iota$。

对于 χ_4(L)，即 L 的（光滑）切片欧拉示性数，也有一个类似的不等式，

$$-\chi_4(L) \geq w(\beta) - r\,. \tag{44}$$

这有时称为切片 Bennequin 不等式。

推论 3.5. 每个强拟正曲面都是 Bennequin 曲面。

Baker-Motegi 提出，强拟正链环的每个最小属曲面是否都是强拟正的。（见 §4.2.4。）这是一个未解决问题。关于这一问题的一些研究，参见 [St2]。

我们还注意到，前面提到的带有 Hirasawa [HS] 的例子并非强拟正。因此，不能用它们的 Bennequin 曲面来解答问题 3.3。

定义 3.6. 链环 L 是 Bennequin 锐的，当且仅当

$$-\chi(L) \;=\; \max\left\{ w(\hat{\beta}) - r \;\middle|\; \hat{\beta} = L,\ \beta \in B_r \right\}.$$

类似地，如果对于 proper β，不等式 (44) 可以取等号，那么它就是切片 Bennequin-尖锐的。

推论 3.7. 如果 L 是强拟正的，那么 L 就是 Bennequin 锐的。

问题 3.8（Bennequin 锐化问题；例如参见 [FLL, St2]）。链环 L 是强拟正的，当且仅当 L 是 Bennequin 锐的。

回到 $C_2(K,t)$（回顾定义 2.10），令

$$\lambda(K) := \min\{\, t \mid C_2(K,t) \text{ is strongly quasipositive} \,\}.$$

Rudolph 已知以下结果，但 [JLS1] 对其的重新证明揭示了新应用中的一个基本见解。

定理 3.9（Rudolph；参见 [JLS1]）。若 $K \neq U$ 非平凡，则有 $\lambda(K) = -TB(K)$。此外，$C_2(K,t)$ 是强拟正的，当且仅当 $t \geq \lambda(K)$。

这种关系源自一种构造，该构造由 Rudolph 提出（参见 [Ru3, 图 1]），随后 Nutt 也提出了类似构造（参见 [Nu, 定理 3.1]）；我们称之为网格带构造。更多内容参见 [JLS1][JLS2]。注意，对于平凡结 $\lambda(U) = 0$，但 $-TB(U) = 1$。下文中，我们仍倾向于用符号 $\lambda(K)$ 而非 $TB(K)$。（要得到关于最大 Thurston-Bennequin 不变量的陈述，只需反转符号。平凡结总可以单独处理。）

定义 3.10。我们用 $W_{\pm}(K,t)$ 表示框架为 t 且带正/负扣结的纽结 K 的 Whitehead双。

Rudolph 的工作还蕴含以下结论。

定理 3.11（见 [JLS2]）。$W_+(K,t)$ 是强拟正的，当且仅当 $t \geq \lambda(K)$。而 $W_-(K,t)$ 永远不是强拟正的。

[St1] 中讨论的是这些链环的拟正性。特别是，我们与 S. Orevkov 知道，其拟正性并不总是等价于强拟正性。这里我们应强调$\lambda(K)$ 与 $a(K)$ 之间的联系。当 D 是纽结 K 的网格图时，通过改变所有交叉并旋转$\pm\pi/2$，可以将其镜像 !D 视为镜像结 !K 的网格图。由 (38)，令

$$\lambda(D) = -TB(D) = Z(D) - w(D).$$

显然可以观察到

$$\lambda(D) + \lambda(!D) = \iota(D).$$

定理 3.12（Dynn ikov-Prasolov [DP]）。若 D 是 $K(\neq U)$ 的一个最小网格图，则 $\lambda(D) = \lambda(K)$。

这得出了以下重要关系（此前已有猜想）

$$\lambda(K) + \lambda(!K) = a(K). \tag{45}$$

3.4 环面纽结的性质

现在我们开始将前面的设定与定理 1.1 联系起来。我们定义了两个不变量 [JLS2], ，现将其稍作改写如下。

定义 3.13（[JLS2]）。设 K 是一个纽结。假设选择 $t \in \mathbb{Z}$ 使得

$$\min \deg_z P(C_2(K,t)) = 1 - 2m < 0, \qquad \max \deg_z P(C_2(K,t)) = 2n - 1 > 0, \tag{46}$$

对于正整数 m、n。然后设

$$\ell(K) := 1 + \tfrac{1}{2} \operatorname{span}_v P(C_2(K,t)) = m + n \tag{47}$$

and

$$\theta(K) := t + m. \tag{48}$$

注意，由于 $C_2(K,t)$ 是一个二分支链环，$\min\deg_z P(C_2(K,t))$ 和 $\max\deg_z P(C_2(K,t))$ 总是奇数。从 (19) 也很容易看出，对于每个 K，都存在一个 t 满足 (46)。

我们回顾一下，t 可以从 $P(C_2(K,t))$ 中提取出来，而且实际上有两种相互独立的方法。一种是式 (19)。但一种更简单的方法是

$$t = [P(1,z)]_z,$$

利用康威多项式 $\nabla(z) = P(1,z)$ 包含链接数。（在 [JLS2], 中给出的、比式 (48) 复杂得多的 $\theta(K)$ 定义中用到了这一点；该定义不假设式 (46) 成立。）进一步注意到如下性质

$$\theta(K) + \theta(!K) = \ell(K),$$

这与式 (45) 类似。

定理 3.14（[JLS2]）。对于每个非平凡结 K,

$$\ell(K) \le a(K) \quad \text{and} \quad \theta(K) \le \lambda(K).$$

定理 3.14 与定理 1.1 蕴含了 Etnyre-Honda 关于环面纽结 [EH], 的弧指数的一个结果

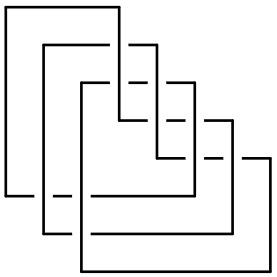
$$a(T_{m,n}) = m + n. \tag{49}$$

（正如 [St1], 中所指出的，当 p 为奇数时，无法从 [MB] 得出这一结论。）定理 3.14 还得出了 Etnyre 和 Honda 的另一项结果

$$\lambda(T_{m,n}) = -mn + m + n, \quad \lambda(!T_{m,n}) = mn. \tag{50}$$

（我们继续用“!”表示“镜像”。）

另请注意，以备后文参考，$T_{m,n}$ 有一个大小为 $\iota(D) = m + n$ 的网格图 D，它是此处所示图在 $m = 3$ 和 $n = 5$时的显然推广。



(51)

我 们将把该图及其关于 $!T_{m,n}$ 的平面镜像称为标准网格图 .

注意，要得到 (49) 和 (50) 所需的反向不等式，只需查看 $T_{m,n}$ 的这个标准网格图 D，并从中读出其 Thurston-Bennequin 不变量 T B(D)，如 (38) 所示。另请注意，根据 (20)，$\lambda(T_{m,n}) = 1 - 2g(T_{m,n})$；这也可由 [Ta2], 得出，因为 $T_{m,n}$ 是一个正结。

性质 (49) 表明，$T_{m,n}$ 是 [JLS2] 中所称的 ℓ-锐结。

定义 3.15（[JLS2]）。若 $\ell(K) = a(K)$，则称纽结 K 为 ℓ-锐的。

在该文及后来的 [St1], 中，研究了 ℓ-锐性的各种应用。例如，我们还知道交替结是 ℓ-锐的。（当然，还有更多：除了 10_{132} 之外，所有交叉数不超过 10 的素结都是 ℓ-锐的。）

这里我们介绍环面结的一些应用，不给出详细证明；相关证明可参见 [St1]。不过，我们强调，这些证明有时可直接由 ℓ-锐性推出，或只需满足一些由定理 1.1 保证的附加条件。

第 一个结果证明了拟正性与强拟正性之间的等价关系 y.

推论 3.16. 假设 $K = T_{m,n}$ or $!T_{m,n}$. 那么

(i) 每个 C_2(K,t) 是拟正的，当且仅当它是强拟正的；(ii) 每个 W_+(K,t) 是拟正的，当且仅当它是强拟正的；以及 (iii) noW_-(K,t) 不是拟正的。

我们还可以解决这些链环的 问题 3.8。

推论 3.17. 假设 K $= T_{m,\ n}$ 或 $!T_{m,\ n}$。那么每个 C_2(K,t) 和 $W_{\pm}$(K,t) 都是强拟正的，当且仅当它是 Bennequin 锐的。

请注意，对于 W_-(K,t)，这实际上再次表明它对于任何 t 都不是 Bennequin 锐的。接下来的推论讨论 问题 3.3 以及最小弦 Bennequin 曲面的存在性。

推论 3.18. 假设 K $= T_{m,\ n}$ 或 $!T_{m,\ n}$。那么每个 C_2(K,t) 和 $W_{\pm}$(K,t) 都具有一个最小弦 Bennequin 曲面；若其为强拟正，则具有一个最小弦强拟正曲面。

这一性质的证明当然依赖于确定辫指数。

推论 理 3.19. 假设 K $= T_{m,\ n}$ 或 $!T_{m,\ n}$。那么每个 C_2(K,t) 和 $W_{\pm}$(K,t) 都是 MFW 锐。

可以写出显式公式。b(C_2(K,t)) 的公式最简单，它类似于 Diao 和 Morton [DM] 针对交替结所证明的结果。将 (49) 和 (50) 代入下述更一般的结果即可得到这一公式。

命题 3.20（[JLS2]）。假设 K 是一个非平凡的 ℓ-锐纽结。那么

$$b(C_2(K,t)) = \begin{cases} \lambda(K) - t & if\ t \le \lambda(K) - a(K), \\ a(K) & if\ \lambda(K) - a(K) \le t \le \lambda(K), \\ t - \lambda(K) + a(K) & if\ t \ge \lambda(K). \end{cases} \tag{52}$$

4 环面链环的应用

4.1 不变量

4.1.1 弧指数

假设

$$l = (m,n) > 1.$$

环面链环 $T_{m,n}$ 有 l 个分支

属于纽结型 $T_{m/l,n/l}$。我们还始终采用基本假设

$$n \ge m.$$

现在再次考虑 $T_{m,n}$ 的辫表示，将其视为一个有 (m − l)n 个交叉的 m-辫。对每个分支取反向平行线并采用黑板框架后，得到 l 个分支，每个分支的框架为

$$\left(1 - \frac{m}{l}\right)\frac{n}{l}. \tag{53}$$

$T_{m,n}$ 的每个分支 K_i 的链接数为

$$lk(K_i, K_j) = \frac{m}{l} \cdot \frac{n}{l} \tag{54}$$

与其他每个分支的链接数。

定理 4.1。环面链环的弧指数为 a($T_{m,\ n}$) $= m + n$。

证明。首先注意到，标准网格图 (51) 显然可以推广到环面链环。我们仍将此图及其平面镜像称为环面链环的标准网格图。

情形 1。l <m。于是，$T_{m/l,n/l}$ 中的每个分支都打结了。因此

$$a(T_{m,n}) \geq l \cdot \left(\frac{m}{l} + \frac{n}{l}\right) = m+n.$$

情形 2。l = m，因此 m |n。$T_{m,n}$ 的所有 p 个分支都是平凡结。

令 k = n/m = n/l。$T^{m,n}$ 中的任意两个分支构成一个 $T2_{,2k}$，并且在 $T_{m,n}$的网格图中，其大小为 ≥2k +2。

取 $T_{m,n}$的所有二分支子链环，使得每个分支都被计数 (m − 1) 次。于是

$$\begin{aligned}\text{grid size} &\geq \#\text{ pairs} \cdot \frac{1}{\text{number of times a component counts}} \cdot 2(k+1)\\ &= \frac{m(m-1)}{2} \cdot \frac{1}{m-1} \cdot 2(k+1)\\ &= m(k+1) = n+m.\end{aligned}$$

□

4.1.2 Thurston-Bennequin 不变量

对于一个具有编号分支 K_i, i = 1, . . . ,l 的链环 L，令

$$M = L(t_1, \ldots, t_l) \tag{55}$$

令 M 为 L 的带状链环，其中环绕分支 K_i的环带框架为 t_i 。这是结 K 的 C_2(K,t) = K(t) 的自然推广（且 l = 1）。这一构造自然带有一种特定的配对方式，将 M 的各分支两两配对（每对中的两个分支具有相同的结型），我们称之为带状结构。（Whitehead双也有一种颇具启发性的推广，但会遇到更多复杂问题；见 §4.3。）

关于要预先列出的链环 (55)，有几点需要说明。至少对于环面链环 L，按以下意义来说，这种记法基本上没有歧义。

引理4.2. 链环 $T_{m,n}(t_1, \ldots, t_l)$，在对分支置换取同痕的意义下，唯一确定 $(t_1, \ldots, t_l)$，但仅确定到置换为止。

证明. 设 $K1, \ldots, K_{2l}$ 是类型为 $T_{m/l,n/l}$ 的 2l 个环面纽结，即其分支为

$$M = T_{m,n}(t_1, \ldots, t_l).$$

那么，对于每个固定的 K_i，数值

$$\{lk(K_i, K_j) : j \neq i\}$$

会成对抵消（如 $\{1,2,3,3,2\} \mapsto \{1,3,3\} \mapsto \{1\}$），并剩下一个数 k_i（括号中的例子里为 $k_i = 1$）。于是 $(k1, \ldots, k_{2l})$ 会使每个数值出现偶数次；将 (k, k) 替换为 k （如 (1, 2, 2, 1) 替换为 (1,2) ），便可得到 $(t1, \ldots, t_l)$，但仅确定到置换为止。 □

不过请注意，M 的带状结构在带的集合的同痕意义下并不唯一。研究这些链环时应牢记这一点。

例4.3。取 M = $T_{m,n}(-n/l \cdots, = n/l)$，其中 l = m。那么，M 是一个含有 n/l 个整圈扭转的 2l 股辫的闭包，其中一半股线定向向下。这些分支可交换，因此，一条固定的向上定向辫股与每条向下定向的股线都围成一个 $-n/l$ 框环带。这意味着，将 M 的 2l 个分支编号后，M 至少有 l! 种不同的带状结构。

这些分 Legendrian链 $\mathscr{L}$的分支 $\mathscr{K}_i$ 的 Thurston-Bennequin 分支不变量为

$$(TB(\mathscr{K}_1), \ldots, TB(\mathscr{K}_l)). \tag{56}$$

显然，在考察 Legendrian链环的 Legendrian 同痕时，这是研究 Thurston-Bennequin 不变量的自然对应形式。然而，几乎所有地方似乎都只是将式 (38) 加以推广。对于链环，它得到的是更粗略得多的不变量

$$TB(\mathscr{L}) = 2lk(L) + \sum_{i=1}^{l} TB(\mathscr{K}_i), \tag{57}$$

其中 lk(L) 是 L 的总链接数。这种简化正是 [DP、Ta1、Ta2] 在链环情形中出现的简化。它再次使我们能够通过设定以下条件来求最大值

$$TB(L) = \max\{TB(\mathscr{L}) : [\mathscr{L}] = L\}, \tag{58}$$

其中方括号表示其底层的拓扑链环型。

由于我们重视（而且常常需要）关注分支逐一的 Thurston-Bennequin 不变量，因此我们将尽量避免采用上述参考文献中的框架。特别是，据我们所知，以下论述似乎首次从链环多项式中提取了关于 (56) 的信息（定理 4.5 和 4.9），而非仅仅关于 (57) 的信息。不过，出于显而易见的原因，我们也会讨论后者，并将符号推广为

$$\lambda(L) = -TB(L). \tag{59}$$

注 4.4。需要提醒的是，向量 (56) 的理解要比其简化形式 (57) 复杂得多。例如，我们或许可以将

$$\lambda(\mathscr{K}_i) = -TB(\mathscr{K}_i)$$

但代价是增加某个其他 $\lambda(\mathscr{K}_j)$。我们借助 Dynnikov-Prasolov（定理 3.12）推断出的第一个例子是（适当取镜像后的）怀特黑德链环：它是可交换的，且弧指数为奇数。不过，我们很快就会看到，这个问题在某些环面链环中表现得更加突出。特别是，先验而言，最大化 (56) 似乎并无多大意义。我们将在 §4.4 讨论角框架时再回到这个问题。

定理 4.5. 元组 $(\lambda(\mathscr{K}_1)\ldots,\lambda(\mathscr{K}_l))$ 实现了 $T_{m,n}$ 的 Legendrian 嵌入的逐分支 Thurston-Bennequin 不变量（取负）

$$\iff \lambda(\mathscr{K}_i) \geq \left(1-\frac{m}{l}\right)\frac{n}{l} + \frac{m}{l}$$

对所有 $i = 1,\ldots,l$.

我们指出，对于 Legendrian 环面链环，我们并不清楚式 (56) 的效力如何（下文的定理 4.9 也同样如此）。不过，我们在某些负环面链中发现的特殊现象，应当提醒人们，在将纽结的完备性结果 [EH] 扩展时务必谨慎。当然，这项研究（包括马斯洛夫数等）超出了本文的范围和我们在此采用的方法。不过，至少我们弥补了用式 (57) 替代式 (56) 时所造成的信息（大量）损失。

证明. $\Longleftarrow$。通过取式 (51) 的网格图并施行逐分支正稳定化，即可构造出这样的嵌入。（正稳定化是在一条竖直边处添加一条短水平边，从而形成一对东北角和西南角；参见式 (83) 和 [JLS2, (3.9)]。）

$\Longrightarrow$。每个 Legendrian 嵌入都会给出分支 K_i 的一个 Legendrian 嵌入，它是一个 $T_{m/l,\ n/l}$。L 的这个 Legendrian 嵌入 $\mathscr{L}$ 会产生 L 的一个网格图，从而得到 $L(t_1,\ldots,t_l)$ 的一个强拟正带表示，其中

$$t_i = \lambda(\mathscr{K}_i)$$

满足 (59)。

每个 K_i 都出现在一个子网格图中，因此每个 $C_2(K_i,t_i)$ 都有一个强拟正带表示，其中的带对应于 $K_i = U$. （这里我们将 L 的分支 K_i 写成非花体字母。）因此，结合 (59)，我们有

$$t_i \geq \lambda(T_{m/l,n/l}) = \left(1-\frac{m}{l}\right)\frac{n}{l} + \frac{m}{l}.$$

请注意，平凡结 $K_i = U$（其中 $l = m$）也不例外：右侧给出 1。请注意，$\lambda(U) = 0$仅仅是由于 $C_2(U, 0)$ 存在空带表示，而这种表示并非来自 U 的网格图。

□

注 4.6。从 L 转向其子链环时，网格图的存在至关重要。显然，L 的每个网格图都会给出 L 的某个子链环的网格图。但若一个链环 M 是强拟正的，则其子链环也必然如此；这一说法一般而言大错特错，参见 [St4]。只有借助网格图，我们才能看出 $M = L(t_1, \ldots, t_l)$（及其所考察的子链环）具有这一性质。

下面的推论广为人知（更一般的情形也如此，见 [Ta2]），但（如上所述）这里从我们的框架出发加以说明。

推论 4.7. 环面链环的 Thurston-Bennequin 不变量为 $\lambda(T_{m,n}) = -mn + n + m$。

证明。当 $\mathscr{T}_{m,n}$ 是 $T_{m,n}$ 的 Legendrian 嵌入时，

$$\begin{aligned}\lambda(\mathscr{T}_{m,n}) &= -2lk(T_{m,n}) + \sum \lambda(\mathscr{K}_i)\\ &\geq -2\cdot\left(\frac{l(l-1)}{2}\cdot\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}\right) + \left(l\cdot\left(1-\frac{m}{l}\right)\cdot\frac{n}{l} + m\right)\\ &= -\frac{mn(l-1)}{l} + n - \frac{mn}{l} + m\\ &= -mn + n + m,\end{aligned}$$

且相等性是可实现的，因为对于最小的 $\lambda(\mathscr{K}_i)$，我们可以在第二行取等号. □

现在让我们转向 $!T_{m,n}$，这是一个有趣得多的情形。首先，我们对环面纽结 $l = (m,n) = 1$ 作几点说明。它们具有含 $(m-1)n$ 个交叉的负辫表示。我们有

$$\lambda(!T_{m,n}) = mn.$$

由于

$$\lambda(!\mathscr{T}_{m,n}) \geq mn = n + (m-1)n,$$

在黑板框架下的 $\uparrow\downarrow$ 平行体（框架为 $(m-1)n$）中，我们需要为每条带至少添加 n 个额外的正全扭转，才能得到强拟正带表示。

转而考虑链环 $T_{m,n}$ 时，仍可对分支 $T_{m/l,\, n/l}$ 运用上述推理，除非它们是平凡结，即 $m = l$。正如定理 4.1 的证明中已经显而易见的，这种情形在下文中将持续需要额外考量，因此我们先引入以下术语。

定义 4.8。若 $m \mid n$（即 $l = m$），则称 (m,n) 环面链环为纯的；否则称为非纯的。

铭记这一点，对于 $l = (m,n) > 1$，我们给出负环面链环分支级 Thurston-Bennequin 不变量的完整描述。

定理 4.9。假设

$$(t_1, \ldots, t_l) = \left(\lambda(\mathscr{K}_1), \ldots, \lambda(\mathscr{K}_l)\right) \tag{60}$$

是 $!\mathscr{T}_{m,n}$ of $!T_{m,n}$ 的 Legendrian 嵌入的（取反后的）分支逐一的 Thurston-Bennequin 不变量。

(i) 若 $T_{m,n}$ 是非纯的，则对于所有 $i = 1, \ldots, l$，出现的元组 (60) 恰好由以下条件刻画：

$$t_i \geq \frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}. \tag{61}$$

(ii) 若 $T_{m,n}$ 是纯的，则当 $k = n/m$ 时，出现的元组 (60) 恰好由以下两个条件之一刻画：

(a) 或者

$$t_i \geq k \tag{62}$$

对于 $i = 1, \ldots, l$。

(b) 或 $k > 1$，且存在一个数 $1 \leq u < k$ 和一个分支 K_{i_0}，使得

$$t_{i_0} = u \quad and \quad t_i \geq 2k - u \tag{63}$$

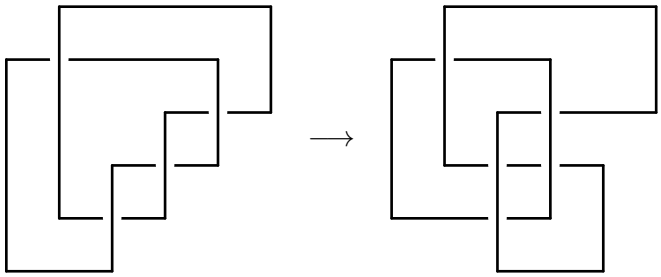
对所有 $i = 1, \ldots, l$，且 $i \neq i_0$。

显然，当 $l = m$ 时，不等式 (62) 是 (61) 的特例。下文将把元组 (63) 称为辅助框架。（“框架”一词指 t_i，它们体现为由 Legendrian 嵌入的网格图通过 §3.3 的网格带构造得到的环带链环的框架——其中当然只使用正带。）

我们还补充以下技术备注。请注意，$!\mathcal{T}_{m,n}$ 是一种记号。$!T_{m,n}$ 的 Legendrian 嵌入并不只是 $T_{m,n}$的 Legendrian 嵌入的镜像。此外，我们假设镜像算子 ! 的结合优先级高于带操作 $L \mapsto L(\ldots)$。也就是说，$!L(t_1,\ldots,t_l)$ 应理解为加括号的形式 $(!L)(t_1,\ldots,t_l)$，而不是 $!(L(t_1,\ldots,t_l)) = (!L)(-t_1,\ldots,-t_l)$。

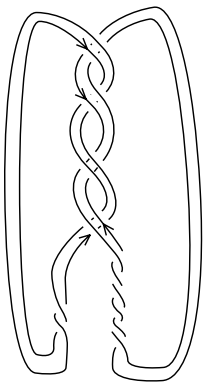
证明。 $\Longleftarrow$ 取 (51) 的平面镜像，它对应于 $!T_{m,n}$的一个最小网格图，然后进行逐分支正稳定化（参见定理 4.5 的证明）。这就实现了 (61) 和 (62)。

为处理 (63)，先令 $m = 2$。考虑以下负 (2,4) 环面链环的 6-网格图，如 (64) 右侧所示。



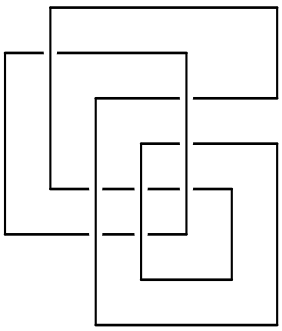
(64)

由正带网格带构造得到的链环 $!T_{2,2}(1, 3)$ 如下所示。



(65)

可以将产生式 (65) 的网格图理解为对标准图应用变换 (64) 的结果，这一过程可以迭代推广。(2, 6) 环面链环的例子说明了如何处理一般的 (2,2k) 环面链环。



(66)

要从这里变换到一个 $(m,mk) = (m,n)$-环面链环，注意到它是通过对其中任意一个分支进行 $m - 1$-缆化操作，并加入 k 个负整圈扭转，从 (2, 2k)-环面链环得到的。至于这一点，留给读者自行证明：

这种缆绕操作可以应用于式 (66) 中带有自交叉的分支（使用适当数量的整圈扭转），从而将其网格中的每一段替换为 $m-1$ 段。

$\Longrightarrow$ 每个 Thurston-Bennequin 不变量为 (T B($\mathscr{K}_1$) . . . ,T B($\mathscr{K}_l$)) 的 Legendrian 嵌入 $!\mathscr{T}_{m,n}$，都会导出 $!T_{m,n}$ 的网格图，以及 $!T_{m,n}(t1,\dots,t_l)$ 的强拟正带表示，其中

$$t_i = \lambda(\mathscr{K}_i).$$

In 特别地，这给出了每个分支 $K_i(t_i) = C_2(K_i,t_i)$ 的强拟正带表示。

若 $K_i \neq U$，即 $l < m$ 时，那么

$$t_i \geq \lambda(T_{m/l,n/l}) = \frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l},$$

至此便完成了。因此，接下来我们只讨论（复杂得多的）纯链环情形

$$l = m \text{ and } K_i = U.$$

为继续讨论，考虑 $!T_{m,n}$ 的二分支子链环，其类型为 $M := !T2_{,2k}$，其中 $k = n/m$。链环 $!T_{m,n}(t1,\dots,t_l)$ 必须是强拟正的，并且对于 $!T_{m,n}$ 的任意二分支子链环 $!T2_{,2k}$，都会得到一个强拟正子链环 $M(t_1,t_2)$（但须注意注 4.6 中的 caveat）。（与式 (65) 中的链环比较，它对应 $t_1 = 1$、$t_2 = 3$ 和 $k = 2$。）

注意，为闭负辫 $\sigma_1^{-2k} \in B_2$ 制作黑板框架的环带，会得到 M(0, 0)。

令 $n' = 2k$。于是定理 2.34 表明

$$\min\deg_v P(M(0,0)) = 1 - 2n' = 1 - 4k.$$

(对于 $m = 2$，这个特殊情形也可以像处理 [JLS2].) 中奇数 n' 的情形那样，通过类似的 skein 代数高招来证明。通过子链环论证，使用网格图（并再次注意注 4.6），我们需要

$$\text{when } M(t_1,t_2) \text{ is strongly quasipositive, then } t_i > 0. \tag{67}$$

因此，我们可以假设只在 M(0,0) 的带中添加正扭转（如前面回顾的例子 (65) 底部所示）。

现在，在 $U(t_l)$ 中对一个交叉进行平滑处理，会得到 U 与 $U(t_2)$ 的分裂并，其中 $t_2 > 0$。这不会影响负 v 次数的 P 项。因此，

$$\min\deg_v P(M(t_1,t_2)) = 1 - 4k + 2(t_1 + t_2)$$

对于 $t_1 + t_2 < 2k$。这意味着

$$\min\deg_v P(M(t_1,t_2)) < 0. \tag{68}$$

Now

$$\chi(M(t_1,t_2)) = 0, \tag{69}$$

因为 $M(t_1,t_2)$ 是两个环带的边界，但不是具有圆盘分支的塞弗特曲面的边界（$M(t_1,t_2)$ 没有分裂的平凡结分支）。

因此，如果 $M(t_1,t_2)$ 是强拟正的，则 $\min\deg_v P(M(t_1,t_2)) > 0$。于是，由 (68) 可得，

$$t_1 + t_2 \geq 2k = n'. \tag{70}$$

这就得到了所要证明的结论：如果所有 $t_i \geq k$，那么对于 $!T_{m,n}$ 的每个二分支子链，条件 (70) 成立，从而有 (61)。否则，令 $0 < t_1 =: u < k$。于是，对于任意选取的、不同于 K_1 的分支 K_2，都有 $t_2 \geq 2k - u$。因此有 (62)。

□

推论 4.10。镜像的 Thurston-Bennequin 不变量为 $\lambda(!T_{m,n}) = mn$。

对于定理 4.9 的这一推论，我们可以借助（70）。

证明。对于非纯 !T$_{m,n}$,

$$\begin{aligned}\lambda(!T_{m,n}) &\geq \sum_i \lambda(K_i) - 2\sum_{i<j} lk(K_i,K_j)\\ &= \left(l\cdot\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}\right) + 2\cdot\frac{m}{l}\cdot\frac{n}{l}\cdot\frac{l(l-1)}{2}\\ &= \frac{mn}{l} + mn - \frac{mn}{l} = mn.\end{aligned}$$

这里，在第一行中，lk(K$_i$, K$_j$) 因镜像而相较于 (54) 改变了符号。

对于纯 !T$_{m,n}$，仍可利用 (70)，对 !T$_{m,n}$ 的所有分支对 K$_i$, K$_j$ 取平均，从而说明第二行中第一对括号的合理性。□

请注意，这个推论也可以从 Dynnikov-Prasolov、定理 4.1 和推论 4.7 得出。不过，我们在这里仍只是提及他们的框架，并不采用它。

4.2 几何性质

4.2.1 重新审视弧指数

结合定理 4.1 和定理 2.34 可知，ℓ-不变量 (47) 确实给出了弧指数的正确值。然而，这个不变量不能直接应用于链环。本文在此以环面链环为起点示例，旨在推广构成 ℓ-不变量基础的技术，使其适用于链环。这也将为如何扩展 ℓ-不变量本身提供思路（§4.4）。

我们继续将 T$_{m,n}$ 的黑板框架带化为具有 (m − 1)n 个交叉的正 m 股辫。它有 l 个分支，每个分支的框架为

$$\delta := \left(1-\frac{m}{l}\right)\frac{n}{l}. \tag{71}$$

由于下文会频繁用到框架平移 δ，为节省篇幅，我们引入以下额外记号。

定义 4.11. 若 (δ + e1, . . . , δ + e$_l$) 是实际框架，则称 (e1, . . . , e$_l$) 为修正框架。记

$$\tilde{T}_{m,n}(e_i)_i = T_{m,n}(\delta + e_i)_i$$

为具有修正框架 (e$_i$)$_i$ 的 T$_{m,n}$ 的带化链环。

于是定理 2.34 推出

$$\max\deg_v P\big(\tilde{T}_{m,n}(0,\ldots,0)\big) = 2n-1.$$

推论 4.12. 具有修正框架的环面链环的最高次数为

$$\max\deg_v P\big(\tilde{T}_{m,n}(e_1,\ldots,e_l)\big) = 2n-1+2\sum_{i=1}^{l} e_i$$

当所有 e$_i \geq 0$ 时。

证明。我们对

$$\left(l, \sum_{i=1}^{l} e_i\right),$$

在 ˜K$_i$(e$_i$) 的一个正交叉处应用 skein 关系 (5),

$$P\big(\tilde{T}_{m,n}(e_1,\ldots,e_l)\big) = vzP_0 + v^2P_-. \tag{72}$$

注意，删除 ˜T$_{m,\ n}$(e1, . . . , e$_l$) 的一个分支 ˜K$_i$(e$_i$) 后，可得到

$$\tilde{T}_{m(l-1)/l,n(l-1)/l}(e_1,\ldots,e_{i-1},e_{i+1},\ldots,e_l). \tag{73}$$

因此，(72) 中的 P$_0$ 是 (73) 与一个平凡结 U 的分裂并的多项式，而 P$_-$ 是.....的多项式

$$\tilde{T}_{m,n}(e_1,\dots,e_{i-1},e_i-1,e_{i+1},\dots,e_l)\,.$$

利用

$$n(l-1)/l<n \tag{74}$$

对 P_0 项的分支数 l 进行归纳，并对 P_- 项的 $\sum_{i=1}^{l} e_i$ 进行归纳，可知 (72) 中 v^2P_- 的最高 v 次项的 v 次数总是高于 vzP_0 的最高 v 次项的 v 次数。

□

推论 4.13. 弧指数为 $a(T_{m,\ n}) = m+n$。

重述这一结果的意义在于，我们现在要强调一种技术，这种技术后来有助于扩展 ℓ-不变量（§4.4），并且更多地利用 HOMFLY-PT 多项式本身的能力，而非子链论证。

证明。假设存在 $T_{m,\ n}$ 的网格图。通过网格带构造，这给出一个强拟正带化链 $M = \tilde{T}_{m,\ n}(e_i)_i$，其中我们需要

$$e_i \geq \frac{m}{l} \tag{75}$$

这是因为各分支具有强拟正性。（辅助框架的问题我们将在后文另行处理。）按照定理 2.34 的证明中应用 (18) 的方式，并计入链接数导致的次数平移，我们得到：

$$\min\deg_v[P(M)]_{z^{1-2l}} = 1\,,$$

当所有 $e_i = m/l$ 时。因此，通过（进一步）交换链接数

$$\min\deg_v[P(M)]_{z^{1-2l}} = 1+2\sum_{i=1}^{l}\left(e_i-\frac{m}{l}\right)$$

对于（75）中的 e_i。由推论 4.12,

$$\max\deg_v P(M) = 2n-1+2\sum_{i=1}^{l} e_i\,. \tag{76}$$

Then

$$\begin{aligned} 2\,\mathrm{MFW}(M)-2 &\geq \max\deg_v P(M)-\min\deg_v[P(M)]_{z^{1-2l}} \\ &= 2n-1+2m-1 = 2m+2n-2\,. \end{aligned}$$

No我们注意到，对于辅助框架（纯链环的），该论证同样适用。因此 s

$$\mathrm{MFW}(M)\geq m+n\,.$$

因此，$T_{m,n}$ 的每个强拟正带化链的辫指数至少为 $m+n$。这给出 $a(T_{m,n}) \geq m+n$，而由（51）显然可得反向不等式。 □

4.2.2 最小字符串强拟正曲面

推论 4.14。设 M 是 $T_{m,n}$ 的一个强拟正带化，其修正框架为（$e_1,\dots,e_l$），对应于（75）。那么辫指数为

$$b(M) = n+\sum_{i=1}^{l} e_i\,.$$

证明。我们使用 (76)，并且

$$\text{“}\min\deg_v P(M) = 1\text{”}. \tag{77}$$

我们不知道这是否总是成立，但为了讨论辫指数，可以假定它成立，因为 Bennequin 不等式以及

$$\chi(M) = 0$$

（论证与（69）相同）。因此，即使（77）不成立，在利用（40）中的 MFW(M) 估算 b(M) 时，我们也总可以假定它成立。有了这一依据，（76）和（77）给出

$$b(M) \geq \text{“MFW}(M)\text{”} = \tfrac{1}{2}\big(\max\deg_v P(M) - \text{“min}\deg_v P(M)\text{”}\big) + 1 = n + \sum_{i=1}^{l} e_i\,. \tag{78}$$

反向不等式成立，因为通过对标准网格图 (51) 进行逐分支正稳定化，可以找到 $T_{m,\,n}$ 的一个网格图，使其 $\lambda(K_i) = \delta + e_i$（见 (71)）。这一过程得到的网格图，其大小正好等于 (78) 右侧的值。

□

推论 4.15. 如果 M 是 $T_{m,\,n}$ 的强拟正带化链环，那么 M 有一个最小弦强拟正曲面。

确定任意 $T_{m,\,n}$ 带状链接的辫指数（以及最小弦 Bennequin 曲面）的问题更为复杂。我们猜测，如果 Diao-Morton 型公式 (52) 对（甚至仅对环面）链环的带化辫指数成立，那么这些公式将会非常复杂，而且极难控制退化情形（即使在我们的特殊情形中也是如此）。

现在考虑镜像 $!T_{m,\,n}$。每个分支都是 $!T_{m/l,\,n/l}$，且最小强拟正环带框架为 $mn\,l^2$，除非 $m = l$（此时我们有辅助框架的构造 (64)、(66)）。回顾定理 4.9。

定理 4.16. 假设 $M = !T_{m,\,n}(t_1, \ldots, t_l)$ 是 $!T_{m,\,n}$ 的强拟正带状结。那么 M 有一个最小弦强拟正曲面。

虽然这里同样可以使用子链环，但论证更多地依赖于 P 本身的容量，并通过 (77) 中的 Bennequin 不等式加以辅助。我们再次看到，这些条件足以确定 M 的辫指数。

证明. 再次根据定理 2.34，取镜像（并且，忽略系数符号后，将 v 换为 v^{-1}），可得

$$!T_{m,n}(\kappa, \ldots, \kappa), \quad \kappa = \left(\frac{m}{l} - 1\right) \cdot \frac{n}{l}$$

（注意 (53) 中符号的变化）有

$$\max\deg_v [P]_{z^{1-2l}} = 2m - 1\,.$$

只需改变链接数即可得到

$$M_0 = !T_{m,n}\left(\frac{mn}{l^2}, \ldots, \frac{mn}{l^2}\right)$$

has

$$\max\deg_v [P(M_0)]_{z^{1-2l}} = 2(m+n) - 1\,.$$

Then

$$\max\deg_v \left[P\left(!T_{m,n}(t_1, \ldots, t_l)\right)\right]_{z^{1-2l}} = 2(m+n) - 1 + 2\sum_{i=1}^{l}\left(t_i - \frac{mn}{l^2}\right)$$

对于 $t_i \geq \frac{mn}{l^2}$，这是由链接数的性质得出的。

由（77），我们有

$$b(M) \geq \text{“MFW}(M)'' = m + n + \sum_{i=1}^{l}\left(t_i - \frac{mn}{l^2}\right)\,. \tag{79}$$

反过来，通过对镜像图（51）进行适当的正稳定化，并应用网格-带构造，可以得到 M 的一个由（79）右端所示股数构成的辫（带）表示。

因此，M 的辫指数由（79）右端给出，并且 M 有一个由相同股数构成的强拟正辫表示。

（对于纯环面链环的）辅助框架可以用类似的方法处理，这里留给读者。 □

这一证明的思路是，当把 L 的强拟正带状链环的 $\max \deg_v P$ 替换为 $\max \deg_v [P]_{z^{1-2l}}$ 时，可以相应调整 ℓ 的定义，使其成为 l 分支链环 L 的弧指数上界。这是另一种思路，无需考察 L 的子链环（及其带状链环）。（更多内容见 §4.4。）

至于 $T_{m,\ n}$，考虑 $!T_{m,\ n}$ 的任意带状链接的辫指数和 Bennequin 曲面，同样过于复杂。

4.2.3 Bennequin 锐性

在此，我们可以推广 Bennequin 锐性的相关结果，并部分推广拟正性与强拟正性的等价性。

定理 4.17. 设 $L = T_{m,\ n}$ 或 $!T_{m,\ n}$。假设 $M = L(t_1, \ldots, t_l)$ 是 Bennequin 锐的。那么它是强拟正的。

证明. 两种情形的思路都是说明 M 的 Bennequin 锐性限制了 t_i，使其符合定理 4.5 和 4.9。随后，这些定理说明（通过网格带构造）M 是强拟正的。

下面记 $w(\beta)$ 表示辫 $\beta \in B_r$ 的扭绕数（指数和），$r = r(\beta)$ 表示其股数 r.

(i) $L = !T_{m,\ n}$。若 $L = L_1 \cup L_2$,，其中 L_i 是 L 的 l_i 分量子链环，则

$$M = M_0 = L(t_1, \ldots, t_l) = M_1 \cup M_2$$

with

$$M_1 = L_1(t_1, \ldots, t_{l_1}), \quad M_2 = L_2(t_{l_1+1}, \ldots, t_l).$$

同样，M_i 不含分裂平凡结，因此 $\chi(M_i) = 0$（论证与 (69) 相同）。此外

$$lk(M_1, M_2) = 0$$

$\hat{}$ 属于 M。我们将在 (81) 中论证，辫 β 具有 $\beta = M$，使 M 达到 Bennequin 锐界时，可分解为子辫 $\beta_i\hat{}$，其具有 $\beta_i = M_i$，使 M_i 达到 Bennequin 锐界。

当 $l < m$ 时，对 M 的单分量子链环进行论证，类似于紧接着的 $l = m$ 情形。

对于 $l = m$ 的情形，使用二分支子链环。如下所示，我们看到一个双分量带状子链环

$$Y = !T_{2,n'}(t_1, t_2)$$

对于 $(n' = 2n/l)$ 是 Bennequin 锐的意味着

$$t_1 + t_2 \geq n', \quad t_i > 0. \tag{80}$$

也就是说，由于 $\chi(Y) = 0$，假设

$$Y \text{ has a braid representative } \beta \text{ with } w(\beta) = r(\beta).$$

$\hat{}$ 因此，β 有子辫 β_1,2，且 $\beta_i = C_2(U, t_i) = U(t_i)$。

我们断言，对于 $i = 1,\ 2,$

$$w(\beta_i) = r(\beta_i). \tag{81}$$

由于 $lk(U(t_1), U(t_2)) = 0$，我们有

$$w(\beta_1) + w(\beta_2) = w(\beta),$$

显然也有

$$r(\beta_1) + r(\beta_2) = r(\beta) = w(\beta).$$

如果对于某个 $i=1$、2，有 $w(\beta_i)>r(\beta_i)$，那么这将与 $U(t_i)$ 的 Bennequin 不等式矛盾，因为 $-\chi(U(t_i))\le 0$（即使 $t_i=0$，这一论证仍然成立）。因此 (81) 成立。

为得到 (80)，我们在 (68) 中验证了

$$\min\deg_v P(Y)<0$$

当 $t_1+t_2<n'$ 时，并且也容易直接验证

$$\min\deg_v P(U(t_i))<0$$

当 $t_i\le 0$ 时。这便证明了 (80)，并像之前一样导出 (62) 和 (63)。

(ii) $L=T_{m,n}$。这更容易。

若 $l<m$，则使用子链环论证来证明 $K_i(t_i)$ 必须是 Bennequin 锐的。这给出了定理 4.5 中的限制，

$$t_i\ge\left(1-\frac{m}{l}\right)\frac{n}{l}+\frac{m}{l},$$

利用定理 4.17 中关于环面纽结的结果。

若 $l=m$，我们仍需要 $t_i\ge 1$（而不只是 $t_i\ge 0$），因为 M 中任何通过带化将 L 的一个平凡结分支与 U 相连的子链环（t_i），都无法得到 M 的分裂平凡结。 □

推论 4.18。假设 $l<m$，即 $T_{m,n}$ 是非纯的。那么，$L=T_{m,n}(t_1,\dots,t_l)$ 或 $!T_{m,n}(t_1,\dots,t_l)$ 是强拟正的，当且仅当它是拟正的。

证明。我们有 $\chi_4(L)=0$，因为 $T_{m,n}$ 的分支都是打结的（且不是切片的），并且即使在 B^4 中也没有任何分支围成一个圆盘。因此

拟正 $\Longrightarrow$ 切片-Bennequin 锐 $\Longrightarrow$ Bennequin 锐 $\Longrightarrow$ 强拟正 。 □

当 $L=T_{m,n}$，且 $l=m$，并且 $K_i=U$ 时，对于 $t_i=0$，$M=L(t1,\dots,t_l)$ 有

$$\chi_4(M)=2.$$

（即使存在多个带有 $t_i=0$ 的 $K_i=U$，由于链接数的原因，也不可能将超过两个切片圆盘延伸到 M 的平凡结分支中。）但是

$$\chi_4(M)>\chi(M) \tag{82}$$

这使先前的证明失效。这提示了如何找到下一个例子，表明推论 4.18 对纯环面链环确实是错误的。

例 4.19。链环 $M=T_{2,2}(0,1)$ 具有如下四股辫表示

$$[-1\ -2\ -3\ -2\,1\,3\ -2\,\underline{3}\,2\ -1\,2\,1\,3\,2].$$

它是拟正的，这一点可通过删除带下划线的字母，并证明剩余的词与最后一个字母 σ_2 共轭来观察。因此，M 是拟正的，但由于（82），当然不是强拟正的。

当然，在许多情况下，仍然可以通过显式计算使用 HOMFLY-PT 多项式来阻碍 M 的拟正性。但在一般形式下，这变得难以控制。（当 $l=1$ 时，这个棘手的情形当然会化为平凡情形。）不过，当 $t_i\ne 0$ whenever $K_i=U$ 时，仍然可以使用该推论的论证。

与注 4.6 类似，考察子链环对于研究拟正性毫无用处（见 [BD]）。

即使不考虑辅助框架，纯环面链环在这里遇到的困难也不足为奇。绝不应认为拟正性与强拟正性的等价是自然而然、甚至是常见的现象。它们不成立的例子数不胜数。值得指出的是，即便对于纽结 K，$C_2(K,t)$ 的这些性质也并不一致（见 [St1]），因此随着分支增多，这类异常只会更加严重。这里，我们的链环 M 何时具有拟正性这一问题，至少部分仍未解决。

4.2.4 Baker-Motegi问题

Baker 和 Motegi（独立地）提出了一个关于强拟正性的相关问题，内容如下。

问题 4.20。（Baker-Motegi）假设链环 M 是强拟正的。M 的每个极大 χ曲面都是强拟正的吗?

例如，这个问题对于 [St2], 中的典范曲面已经得到解决，但这里的曲面显然高度非典范。 [JLS2] 中没有讨论这个问题，因为当 L 是纽结时，M 的极大χ曲面是唯一的（因此问题很简单）。不过，例4.3表明，链环 L 的情况要微妙得多。现在我们可以陈述如下定理。

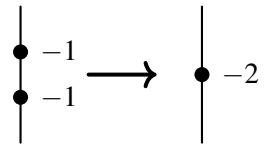
定理 4.21。假设 L 是一个环面链环（正向或反向），且 $M = L(t_1,\ldots,t_l)$ 是强拟正的。那么，M 的每个极大 χ 曲面都是强拟正的。

证明。设 S 是 M 的一个极大 χ曲面。由于 M 以一组环带为边界，且没有分裂的平凡结分支，因此$\chi(M) = 0$，从而 S 是一组环带。这意味着 S 确定了 $M = L(t_1,\ldots,t_l)$ 的带状结构。

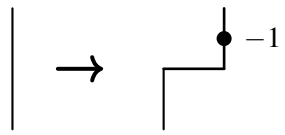
根据 Rudolph [Ru1], S 是一个编织曲面，因此可由 L′ 的网格图 D 上的网格带构造得到，不过其中可能含有负带。

设 $t_i' = \lambda(K_i')$ 表示网格图 D′中分支 K_i'的.....。显然，$t_i' - t_i$是分支 K_i'的负带数量；反向进行网格带构造时，这些负带会被压缩成垂直线段。

现在，我们通过引入珠饰网格图来修正这些负带（并将网格带构造推广到这个稍一般的情形）。每条水平线段上都允许放置一个带整数标签 ξ的珠子，这表示在此处，网格带构造中的带（现在必须为正带）会经历 ξ整圈扭转（正向，若 $\xi < 0$则为$-\xi$ 反向）。显然，标签为零的珠子可以删除（或添加）；同一条垂直线段上的珠子可以合并（通过对曲面 S 进行同痕）。



例如，下面的操作将正稳定化改写为 S 的同痕。



(83)

注意，将珠子从垂直线段的顶端移到底端，是曲面 S 的一次同痕（即带交叉处的一次飞扑）；类似地，也可以将同一分支 L 的珠子移过水平线段（即辫串圆盘处的飞扑）。

现在，根据引理4.2，元组 $(t_1,\ldots,t_l)$ 在排列意义下唯一，因此必须满足定理 4.9 的限制。

根据定理 4.9 的证明，必定存在一系列 Cromwell变换 [AHT]，将上述网格图 D′ 变为一个图 D，其分支 K_i 满足 $t_i = \lambda(K_i)$。

但这一系列 Cromwell变换显然可以扩展为带珠图的一系列 Cromwell变换：每当某个 Cromwell变换改变分支 C 的 TB不变量时，都可以在 C 的某些垂直线段上放置珠子，以修正这一变化。

这些带珠图的 Cromwell变换随后给出曲面 S 的同痕。（上文的带珠正稳定化 (83) 就是一个例子。）最后，D 的每个分支上的所有珠子（及其标签）都必须相互抵消。因此，S 与通过对 D 应用网格带构造而得到的（强拟正）曲面同痕，此时仅使用正带。

□

备注 4.22。请注意，结合 §4.2.2，这个证明得出了比其中结果更强的性质：如果 M $=T_{m,\ n}(t1,\ldots,t_l)$ 或 M $=!T_{m,\ n}(t1,\ldots,t_l)$ 是强拟正的，那么 M 的每个强拟正曲面都可以在 M 的最小弦辫上实现。

人们不禁会猜测（参见 [JLS2]），这一性质是否对任何强拟正链环 M 都成立，但这似乎不太可能。

4.3 Whitehead 倍增链环

另　一种应用回到了 Whitehead 倍增（参见 §4.1.2 开头）。我们将　　e

$$M = L(t_1^{\pm},\ldots,t_l^{\pm}) \tag{84}$$

通过标明 L 的每个分支的框架和扣结来表示。因此，按照前文的记号，$L(t_1^{+}) = W_{+}(L,t_1)$ 和 $L(t_1^{-}) = W_{-}(L,t_1)$。

我们只陈述以下定理。其证明需要将更多工具（包括割补论证和同痕不变量）进行更长且更棘手的 amalgamation，略微超出了本文的风格（和篇幅）。（如有需要，可索取该证明。）

定理 4.23。链环 M $=L(t_1^{\pm},\ldots,t_l^{\pm})$ 是强拟正的，当且仅当所有扣结均为正，且 $(t_1,\ldots,t_l)$ 满足定理 4.5 对 L $=T_{m,n}$ 所规定的限制；或满足定理 4.9 对 L $=!T_{m,n}$ 所规定的限制。

下面这个如今已不那么令人惊讶的例子再次提醒我们：要理解链环 M 的拟正性，很可能相当困难，即使 L 是环面链环也是如此。

例 4.24。经过一些谨慎修改，例 4.19 可以给出 M $=T^{2,2}(0^{+},1^{+})$ 的一个四股辫表示，

$$[-1\ -2\ -3\ -2\,1\,3\ -2\,3\,3\,2\ -1\,2\,2\,1\,3\,2].$$

因此，这个链环（由一个平凡结和一个右手三叶结分支组成）是拟正的，并且 $\chi_4(M) = 0$。不过，定理 4.23 的证明确实推出，对于强拟正的 M，

$$\chi(M) = -l. \tag{85}$$

当 l 为 $=2$ 时，这同样会得到 (82)。因此（即使不直接援引定理 4.23），我们也能看出 M 不可能是强拟正的。

注 4.25. 结合推论 4.12 的一个变体与 Bennequin 界 (77)，不难论证定理 4.23 中的链环 M 存在一个最小弦强拟正曲面。（如同在 (77) 中那样使用 (85)。）然而，问题 4.20 的解决（即定理 4.21 的一个类似命题）仍遥不可及。

4.4 将 ℓ-不变量推广到一般链环

这里我们将此前主要用于环面链环的一些思路推广到一般链环 L。与纽结相比，处理链环时需要考虑更多技术细节。

基本假设：L 没有平凡分裂分支。

定义 4　　.26. 假设 L 有编号分支 K_i，其中 i $=1,\ldots,l$。L 的框架锥为

$$\Omega(L) := \{(t_1,\ldots,t_l)\ :\ L(t_1,\ldots t_l) \text{ is strongly quasipositive}\}.$$

由于前文已经解释过的原因（并基于上述基本假设），

$$\Omega(L) = \left\{ (t_1,\ldots,t_l)\ :\ \begin{array}{l}\text{There is a Legendrian embedding}\\ \mathscr{L} \text{ of } L \text{ with } (\lambda(\mathscr{K}_i))_{i=1}^{l} = (t_i)_{i=1}^{l}\end{array} \right\}.$$

由于正稳定化，如果 $(t1,\ldots,t_l) \in \Omega(L)$，那么

$$\left(\prod_{i=1}^{l}[t_i,\infty)\right)\cap\mathbb{Z}^l \subset \Omega(L)\,.$$

Let

$$C(t_1,\ldots,t_l) := \left(\prod_{i=1}^{l}[t_i,\infty)\right)\cap\mathbb{Z}^l\,.$$

定义 4.27. 当

$$\Omega(L) = \bigcup_j C(t_{1,j},\ldots,t_{l,j})\,,$$

使得不存在 $\{C(t_{1,j}\ \cdots,t_{l,j})\}_j$ 的真子族的并覆盖 $\Omega(L)$，我们称 $(t_{1,j}\ \cdots,t_{l,j})$ 是 L 的角框架。

L 的角框架集合在置换意义下唯一确定（这是一个简单但略显繁琐的练习）。

例子 4.28. 定理 4.5 和 4.9 表明，$T_{m,n}$具有单一的角框架（$\alpha,\ldots,\alpha$），适用于

$$\alpha = \left(1-\frac{m}{l}\right)\frac{n}{l}+\frac{m}{l}\,. \tag{86}$$

当 $m \nmid n$ 时，$!T_{m,n}$具有单一的角框架（γ，...，γ）用于

$$\gamma = \frac{mn}{l^2}\,.$$

否则，对于 $k = n/m$，它有一组角框架

$$(u, 2k-u,\ldots,2k-u)\,, \tag{87}$$

对于任意 $1 \le u \le k$，以及（若 $u < k$，则包括循环）其置换。

可以很容易地论证（利用可容许框架的存在性；见定义 4.29 和例 4.31），对于每个固定的链环 L，角框架只有有限多个。但因此，即使是（纯）环面链环，其角框架数量也可以任意大。另一系列例子是怀特黑德链环的连通和。（在识别出纯环面链环之前，我们已根据注 4.4 知道这些例子。）

辅助框架 (87)（当 $u < k$ 时）的另一个推论是，角框架未必能实现 (59) 中的最小总不变量 $\lambda(L)$。

我们不知道在某些额外假设下（例如 L 是交替链环[3]），是否可以避免这种特殊情况。不过，有充分证据表明，对于大多数链环 L，角框架都无法用简单的方式描述。

定义 4.29. 我们称

$$\phi = (t_1,\ldots,t_l) \succeq \phi' = (t'_1\ldots,t'_l)$$

若对所有 $i = 1,\ldots,l$ 都有 $t_i \ge t'_i$，则称 ϕ 是 ϕ' 的一次稳定化。若 L 的框架 $(c'_1,\ldots,c'_l)$ 满足：对于 L 的每个角框架 $(e1,\ldots,e_l)$，都有 $(c'_1,\ldots,c'_l) \preceq (e1,\ldots,e_l)$，则称其为可容许的；换言之，若

$$\Omega(L) \subset C(c'_1,\ldots,c'_l)\,.$$

例 4.30. 若 $l = 1$（因此 L 是一个纽结），并且假设

$$\lambda(U) = 1\,, \tag{88}$$

那么 $\phi = (t)$ 当且仅当 $t \le \lambda(L)$ 时是可容许的。

例 4.31。特别要注意，$\lambda(L) := (\lambda(K_1)\ldots,\lambda(K_l))$ 总是可容许的，因为我们始终考虑带有带的 $U(t_i)$ 的强拟正带表示，因此也允许设定 (88)。（这里还用到了 L 没有平凡分裂分支这一假设。）因此，所有 $\phi \preceq \lambda(L)$ 也都是可容许的。

[3]注意，对于环面链环，我们确实需要 $m > 2$，这一情形才会发生。

为了尝试推广 $L = T_{m,n}$ 的推理，我们提出了一些想法，由此得到适用于链环的另一种 ℓ-不变量。

定义4.32。(i) 若$(\varnothing = L_0, L1, \dots, L_l)$是L的子链环标志，则称之为L的一个子链环标志，其中$L_l = L$，且每个L_{i-1}都是从L_i中恰好删去L_i的一个分支得到的。

(ii) 我们将这一概念推广到L的带化：若$M_{i-1} = L_{i-1}(c_{i-1,\,1}, \dots, c_{i-1,\,i-1})$是从$M_i = L_i(c_{i,\,1}, \dots, c_{i,\,i})$删去$K_{i,\,j_i}(t_{i,\,j_i})$的两个分支得到的，则称之为带化，其中某个 $1 \le j_i \le i$，使得

$$(c_{i-1,1}, \dots, c_{i-1,i-1}) = (c_{i,1}, \dots, c_{i,j_i-1}, c_{i,j_i+1}, \dots, c_{i,i}).$$

(iii) 若带化子链环标志$(\varnothing = M0, \dots, M_l = M)$满足下式，则称之为P递增：

$$\max \deg_v P(M_i) > \max \deg_v P(M_{i-1}), \tag{89}$$

对每个i，规定$\max \deg_v P(\varnothing) := 0$。

尽管这个条件看起来很技术化，但请记住，它只是有限个不等式(89)。容易看出，不等式的个数等于l维立方体1-骨架中的边数，即$l2^{l-1}$。

定理4.33。设 L 具有可容许框架 ϕ，使得 $M = L(\phi)$ 的每个带状链环的旗标都是 P递增的。那么

$$\ell_0(L) := \min_{\kappa\, corner\, framing} \frac{1 + \max \deg_v P(L(\kappa))}{2}$$

满足

$$a(L) \ge \ell_0(L).$$

证明概要。 We 这里只概述论证，因为它大体上重复了针对环面链环所展开的推理。

思路是像推论 4.12 的证明那样使用子链环，并利用 Bennequin 不等式约束 (77)。前述评注还说明，κ 只有有限多个，因此在求最小值时不会有问题。

（M 为 P递增的条件意味着参与取最小值的表达式均为正。） □

例 4.34。我们写作 ℓ_0，以强调对于纽结 K，$\ell_0 = \ell$ 并非总是成立。例如 $\ell(10_{132}) = 8$，但对于 $\lambda(10_{132}) = 1$（顺便说一句，这也确定了我们对该纽结取镜像的方式），我们有 $\max\deg_v P(C_2(10_{132}, 1)) = 17$，因此 $\ell_0(10_{132}) = 9$。

然而，以下结论确实成立：

$$\ell_0(K) \ge \ell(K), \tag{90}$$

我们邀请读者思考这一点（见下文例4.36）。

一种更实用的修改方式如下，它不要求事先知道角框架。

定理 4.35。设 L 带有可容许框架 ϕ，使得 $M = L(\phi)$ 的每个带状链环旗标都是 P递增的。那么

$$\ell_\phi(L) := 1 + \frac{\max \deg_v P(L(\phi)) - \min(1, \min \deg_v [P(L(\phi))]_{z^{1-2l}})}{2}$$

满足

$$a(L) \ge \ell_\phi(L).$$

证明概要。这利用了这样一个事实： $[P(M)]_{z^{1-2l}}$ 只会随链接数的变化而平移（见定理 4.16 的证明）。

□

例4.36。这个界显然取决于 ϕ。例如，若 $L = 10_{132}$ 且 $\phi = (0)$，则 $\ell_\phi(L) = \ell(L) = 8$；但正如我们所见，若 $\phi = (1)$，则 $\ell_\phi(L) = 9$。

留给读者作为练习，验证当 $L = K$ 是一个纽结，且

$$\phi = (\theta(K)),$$

满足 (48) 时，这可以改写为

$$\theta(K) = \min\{t \in \mathbb{Z} : \min\deg_v P(C_2(K,t)) > 0\},$$

那么 $\ell_\phi(K) = \ell(K)$ 就恢复了纽结的 ℓ-不变量 (47)。（在上面的例子中，$\theta(10_{132}) = 0$。）这个论证也很容易表明

$$\ell(L) \le \ell_\phi(K), \tag{91}$$

对于一个纽结 K，w 无论选择何种可容许框架 ϕ。这与 (90) 有关，事实上也解释了 (90)。

例4.37。最后一个例子是通过定理 4.35（简要地）重新考察环面链环。当 $L = T_{m,n}$ 时，$\lambda(K_i) = \alpha$ 见 (86)。因此，(71) 中的 $\phi = (\delta, \ldots, \delta)$ 是可容许的。我们验证了（本质上是因为 (74)），ϕ给出了一个带化，其带具有 P递增旗。于是，由定理 2.34 可得

$$\max\deg_v P(L(\phi)) = 2n-1, \quad \min\deg_v [P(L(\phi))]_{z^{1-2l}} = 1-2m,$$

从而得到 $\ell_\phi(L) = m+n$，与之前一样。

致谢

我们感谢 Andrey Morozov 提供的有益讨论。A.M. 的工作部分由俄罗斯科学院信息传输问题研究所的国家任务经费资助，部分得到理论物理与数学促进基金会“BASIS”的资助以及亚美尼亚科学委员会 24WS-1C031 号资助。H.S. 和 V.K.S. 的工作得到阿联酋Tamkeen通过纽约大学阿布扎比分校研究所 CG008 号资助的支持。

参考文献

[Al] J. W. Alexander，《纽结与链环的拓扑不变量》，《美国数学会汇刊》30（1928年），275–306，[doi:10.1090/S0002-9947-1928-1501429-1]。[AHT] T. Ando、C. Hayashi 和 M. Taguchi，《纽结与链环网格图上的Cromwell变换》，预印本。[AM] A. Anokhina 和 An. Morozov，《着色HOMFLY多项式的缆化过程》，Teor. Mat. Fiz. 178（2014年），3–68, [doi:10.1007/s11232-014-0129-2], [arXiv:1307.2216]。[Be] D. Bennequin，《伪凸球中的缠结与 Pfaff方程》，法国数学会，Astérisque 107-108（1983年），87–161, [numdam.org/item/AST 1983 107-108_87_0]。[BKL] J. S. Birman、K. Ko 和 S. J. Lee，《解决辫群中的字问题与共轭问题的新方法》，《数学进展》139(2)（1998年），322–353, [doi:10.1006/aima.1998.1761]。[BMe] J. S. Birman 和 W. W. Menasco，《通过闭辫研究链环 II：关于 Bennequin定理》，Topology Appl. 40(1)（1991年），71–82, [doi:10.1016/0166-8641(91)90059-U]。[BMi] L. Bishler 和 A. Mironov，《伴随表示中的环面纽结与Vogel普适性》，Eur. Phys. J. C85（2025年）8, 911, [doi:10.1140/epjc/s10052-025-14651-7], [arXiv:2506.06219]。[BD] B. Bode 和 M. R. Dennis，《构造节点集为任意指定纽结或链环的多项式》，J. Knot Theory Ramif. 28（2019年），1850082, [doi:10.1142/S0218216518500827]。[BO] M. Boileau 和 S. Orevkov，《伪凸球中解析曲线的拟正性》，C. R. Acad. Sci. Paris 332（2001年），1–6, [doi:10.1016/S0764-4442(01)01945-0]。[ChE] I. Cherednik 和 R. Elliot，《通过双仿射 Hecke 代数研究环面纽结的精细复合不变量》，Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. 25（2016年），433-471, [doi:10.5802/afst.1501], [arXiv:1503.01441]。

[D+] S. Dharа、A. Mironov、A. Morozov、An. Morozov、P. Ramadevi、V. K. Singh 和 A. Sleptsov，《承载任意对称表示的三股辫所构成的多色链环》，Ann. Henri Poincar´e 20(12)（2019年），4033–4054, [doi:10.1007/s00023-019-00841-z],[arXiv:1805.03916]。

[DM] Y. Diao 和 H. Morton，《交替结的反向平行链环的辫指数》，《代数与几何拓扑》24 (2024年), 2957–2970, [doi:10.2140/agt.2024.24.2957]。

[DP] I. A. Dynnikov 和 M. V. Prasolov，《矩形图的旁路：琼斯猜想的证明及相关问题》，《莫斯科数学会汇刊》2013年, 97–144,[doi:10.1090/S0077-1554-2014-00210-7]。

[EH] J. Etnyre 和 K. Honda，《纽结与接触几何 I：环面纽结与八字结》，《辛几何杂志》1(1) (2001年), 63–120, [Euclid:jsg/1092316299]。

[FLL] P. Feller、L. Lewark 和 A. Lobb，《近乎正链环是强拟正的》，《数学年刊》385 (2023年), 481–510, [doi:10.1007/s00208-021-02328-x]。

[FW] J. Franks 和 R. Williams，《辫与琼斯多项式》，《美国数学会汇刊》303(1)（1987），97–108, [doi:10.1090/S0002-9947-1987-0896009-2]。

[H+] P. Freyd、J. Hoste、W. Lickorish、K. Millet、A. Ocneanu 和 D. Yetter，《纽结和链环的一种新多项式不变量》，《美国数学会公报》12（1985），239–246，[doi:10.1090/S0273-0979-1985-15361-3]。

[FT] D. Fuchs 和 S. Tabachnikov，《标准接触空间中 Legendrian 纽结和横截纽结的不变量》，《拓扑学》36(5)（1997），1025–1053, [doi:10.1016/S0040-9383(96)00035-3]。

[HM] R. Hadji 和 H. Morton，环带上完整 HOMFLY skein 的一组基，《剑桥哲学学会数学会刊》141（2006年），81–100, [doi:10.1017/S0305004105009047]。

[HS] M. Hirasawa 和 A. Stoimenov，没有最小弦 Bennequin 曲面的纽结实例，《亚洲数学杂志》7（2003年），435–446, [doi:10.4310/AJM.2003.v7.n3.a6]。

[JLS1] G. T. Jin、H. J. Lee 和 A. Stoimenov，网格图、链环指数与强拟正性，参见 [stoimenov.net/stoimeno/homepage/papers.html]。

[JLS2] G. T. Jin、H. J. Lee 和 A. Stoimenov，网格图、链环指数与 HOMFLY-PT 多项式，参见 [stoimenov.net/stoimeno/homepage/papers.html]。

[Jo] V. Jones，通过冯·诺伊曼代数研究纽结的多项式不变量，《美国数学会通报》（新系列）12（1985年），103–111, [doi:10.1090/S0273-0979-1985-15304-2]。

[KRT] C. Kassel、M. Rosso 和 V. Turaev，《量子群与结不变量》，法国数学会，巴黎（1997），[ISBN:2-85629-055-8]。

[KR] A.N. Kirillov 和 N.Reshetikhin，Bethe Ansatz 与杨表组合学，《苏联数学》41（1988），925–955, [doi:10.1007/BF01247088]。

[KS] A.Klimyk 和 K. Schm¨udgen，《量子群及其表示》，物理学文本与专著，施普林格出版社，柏林（1997），[doi:10.1007/978-3-642-60896-4]。

[Ko] K. Koike，关于经典群表示的张量积的分解：通过泛特征，《数学进展》74 (1989)，57–86, [doi:10.1016/0001-8708(89)90004-2]。

[LM] W. B. R. Lickorish 和 K. C. Millett，定向链环的一个多项式不变量，《拓扑学》26(1) (1987), 107–141, [doi:10.1016/0040-9383(87)90025-5]。

[LZ] X. S. Lin 和 H. Zheng，关于 Hecke代数与着色HOMFLY多项式，《美国数学会汇刊》362(1) (2010)，1–18, [doi:10.1090/S0002-9947-09-04691-1],[arXiv:math/0601267]。

[LN] C. Livingston 和 S. Naik，双重结的 Ozsv´ath-Szab´o 与 Rasmussen不变量，《代数与几何拓扑》6(2006年), 651–657, [doi:10.2140/agt.2006.6.651]。

[Mac] I. G. Macdonald，《对称函数与霍尔多项式》，克拉伦登出版社，牛津（1995），[ISBN:9780198504504]。

[MMM] A. Mironov、R. Mkrtchyan 和 A. Morozov，论通用结多项式，J. High Energy Phys. 02 (2016) 078, [doi:10.1007/JHEP02(2016)078], [arXiv:1510.05884].[MM] A. Mironov 和 A. Morozov，论拓扑轨迹的霍普夫诱导变形，JETP Lett. 107(11) (2018)，728–735, [doi:10.1134/S0021364018110048], [arXiv:1804.10231].[MMM2] A. Mironov、A. Morozov 和 An. Morozov，HOMFLY多项式的特征标展开。II. 基本表示。辫中至五股，J. High Energy Phys. 03 (2012) 034，[doi:10.1007/JHEP03(2012)034], [arXiv:1112.2654].[Mo] H. R. Morton，塞弗特圆与结多项式，Proc. Camb. Phil. Soc. 99 (1986)，107–109，[doi:10.1017/S0305004100063982].[MB] H. R. Morton 和 E. Beltrami，弧指数与考夫曼多项式，Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. 123 (1998)，41–48, [doi:10.1017/S0305004197002090].[Na] T. Nakamura，关于闭正辫的辫指数札记，Topology Appl. 135(1-3) (2004)，13–31, [doi:10.1016/S0166-8641(03)00109-3].[Nu] I. J. Nutt，在开书分解中嵌入纽结与链环 III. 关于卫星链环的辫指数，Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 126 (1999)，77–98, [doi:10.1017/S0305004198002849].[Re] K. Reidemeister，纽结理论的初等论证，Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. 5 (1927)，24–32, [doi:10.1007/BF02952507].[RT] N.Y. Reshetikhin 和 V. G. Turaev，带状图及其由量子群导出的不变量，Commun. Math. Phys. 127(1) (1990)，1–26, [Euclid:cmp/1104180037].[RJ] M. Rosso 和 V. Jones，论由量子群导出的环面纽结不变量，J. Knot Theor. Ramifications 2 (1993)，97–112, [doi:10.1142/S0218216593000064].[Ru1] L. Rudolph，复平面曲线的纽结理论，载于《结理论手册》，W. Menasco 和 M. Thistlethwaite（编），爱思唯尔科学出版社（2005），329–428，[doi.org/10.1016/B978-044451452-3/50009-5].[Ru2] L. Rudolph，闭辫的辫曲面与塞弗特带，Comment. Math. Helv. 58 (1983)，1–37, [doi:10.1007/BF02564622].[Ru3] L. Rudolph，通过接触几何与“经典”规范理论得到的切片性障碍，Invent. Math. 119(1) (1995)，155–163, [doi:10.1007/BF01245177].[St1] A. Stoimenov，网格图、链环指数与拟正性，可向作者索取。[St2] A. Stoimenov，实现强拟正链环与Bennequin 曲面，即将在Publ. Res. Inst. Math. Sci.发表，[stoimenov.net/stoimeno/homepage/papers.html].[St3] A. Stoimenov，图示亏格、生成元及其应用，泰勒-弗朗西斯/CRC出版社数学专著与研究札记（2016），[doi:10.1201/9781315368672].[St4] A. Stoimenov，强拟正链环的子链环，J. Math. Sci. (Series B), 275(1) (2023)，38–54，[doi:10.1007/s10958-023-06658-w].[Ta1] T. Tanaka，交替链环的最大瑟斯顿-贝内昆数，Topology Appl. 153(14) (2006)，2476–2483, [doi:10.1016/j.topol.2005.10.001].[Ta2] T. Tanaka，正链环的最大贝内昆数与考夫曼多项式，Proc. Amer.Math. Soc. 127(11) (1999)，3427–3432, [doi:10.1090/S0002-9939-99-04983-7]。