arXiv:2512.22975v1 [cs.DS] 28 Dec 2025

# 利用受限模分划计算推广区间图的参数

Flavia Bonomo-Braberman*布宜诺斯艾利斯大学 FCEyN 计算系，阿根廷；计算机科学研究所（ICC），CONICET-UBA，阿根廷

Eric Brandwein†布宜诺斯艾利斯大学 FCEyN 计算系，阿根廷；计算机科学研究所（ICC），CONICET-UBA，阿根廷

Ignasi Sau‡法国国家科学研究中心（CNRS）LIRMM，蒙彼利埃大学，蒙彼利埃，法国

**摘要**

近期，Lafond 和 Luo [MFCS 2023] 定义了图 $G$的 $\mathcal{G}$-模基数，即将 $V(G)$划分为属于某个图类 $\mathcal{G}$的模所需的最小划分大小。我们分析以 $\mathcal{G}$-模基数为参数时，计算推广区间图的参数的复杂性，其中 $\mathcal{G}$ 对应于区间图类或完全图的并类。具体而言，我们分析计算图的薄度和同时区间数的复杂性。

我们针对以区间模基数为参数的 Thinness 问题，给出了一个线性核；针对以簇模基数加解的大小为参数的 Simultaneous Interval Number，给出了一个 FPT 算法。图的区间模基数不大于其簇模基数，而后者又推广了邻域多样性和孪生覆盖数。因此，我们的结果意味着：当输入图的邻域多样性作为参数时， Thinness存在一个线性核；当孪生覆盖数和顶点覆盖数作为参数时，Thinness 存在 FPT 算法；当邻域多样性加解的大小、孪生覆盖数以及顶点覆盖数作为参数时， Simultaneous Interval Number存在 FPT 算法。据我们所知，在我们的工作之前，尚无用于计算薄度或同时区间数的参数化算法（FPT 或 XP）。

另一方面，我们注意到，当以树宽、路径宽、带宽、（线性）mim-宽度、团宽、模宽，甚至薄度或同时区间数本身为参数时， Thinness 和 Simultaneous Interval Number均不存在多项式核，除非 NP $\not\subseteq$coNP/poly。

**关键词：**薄度、同时区间数、模基数、区间图、参数化复杂性。

*部分由 ANPCyT（PICT-2021-I-A-00755）资助。ORCID：0000-0002-9872-7528。

†部分由 IRP SINFIN（法国-阿根廷）、CONICET（PIP 11220200100084CO）和 UBACyT（20020220300079BA）资助。ORCID：0009-0003-2559-7173。

‡由法国项目 ELIT（ANR-20-CE48-0008-01）资助。ORCID：0000-0002-8981-9287。

# 1 引言

区间图类 [30] 具有许多实用性质，因此适用于为许多常见问题设计快速算法 [33, 34]。因此，人们定义了许多图参数，旨在以某种方式量化一个图与区间图之间的距离，其中包括区间数 [23], 、轨道数 [24], 、薄度 [31], ，以及近年来提出的同时区间数 [1], 等。如果某个图类 $\mathcal{G}$的这些参数之一较小，那么区间图的某些性质可能会在 $\mathcal{G}$中得以保留，因此，在区间图上易于解决的某些问题，在 $\mathcal{G}$ 上也可能易于解决。本文着重研究其中两个参数：薄度和同时区间数。具体而言，我们将关注如何高效地计算它们。我们将在第2节给出它们的形式化定义。现在，我们先简要说明研究这些图参数的动机。

**薄度**。 图的薄度由 Mannino 等人 [31] 提出，用于在给定输入图的适当表示时，在多项式时间内解决 MaximumIndependent Set 问题。这一薄度概念可以看作是对区间图刻画的一种推广：区间图是那些存在顶点排序 $<$ 的图，使得对于任意三个顶点$u < v < w$，如果 $(u, w)$ 是一条边，那么 $(v, w)$ 也必然是一条边 [18]。图的薄度是满足以下条件的顶点划分的最小大小：任意三个顶点 $u < v < w$ 要么满足上述条件，要么 $u$ 和 $v$ 属于划分的不同部分。注意，区间图恰好就是薄度为一的图。

给定一个薄度有 $t$ 界的图的适当表示，已有研究表明，包括 Clique 在内的许多其他问题都可以在以 $t$为参数的 XP 时间内求解；而诸如Capacitated $k$-Coloring 和 List $k$-Coloring 之类的问题，则可以在以 $t$ 加颜色类数量 [31, 6, 13, 5]为参数的 XP 时间内求解。值得注意的是，即使给出了表示 [8]， Chromatic Number 对于 $t = 2$仍然是 NP-完全的。

**同时区间数**。 Beisegel 等人近期提出了同时区间数 [1]。它通过为每个顶点分配一个区间以及来自集合 $\{1, \ldots, d\}$ 的一个 标签子集（其中 $d \in \mathbb{N}$），推广了区间图这一类图。该表示必须满足：当且仅当两个顶点的区间**和**标签集合相交时，它们在图中相邻。同时区间数是满足存在此类表示的最小数量 $d$ 。

Beisegel 等人 [1] 证明，给定一个同时区间数有界于 $d$ 的图的合适表示时， Clique 关于 $d$ 参数化是固定参数可处理 的，而 IndependentSet 和 Dominating Set 关于 $d$ 加上解的大小参数化后是固定参数可处理 的。另一方面，即使给定表示，Chromatic Number 对于 $d = 2$ 仍是NP完全的。

遗憾的是，在一般图上确定这两个参数的值是NP困难的[1, 36]。这促使人们研究在受限输入类上求解这两个参数的算法。首先，Bonomo 和 de Estrada [5] 在多项式时间内解决了余图上的 Thinness ，而 Bonomo-Braberman 等人 [10] 则解决了树上的该问题。
Bonomo-Braberman 等人 [9] 还找出了一些具有有界薄度的图类，在这些图类中，可以在多项式时间内得到大小有界的一致解。另一方面，对于受限图类上 Simultaneous Interval Number 的复杂性，目前所知甚少。

**我们的贡献**。 鉴于上述固有的困难，一种自然的方法是为 Thinness 和
Simultaneous Interval Number 问题寻找参数化算法，

这些问题要求为给定的图找出相应参数的值。特别是，在本项工作之前，尚无已知的固定参数可处理 或甚至XP 算法能够计算这两个参数中的任意一个。

参数化复杂性领域着重于为问题寻找快速算法，前提是输入中的某个自然数——参数——较小。具体而言，一个研究重点是寻找XP 算法。这类算法的运行时间为 $f(k) \cdot n^{g(k)}$，其中 $f$ 和 $g$ 是某些可计算函数， $k$ 是参数， $n$ 是输入的大小。另一个研究重点是固定参数可处理 算法，其运行时间则为 $f(k) \cdot n^c$，其中 $c$是某个常数。为一个问题寻找固定参数可处理算法的一种方法是为其寻找核 。问题的核化 （或核）是一个多项式时间算法，它将每个输入（$x$， $k$）转换为一个等价的实例（ $x'$， $k'$），使得 $|x'|$， $k' \leq g(k)$，其中 $g$ 是某个可计算函数。我们称 $g(k)$ 为核的大小 。为一个问题找到核等价于证明该问题是固定参数可处理 [17, 引理 2]。由于具有实际应用价值，多项式大小的核尤其受到关注。

是否存在以解的大小（分别为数字 $t$ 和 $d$）为参数的 Thinness 或甚至 Simultaneous Interval Number 的固定参数可处理 或XP 算法，目前仍是一个开放问题。这些是最自然的参数化方式，但遗憾的是，这些算法似乎难以获得。因此，我们转而关注基于将输入图划分为若干模的其他较为自然的参数化方式。

图 $G$ 相对于固定图类 $\mathcal{G}$ 的 $\mathcal{G}$-模基数 概念由 Lafond 和 Luo [27] 提出，其定义为将 $G$ 划分为若干模、且每个模诱导出该类 $\mathcal{G}$ 中的图所需的最少部分数。在他们的文章中，Lafond 和 Luo 研究了以某些图类 $\mathcal{G}$ 的 $\mathcal{G}$-模基数为参数的支配问题的复杂性，并利用其结果证明，这些问题以团宽、模宽及其他参数为参数时是 $W[1]$-难的。此外，以$\mathcal{G}$-模基数为参数的问题若有正面结果，则以邻域多样性、孪生覆盖数和顶点覆盖数为参数时也会有正面结果。我们将重点讨论以簇模基数和区间模基数为参数的参数化方式，其中簇是完全图的并所构成的类，而区间是区间图构成的类。

如果对于每个图 $G$，参数 $p(G)$ 都不大于另一个参数 $s(G)$的函数 $f$ ，我们就称 $p$ 对 进行推广。特别地，区间模基数推广了簇模基数。这意味着，对于以输入图的区间模基数为参数的问题，若能得到一个核，则会自动得到一个以簇模基数为参数的问题的核。反过来，簇模基数推广了邻域多样性和孪生覆盖数（后两者都推广了顶点覆盖数），但其一般性不如模宽度。Bonomo-Braberman 等人在一项工作中给出了薄度与其他图宽度参数之间的关系图 [9]。我们在图 1 中将 Bonomo-Braberman 等人的图 [9] 与 Beisegel 等人 [1]、Belmonte 等人 [2], 和 Gajarsk´y 等人 [20], 的图结合起来，并进一步加入了簇模基数和区间模基数。

介绍 $\mathcal{G}$-模基数 [27][1] 的文章提出了一种多项式时间算法，当 $\mathcal{G}$ 满足簇类和区间类所满足的条件时，可针对任意图计算该参数，但其算法并未明确以线性时间运行。因此，我们首先在定理 4 和定理 7 中证明，可以在线性时间内计算图的簇模基数和区间模基数。对于区间模基数，证明需要引理 2 和引理 3 的结果；这些结果允许在不改变整个图薄度的情况下，删除模中诱导区间图的大多数顶点。这些结果无法轻易

[1]完整证明可见于 [28]。

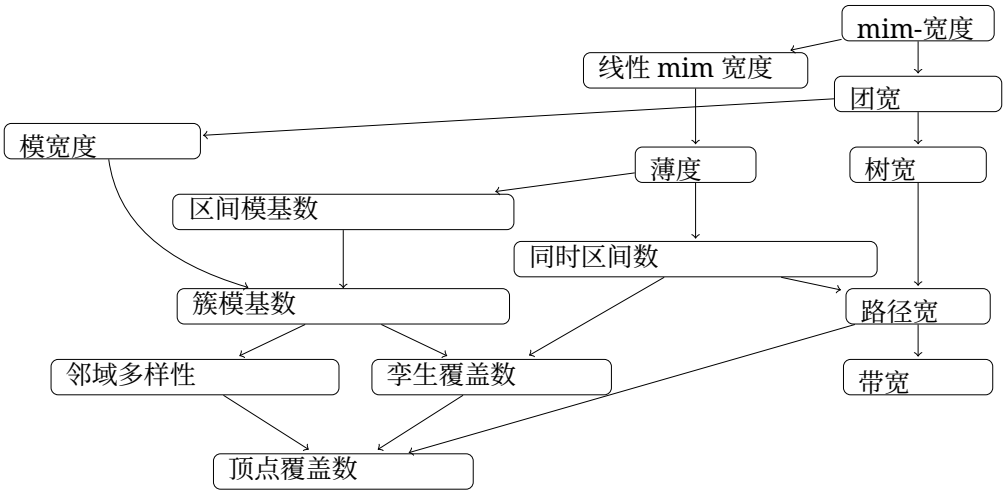



图 1：本文所考察的不同宽度参数之间的关系，以及一些经典参数。这里，从参数 $A$ 指向参数 $B$ 的箭头表示，$A$ 可由关于 $B$ 的某个函数所界定。大多数关系早已为人所知，并出现在 [1, 2, 9, 20] 的关系图中。其余关系则由定理 8、引理10、12和18，以及第4节和第5节中的结果证明。为说明薄度与模宽度之间、同时区间数与区间模基数和邻域多样性之间，以及区间模基数与模宽度之间不可比较，可注意到：余图的模宽度为 2，但薄度无界 [5], ；完全二部图的邻域多样性为 2，但同时区间数无界 [1], ；而路径的同时区间数和区间模基数均为 1，但模宽度无界。余图的线性 mim 宽度有界，但受 Høgemo 等人 [26], 的思路启发，我们还可以构造模宽度有界而线性 mim 宽度无界的图族（见附录A）。

推广到诱导有界薄度图的模；我们在附录 B 中给出一个反例，说明一种可能的推广并不成立。随后，我们运用这些结果，为以输入图的区间模基数（定理 8）和邻域多样性（定理 11）为参数的 Thinness 问题给出线性核，并为以孪生覆盖数（定理 13）和顶点覆盖数（定理 14）为参数的情形给出指数核。此外，我们还给出 Simultaneous Interval Number 问题的固定参数可处理算法，其参数分别为簇模基数与解的大小之和（定理 19）、邻域多样性与解的大小之和（定理 21）、孪生覆盖数（定理 20）以及顶点覆盖数（定理 21）。关于核化下界，我们在定理 38 中指出，对于以若干图参数为参数的 Thinness 或 Simultaneous Interval Number 问题，很可能不存在多项式核；这些参数包括树宽、模宽度，以及薄度和同时区间数本身。最后，在附录A中，我们通过证明模宽度与线性 mim 宽度彼此不能推广，补全了图 1 所示的关系。

为实现上述结果，我们特别强调以下技术贡献：引理 3 证明，几乎所有属于诱导出区间图的模的顶点都可以被删除，而不改变图的薄度；定理 19 则通过将问题归约为有限个小规模……，给出了一个针对 Simultaneous Interval Number 的固定参数可处理 算法，其参数为簇模基数

实例。

**论文结构**。 第2节给出一些必要的定义。第3节证明了一些引理，讨论删除属于同一模的顶点后图的薄度。第4节介绍了计算图的簇模基数和区间模基数的线性时间算法。第5节利用第3节的结果，为以输入图的区间模基数、簇模基数、邻域多样性、孪生覆盖数和顶点覆盖数为参数的 Thinness 问题计算核。第 6 节介绍了针对 Simultaneous Interval Number 问题的固定参数可处理 算法，其参数分别为簇模基数加解的大小、邻域多样性加解的大小、孪生覆盖数和顶点覆盖数。第7节总结算法结果并提出一些开放问题。附录A证明存在模宽度有界但线性 mim 宽度无界的图族，从而补全图 1 的示意图。附录 B 给出了一个反例，说明第3节的结果无法作某种可能的推广。附录 C 指出，以一些常见图参数（包括树宽、模宽度，以及薄度和同时区间数本身）为参数的 Thinness 和 Simultaneous Interval Number 问题不太可能存在多项式核；由于这些证明如今已是参数化复杂性领域的标准证明，我们将此节移至附录。

## 2 预备知识

**图**。 本文中的所有图都是有限无向图，且没有自环或重边。设$G$ 为一个图。我们分别用 $V(G)$和 $E(G)$表示其顶点集和边集。对于顶点 $v \in V(G)$，我们分别用$N(v)$和 $N[v]$表示其邻域和闭邻域。 $G$ 的补图记为$\overline{G}$。设 $X \subseteq V(G)$。我们用 $G[X]$ 表示 $G$ 中由$X$诱导的子图，并用 $G \setminus X$ 表示图 $G[V(G) \setminus X]$。若 $X = \{v\}$，则简记为 $G \setminus v$。

$X$ 是 $V(G)$的一个子集，若其中每一对顶点都相邻，则称其为完全 的（或称为一个团）；若其中没有任何一对顶点相邻，则称其为独立 的。簇 是若干团的并。我们用 cluster 表示所有簇图构成的类，用 interval 表示所有区间图构成的类。

**模**。 图 $G$ 的模 是其顶点的一个子集 $X$ ，满足对于不属于 $X$ 的每个顶点，要么与 $X$ 中的所有顶点相邻，要么与其中任何顶点都不相邻。若一个顶点不属于该模且与该模中的顶点相邻，则称其为该模的邻点 ，或称其相邻 于该模。图的模划分 是将其顶点集划分为若干模的划分。将 $X$收缩为一个顶点 ，定义为所得图 $G|_X$ ： 从 $G$ 中移除 $X$ 内的所有顶点，并添加一个新顶点 $x$ ，使其与 $X$ 中某个顶点的所有邻点相邻。

如果一个模不是 $V$（$G$），则称其为真模 。若不存在 $X$ 的严格超集且该超集是真模，则真模 $X$ 称为极大 模。图 $G$ 的极大模构成一个分割族 [14]，因此可以在图 $G$ 上定义一棵唯一的分解树，使得每个节点都是一个不与其他极大模重叠的极大模（见图2）。 $G$ 的模分解树 是一棵 $T$ 有根树，其递归定义如下：

- 树的根节点是整个图 $G$。
- 如果 $G$ 只包含一个顶点，那么该根节点称为叶节点。
- 如果 $G$ 不连通，那么根节点的子节点就是 $G$各连通分量的模分解树，且根节点称为并行节点。

- 如果 $G$的补图不连通，那么根节点的子节点就是$G$各连通分量的模分解树，且根节点是串行节点。

- 否则，根节点是一个素节点，其子节点是 $G$的极大模组的模分解树。

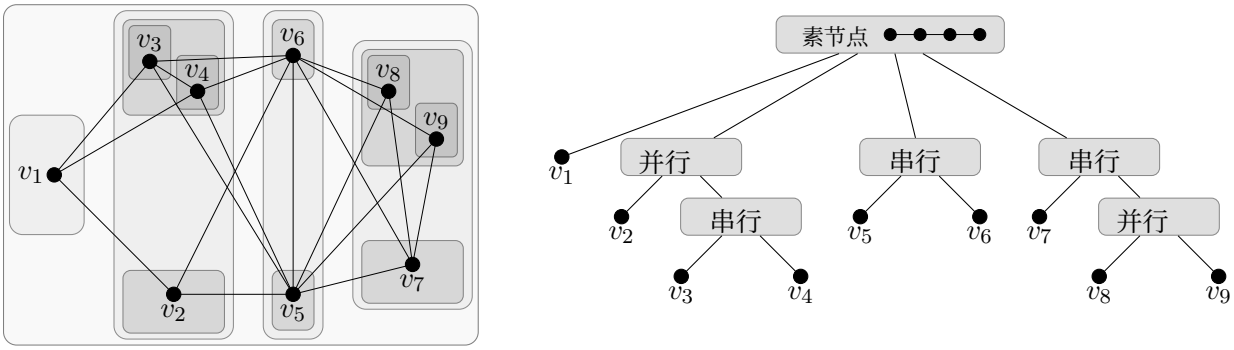



图2：一个图及其模分解树示例。

$G$ [20]的模宽度 mw($G$)是 $G$的模分解树中素节点的最大子节点数；如果不存在素节点，则为 2。

**定义 1**（$\mathcal{G}$-模基数 [27, 定义 1]）。 设 $\mathcal{G}$ 是一个图类，且包含以一个顶点构成的图。对于图 $G$（不一定属于 $\mathcal{G}$）， $G$的模 $M$ 称为 $\mathcal{G}$-模，如果 $G[M]$ 属于 $\mathcal{G}$。图 $G$ 的模划分 $\mathcal{M}$ := $\{M_1, \ldots, M_k\}$ 称为 $\mathcal{G}$-模划分，如果每个 $M_i$ 都是一个 $\mathcal{G}$-模。 $G$的 $\mathcal{G}$-模基数 记为 $\mathcal{G}$-mc($G$)，其定义为 $G$的 $\mathcal{G}$-模划分的最小基数。

薄度。如果存在 $V$($G$)上的严格全序 $<$ 以及$V$($G$)的一个划分 $S$，将其划分为 $k$ 类，使得对于每个满足 $u < v < w$的 $u$、 $v$、 $w \in V$($G$)，如果 $u$和 $v$属于同一类，且（$u$， $w$）$\in E$（$G$），则（$v$， $w$）$\in E$（$G$），则称图 $G$ 是 $k$-薄的。满足这些条件的三个顶点 $u$、 $v$、 $w$称为构成一个一致三元组。满足这些性质的序和划分称为与 $G$一致。我们将元组（$<$， $S$）称为 $G$的一致解。使得 $G$为 $k$-薄的最小 $k$ 称为 $G$的薄度，记为thin($G$)。使用thin($G$)个类的 $G$的一致解称为最优解。 Thinness 问题以一个图和一个自然数 $k$ 作为输入，要求判定输入图的薄度是否至多为 $k$。

**同时区间数**。图 $G$ 的同时区间表示是指为 $V$（$G$）中的每个顶点分配一个区间和一个来自 $\{1, \ldots, d\}$、 $d \in \mathbb{N}$ 的标签子集，使得当且仅当两个顶点的区间和标签集合都相交时，它们在 $G$ 中相邻。我们称 $d$ 为同时区间表示的大小。图 $G$ 的同时区间数si($G$)是图 $G$ 的同时区间表示的最小大小。 Simultaneous Interval Number 问题是：给定一个图 $G$ 和一个整数 $d \geq 0$，确定 $G$ 是否存在一个 $d$-同时表示。

**邻域多样性**。 我们称图 $G$ 中的两个顶点 $v$ 和 $v'$ 具有相同的邻域类型，当且仅当 $N$($v$) $\setminus \{v'\} = N$($v'$) $\setminus \{v\}$ [29,定义 1]。换言之，当且仅当 $v$和 $v'$在 $G$ 中诱导出一个模时，它们具有相同的邻域类型。若存在一个将 $V$($G$) 划分为至多 $w$ 个集合的划分，使得其中所有顶点均

属于同一集合的顶点具有相同的邻域类型。我们将此划分称为 $G$ 的顶点的邻域划分。 $G$ 的邻域多样性记作 nd($G$)，是满足条件的最小 $w$ [29,定义 2]。

**孪生覆盖**。 $X \subseteq V(G)$是 $G$ 的孪生覆盖，当且仅当对于每条边（$a, b$） $\in E(G)$，要么 $a \in X$，要么$b \in X$，要么 $a$ 和 $b$ 是孪生顶点，即 $N[a] = N[b]$。 $G$的孪生覆盖数tc($G$)是 $G$ [22, 的孪生覆盖的最小大小。定义 3.1]。

**顶点覆盖**。 设 $G$ 是一个图。 $V(G)$的子集 $X$ 是 $G$ 的顶点覆盖，当且仅当对于 $E(G)$的每条边（$u, v$），$\{u, v\}$ 中至少有一个属于 $X$。 $G$的顶点覆盖数vc($G$)是 $G$的顶点覆盖的最小大小。

**参数化复杂性**。 参数化复杂性领域旨在为输入附带一个数值、且该数值界定输入的某个参数的问题寻找高效算法。当参数固定时可在多项式时间内运行的算法尤其受到关注。形式上，参数化问题是一个语言 $Q \subseteq \Sigma^* \times N$；如果存在一种算法，能在时间 $f(k) \cdot |x|^{\mathcal{O}(1)}$ 内判定实例（$x, k$）是否属于该语言，其中 $f$是某个可计算函数，则该问题称为固定参数可处理（固定参数可处理）。如果存在一种算法，能在时间 $f(k) \cdot |x|^{f(k)}$ 内判定实例（$x, k$）是否属于该语言，其中 $f$是某个可计算函数，则该问题称为分片多项式（XP）。

**核化**。参数化问题 $Q$ 的核化（或核）是一种多项式时间算法，它将每个实例 ($x$, $k$) 转换为实例 ($x'$, $k'$)，使得：

- ($x'$, $k'$) $\in Q$ 当且仅当 ($x$, $k$) $\in Q$，并且
- $|x'|$, $k' \leq g(k)$，其中 $g$ 是某个可计算函数。

我们称 $g(k)$ 为核的大小。

## 3 在不改变薄度的前提下缩减模

我们首先证明，如果足够大的一组顶点具有相同的邻域，那么可以从图中删除其中一些顶点，而不影响其薄度。这将是证明 Thinness 第5节中的核化结果，以及展示如何用线性时间算法计算定理 7 中的区间模基数的关键。

这里陈述 Bonomo-Braberman 等人关于收缩一个完全模后图的薄度的结果。

**引理 2** ([7, 定理 35])**.** 设 $H$ 是图 $G$的一个模， $G|_H$ 是将 $H$ 收缩为一个顶点后得到的图。若 $H$ 是完全的，则 薄度($G$) $=$ 薄度($G|_H$)。

对于诱导出非完全区间图的模，也有类似的引理。

**引理 3**。 设 $H$ 是图 $G$ 的一个模，使得 $G[H]$ 是区间图且 $H$ 不是完全图。设 $G'$ 是从 $G$ 中删除除两个非邻接顶点之外属于 $H$ 的所有顶点后得到的结果。那么 thin($G$) =thin($G'$)。

证明。由于 $G'$ 是 $G$ 的一个诱导子图，因此有 thin($G$) $\geq$ thin($G'$)。还需证明 thin($G$) $\leq$ thin($G'$)。

从顶点 $G'$的 thin($G'$) 个类上的一致解（$<'$, $S'$）出发，我们将构造一个顶点 $G$ 上的一致解（$<$, $S$），其类数不超过 thin($G'$)，从而证明 thin($G$) $\leq$thin($G'$)。

令 $h_1$ 和 $h_2$ 表示属于 $G'$ 中 $H$ 的另外两个顶点，且满足 $h_1 <' h_2$。取$<_H$ 为顶点 $H$ 的一个排序，该排序与划分 $\{H\}$一致；由于$H$是一个区间图，这样的排序存在。我们通过从（$<'$, $S'$）中移除顶点 $h_2$，并按照 $<_H$所定义的顺序，用 $H$ 中的所有顶点替换 $<'$ 中的顶点 $h_1$，来构造解（$<$, $S$）。此外，我们将 $H$ 中的所有顶点分配到 $S'$中与 $h_1$ 相同的类。

我们声称（$<$, $S$）是 $G$的一致解。我们将通过分析 $G$中的顶点所构成的每个可能的三元组 $u < v < w$，并证明它们构成一致三元组，来证明这一点。根据三个顶点中的哪些顶点属于 $H$，我们区分以下几种情况：

- $u$、$v$、$w$ 中没有一个属于 $H$：该三元组在（$<'$, $S'$）中是一致的，因此在（$<$, $S$）中也同样是一致的。

  $u$、$v$、$w$ 中只有一个属于 $H$：如果该三元组不一致，那么将 $\{u, v, w\}$ 中属于 $H$的顶点替换为 $h_1$，就会在（$<'$, $S'$）中形成一个不一致三元组，这与（$<'$, $S'$）是一致解这一事实相矛盾。

- $\{u, v\} \subseteq H$ 和 $w \notin H$：由于 $H$ 是一个模，顶点 $w$ 要么同时与 $u$ 和 $v$相邻，要么同时与二者不相邻。因此，这是一个一致三元组。
- $u \in H$、$v \notin H$和 $w \in H$：这不可能发生，因为 $H$ 中的顶点在 $<$中是连续的。
- $u \notin H$和 $\{v, w\} \subseteq H$：我们知道在 $G'$中有 $u <' h_1 <' h_2$。由于（$<'$, $S'$）是一致解，顶点 $\{u, h_1, h_2\}$必须构成一个一致三元组。由于 $h_2$不与 $h_1$相邻，要么– $u$ 不与 $h_2$相邻，这意味着 $u$ 也不与模 $H$ 中的任何顶点相邻（尤其是不与顶点 $w$ 相邻）；要么– $u$ 和 $h_1$ 不属于同一个类，这意味着 $u$ 和 $v$ 也不属于同一个类。

两种情况下，$\{u, v, w\}$ 都构成一个一致三元组。

这证明，对于$V(G)$中的顶点，($<$, $S$)是一个一致解，且类数至多为 thin($G'$)，因此 thin($G$) $\leq$ thin($G'$)。结合 thin($G$) $\geq$ thin($G'$)，可得 thin($G$) =thin($G'$)。

□

在引理 3 中，将 $H$ 替换为两个独立顶点的做法并非必要：事实上，将该模替换为任意非完全区间图，都能保持整个图的薄度不变。鉴于区间图恰好是薄度为一的图，自然会让人想知道，是否可以将引理 3 推广到薄度更大的模。具体而言，将薄度为二的模替换为任意其他图时，图 $G$ 的薄度是否保持不变 $H'$，其中 thin($H'$) $= 2$? 答案是否定的；反例的构造将在附录 B 中给出。

结合引理 2 和引理 3 可知，如果模 $H$ 诱导出一个区间图，那么几乎可以删除 $H$ 中的所有顶点，而不改变该图的薄度。给定一个 Thinness实例以及输入图的一个区间模划分，可以在预处理步骤中利用这一点缩减输入图的大小，从而得到一个核。因此，我们需要一种高效计算该图的区间模划分中模的最小数量的方法，下一节将介绍这一方法。

# 4 簇模基数和区间模基数的线性时间算法

如引言所述，提出 $\mathcal{G}$-模数 [27][2]的文章给出了一种多项式时间算法，当 $\mathcal{G}$ 满足某些条件时，可对任意图求得该值；簇类和区间类都满足这些条件。当 $\mathcal{G}$ 对应于区间图类或簇图类时，他们的算法并未明确以线性时间运行。因此，我们针对这两个参数提出了类似的线性时间算法，并利用输入图的模分解。

**定理 4**。 可以在线性时间内计算图 $G$ 的一个最优簇模划分。

证明。 首先，我们计算 $T$ 的模分解树，这可以在线性时间内完成 [16, 32, 37]。然后，对于每个节点 $G_t \in T$ （它是 $G$的一个诱导子图），根据节点 $G_t$的类型，计算 $G_t$ 的顶点的一个最优簇模划分 $S_t$ 。令$\mathcal{C} := \{G_1, \ldots, G_h\}$ 为 $G_t$的子节点（如果存在）。

- **叶节点**： $S_t$ 中的唯一类由 $G_t$中的唯一顶点构成。该顶点显然是一个簇模，因此该划分是唯一的，也就是最优的。
- **并行或串行**：令 $\mathcal{K} \subseteq \mathcal{C}$ 为 $G_t$ 中属于完全图的子节点。我们定义$S_t := \{C_1\} \cup$尾，其中

$$C_1 := \bigcup_{G_i \in \mathcal{K}} V(G_i)$$
$$\mathsf{tail} := \bigcup_{G_i \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{K}} S_{t_i}.$$

  换言之，我们取子节点 $t_i$ 中使得 $G_{t_i}$ 为完全图的那些顶点，并将它们合并为一个类，构成 $S_t$的第一个类。然后，照原样加入其他所有划分中的类。

  如 Gallai [21], 所示， $G_t$ 中仅有的模是 $\mathcal{C}$中元素的可能并集，以及 $\mathcal{C}$中元素的子模。也就是说， $G_t$ 中不存在这样的模：它包含某个 $G_i$的部分但非全部顶点，也包含某个 $G_j$的部分但非全部顶点，且 $i \neq j$。

  首先来看这是否为一个有效的簇模划分。根据前面的说明，类 $C_1$ 和尾部中的每个元素都是模。如果 $G_t$ 是并行节点，那么 $C_1$ 是完全图的并集，也就是说，是一个簇。如果 $G_t$ 是串联节点，那么 $C_1$ 本身就是一个完全图，因此也是一个簇。尾部中的元素都是簇，因为它们属于 $G_t$的子节点的簇模划分。此外， $G_t$ 的所有顶点都出现在该划分的某个集合中，因此 $S_t$ 是一个有效的簇模划分。

  接下来，我们来证明它是最优的。假设存在一个对$G_t$ 的顶点进行的最优划分 $Q_t$ ，其使用的类数少于 $S_t$。如前所述， $Q_t$ 的各个类都必须是 $\mathcal{C}$中若干元素的并集，或者是 $\mathcal{C}$中元素的子模。

  假设 $Q_t$ 的某个类 $Q_t^i$ 是 $\mathcal{C}$中多个元素的并集，并且其中一个元素 $G_j$ 不是完全的。我们区分两种情况：

  – $G_t$ 是一个并行节点： $\mathcal{C}$ 中的每个元素都是一个连通图。由于 $G_j$ 不是完全图，因此它不能属于一个簇。

[2]完整证明见 [28]。

– $G_t$ 是一个串联节点：设 $G_l$ 是 $\mathcal{C}$ 中出现在 $Q_t^i$里的另一个元素。 $G_j$中的每个顶点都与 $G_l$中的每个顶点相邻。由于 $G_j$ 不是完全图，因此 $v$ 和 $w$ 是 $V$（$G_j$）中的两个不相邻顶点，且它们都与 $G_l$中的一个顶点 $u$ 相邻。因此， $v$、 $w$和$u$不能属于同一个簇。

这两种情况表明，前一种情形不可能发生，因此， $Q_t$的每个类要么是 $\mathcal{C}$ 中若干完全图元素的并集，要么是$\mathcal{C}$中某个元素的子模。此外， $Q_t$ 中至多有一个类是 $\mathcal{C}$中若干元素的并集，否则我们就可以将这些类合并为一个，从而减小 $Q_t$的大小。同样， $Q_t$中不能有类是 $\mathcal{C}$ 中某个完全图元素 $G_i$ 的真子模，否则我们就可以将该子模与 $G_i$ 的其余部分合并，从而减小 $Q_t$的大小。因此， $Q_t$中的一个类由 $\mathcal{C}$ 中所有完全图元素的并集构成。最后，由于其他每个类都是 $\mathcal{C}$中某个元素的子模，给定图 $G_i$ 中包含顶点的那些类必须构成 $G_i$顶点的一个划分，也就是说，它们应当是 $G_i$的簇模划分。于是，划分 $Q_t$ 包含每个 $G_i$的一个最优簇划分，并且其类的数量必然与 $S_t$相同。

- **素节点**：我们将 $S_t$ 定义为对每个 $1 \leq i \leq h$取 $S_i$ 的并集。
  正如 Gallai [21], 所示， $G_t$ 的真模恰好是与 $G_t$的子节点相关联的图的子模。因此， $G_t$ 的最优簇模划分必须包含每个子节点 $G_i$的一个最优簇模划分，所以 $S_t$ 是最优的。

为了使该算法达到线性时间，实际上并不计算划分 $S_t$ 。相反，我们在串行或并行节点 $t$ 的每个子节点 $t_i$ 上设置一个标记，使得 $G_{t_i}$ 属于 $C_1$。可以通过对树进行简单的自底向上遍历来识别这些子节点，并标记其关联图为完全图的每个节点（即子节点均为叶节点的并行节点）。最后，对树进行自顶向下遍历，即可确定每个叶节点所属的类。这些操作所需时间与树中节点数呈线性关系，因此该算法在线性时间内运行。

□

我们提出两 个引理，它们有助于计算最优区间模分划。

**引理5** (并的薄度 [5, 定理 14])。 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是图。则 薄度($G_1 \cup G_2$) =最大值{薄度($G_1$)， 薄度($G_2$)}。

**引理6** (联的薄度 [7, 定理 27])。 设 $G_1$ 和 $G_2$ 是图。若 $G_1$ 是完全的，则 薄度$(G_1 \vee G_2) =$薄度$(G_2)$。若 $G_1$和 $G_2$都不是完全的，则 薄度$(G_1 \vee G_2) =$薄度$(G_1)+$薄度$(G_2)$。

特别地，引理6意味着，两个图的联是区间图，当且仅当其中一个是区间图，另一个是完全图。

**定理 7.** 图 $G$ 的一个最优区间模划分可以在线性时间内计算。

证明。 证明过程沿用定理 4 的证明结构。我们计算 $G$ 的模分解树 $T$。然后，对于每个节点 $G_t \in T$（它是 $G$ 的一个诱导子图），我们根据节点 $G_t$ 的类型，计算 $G_t$ 的顶点的一个最优区间模分划 $S_t$ 。设 $G_t$ 的子节点为 $= \{G_1, \ldots, G_h\}$： $\mathcal{C}$，如果存在此类子节点；设它们各自的最优区间模分划为 $S_1$、.....、 $S_h$。

- **叶节点**： $S_t$ 中的唯一类由 $G_t$中的唯一顶点构成。该顶点显然是一个区间模，且该划分是唯一的，因此也是最优的。

• **并行**：我们通过将诱导出区间图的子节点合并为类$C_1$，并将其余所有子节点的划分合并，来构造 $S_t$ 。更形式化地说，若 $\mathcal{I}$ 是诱导出区间图的子节点 $\mathcal{C}$ 的子集：

$$C_1 \coloneqq \bigcup_{G_i \in \mathcal{I}} V(G_i)$$
$$S_t \coloneqq \{C_1\} \cup \bigcup_{G_i \in \mathcal{C} \setminus \mathcal{I}} S_i.$$

注意， $S_t$ 实际上是一个区间模划分：

– 所有类诱导出的都是区间图，因为 $C_1$ 是区间图的并（因此根据引理5，它是一个区间图），而其他所有类都属于 $G_t$的子节点的区间模划分，因此也都是区间图。– 每个类都是一个模， $C_1$ 是多个模的并，而其他所有类都属于诱导子图的区间模划分。

下面来看 $|S_t|$ 是最小的。再次如Gallai [21], 所示， $G_t$ 的模仅是 $G_t$的子节点的并，或 $G_t$ 的子节点的子模。因此，对于 $G_t$的每个区间模划分 $S'_t$ ，

1. 根据引理5，每个诱导出互不相交的图的并的类，其连通分量都必须是区间图；以及 2. 其他每个类都必须是 $G_t$的某个子节点的子模。

划分 $S_t$ 同时使类型1类和类型2类的数量最少，因此其大小最小。

• **串行**：我们将 $S_t$ 定义为 $\{C_1\} \cup$尾部，其中

– $C_1$ 包含属于 $G_t$的完全子节点的所有顶点，以及（若存在）某个任意区间图子节点中的所有顶点；而– 尾部是 $G_t$其余子节点的最优划分的并集。

如果 $C_1$ 为空，我们就定义 $S_t$ :=尾部。
根据引理6，类 $C_1$ 诱导一个区间图。尾部中的每个类也都诱导一个区间图，因为它们属于 $G_t$子节点的区间模划分。另一方面，注意到所有类都诱导 $G_t$的模。因此， $S_t$ 是一个区间模划分。

T再取 $G_t$的另一个区间模划分 $S'_t$ 。我们将证明 $|S'_t| \geq |S_t|$。
如前所述， $G_t$ 的模是 $G_t$的子节点的并，或$G_t$的子节点的子模。根据引理6，若一个模是两个图的联接，要使其成为区间图，它必须是一个完全图与一个区间图的联接。因此，如果 $G_t$ 的两个或更多子节点在 $S'_t$的某个类中联接，那么其中至多一个不是完全图，且该图也必须是区间图。如果 $S'_t$ 中有多个类诱导出图的联接，我们可以将属于那些诱导出完全图的子节点的所有顶点的类改为其中一个类，从而得到一个类数不超过 $S'_t$的区间模划分。

此外， $S'_t$ 被迫包含 $G_t$ 的子节点的区间模划分，而这些划分不会导出区间图。因此， $S_t$ 包含的类不多于 $S'_t$。

- **素节点**：如果 $G_t$ 是区间图，则定义 $S_t := \{V(G_t)\}$。否则， $S_t := \bigcup_{G_i \in \mathcal{C}} S_i$。

  显然，在这两种情况下， $S_t$ 都是区间模划分。此外，正如 Gallai[21], 所示，素节点的唯一真子模是该节点的子节点所对应的模。因此，如果 $G_t$ 不是区间图，该划分必定是 $G_t$的子节点的区间模划分的并集，因此 $S_t$ 是最优的。

  接下来需要说明如何判断 $G_t$ 是否为区间图。原则上，可以在 $G_t$上运行一个线性时间算法来判断一个图是否为区间图，例如 Booth 和 Lueker [11]提出的算法。问题在于，对模分解中的每个素节点都运行线性时间算法，会导致运行时间复杂性为 $\mathcal{O}(n^2)$，这超出了我们的预期。

  为解决这一问题，我们将利用第3节中的引理，在不改变薄度的前提下减少 $G_t$ 中的顶点数。首先，如果 $G_t$ 的任一子节点不是区间图，那么由于薄度是一种遗传性质，图 $G_t$ 也不是区间图。否则，我们构造图 $G'_t$： 将每个完全图子节点收缩为单个顶点，并将每个其他的区间图子节点收缩为两个不相邻的顶点。根据引理2和引理3，图 $G'_t$ 与 $G_t$具有相同的薄度。特别地， $G'_t$ 是区间图，当且仅当 $G_t$ 是区间图。因此，最后运行一个线性时间算法来判断 $G'_t$ 是否为区间图。

  由于模分解树中的节点数为 $\mathcal{O}$（$n$），而 $G'_t$ 中的顶点数至多是 $G_t$的子节点数的两倍，因此该算法在线性时间内完成，时间复杂度取决于 $G$的大小；同时还需为每个节点存储一个标记，以指示该节点是否为完全图。

□

## 5 薄度计算的参数化

现在我们准备介绍以区间模基数、邻域多样性、孪生覆盖和顶点覆盖为参数的 Thinness 核。

**定理 8**。 对于每个图 $G$，薄度（$G$） $\leq 2 \cdot$区间-mc（$G$）。此外，以输入图的区间模基数为参数时，Thinness 具有线性核。

证明。 我们将一个以区间模基数为参数的 Thinness 实例（$G$， $t$， $k$）（其中 $t$是薄度参数， $k$ 是 $G$ 的区间模基数）在时间 $n^{\mathcal{O}(1)}$ 内约化为一个实例（$G'$， $t'$， $k'$），使得 $t' = t$、 $k' = k$和 $|V$（$G'$）$| \leq 2k$。

我们首先根据定理 7 在线性时间内计算出 $G$ 的一个最优区间模分划 $P$。现在，我们将 $P$ 中每个导出完全图的部分收缩为一个顶点，并将 $P$ 中其他每个部分收缩为两个不相邻的顶点，从而得到图 $G'$。根据引理 2 和引理 3，我们有 thin($G'$) = thin($G$)。

现在我们得到图 $G'$，满足 $|V(G')| \leq 2k$ 且 thin($G'$) = thin($G$)，它可作为我们的核，定义为 $k' := k$。注意，我们对图进行的所有操作都可以在线性时间内完成，因此该归约是多项式时间的。这也表明 thin($G$) $\leq 2 \cdot$ 区间-MC($G$)，正如所需。

□

注意，每个簇图也是区间图，因此对于任意图 $G$，都有区间-MC($G$) $\leq$ 簇最大团($G$)。因此，尽管我们在引理 10 和 12 中给出的上界针对的是簇模基数，而不是区间模基数，但这些结果可以直接推广到后一个参数。

下面的引理表明，图的邻域划分也是一种簇模划分。

**引理 9** ([29, 定理 7.1])。 设 $G$ 是一个邻域多样性为 $k$的图，且 $V_1, \ldots, V_k$是 $G$的顶点的宽度为 $k$ 的邻域划分。那么，每个 $V_i$ 所诱导的子图要么是一个团，要么是一个独立集。

Lafond 和 Luo [27] 在他们的文章中指出，簇模基数概括了邻域多样性。为完整起见，我们在此给出这一事实的证明。

**引理 10.** 对于每个图 $G$，簇-最大团$(G) \leq$邻域多样性$(G)$。此外， $G$ 的顶点的邻域划分也是 $G$的簇-模划分。

证明。 设 $V_1, \ldots, V_k$是 $G$的顶点的宽度为 $k$的邻域划分。根据引理 9，每个 $V_i$ 所诱导的子图要么是一个团，要么是一个独立集。无论哪种情况， $G[V_i]$ 都是一个簇图。此外，每个 $V_i$ 都是一个模，因为 $V_i$ 中的所有顶点具有相同的邻域类型，因此它们在 $V_i$之外的邻点也必定相同。因此，$V_1, \ldots, V_k$是 $G$的一个有效的、宽度为 $k$ 的簇模划分，因此 cluster-mc($G$) $\leq k$。 □

另一方面，图的邻域多样性可以任意大于其簇模基数，因为图 $cK_2$ 的簇模基数为 1，但邻域多样性为 $c$。

结合定理 8 和引理 10，我们得到以下结果。

**定理 11.** Thinness 在以输入图的邻域多样性为参数时是固定参数可处理的。此外，该问题存在一个线性核。

以下引理表明，图的簇模基数是孪生覆盖数的推广。

**Le引理 12.** 对于每个孪生覆盖数为 $k$ 的图 $G$，簇-模$(G) \leq 2^k + k$ .

证明. 设 $X$ 是 $G$ 的一个大小为 $k$ 的孪生覆盖。我们构造一个划分 $P$，其部分为 $P_1, \ldots, P_{2^k+k}$，这些部分划分图 $G$ 的顶点，并证明它是一个簇模划分。

我们首先将每个顶点 $x_i \in X$ 放入集合 $P_{2^k+i}$中。然后，根据不属于 $X$ 的顶点与 $X$ 中的哪些顶点相邻，对这些顶点进行划分。由于 $X$中有 $k$ 个顶点，因此 $X$有 $2^k$ 个可能的子集。我们将这些集合分配给 $P_1$、.....、$P_{2^k}$。

集合 $P_{2^k+1}$、.....、$P_{2^k+k}$都只含一个顶点，因此是簇模。接下来只需证明集合 $P_1$、.....、 $P_{2^k}$是簇模。

我们先证明它们是模。根据定义， $X$ 中的每个顶点要么与 $P_i$ 中的每个顶点相邻，要么与其中任何顶点都不相邻。

现在我们将证明，若 $v \in P_i$ 和 $w \in P_j$ 满足 $1 \leq i < j \leq 2^k$，则 $v$ 和 $w$ 不相邻。根据前 $2^k$ 个集合的定义， $v$ 和 $w$ 在 $X$ 中的邻点并不相同，因为它们属于不同的集合。这尤其意味着， $v$ 和 $w$ 不是孪生顶点；又由于它们都不属于孪生覆盖 $X$，因此它们不可能相邻。

现在，我们证明集合 $P_1, \ldots, P_{2^k}$ 是簇。为此，只需证明如果 $a, b \in P_i$ 相邻，那么 $N[a] = N[b]$。由于 $a$ 和 $b$ 都不在 $X$ 中，因此它们是孪生顶点，所以 $N[a] = N[b]$。 □

孪生覆盖数与邻域多样性类似，可能任意大于簇模基数。完全二部图这一类图$K_{n,\ n}$ 可作为此处的一个例子，因为这些图的簇模基数为二，而孪生覆盖数为 $n$。

**定理 13**。 Thinness 当参数取输入图的最小孪生覆盖的大小时， Thinness 是固定参数可处理 的。

证明。 设 $G$ 是一个孪生覆盖数为 $k$ 的图。根据引理 12，簇最大团($G$) $\leq 2^k + k$。因此，我们使用定理 8 中的算法，得到一个大小为 $\mathcal{O}(2^k)$ 的核。 □

请注意，上述核不是多项式规模的，因为对于大小为 $k$ 的孪生覆盖，簇模基数的界为 $\mathcal{O}(2^k)$。

由于每个顶点覆盖也是一个孪生覆盖，因此我们有以下推论。

**推论 14**。 Thinness 在以输入图的最小顶点覆盖大小为参数时是固定参数可处理的。

# 6 计算同时区间数的参数化

我们在此证明图 1 中给出的界，并给出一些涉及同时区间数计算的算法结果。我们首先正式定义这个问题。

| Simultaneous Interval Number<br>**输入：** 一个图 $G$ 和一个整数 $d \geq 0$。**问题：** si($G$) $\leq d$吗？也就是说， $G$ 是否存在一个 $d$-同时区间表示? |
|---|

Beisegel 等人 [1] 证明了，si($G$) $= 0$ 当且仅当图 $G$ 没有边；并且 si($G$) $\leq 1$ 当且仅当 $G$ 是区间图。事实上，区间图可以用其自身的区间表示来表示，并为所有顶点标注集合 $\{1\}$。

我们在此证明关于模和同时区间表示的结果 s.

**引理 15.** 设 $H$ 是图 $G$ 的一个模，且有邻点位于 $H$之外；设 $G|_H$ 是将 $H$ 收缩为一个顶点后得到的图。如果 $H$ 是完全图，那么 si($G$) $=$ si($G|_H$)。此外，$G$存在一个最优同时区间表示，使得表示 $H$ 中各顶点的区间和标签集都相同。

证明。 假设 $H$ 被收缩为顶点 $v$，并考虑 $G|_H$的一个 $d$-同时区间表示。我们可以将其扩展为 $G$ 的一个 $d$-同时区间表示：将 $H$ 中的其他每个顶点都用与 $v$相同的区间和标签集来表示。该标签集非空，因为 $v$ 在 $G|_H$中有邻点。

□

我们可以将其推广为以下性质。

**引理 16.** 设 $H$ 是图 $G$的一个模。如果 $G$存在一种 $d$-同时区间表示，使得表示 $H$ 中顶点的区间两两相交，那么 $G$存在一种 $d$-同时区间表示，使得表示 $H$ 中顶点的区间完全相同。在这种情况下，任意两个不相邻顶点的标签集必须不相交，而相邻顶点的标签集必须相交。

证明。 假设我们有一个 $d$-同时区间表示，表示 $G$ ，且表示 $H$ 顶点的区间两两相交。令 $x$ 和 $y$ 分别为表示 $H$顶点的区间中最靠右的左端点和最靠左的右端点。由于这些区间两两相交，$x < y$。由于 $H$ 是一个模，每个与其顶点相邻的顶点都与

与 $H$ 的一个顶点相邻的顶点都与其中所有顶点相邻，因此它的区间与区间 $(x,\ y)$ 相交。因此，保留标签集并将表示 $H$ 每个顶点的区间缩短为 $(x,\ y)$，不会丢失任何相交关系（也不会新增相交关系）。□

现在，我们来描述那些诱导出非完全区间图的模的情况，其中尤其包括独立集。对于完全二部图，Beisegel 等人证明了 [1] $\mathsf{si}(K_{n,\ m}) = \min\{n, m\}$。其论证是：在完全二部图的 $d$-同时区间表示中，若二分划分为 $(X,\ Y)$，则表示 $X$ 和 $Y$ 的区间集至多有一个包含两个不相交区间，因此另一组区间两两相交，而它们的标签集必须两两不相交，所以 $d$ 至少等于该集合的大小。我们将在此进一步作出观察。

**引理 17.** 设 $H$ 是图 $G$, $|H| \geq 2$的一个模，它诱导出的区间图不是完全图。设 $G'$ 是从 $G$ 中删除 $H$里除两个不相邻顶点 $v$ 和 $w$之外所有顶点后得到的图。那么，使 $G$存在一种 $d$-同时区间表示，且有两个不相交区间表示 $H$ 中的顶点的最小 $d$，与使 $G'$ 存在一种 $d$-同时区间表示，且表示 $v$和 $w$ 的区间互不相交的最小 $d$相同。

证明。 首先，假设我们有一个 $d$-同时区间表示 $G$，其中有两个不相交区间表示 $H$的顶点。由于这两个区间不相交，它们所表示的两个顶点不相邻。因此，删除所有表示 $H$顶点的区间（保留两个不相交区间），即可得到 $G'$ 的一个 $d$-同时区间表示，其中表示 $v$ 和 $w$ 的区间不相交。

现在，假设我们有一个 $d$-同时区间表示 $G'$，其中表示 $v$ 和 $w$ 的区间不相交；不失一般性，假设表示 $v$ 的区间 $A$完全位于表示 $w$的区间 $B$ 左侧。由于 $H$ 是一个模，任何与 $H$ 中某个顶点相邻的顶点，都必定同时与 $v$ 和 $w$相邻，因此其对应区间既与 $A$的右端点相交，也与 $B$的左端点相交。因此，存在 $A$的一个子区间，与其右端点重合，并包含于所有对应于与 $H$中的顶点相邻的顶点的区间中。接着，我们可以用该子区间的一个细分替换 $A$，将其作为 $H$的区间表示，其中 $H$ 的所有顶点都具有与 $A$相同的标签集。由于 $H$ 不是完全的，存在两个不相邻的顶点，而在 $H$ 的区间表示中，这两个顶点对应的区间不能相交。因此，我们得到 $G$ 的一个 $d$-同时区间表示，其中有两个不相交区间表示 $H$的顶点。

□

作为引理 15 的推论，我们得到以下结果。

**引理 18。** 对于每个孪生覆盖数为 $k$ 的图 $G$，$\mathsf{si}(G) \leq \max\{1, k(k-1)/2 + k\}$。

证明。 设 $X$ 是 $G$ 的一个孪生覆盖，其大小为 $k$。$G \setminus X$ 的连通分量是由孪生顶点构成的团。我们用两两不相交的区间表示不同的团，并用相同的区间表示同一团中的所有顶点；具体而言，若有不与 $X$ 中任何顶点相邻的团，则这些团对应的区间均位于与 $X$ 中顶点相邻的团对应的区间左侧。我们用相同的区间表示 $X$ 中的顶点，该区间与所有和 $X$ 中顶点相邻的团对应的区间相交。我们使用至多 $k(k-1)/2$ 个标签来正确表示 $G[X]$ 的邻接关系：为 $G[X]$ 的每条边分配一个标签，并让 $G[X]$ 中的每个顶点拥有其关联边的标签集合。此外，我们还为 $X$ 中的每个顶点分配一个额外标签（这些标签各不相同），并为 $V(G) \setminus X$ 中的每个顶点分配与其在 $X$ 中的邻点对应的额外标签集合。这样也使得每个与 $X$ 中顶点相邻的团内顶点两两相邻。最后，我们

为所有剩余顶点使用任意一个标签，以使每个不与 $X$ 中顶点相邻的团内顶点两两相邻。

□

孪生覆盖数可以任意大于同时区间数。事实上，路径的同时区间数为 1，而孪生覆盖数可以任意大。

我们可以利用引理 15 至 17 证明以下结论。

**定理 19.** Simultaneous Interval Number关于输入图的簇-模基数与解的大小（输入参数 $d$）进行参数化时是固定参数可处理的。

证明。设 $G$ 是一个簇模基数为 $k$ 的图。我们要判定它是否存在一个 $d$-同时区间表示。如果 $k = 1$，那么根据是否存在边，$\mathsf{si}(G) = 0$ 或为 1。因此，假设 $k > 1$。我们可以假设 $G$ 中没有孤立团，因为在这种情况下，$G$ 的同时区间数与从 $G$ 中移除孤立团后所得图的同时区间数相同。我们还可以假设 $d \geq 2$，因为 $\mathsf{si}(G) = 0$ 的图恰好是无边图，而 $\mathsf{si}(G) \leq 1$ 的图恰好是可在多项式时间内识别的区间图 [1], [25]。

令 $M_1$、.....、$M_k$ 为最优簇模划分中的模。根据定理 4，该划分可在线性时间内计算得到。每个簇 $M_i$ 中的团依次也是 $G$的模，因此我们可以应用引理 15，将其中每个团收缩为一个顶点，从而得到图 $G'$ 以及模$M'_1$、.....、$M'_k$，这些模是独立集，并且 $\mathsf{si}(G) = \mathsf{si}(G')$；此外，还可以从 $d$-同时区间表示中得到 $G$的 $d$-同时区间表示。

在 $G'$的此类表示中，对于每个 $M'_i$，要么存在两个不相交区间，要么这些区间两两相交。随后，我们至多求解 $2^k$ 个受约束实例：对于每个满足 $|M'_i| > 1$的 $1 \leq i \leq k$，我们规定在 $M'_i$的表示中是存在两个不相交区间，还是这些区间两两相交。在第一种情况下，根据引理 17，我们只需保留 $M'_i$中的 2 个顶点。在第二种情况下，至少需要 $|M'_i|$个标签，因为对应于 $M'_i$中顶点的区间要求两两不相交的标签集。因此，如果 $|M'_i| > d$，我们可以丢弃该实例。如果 $|M'_i| \leq d$，根据引理 16，我们可以将范围限制为这样的解：$M'_i$ 中的所有顶点均由同一个区间表示。对每个实例进行这种预处理可以在多项式时间内完成。

对于每个受约束实例，我们需要找到 $d$-同时区间表示 $G'$，其中包含固定数量 $t$ 的区间，满足 $k \leq t \leq 2k$；其中某些区间对需要彼此不相交，且各自表示一个顶点，另一些区间则表示固定数量（至多 $d$个）的两两不相邻顶点。对于由 $t$ 个区间组成的表示，不妨设其 $2t$ 个端点按线性序排列；我们从中为每个由不相交区间构成的 $t - k$对选取 4 个端点，并为其余每个 $2k - t$ 区间选取 2 个端点，然后舍弃显然不可行的表示（即本应相交的区间却不相交的表示）。表示数量的一个非常宽松的上界是 $(2t)!$，即所有区间端点的排列数；由于 $t \leq 2k$，该数量至多为 $(4k)!$。至于标签，我们可以尝试将 $\{1, \ldots, d\}$ 的所有子集分配给各个区间，其中也包括（至多 $d$个）可能表示多个顶点的$2k - t$区间副本。由于 $d \geq 2$，每个 $k$模至多对应 $d$ 个区间，因此可能的分配数至多为 $(2^d)^{dk} = 2^{d^2 k}$。

总而言之，我们分析 $\mathcal{O}(2^k \cdot (4k)! \cdot 2^{d^2 k})$ 个候选解，并且可以在 $\mathcal{O}(d(dk)^2)$ 时间内逐一检查它们，这证明了 Simultaneous Interval Number以输入图的簇模基数加上解的大小为参数时是固定参数可处理。

□

由定理 19 和引理 18 可得以下推论。

**推论 20**。 Simultaneous Interval Number 关于输入图的最小孪生覆盖大小是固定参数可处理的。

证明。 设 $G$ 是一个孪生覆盖数为 $k$ 的图。根据引理 18，si($G$) $\leq \max\{1, k(k-1)/2+k\}$；根据引理 12，cluster-mc($G$) $\leq 2^k + k$。因此，我们使用定理 19 中的算法，得到一个以 $k$为参数的固定参数可处理 算法。 □

作为定理 19 和定理 20 的推论，并结合图 1 中的关系，我们还得到以下结果。

**推论 21**。 Simultaneous Interval Number 在以输入图的邻域多样性加上解的大小 $d$，以及输入图的最小顶点覆盖的大小为参数时，是固定参数可处理的。

## 7 结论与开放问题

我们在表 1 中总结了复杂性和算法结果。

| 问题 | 一般情形 | 区间-MC | 簇最大团 | nd | tc | vc |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 区间-MC | 线性 | | | | | |
| 簇-MC | 线性 | | | | | |
| Thinness | NP-c | 线性核 | 线性核<br>固定参数可处理 (簇最大团 $+ d$) | 线性核<br>固定参数可处理 (邻域多样性 $+ d$) | FPT | FPT |
| Sim. Int. Num. | NP-c | ? | | | FPT | FPT |

表 1：参数化复杂性结果。参数 $d$表示解的大小。

这项工作留下的可能研究方向包括：

- 当以解的大小（即输入图所需的薄度）为参数时， Thinness 固定参数可处理（甚至是 XP）吗？请注意，无论答案是肯定还是否定，都与定理38所证明的多项式核不存在这一结论相容。结合 Bonomo 和 de Estrada [5]以及 Shitov [36], 的结果，我们可以将一个 Non-Betweenness问题的实例规约为一个 Thinness实例。所构造图的薄度部分取决于 Non-Betweenness 实例的大小，因此仍存在这样的可能性：当输入图的薄度有常数界时，Thinness 存在多项式时间算法。

- 当以其他参数（例如输入图的树宽）为参数时， Thinness固定参数可处理 （甚至是 XP）吗? 薄度定义中涉及的全序，使其能否适用于 CMSO逻辑表述以便应用 Courcelle定理 [15]尚不明确。另一方面，请注意，定理38意味着 Thinness 不太可能存在以树宽为参数的多项式核。

- Thinness 以输入图的顶点覆盖数或孪生覆盖数为参数时，是否存在多项式核?

- 当以簇模基数或区间模基数为参数时，是否属于固定参数可处理 （甚至是 XP）？

## 参考文献

[1] J. Beisegel、N. Chiarelli、E. K¨ohler、M. Milanic、P. Mursic 和 R. Scheffler。同时区间数：一种衡量与区间图相似程度的新宽度参数。载于 H. L. Bodlaender 编，第*19*届斯堪的纳维亚算法理论研讨会与专题会议，*SWAT 2024*，*2024*年*6*月*12*日至*14*日，芬兰赫尔辛基，第294卷，*LIPIcs*，第7:1–7:20页。Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2024。doi: 10.4230/LIPICS.SWAT.2024.7。网址：https://doi.org/10.4230/LIPIcs.SWAT.2024.7.[2]R. Belmonte、T. Hanaka、M. Lampis、H. Ono 和 Y. Otachi。以模宽度为参数的独立集重配置。*Algorithmica*，82(9):2586–2605，2020。doi: 10.1007/S00453-020-00700-Y。网址：https://doi.org/10.1007/s00453-020-00700-y。[3] H. L. Bodlaender、R. G. Downey、M. R. Fellows 和 D. Hermelin。关于不具有多项式核的问题。*J. Comput. Syst. Sci.*，75(8):423–434，2009。doi: 10.1016/J.JCSS.2009.04. 001。网址：https://doi.org/10.1016/j.jcss.2009.04.001。[4] H. L. Bodlaender、B. M. P. Jansen 和 S. Kratsch。基于交叉组合的核化下界。*SIAMJ. Discret. Math.*，28(1):277–305，2014。doi: 10.1137/120880240。网址：https://doi.org/10.1137/120880240。[5] F. Bonomo 和 D. de Estrada。图的薄度与适当薄度。*Discret. Appl.Math.*，261:78–92，2019。doi: 10.1016/J.DAM.2018.03.072。网址：https://doi.org/10.1016/ j.dam.2018.03.072。[6] F. Bonomo、S. Mattia 和 G. Oriolo。余可比图的有界着色与取送货巡回组合问题。*Theor. Comput. Sci.*，412(45):6261–6268，2011。doi: 10.1016/J.TCS.2011.07.012。网址：https://doi.org/10.1016/j.tcs.2011.07.012。[7] F. Bonomo-Braberman、C. L. Gonzalez、F. de Souza Oliveira、M. S. S. Jr. 和 J. L. Szwarcfiter。积图的薄度。*Discret. Appl. Math.*，312:52–71，2022。doi: 10.1016/J.DAM.2021. 04.003。网址：https://doi.org/10.1016/j.dam.2021.04.003。[8] F. Bonomo-Braberman、E. Brandwein、F. de S. Oliveira、M. S. S. Jr.、A. Sansone 和 J. L. Szwarcfiter。若干图族的薄度及其变体，以及有界薄度图的着色。*RAIRO Oper. Res.*，58(2):1681–1702，2024。doi: 10.1051/RO/2024033。网址：https: // doi.org/10.1051/ro/2024033。[9] F. Bonomo-Braberman、N. Brettell、A. Munaro 和 D. Paulusma。通过 mim-宽度求解广义凸图上的问题。*J. Comput. Syst. Sci.*，140:103493，2024。doi: 10.1016/J.JCSS.2023.103493。网址：https://doi.org/10.1016/j.jcss.2023.103493。[10] F. Bonomo-Braberman、E. Brandwein、C. L. Gonzalez 和 A. Sansone。树的薄度。*Discret. Appl. Math.*，365:39–60，2025。doi: 10.1016/J.DAM.2024.12.027。网址：https://doi.org/10.1016/j.dam.2024.12.027。[11] K. Booth 和 G. Lueker。识别区间图并检验连续1性质的线性算法。载于第*7*届年度 *ACM*计算理论专题会议论文集 - *STOC*，第255–265页，拉斯维加斯，1975。doi: 10.1145/800116.803776。[12] E. Brandwein。图薄度算法，2025。网址：https://github.com/ericbrandwein/ thinness。

[13] S. Chaplick、M. T¨opfer、J. Voborn´ık 和 P. Zeman。关于 $H$-拓扑相交图。Algorithmica，83(11):3281–3318，2021。doi: 10.1007/s00453-021-00846-3。[14] M. Chein、M. Habib 和 M. C. Maurer。可分超图。Discret. Math.，37(1):35–50，1981。doi: 10.1016/0012-365X(81)90138-2。URL https://doi.org/10.1016/0012-365X(81) 90138-2。[15] B. Courcelle。图的单子二阶逻辑。I. 有限图的可识别集合。信息与计算，85(1):12–75，1990。doi: 10.1016/0890-5401(90)90043-H。URL https://doi. org/10.1016/0890-5401(90)90043-H。[16] A. Cournier 和 M. Habib。一种新的模分解线性算法。载于 S. Tison 编，《代数与程序设计中的树 - CAAP'94，第19届国际专题讨论会，英国爱丁堡，1994年4月11日至13日，论文集》，《计算机科学讲义》第787卷，第68–84页。Springer，1994。doi: 10.1007/BFB0017474。URL https://doi.org/10.1007/ BFb0017474。[17] M. Cygan、F. V. Fomin、L. Kowalik、D. Lokshtanov、D. Marx、M. Pilipczuk、M. Pilipczuk 和 S. Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015。ISBN 978-3-319-21274-6。doi: 10.1007/978-3-319-21275-3。URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-21275-3。[18] P. Damaschke。禁用有序子图。载于《组合学与图论专题：纪念 Gerhard Ringel 文集》，第219–229页。Springer，1990。[19] A. Drucker。经典与量子实例压缩的新极限。SIAM计算杂志，44 (5):1443–1479，2015。doi: 10.1137/130927115。URL https://doi.org/10.1137/130927115。[20] J. Gajarsk´y、M. Lampis 和 S. Ordyniak。模宽度的参数化算法。载于 G. Z. Gutin 和 S. Szeider 编，《参数化与精确计算 - 第8届国际研讨会，IPEC 2013，法国索菲亚·安提波利斯，2013年9月4日至6日，修订精选论文》，《计算机科学讲义》第8246卷，第163–176页。Springer，2013。doi: 10.1007/978-3-319-03898-8\ 15。URL https://doi.org/10.1007/978-3-319-03898-8_15。[21] T. Gallai。可传递定向图。AMASH，18:25–66，1967。doi: 10.1007/BF02020961。[22] R. Ganian。孪生覆盖：超越参数化算法学中的顶点覆盖。载于 D. Marx 和 P. Rossmanith 编，《参数化与精确计算 - 第6届国际研讨会，IPEC 2011，德国萨尔布吕肯，2011年9月6日至8日，修订精选论文》，《计算机科学讲义》第7112卷，第259–271页。Springer，2011。doi: 10.1007/ 978-3-642-28050-4\\ 21。URL https://doi.org/10.1007/978-3-642-28050-4_21。[23] J. R. Griggs 和 D. B. West。图的区间数的极值。SIAM代数离散方法杂志，1(1):1–7，1980。doi: 10.1137/0601001。URL https://doi.org/ 10.1137/0601001。[24] A. Gy´arf´as 和 D. B. West。多轨道区间图。第二十六届东南部组合学、图论与计算国际会议论文集（佛罗里达州博卡拉顿，1995），109:109–116，1995。[25] M. Habib、R. M. McConnell、C. Paul 和 L. Viennot。字典序广度优先搜索与划分细化及其在传递定向、区间图识别和连续1检验中的应用。理论计算机科学，234(1-2):59–84，2000。doi: 10.1016/S0304-3975(97)00241-7。URL https://doi.org/10.1016/S0304-3975(97)00241-7。

[26]S. Høgemo、J. A. Telle 和 E. R. V˚agset。树的线性 mim-宽度。载于 I. Sau 和 D. M. Thilikos 编，计算机科学中的图论概念 - 第*45*届国际研讨会，*WG 2019*，西班牙 *Vall de N´uria*，*2019*年*6*月*19*日至*21*日，修订论文，《计算机科学讲义》第11789卷，第218–231页。Springer，2019。doi: 10.1007/978-3-030-30786-8\ 17。[27] M. Lafond 和 W. Luo。利用受限模分划研究支配问题的参数化复杂性。载于 J. Leroux、S. Lombardy 和 D. Peleg 编，第*48*届计算机科学数学基础国际研讨会，*MFCS 2023*，*2023*年*8*月*28*日至*9*月*1*日，法国波尔多，《LIPIcs》第272卷，第61:1–61:14页。德国计算机科学中心 Schloss Dagstuhl - Leibniz-Zentrum f¨ur Informatik，2023。doi: 10.4230/LIPICS.MFCS.2023.61。URL https://doi.org/10.4230/LIPics.MFCS.2023.61。[28] M. Lafond 和 W. Luo。利用受限模分划研究支配问题的参数化复杂性，2023。URL https://arxiv.org/abs/2307.02021。[29]M. Lampis。树宽受限情形的算法元定理。*Algorithmica*，64 (1):19–37，2012。doi: 10.1007/S00453-011-9554-X。URL https://doi.org/10.1007/ s00453-011-9554-x。[30] C. G. Lekkerkerker 和 J. C. Boland。用实数轴上的区间集合表示有限图。*Fundamenta Mathematicae*，51(1):45–64，1962。[31] C. Mannino、G. Oriolo、F. Ricci-Tersenghi 和 L. S. Chandran。稳定集问题与图的薄度。*Oper. Res. Lett.*，35(1):1–9，2007。doi: 10.1016/J.ORL.2006.01.009。URL https://doi.org/10.1016/j.orl.2006.01.009。[32] R. M. McConnell 和 J. P. Spinrad。模分解与传递定向。*Discret.Math.*，201(1-3):189–241，1999。doi: 10.1016/S0012-365X(98)00319-7。URL https://doi. org/10.1016/S0012-365X(98)00319-7。[33] S. Olariu。一种用于区间图着色的最优贪心启发式。*Inf. Process. Lett.*，37(1):21–25，1991。doi: 10.1016/0020-0190(91)90245-D。URL https://doi.org/10.1016/0020-0190(91) 90245-D。[34] G. Ramalingam 和 C. P. Rangan。一种解决区间图上支配问题的统一方法。*Inf.Process.Lett.*，27(5):271–274，1988。doi: 10.1016/0020-0190(88)90091-9。URL https://doi.org/10.1016/0020-0190(88)90091-9。[35] S. H. Sæther 和 M. Vatshelle。基于顶点集上的分支分解的宽度参数计算难度。*Theoretical Computer Science*，615:120–125，2016。doi: 10.1016/j.tcs.2015.11.039。URL https://doi.org/10.1016/j.tcs.2015.11.039。[36] Y. Shitov。图薄度：一个下界及其复杂性，2021。viXra:2112.0157。[37] M. Tedder、D. G. Corneil、M. Habib 和 C. Paul。通过递归因子化排列实现更简单的线性时间模分解。载于 L. Aceto、I. Damg˚ard、L. A. Goldberg、M. M. Halld´orsson、A. Ing´olfsd´ottir 和 I. Walukiewicz 编，自动机、语言与编程，第*35*届国际专题讨论会，*ICALP 2008*，冰岛雷克雅未克，*2008*年*7*月*7*日至*11*日，论文集，第一部分：专题*A*：算法、自动机、复杂性与博弈，《计算机科学讲义》第5125卷，第634–645页。Springer，2008。doi: 10.1007/ 978-3-540-70575-8\\ 52。URL https://doi.org/10.1007/978-3-540-70575-8_52。

# 附录A 模宽度与线性 mim 宽度

设 $G$ 是一个图。给定 $V(G)$ 的线性布局 $v_1$，$v_2$、……、$v_n$，割 $v_1$、……、$v_i|v_{i+1}$、……、$v_n$的最大诱导匹配数是指二分图中诱导匹配所含边的最大数量。该二分图的二分划分为$A_i := \{v_1, \ldots, v_i\}$，$B_i := \{v_{n+1}, \ldots, v_n\}$，边集由 $G$ 中一端点位于 $A_i$ 、另一端点位于 $B_i$ 的边组成。线性布局的 *mim* 宽度是其所有割上的最大最大诱导匹配数，而图 $G$ 的线性 *mim* 宽度记为 lmimw($G$)，是其所有线性布局的最小 mim 宽度。Sæther 和 Vatshelle [35] 证明，判定 mim 宽度和线性 mim 宽度都是NP-困难的；此外，在常见的复杂性假设下，这两者都不存在固定参数可处理算法或常数因子近似算法。

我们在此描述一个模宽度有界而线性 mim 宽度无界的图族。

在图 $G$ 中，将顶点 $v \in V(G)$ 替换为图 $H$ 的替换操作会得到图 $G'$，使得 $V(G') = V(G) \cup V(H) \setminus \{v\}$；若 $x, y \in V(G) \setminus \{v\}$ 和 $xy \in E(G)$，或 $x, y \in V(H)$ 和 $xy \in E(H)$，或 $x \in V(G) \setminus \{v\}$、$y \in V(H)$ 以及 $xv \in E(G)$，则顶点 $x$ 和 $y$ 在 $G'$ 中相邻。

二分爪图是从爪图$K_{1,3}$ 中对三条边分别进行一次细分得到的。其 изображение 如图 3 所示 $H_1$ 。

定义如下图族：图 $H_0$ 是单顶点图；对于每个 $n \geq 0$，$H_{n+1}$ 都是通过将每个叶顶点替换为图 $H_n$ 的一个副本而从二分爪图得到的（见图 3）。

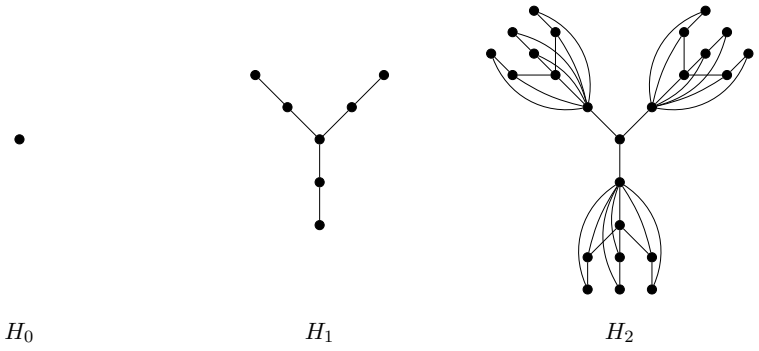



图 3：图 $H_0$、$H_1$ 和 $H_2$。

$\{H_n\}_{n\geq 0}$ 中的图的模宽度为 7，因为在模分解树中，每个素节点都是一个二分爪图，即一个 7 阶图。接下来我们将证明，对于每个$n \geq 0$，lmimw($H_n$) $= n$ 。该构造及证明受到 Høgemo 等人 [26] 所构造的一个线性 mim 宽度无界的树族的启发。

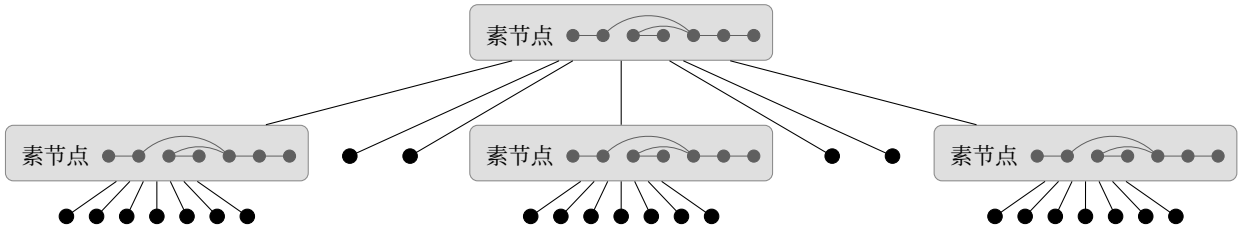



图 4：图 $H_2$ 的模分解。

**定理 22**。 图族 $\{H_n\}_{n\geq 0}$ 的线性 *mim* 宽度无界。更准确地说，对于每个 $n \geq 0$，都有 lmimw($H_n$) $= n$。特别地，存在模宽度有界而线性 *mim* 宽度无界的图类。

证明。 我们用归纳法证明。由于 $H_0$ 是单顶点图，lmimw($H_0$) $= 0$。由于 $H_1$至少有一条边，lmimw($H_1$) $\geq 1$。另一方面，图 4 中每个素节点内所示的 $H_1$ （二分爪图）的线性布局的 mim-宽度为 1，因此 lmimw($H_1$) $= 1$。现在假设 $n \geq 1$，并考虑 $H_{n+1}$。回想一下， $H_{n+1}$ 是通过将二分爪图的每个叶子替换为图 $H_n$的一个副本得到的。设 $H_n^1$、 $H_n^2$和 $H_n^3$ 为 $H_n$的三个副本，设$x$ 为爪图的中心，并令 $u_1, u_2, u_3$ 为满足 $N(u_i) = V(H_n^i) \cup \{x\}$ 的顶点，其中 $i \in \{1, 2, 3\}$。根据归纳假设，lmimw($H_n$) $= n$；又由于 $H_n$ 是$H_{n+1}$ 的诱导子图，且该参数关于诱导子图具有单调性，因此 lmimw($H_{n+1}$) $\geq n$。

我们通过矛盾证明 lmimw($H_{n+1}$) $\geq n + 1$ 。假设 lmimw($H_{n+1}$) $= n$，那么存在一个 lmimw($H_{n+1}$) 的线性布局，其 mim-宽度为 $n$。我们知道，对于每个 $i \in \{1, 2, 3\}$，都有一个 mim 割 $C_i$ $n$ ，其中诱导匹配的所有 $n$ 条边都是 $H_n^i$的边。根据对称性，不失一般性地假设这三个割按序排列为 $C_1$、 $C_2$、 $C_3$。注意，在该布局中， $H_n^1$ 的所有顶点都必须出现在 $C_2$ 之前，而 $H_n^3$ 的所有顶点都必须出现在 $C_2$之后；否则，由于 $H_n^1$ 与 $H_n^3$ 相连，且 $H_n^2$ 与另外两个副本中的每一个之间的距离都是 4，就会有一条额外的边跨越 $C_2$，使该割的 mim 增至 $n+1$。同理， $u_1$ 必须放在 $C_2$ 之前，且 $u_3$ 必须放在 $C_2$之后，因为 $u_i$ 与$H_n^i$ 相连，而 $u_1$ 和 $u_3$ 到 $H_n^2$的距离都为 3。但是，若将顶点 $x$ 放在$C_2$ 之前或 $C_2$ 之后，就会至少将边 $u_1x$ 或$u_3x$ 之一加入诱导匹配，从而增加该割的 mim。因此得到矛盾，由此可知 lmimw($H_{n+1}$) $\geq n + 1$。

具有 $n + 1$ mim-宽度的 $H_{n+1}$ 线性布局可以由图 4 中每个素节点内所示的二分爪图的线性布局（其 mim-宽度为 1）获得，方法是将每个叶节点替换为具有 $n$ mim-宽度的 $H_n$ 线性布局。也就是说，$H_n^1$、 $u_1$、 $u_2$ 的最优线性布局， $H_n^2$、 $x$、 $u_3$ 的最优线性布局，以及 $H_n^3$ 的最优线性布局。

□

我们将是否存在模宽度更小但线性 mim-宽度无界的图族作为一个开放问题。

## Appe附录 B 将 2-薄模块约化的反例

这里我们证明，图 5 中的图 $G'$ 是 2-薄的，而 $G$ 不是，从而表明：将一个薄度为 2 的模替换为任意其他薄度为 2 的图，可能会改变该图的薄度。

**引理 23**。 图 *5* 中的图 $G'$ 的薄度为 *2*。

证明。 图 6 展示了图 $G'$ 的一个使用两个类的一致解。注意， $G'$ 包含一个以 4 个顶点构成的环作为诱导子图，而这不是区间图。因此，由于薄度是一种遗传性质，我们有 thin($G'$) $> 1$。

□

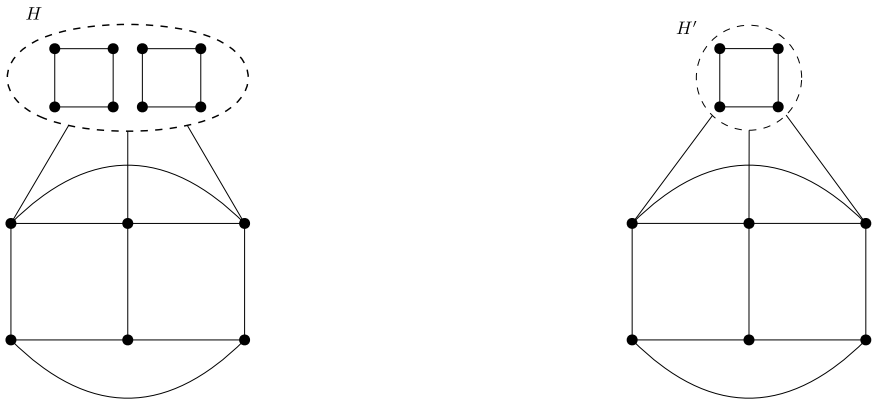
本节余下部分将用于证明以下引理。

**引理 24**。 图 *5* 中的图 $G$ 不是 *2*-薄的。

在图 6 所示的一致解中， $H'$ 中的顶点在序中并不连续。这并非巧合：事实上，对于 $G'$ ，不存在一个使 $H'$ 中的顶点连续出现的最优一致解。这对于确立引理 24 至关重要。这些结论将在引理 31 和引理 33 中证明。

我们先介绍一个用于分析图的薄度的标准定义。

**定义 25** （不相容图 [5]）。 图 $G$（序为 $<$）的不相容图 $G_<$ 是一个满足以下条件的图：




(a) 薄度($G$) $= 3$。 (b) 薄度($G'$) $= 2$。

图 5：对于某些图，将一个薄度为 2 的模替换为另一个薄度为 2 的图，会降低该图的薄度。此处，虚线表示模，也就是说，与虚线相邻的每个顶点都与虚线内部的每个顶点相邻。图 $G$ 是通过运行 Brandwein [12] 的算法得到的。

- $V(G_<) = V(G)$，并且
- 对于每个由顶点 $u < v < w$ 组成的三元组，若 $(u, w) \in E(G)$ 且 $(v, w) \notin E(G)$，则 $(u, v) \in E(G_<)$。

定义意味着，在序为 $<$ 的图 $G$ 的不相容图 $G_<$ 中，每条边的两个端点不能属于与 $<$ 一致的 $V(G)$ 划分中的同一个类。

Bonomo-Braberman 等人 [7] 证明，对于薄度为 $k$ 的图的一致解，总存在一个包含 $k$ 个顶点的集合，这些顶点属于不同的类，且集合中的每个顶点都有一个序位比它大的非邻居。我们通过以下定义和引理 27 将此形式化。

**定义 26**（不可约团）。图 $G$ 的不相容图 $G_<$ 中，大小为 $\ell$ 的不可约团是 $G_<$ 的一个团 $C := \{v_1, \ldots, v_\ell\}$，满足对每个顶点 $v_i \in C$，都存在另一个顶点 $w > v_i$，使得 $(v_i, w) \notin E(G)$。

**引理 27** ([7, 引理 26])。设 $G$ 是一个薄度为 $k$ 的图。对于顶点的每一种序 $<$，在 $G$ 中都存在一个大小为 $k$ 的不可约团 $G_<$。

现在我们证明图中模内外顶点之间的序的一些性质。

**引理 28**。设 $G$ 是一个含有模 $M$ 的图。设 $(<, S)$ 是 $G$ 的一个一致解。若存在三个顶点 $u < v < w$，使得

- $u$ 和 $w$ 属于不相容图 $G[M]_<$ 的一个不可约团，
- $v \in V(G) \setminus M$，并且
- $v$ 与 $u$ 属于 $S$中的同一类；

那么，$v$ 与 $M$中的顶点相邻。

证明。否则，将存在一个与 $u$ 相邻且大于 $w$（因而也大于 $v$）的顶点 $x \in M$，但它不与 $v$相邻，这将使三元组 $\{u, v, x\}$ 不一致。 □

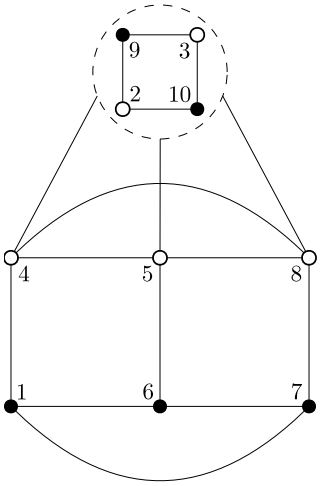



图 6：图 5 中图 $G'$ 的一种使用两个类的一致解。数字表示顶点的序。填充顶点构成划分中的一个类，空心顶点构成另一个类。

**引理 29**。设 $G$ 为一个图，$M$ 为 $G$ 的一个模，且有一个邻点 $v$。对于 $G$的每个一致解 $(<, S)$，如果 $v$ 在 $S$ 中与不可相容图 $G[M]_<$ 的某个不可约团中的顶点 $u$ 属于同一类，则 $u < v$。

证明。根据不相容图的定义，存在一个顶点 $w \in M$，它与 $u$ 不相邻，且满足 $u < w$。因此，$v$ 必须大于 $u$，否则 $\{v, u, w\}$ 将构成一个不一致三元组。

□

**定义30**。将图 $G$ 的模 $M$ 替换为另一个图 $H$，所得结果是一个图$G'$，其中 $V(G') := (V(G) \setminus M) \cup V(H)$，并且 $G'$ 的边是 $H$ 的边与 $G \setminus M$ 的边的并集，从而使 $M$ 在 $G$ 中的邻点也成为 $V(H)$ 在$V(G')$ 中每个顶点的邻点。

在某些情况下，用一个具有相同薄度的图替换一个模，不会增加该图的薄度。如引理 3 所示，当该模的薄度为 1 时，便是这种情况；但实际上，这一结论可以推广到薄度更大的模，如下一个引理所示。

**引理 31**。设 $\ell \in \mathbb{N}$。设 $G$ 是一个具有模 $M$ 的图，而 $G'$ 是在 $G$ 中用薄度为 $\ell$ 的图 $H$ 替换 $M$ 后得到的结果。考虑 $k$ 中关于 $G$ 的一个 $S$ 类一致解 $(<, S)$，并假设 $G[M]_<$ 中存在一个大小为 $\ell$ 的不可约团 $C$。如果按照 $<$，在 $C$ 中共享一个类的顶点与 $C$ 中的顶点之间，$V(G) \setminus M$ 中没有顶点，那么就存在一个 $k$ 中关于 $G'$ 的一致解，其中 $V(H)$ 中的所有顶点在序中相邻。

证明。假设 $(<, S)$ 是 $k$ 个类中关于 $G$ 的一致解，其中不可约团 $G[M]_<$ 的 $\ell$ 个顶点 $C$ 之间没有 $V(G) \setminus M$ 的顶点。设 $(<_H, S_H)$ 是关于 $H$ 的最优一致解。

我们按如下方式构造一个包含 $k$ 个类的解（$<'$，$S'$）。为构造 $<'$，我们从序 $<$中移除 $M$ 的所有顶点，并根据 $<_H$排序，将 $C$ 中的最大顶点替换为 $V$（$H$）中的顶点。划分 $S'$ 的定义方式是：将 $S_H$ 的 $\ell$ 个类分别与划分 $S$中 $C$ 的顶点所属的 $\ell$ 个不同类对应起来。

我们声称这个解是一致的。为证明这一点，我们分析$u <' v <' w$ 的每个可能的顶点三元组，以验证它们构成一致三元组。

- $\{u, v, w\} \subseteq V(H)$ 或 $\{u, v, w\} \subseteq V(G') \setminus V(H)$：这组三个顶点在 $(<,\ S)$ 或 $(<_H,\ S_H)$ 中均是一致三元组，它们是 $(<',\ S')$ 的诱导解。

- $u \in V(H)$ 和 $v,\ w \notin V(H)$：存在一个顶点 $x \in C$，它在 $S$ 中与 $u$ 属于同一类，并且也满足 $x < v < w$。因此，如果 $w$ 与 $u$ 相邻，且 $v$ 在 $S'$ 中与 $u$ 属于同一类，那么 $w$ 也与 $x$ 相邻，并且 $v$ 在 $S$ 中与 $x$ 属于同一类。因此，由于 $(<,\ S)$ 是一个一致解，集合 $\{u, v, w\}$ 必定是一致三元组。

- $u \notin V(H)$、$v \in V(H)$ 和 $w \notin V(H)$：存在一个顶点 $x \in C$，它在$S$中与 $v$ 属于同一类。有两种可能：1. 我们有 $x < u$，此时 $u$ 出现在 $<$中的两个 $C$ 顶点之间。根据假设，顶点 $u$ 与 $v$不属于同一类，因此这组三元组是一致的。2. 否则，我们有 $x > u$。由于 $\{u, x, w\}$ 在 $(<, S)$ 中不构成不一致三元组，因此在 $(<',\ S')$ 中，$\{u, v, w\}$ 也会如此。

- $u,\ v \notin V(H)$ 和 $w \in V(H)$：根据 $<$，存在一个顶点 $x \in C$，其大于 $u$ 和 $v$，并且与它们构成一致三元组。由于顶点 $w$ 在 $G \setminus H$中的邻域与 $x$ 相同，三元组 $\{u, v, w\}$ 也具有一致性。

- $\{u, v\} \subseteq V(H)$ 和 $w \notin V(H)$：顶点 $w$ 要么同时与 $u$ 和 $v$相邻，要么与它们都不相邻，因此该三元组是一致的。

- $u \in V(H)$ $v \notin V(H)$ 以及 $w \in V(H)$：在 $H$的两个顶点之间不存在位于 $H$ 外部的顶点，因此不会出现这种情况。

- $u \notin V(H)$ 和 $\{v, w\} \subseteq V(H)$：如果 $u$ 和 $v$ 属于 $S'$中的同一个类，则还存在一个顶点 $x \in C$ 与 $u$属于同一个类。根据假设，我们有 $u < x$。由于 $x$ 属于 $G[M]_<$的一个不可约团，因此存在一个不与 $x$ 相邻的顶点 $y \in M$，使得 $x < y$。由于（$<,\ S$）是一致解，这意味着 $u$ 不与模 $M$ 中的顶点相邻，因此也不与 $G'$ 中的 $H$ 的顶点相邻。因此，该三元组是一致的。

□

引理 31 的逆命题对于图 5 中的图也成立。

**引理 32.** 设 $G'$ 是一个薄度为 *2* 的图，其中包含一个模 $H'$，且该模诱导出一个由 *4* 个顶点构成的环。定义 $G$ 为将 $H'$ 替换为两个由 *4* 个顶点构成的环的并所得的图。当且仅当存在一个关于 $G'$ 的最优一致解 $(<', S')$，使得 $H'$ 中的顶点在 $<'$中连续出现时，$G$ 的薄度等于 *2*。

证明. 设 $H$ 是两个由 4 个顶点构成的环的并。注意，$\mathsf{thin}(G'[H']) = \mathsf{thin}(H) = 2$。

$\Longleftarrow$) 反设 $G$ 为不包含 $H$ 作为诱导子图的图，且根据引理 27，$G$ 不含不可约团。因此，这一推论可直接由引理 31 得出。

$\Longrightarrow$) 反设 $\mathsf{thin}(G) = 2$，且在任何关于 $G'$的最优一致解中，$H'$ 都不会连续出现。

令 $\Gamma := (<,\ S)$ 为 $G$ 的最优一致解。令 $u$ 为根据 $<$ 排序后属于 $V(H)$ 的第一个顶点，并将 $C$ 定义为连通分量中顶点的集合

$u$ 在 $H$ 中，它诱导出 $H$ 的两个环之一。此外，将 $H$ 的另一个环记为 $C' := V(H) \setminus C$。

注意，在 $C$ 的每一种可能的序中，顶点 $u$ 都会与相应不相容图中的另一个顶点 $w$ 构成一个不可约团。考虑由 $\Gamma$ 中的 $G \setminus C'$ 的顶点所诱导的解 $\Gamma'$。这个解 $\Gamma'$ 也是 $G'$ 的一个解（在同构意义下），因此，根据假设，模 $H'$ 不会在 $\Gamma'$ 中连续出现。因此，根据引理 31，存在一个顶点 $v \in V(G) \setminus H$，使得 $u < v < w$。此外，顶点 $v$ 在 $S$ 中与 $u$ 属于同一类；根据引理 28，它与 $H$ 中的顶点相邻。

$C'$ 中的顶点还包含一个顶点 $u'$，它与 $S$ 中的 $u$ 属于同一类，因为 $C'$ 诱导出一个环，而环是薄度为 2 的图。根据引理 29，顶点 $u'$ 必须小于 $v$。注意，$u <' u'$，因为 $u$ 是 $H$ 中的第一个顶点。此外，根据不相容图的定义，存在一个顶点 $x \in C$，它大于 $w$ 且与 $u$ 相邻。因此，$\{u, u', x\}$ 构成一个不一致三元组，这与 $\Gamma$ 是一个一致解这一事实矛盾。 □

下面的引理与引理 32 将完成证明。

**引理 33.** *图 $G'$（图 5）不存在一种最优一致解，使得模 $H'$ 中的所有顶点都连续出现。*

*证明.* 假设存在一个一致解 $(<, S)$，使得 $G'$ 中的所有顶点都连续出现。根据引理 23，该解将 $V(G)$ 划分为两个类。另一方面，根据引理 27 以及 $\mathsf{thin}(G[H']) = 2$ 这一事实，$G[H']_<$ 中存在一个大小为 2 的不可约团 $\{u, v\}$，其中 $u < v$。这两个顶点属于 $S$ 中不同的类。

我们将 $G'$ 中 $H'$ 的邻点记为 $\{a, b, c\}$，非邻居记为 $\{d, e, f\}$，如图 7 所示。

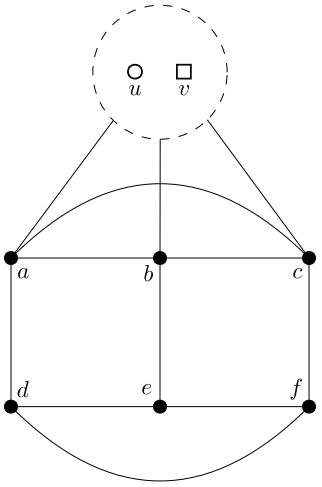



图 7：图 5 中 $G' \setminus H'$ 的顶点名称。顶点 $u$ 和 $v$ 分别属于 $S$ 中不同的类，分别用空心圆和空心方形表示。

$V(G')$ 的顶点 $\setminus H'$ 必须属于 $S$ 的两个类之一。因此，根据引理 29，我们有 $v < \{a, b, c\}$。不失一般性，假设 $a < b < c$。

**断言 34。** *$\{d, e, f\}$ 中的每个顶点都低于 $v$，或者 $\{d, e, f\}$ 中的每个顶点都高于 $v$。*

证明。假设情况并非如此，并且存在两个顶点 $w_1$，$w_2 \in \{d, e, f\}$ 使得$w_1 < v < w_2$。由于 $w_1$ 和 $w_2$ 相邻，而 $v$ 和 $w_2$ 不相邻，因此 $w_1$ 和 $v$ 属于不同的类。用同样的论证，如果 $u$ 也高于 $w_1$，它们也不能属于同一个类。因此，$u < w_1$。然而，根据不相容图的定义，$H'$ 中存在一个高于 $v$ 且与 $u$相邻的顶点 $x$。由于 $x$ 与 $w_1$不相邻，顶点 $w_1$和 $u$ 属于不同的类。因此，$u$、$v$和 $w_1$ 属于三个不同的类，这与 $S$ 仅由两个类组成这一事实矛盾。

□

注意，$e$ 不能位于 $v$ 和 $a$之间，否则 $e$ 和 $a$ 会与 $u$ 或 $v$构成不一致三元组，具体取决于 $e$所属的类。一般而言，任何与顶点 $y \in \{a, b, c\}$ 不相邻的顶点都不能位于 $v$ 和 $y$之间。结合定理 34，这意味着要么 $\{d, e, f\} < v$，要么 $c < \{d, e\}$。

假设 $\{d, e, f\} < v$。将 $\{d, e, f\}$重命名为 $\{w_1, w_2, w_3\}$，使得 $w_1 < w_2 < w_3$。顶点 $w_1$在 $\{a, b, c\}$ 中有一个邻点，该邻点与 $w_2$和 $w_3$均不相邻。因此，$w_1$与这两个顶点中的任何一个都不属于同一类。另一方面，顶点 $w_2$ 在 $\{a, b, c\}$ 中也有一个邻点，该邻点与 $w_3$不相邻，因此它与 $w_2$属于不同的类。于是，顶点 $\{w_1, w_2, w_3\}$ 必定分别属于不同的类，但 $S$中只有两个类，由此得出矛盾。

因此，我们有 $c < \{d, e\}$。同样的问题再次出现：顶点 $a$ 与顶点 $d$ 相邻，而顶点 $d$ 与 $b$ 和 $c$ 不相邻；顶点 $b$ 与顶点 $e$ 相邻，而顶点 $e$ 与 $c$ 不相邻。因此我们得出矛盾，并得出结论：引理中的陈述成立。

□

最后，我们结合引理 23、32 和 33，给出引理 24 的证明。

# 附录 C 核化下界

本节介绍 Thinness 和 Simultaneous IntervalNumber 的一些参数化；在某些标准复杂性假设下，这些参数化不存在多项式核。为此，我们将使用 Bodlaender 等人 [4] 提出的交叉组合框架。他们在论文中定义了 and-交叉组合的概念。首先，他们定义如下关系。

在本节中，$\Sigma$ 表示一个有限符号集，$\Sigma^*$ 表示由 $\Sigma$ 中的符号构成的有限字符串集合。

**定义 35**（多项式等价关系 [4]）。若等价关系 $\mathcal{R}$on $\Sigma^*$ 满足以下两个条件，则称其为多项式等价关系：

1. 存在一种算法，给定两个字符串 $x$，$y \in \Sigma^*$，可在关于 $|x| + |y|$ 的多项式时间内判断 $x$ 和 $y$ 是否属于同一个等价类。2. 对任意有限集合 $S \subseteq \Sigma^*$，等价关系 $\mathcal{R}$ 会将 $S$ 的元素划分为若干个类，其数量以 $S$中最大元素的大小为界，且该界为多项式。

**定义 36**（and-交叉组合 [4]）。设 $L \subseteq \Sigma^*$ 为一种语言，$\mathcal{R}$ 为 $\Sigma^*$上的多项式等价关系，$\mathcal{Q} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 为一个参数化问题。一个将 $L$ 交叉组合到 $\mathcal{Q}$ 中的 and-交叉组合（相对于 $\mathcal{R}$）是一种算法：给定 $L$中的 $t$ 个实例 $x_1$，$x_2$，……，$x_t \in \Sigma^*$，且这些实例属于 $\mathcal{R}$的同一个等价类，该算法在关于 $\sum_{i=1}^{t} |x_i|$ 的多项式时间内运行，并输出一个实例（$y$，$k$）$\in \Sigma^* \times \mathbb{N}$，使得 $k$ 以 $\max_i |x_i| + \log t$ 为界，且该界为多项式；当且仅当所有实例 $x_i$ 都属于 $L$时，实例（$y$，$k$）才属于 $\mathcal{Q}$。

交叉组合框架是对 Bodlaender 等人早期工作的推广 [3]。他们提出的一个猜想后来由 Drucker 证明 [19], ，据此我们可以陈述以下定理。

**定理37** ([4])。 设 $L \subseteq \Sigma^*$ 是一个NP-难语言， $\mathcal{Q} \subseteq \Sigma^* \times \mathbb{N}$ 是一个参数化问题。若 $L$ AND 可交叉组合到 $\mathcal{Q}$，则假设NP $\not\subseteq$ coNP/poly， $\mathcal{Q}$ 不存在多项式压缩。

本节的主要目标是证明以下定理。

定理*38*。设 $p$ 是一个图参数，对于每个图 $G$ ，都有 $p(G) \leq max\{|V(G)|, |E(G)|\}$；并且如果 $H$ 是图 $G_1$ 和 $G_2$ 的不相交并，则有 $p(H) \leq max\{p(G_1), p(G_2)\}$。那么， Thinness 和 Simultaneous Interval Number 关于 $p$ 参数化时不存在多项式核，除非 $NP \not\subseteq coNP/poly$。

满足这些条件的图参数包括树宽、路径宽、带宽、团宽、mim-宽度、线性 mim 宽度、模宽度，甚至还包括薄度和同时区间数，正如引理5所示。

注意，定理38并不排除存在核的可能性，只排除了存在多项式 核的可能性。关于 Thinness 是否存在由这些参数参数化的任何核，目前仍是开放问题。

现在我们证明定理38。证明相当简单，但为完整起见，我们仍在此给出证明。

定理 *38* 的。我们定义从 Thinness到 Thinness(p)的 and-交叉组合，以及从taneous Interval Number 到 Simultaneous Interval Number(p)的 Simul-交叉组合，其中 Π(p)表示以 p 为参数的问题 Π 。由于 Thinness和 Simultaneous Interval Number都是 NP难问题，我们可以利用定理37证明， Thinness( p) 和 Simultaneous IntervalNumber(p) 都不存在多项式核，除非 NP ⊆coNP/poly。

首先，我们定义 $\mathcal{R}$ 在 Thinness （分别为 Simultaneous IntervalNumber）的实例上的关系，使得两个实例（$G_1$， $k_1$）和（$G_2$， $k_2$）相关，当且仅当 $k_1 = k_2$。该关系符合定理 35 的条件，因为判断 $k_1 = k_2$ 是否成立所需时间关于 |（$G_1$， $k_1$）| +|（$G_2$， $k_2$）|是多项式时间；并且， Thinness 的任意实例子集 $S$ 都可以划分为若干类，其数量不超过某个实例的图中顶点的最大数量（由于 thin($G$) $\leq |V(G)|$，我们只需考虑满足 $k \leq |V(G)|$的实例）。相应地， Simultaneous Interval Number 的任意实例子集 $S$ 都可以划分为若干类，其数量不超过某个实例的图中边的最大数量（由于 si($G$) $\leq |E(G)|$，我们只需考虑满足 $k \leq |E(G)|$的实例）。

令 ($G_1$， $k$).....，($G_t$， $k$) 为同一等价类中 $\mathcal{R}$ 的 Thinness （分别为 Simultaneous Interval Number）实例。

我们构造一个 Thinness(p)（分别为 Simultaneous Interval Num-ber(p)）的实例 $((G', k)\ p)$，其中 $G' := \bigcup_{i=1}^{t} G_i$ 和 $p := \max_i |V(G_i)|$（分别为 $p := \max_i |E(G_i)|$）。这可以在关于 $\sum_{i=1}^{t} |(G_i, k)|$ 的多项式时间内完成，而 $p$ 受 $\max_i |(G_i, k)| + \log\ t$ 的多项式界限制。此外， $p$ 大于或等于 p($G'$)，因为我们要求 p($G'$) 不大于每个 $G_i$ 对应的 p($G_i$) 的最大值。最后，根据引理5，图 $G'$ 是 $k$-薄图，当且仅当所有图 $G_i$ 都是 $k$-薄图；图 $G'$ 存在 $d$-同时区间表示，当且仅当所有图 $G_i$ 都存在这样的表示。因此，$((G', k)\ p)$ 属于 Thinness(p)（分别为 Simultaneous Interval Number(p)），当且仅当所有实例 $(G_1, k)$.....$(G_t, k)$ 都属于 Thinness （分别为 Simultaneous Interval Number）。

我们描述了从 Thinness到 Thinness(p)的 and-交叉组合，以及从 SimultaneousInterval Number 到 Simultaneous Interval Number(p)的交叉组合，因此 Thinness(p) 和 Simultaneous Interval Number(p) 都不存在多项式核，除非NP $\subseteq$ coNP/poly。 □