arXiv:2512.23108v1 [math.GT] 28 Dec 2025

维托里斯 加厚与流形复形同伦等价

HENRY ADAMS、ALEXANDRE KARASSEV 和 ŽIGA VIRK

摘要。我们证明，如果 X 是有限维波兰度量空间，那么从（开）维托里斯–里普斯复形到维托里斯–里普斯度量加厚的自然双射 $\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 是同伦等价。这一结论例如在 X 是黎曼流形时成立。对于从 ˇCech复形到 ˇCech度量加厚的映射 $\check{\mathrm{C}}(X;r) \to \check{\mathrm{C}}^m(X;r)$，结论同样成立；更一般地，对于有限维波兰度量空间的任意一致有界覆盖 $\mathcal{W}$，从 Vietoris复形到该覆盖的 Vietoris度量加厚的自然双射 $\mathrm{V}(\mathcal{W}) \to \mathrm{V}^m(\mathcal{W})$ 也成立。我们还证明，如果 X 是紧可度量化空间，那么 $\mathrm{V}^m(\mathcal{W})$ 是强局部可缩的。

1. 引言

设 X 是一个度量空间，且 $r > 0$。维托里斯–里普斯单纯复形 $\mathrm{VR}(X;r)$ 以 X 为其顶点集；当有限子集 $\sigma \subseteq X$ 的直径小于 r时，它是一个单形。维托里斯在度量空间的上同调理论中提出了维托里斯–里普斯复形 [22, 19]。与此同时，Rips 在几何群论中引入了这类复形，将其作为空间的一种自然加厚方式。事实上，Rips 利用这些复形证明，无挠双曲群具有有限单纯复形形式的 Eilenberg–MacLane 空间 [8]。

近年来，受其在数据分析中的应用启发，维托里斯–里普斯复形和持续同调已成为应用拓扑学与计算拓扑学中常用的工具 [9, 12]。对于 M 一个流形及尺度 r，若其相对于 M的曲率足够小，Hausmann [15]证明存在一个同伦等价 $\mathrm{VR}(M;r) \simeq M$。此外，对于数据集 X，若其在格罗莫夫–豪斯多夫距离下与 M 足够接近，Latschev [18] 证明存在一个同伦等价 $\mathrm{VR}(X;r) \simeq M$。

如果 X 不是离散度量空间，那么包含映射 $X \hookrightarrow \mathrm{VR}(X;r)$ 不连续，因为单纯复形的顶点集配备的是离散拓扑。例如，如果 M 是维数至少为一的流形，那么 $M \hookrightarrow \mathrm{VR}(M;r)$ 不连续。这一观察促使人们在 [1]中定义维托里斯–里普斯度量加厚。对于 X度量空间和 $r > 0$，维托里斯–里普斯度量加厚$\mathrm{VR}^m(X;r)$ 是由 X 上的有限支撑概率测度组成的空间，这些测度的支撑直径小于 r，并配备最优传输度量。包含映射 $X \hookrightarrow \mathrm{VR}^m(X;r)$将点 $x \in X$ 映射为狄拉克δ测度 δ_x，现在是一个等距嵌入。

维托里斯–里普斯单纯复形与度量加厚之间是什么关系？对于X 有限度量空间，$\mathrm{VR}(X;r)$ 与 $\mathrm{VR}^m(X;r)$ 同胚 [1]。对于 X 任意度量

2020数学学科分类。 55N31,54F45,54C55,54C65。关键词与短语。 维托里斯–里普斯复形、Čech 复形、度量加厚、维数理论、绝对邻域收缩核、Michael 选择定理。

空间，Gillespie 证明了自然双射 $\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 是弱同伦等价，即在所有同伦群上都诱导同构 [13], 改进了 [3]。仍未解决的问题是，$\mathrm{VR}(X;r)$ 与 $\mathrm{VR}^m(X;r)$ 是否同伦等价。由于 $\mathrm{VR}(X;r)$ 是一个单纯复形（因此也是一个 CW 复形），若已知 $\mathrm{VR}^m(X;r)$ 是绝对邻域收缩，那么根据怀特海德定理即可得到这一结果；但据我们所知，对于一般度量空间，这个问题仍未解决 X。

我们证明，若 X 是有限维波兰度量空间且 $r > 0$，那么

- $\mathrm{VRm}\ (X;r)$ 是绝对邻域收缩，因此
- 从（开）维托里斯–里普斯复形到维托里斯–里普斯度量加厚的自然双射 $\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VRm}\ (X;r)$ 是同伦等价。

例如，若 $X = M$ 是黎曼流形，就会出现这种情况。

因此，我们得到了一个关于度量加厚的 Latschev定理版本，从而肯定地解决了 [2, 猜想 6。9]；参见推论3.5。

更一般地，对于 $\mathcal{W}$ 波兰度量空间的一致有界覆盖，我们证明从维托里斯复形到维托里斯度量加厚的自然双射 $\mathrm{V}(\mathcal{W}) \to \mathrm{V}^m(\mathcal{W})$ 是同伦等价；参见定理3.1。这也意味着，从（开）ˇCech复形到ˇCech度量加厚的映射 $\check{\mathrm{C}}(X;r) \to \check{\mathrm{C}}^m(X;r)$ 是同伦等价。

此外，如果 X 是紧可度量化空间，那么我们利用迈克尔选择定理 [20]证明 $\mathrm{V}^m(\mathcal{W})$ 是强局部可缩的。

我们首先在第2 节介绍背景和定义。在第3节证明主要结果，即定理3.1。我们在第$^m(\mathcal{W})$ 节证明，对于 X紧可度量化空间，V4。第5 节最后列出若干尚未解决的问题。

2. 预备知识

我们介绍一些关于度量空间、Vietoris–Rips 和 ˇCech 单纯复形、Vietoris 单纯复形、测度空间、度量加厚、绝对邻域 retract、怀特海德定理、维数和局部可缩性的背景知识。

2.1. 度量空间。 设 $X = (X, d)$ 为一个度量空间。子集 $A \subseteq X$ 的直径 定义为 $\operatorname{diam}(A) = \sup\{d(a, a') \mid a, a' \in A\}$。以 $x \in X$ 为中心、半径为 $r > 0$ 的开球 为 $B(x;r) = \{y \in X \mid d(y,x) < r\}$，有时记作 $B_X(x;r)$。

2.2. 维托 ris–Rips 和 ˇCech 单纯复形。设 X是一个度量空间，并设 $r > 0$.

Vietoris–Rips 单纯复形 $\mathrm{VR}(X;r)$ 以 X 为其顶点集；当 $\operatorname{diam}(\sigma) < r$时，有限子集 $\sigma \subseteq X$ 是一个单形。

内在的 *Čech* 单纯复形ˇ$\mathrm{C}(X;r)$ 以 X 为其顶点集，并且当 $\cap_{x\in\sigma} B(x;r) \neq \emptyset$时，有限子集 $\sigma \subseteq X$ 构成一个单形。

如果 $Z \supseteq X$ 是一个度量空间，且其度量扩展了 X上的度量，那么外在的 *Čech* 单纯复形ˇ$\mathrm{C}(X, Z;r)$ 以 X为其顶点集，并且当 $\cap_{x\in\sigma} B_Z(x;r) \neq \emptyset$时，有限子集 $\sigma \subseteq X$构成一个单形。

一个常见的环境 Čech 复形示例是 $X \subseteq Z = \mathbb{R}^n$。当 $Z = X$ 时，我们注意到环境 Čech 复形会还原为内在 Čech 复形，即 $\check{\mathrm{C}}(X, X;r) = \check{\mathrm{C}}(X;r)$。

因此，我们可以用环境 Čech 复形来陈述结果，同时仍能处理内在 Čech 复形的情形。

我们将单纯复形与其几何实现视为相同。

2.3. **Vietoris 单纯复形**。给定度量空间的一个覆盖 $\mathcal{W}$，其 *Vietoris*复形 $V(\mathcal{W})$由 $\mathcal{W}$ 构成，顶点集为 X，且有限子集 $\sigma \subseteq X$ 在 σ 包含于 $\mathcal{W}$中的某个元素时为一个单形。根据 Dowker 对偶 [10],$V(\mathcal{W})$ 与 $\mathcal{W}$的神经同伦等价。

设 $r > 0$。当 $\mathcal{W}$ 由所有直径小于 r 的开子集组成时，我们有 $V(\mathcal{W}) = \mathrm{VR}(X; r)$。若 $\mathcal{W} = \{B_X(x; r)\}_{x \in X}$ 由 X 中所有开 r-球组成，则 $V(\mathcal{W}) = \check{\mathrm{C}}(X; r)$。对于一个度量扩张了 X 上度量的度量空间 $Z \supseteq X$，若 $\mathcal{W} = \{X \cap B_Z(z; r)\}_{z \in Z}$，则 $V(\mathcal{W}) = \check{\mathrm{C}}(X, Z; r)$。

2.4. **测度空间**。我们沿用 [23, 11]。

对于拓扑空间 X，记 $P(X)$ 为 X 的 Borel σ-代数上的概率测度空间，并赋予弱拓扑。$P(X)$ 上的弱拓扑由对 $C_b(X)$（即有界连续测试函数）的积分收敛所诱导。更具体地说，若序列 $\mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots$ 属于 $P(X)$，则称其弱收敛到 $\mu \in P(X)$，如果对于所有有界连续函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$，都有 $\lim_{n\to\infty} \int_X f(x)\, d\mu_n = \int_X f(x)\, d\mu$。

对于 $k \geq 0$，令 $P_k(X)$ 为 $P(X)$ 中支撑的基数至多为 k 的所有测度构成的集合。因此，测度 $\mu \in P_k(X)$ 可写为 $\mu = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i}$，其中 $x_i \in X$ 且 $\lambda_i \geq 0$ 满足 $\sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i = 1$。测度 $\mu = \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i} \in P_k(X)$ 的支撑为 $\mathrm{supp}(\mu) = \{x_i \mid \lambda_i > 0\}$。

如果 (X, d) 是一个度量空间，那么我们也可以在 $\cup_{k\geq\infty} P_k(X)$（所有有限支撑测度构成的空间）上定义最优传输度量。给定有限支撑测度 μ_1 和 μ_2，它们之间的耦合是 $X\times X$ 上的一个概率测度 μ，其边缘分布为 μ_1 和 μ_2。这意味着 $(\pi_1)_\sharp \mu = \mu_1$和 $(\pi_2)_\sharp \mu = \mu_2$，其中 $\pi_i\colon X \times X \to X$ 是由 $\pi_i(x_1, x_2) = x_i$ 定义的投影映射，适用于 $i = 1、2$；$\sharp$ 表示推前。对于 $q \in [1, \infty)$，我们可以在 $\cup_{k\geq\infty} P_k(X)$ 上赋予 q-瓦瑟斯坦–康托罗维奇–鲁宾斯坦距离，其定义为

$$d_{W^q}(\mu_1, \mu_2) = \inf_{\mu} \left(\int_{X\times X} (d(x, x'))^q \, d\mu \right)^{\frac{1}{q}}, \tag{1}$$

其中 μ 遍历 μ_1 和 μ_2之间的所有耦合。

波兰空间 X是一个可分完全可度量化拓扑空间，也就是说，它与一个具有可数稠密子集的完备度量空间同胚。

设 $k \geq 1$，并设 $q \in [1, \infty)$。若 X 是有界波兰度量空间，则 $P_k(X)$ 上的 q-Wasserstein-Kantarovoich-Rubenstein 度量与 $P_k(X)$ 上由弱收敛诱导的拓扑一致，这是由 [23, Corollary 6.13]得出的。进而，由弱收敛诱导的拓扑与 $P(X)$ 上的弱拓扑一致（例如，参见 [7, Definitions 8.1.1 和 8.1.2] 及 [16]）。因此，$q \in [1, \infty)$ 的不同选取在 $P_k(X)$上都诱导相同的拓扑，并有如下观察。

命题 2.1。设 X 为一个有界波兰空间。那么，$P_k(X)$ 上的弱拓扑与任意 $q \in [1, \infty)$下由 q-*Wasserstein-Kantarovoich-Rubenstein* 度量所诱导的拓扑一致。

2.5. **度量加厚**。 对于 X 度量空间和 $r > 0$， *Vietoris–Rips* 度量加厚 是空间

$$\mathrm{VR}^m(X;r) = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid k \geq 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \mathrm{diam}(\{x_0,\dots,x_{k-1}\}) < r \right\},$$

配备最优传输（或 1-Wasserstein-Kantarovoich-Rubenstein）度量。

更一般地，对于 X 的一个开覆盖 $\mathcal{W}$，$V(\mathcal{W})$ 的度量加厚 是如下空间

$$V^m(\mathcal{W}) = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid k \geq 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \exists W \in \mathcal{W} : \{x_0,\dots,x_{k-1}\} \subseteq W \right\},$$

配备最优传输度量。按第 $\mathcal{W}$ 节中的方式 2.3 选取，得到 *Čech*度量加厚 $\check{C}^m(X;r)$ 和 $\check{C}^m(X,Z;r)$。

自然双射 $\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 是一个连续映射，它将 $\mathrm{VR}(X;r)$ 的几何实现中的点 $\sum \lambda_i x_i$ 映射到 $\mathrm{VR}^m(X;r)$ 中的概率测度 $\sum \lambda_i \delta_{x_i}$。对于自然双射 $V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$，结论也相同。

在推论 3.2 中，我们证明，对于 X 一个有限维波兰度量空间，自然双射 $\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 是一个同伦等价。[1]

2.6. **拓扑空间**。 对于 Y 拓扑空间和 $y \in Y$，我们用 $\pi_n(Y,y)$ 表示 Y在基点 y处的第 n个同伦群。

空间 Y 的子集 A 是 Y 的收缩，如果存在映射 $r\colon Y \to A$，使得 $r|_A = \mathrm{id}_A$。这意味着 A 在 Y 中是闭集。 Y 的邻域收缩是 Y 中的闭集，且是 Y中某个邻域的收缩。可度量化空间 Y 称为绝对邻域收缩体（*ANR*），如果 Y 是任何包含 Y 作为闭子空间的可度量化空间中的邻域收缩。关于绝对邻域收缩，更多信息请参见 [21] 。

根据 [21, 推论 6.6，5] 一个空间具有单纯复形的同伦型，当且仅当它具有绝对邻域收缩体的同伦型。

2.7. **怀特海德定理**。 设 Y和 Y'是拓扑空间。映射 $f\colon Y \to Y'$是弱同伦等价，如果它诱导

- 从 Y 的道路连通分支到 Y'的道路连通分支的一个双射，并且
- 对所有 $n \geq 1$ 和 $y \in Y$，都有一个同构 $\pi_n(Y,y) \to \pi_n(Y',y)$。

怀特海德定理的经典版本指出，若 Y 和 Y' 是 CW复形，则每个弱同伦等价 $f\colon Y \to Y'$都是同伦等价 [14]。

CW 复形假设可以放宽如下。根据 [21, 推论 6.6.6], , 如果 Y和 Y' 是绝对邻域收缩体，那么每个弱同伦等价 $f\colon Y \to Y'$都是同伦等价。

[1]我们指出，如果定义维托里斯–里普斯复形和度量加厚时采用 $\leq$ 约定，而非 $<$ 约定，那么这个结果并不成立；也就是说，若一个单形的直径为 $\leq r$ 而非 $< r$，则将其包含在 $\mathrm{VR}(X;r)$ 中。事实上，$\mathrm{VR}_{\leq}(X;0)$ 带有离散拓扑，而 $\mathrm{VR}^m_{\leq}(X;0)$ 带有由其度量诱导的标准拓扑。

2.8. **维数**。 关于维数的背景知识，请参阅 Sakai 的著作第 5 章 [21]。

设 Y 是一个拓扑空间， $\mathcal{U}$ 是 Y的一个开覆盖。对于任意点 $y \in Y$，令 $\mathcal{U}[y] = \{U \in \mathcal{U} \mid y \in U\}$ 为 $\mathcal{U}$ 中包含 y的集合所组成的子集，并令 $\operatorname{card}(\mathcal{U}[y])$ 为该集合的基数。 $\mathcal{U}$的阶为 $\operatorname{ord}(\mathcal{U}) = \sup\{\operatorname{card}(\mathcal{U}[y]) \mid y \in Y\}$。我们将 Y 的（覆盖）维数$\dim Y$ 定义如下。设 n 为一个非负整数。若 Y 的每个有限开覆盖都有一个有限开加细 $\mathcal{U}$，满足 $\operatorname{ord}(\mathcal{U}) \leq n+1$，则 $\dim Y \leq n$。（当 Y是仿紧空间时，前一句中的“有限”一词可以在两处都省略，仍得到等价的定义。）若 $\dim Y \leq n$ 且 $\dim Y \not\leq n-1$，则 $\dim Y = n$；此时我们称空间 Y为n维的。若 $\dim Y \leq n$ 对某个有限的 n成立，则空间 Y 是有限维的；否则 Y 是无限维的。

空间 Y 是可数维的，当且仅当它是可数个有限维正规子空间的并。虽然正规空间的子空间未必正规，但度量空间的子空间仍是度量空间，因此也是正规空间。因此，度量空间 X 是可数维的，当且仅当它是可数个有限维子空间的并。

可数和定理 [21, 定理 5.4。1] 指出，如果可数并 $Y = \cup_{i \geq 1} F_i$ 是正规空间，如果每个 F_i 都是 Y中的闭集，并且对每个 $i \geq 1$都有 $\dim F_i \leq n$，那么 $\dim Y \leq n$。

设 X 是一个度量空间。子集定理 [21, 定理 5.3。3] 指出，对于可度量化空间 X的任意子集 A，都有 $\dim A \leq \dim X$。

分解定理 [21, 定理 5.4。5] 指出，度量空间 X 满足 $\dim X \leq n$，当且仅当 X 可由 $n+1$ 个零维子集 $X_1, \ldots, X_{n+1}$覆盖。因此，度量空间 X 是可数维的，当且仅当它是可数个零维子空间的并。

根据 [21, 定理 6.10，1]，每个可数维局部可缩可度量化空间都是绝对邻域收缩体。

2.9. **局部可缩**。 若拓扑空间 Y 满足：对于每个邻域 U 的 y，都存在一个邻域 $y \in V \subseteq U$，使得包含映射 $V \hookrightarrow U$ 在 U中是零伦的，则称其在 $y \in Y$ 处局部可缩 。如果空间 Y 在每个 $y \in Y$处都局部可缩，则称其为局部可缩 空间。

如果拓扑空间 Y 满足：对于 y的每个邻域 U，都存在一个可缩邻域 $y \in V \subseteq U$，则称其在 $y \in Y$ 处强局部可缩。换言之，如果每个点 $y \in Y$ 都有一个由可缩邻域构成的局部基，那么我们称 Y 为强局部可缩空间。

如果形变收缩在整个同伦过程中固定点y，则称邻域 U 强 形变收缩到 y。如果每个点 $y \in Y$ 都有一个邻域局部基，其中的邻域都能强形变收缩到 y，那么我们称 Y 为严格强局部可缩空间。

3. $(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ is 是 X 有限维的同伦等价

我们证明，若 $\mathcal{W}$ 是有限维度量空间 X的一个一致有界开覆盖，则 $\mathcal{W}$ 的Vietoris复形与其度量加厚同伦等价。若存在某个 $D > 0$，使得对所有 $W \in \mathcal{W}$，$\operatorname{diam}(W) < D$，则称 $\mathcal{W}$ 的覆盖X 为一致有界。

定理3.1。 设 $\mathcal{W}$ 是有限维波兰度量空间X的一个一致有界开覆盖。从*Vietoris*复形到*Vietoris*度量加厚的自然双射$V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ 是一个同伦等价。

通过选取 $\mathcal{W}$ 为第 2.3节中的对象，以下推论立即得出。

推论 3.2。 设 X 是一个有限维波兰度量空间，且 $r > 0$。自然双射$\mathrm{VR}(X;r) \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 是同伦等价。对于 $Z \supseteq X$ 一个在 X上延拓该度量的度量空间，自然双射 $\check{C}(X,Z;r) \to \check{C}^m(X,Z;r)$ 是同伦等价。

定理3.1 的证明将依赖于说明，在此情形下，$V^m(\mathcal{W})$是可数维的，并且是绝对邻域收缩体（ANR）。证明 $V^m(\mathcal{W})$ 是可数维的，这与如下事实密切相关：如果 X是一个有限维度量空间，那么对于任意整数 k，所有支撑大小至多为 k 的概率测度所构成的空间是有限维的。例如，参见 [11]，第 57 页上的公式（3.1），它由 Basmanov 的一个更一般结果推出 [5]。

引理3.3. 若 $\mathcal{W}$ 是有限维波兰度量空间 X的一个一致有界开覆盖，则$V^m(\mathcal{W})$ 是可数维的。

证明。回顾

$$V^m(\mathcal{W}) = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid k \geq 1,\ \lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \exists W \in \mathcal{W} : \{x_0, \dots, x_{k-1}\} \subseteq W \right\}.$$

对于任意整数 $k \geq 0$，令

$$V^m(\mathcal{W})_k = \left\{ \sum_{i=0}^{k-1} \lambda_i \delta_{x_i} \in P(X) \mid \lambda_i \geq 0,\ \sum_i \lambda_i = 1,\ \exists W \in \mathcal{W} : \{x_0, \dots, x_{k-1}\} \subseteq W \right\}$$

表示$V^m(\mathcal{W})$中所有支撑大小至多为 k的测度所构成的集合。注意，Vietoris度量加厚可以写成可数并$V^m(\mathcal{W}) = \cup_{k\geq 1} V^m(\mathcal{W})_k$。因此，为了证明$V^m(\mathcal{W})$ 是可数维的，只需证明每个$V^m(\mathcal{W})_k$ 都是有限维的。

设 Y 是一个拓扑空间。对于 k整数，回顾一下，$P_k(Y)$是支撑大小至多为 k的测度所构成的集合，

$$P_k(Y) = \{\mu \in P(Y) \mid \mathrm{card}(\mathrm{supp}(\mu)) \leq k\},$$

赋予弱拓扑。对于 Y 完全正则空间，[11] 的公式（5.1）给出$\dim(P_k(Y)) \leq k\dim(Y) + (k-1)$; 另见Basmanov [5]。

由于 X 是一个度量空间，因此它完全正则，从而得到 $\dim(P_k(X)) \leq k\dim(X) + (k-1) =: D_k$。固定一点 $a \in X$，对于任意正整数 $i \geq 1$，令 $X_n = \{x \in X \mid d(a,x) \leq i\}$。根据命题 2.1，$P_k(X_i)$ 上的 Wasserstein-Kantarovich-Rubinstein 度量与 $P_k(X_i)$ 上的弱拓扑一致。由子集定理 [21, Theorem 5.3.3], , 包含映射 $P_k(X_i) \subseteq P(X)$ 给出对所有整数 $i \geq 1$都有 $\dim(P_k(X_i)) \leq D_k$。由于 $P_k(X) = \cup_{i\geq 1} P_k(X_i)$，可数并定理 [21, Theorem 5.4.1] 推出 $\dim P_k(X) \leq D_k$。最后，包含映射 $V^m(\mathcal{W})_k \subseteq P_k(X)$ 给出 $\dim(V^m(\mathcal{W})_k) \leq D_k$，同样依据子集定理。

因此，$V^m(\mathcal{W}) = \cup_{k\geq 1} V^m(\mathcal{W})_k$ 是有限维空间的可数并，因而是可数维的。□

引理 3.4。如果 $\mathcal{W}$ 是有限维波兰度量空间 X的一个一致有界开覆盖，那么$V^m(\mathcal{W})$ 是一个绝对邻域收缩体。

证明。 空间 $V^m(\mathcal{W})$ 由 [3, 定理 2], 可知其局部可缩，并由引理 3.3可知其为可数维。因此，$V^m(\mathcal{W})$ 由 [21, 定理 6.10 可知是一个绝对邻域收缩体。1]。 □

现在我们已准备好证明主要结果。

定理的证明*3.1*。 设 X 是一个有限维波兰度量空间，且 $\mathcal{W}$ 是 X的一个一致有界开覆盖。设 $f\colon V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ 表示自然双射。我们必须证明f 是一个同伦等价

自然双射 $f\colon V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ 根据 Gillespie 的工作 [13]是弱同伦等价。按定义，空间 $V(\mathcal{W})$ 是一个单纯复形，而根据引理 3.4，空间 $V^m(\mathcal{W})$ 是一个绝对邻域收缩体。现在我们可以结合 [21] 的推论 6.6.5 和 6.6.6，得到 $f\colon V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ 是一个同伦等价。事实上，设 $g\colon Y \to V(\mathcal{W})$ 是从一个绝对邻域收缩体空间 Y 到单纯复形 $V(\mathcal{W})$的同伦等价；根据 [21, 推论 6.6.5]，这样的同伦等价存在。于是， $fg\colon Y \to V^m(\mathcal{W})$是绝对邻域收缩体之间的弱同伦等价，因此根据 [21,推论 6.6.6]，它是一个同伦等价。令 $(fg)^{-1}$ 表示 fg的同伦逆。由于 g 和 fg 各自都是同伦等价，根据二取三性质，自然双射 $f\colon V(\mathcal{W}) \to V^m(\mathcal{W})$ 是一个同伦等价（其同伦逆为 $g(fg)^{-1}$），证毕。□

定理 3.1 (或推论 3.2）有以下推论。首先是 Latschev 关于度量加厚的定理 [18] 。

推论 3.5。 设 M 为闭黎曼流形。存在 $r_0 > 0$，使得对每个$0 < r \leq r_0$，都存在某个 $\delta > 0$，使得对于满足$d_{GH}(X, M) < \delta$的任意有限维波兰度量空间 X，我们有 $VR^m(X; r) \simeq M$。

证明。 根据 [18, 定理 1，1], 该结果对维托里斯–里普斯单纯复形成立，然后我们应用推论3.2。□

上述结果肯定地解决了 [2, 猜想 6.9] 。

推论 3.6。 设 X 为有限维波兰度量空间。

从（开）维托里斯–里普斯复形到维托里斯–里普斯度量加厚的自然双射 $VR(X; r) \to VR^m(X; r)$ 是一个 0-同伦交错，因此这些滤过具有同构的持续同调模。

对于将 X 上的度量延拓的 $Z \supseteq X$ 度量空间，从（开）*Čech*复形到*Čech*度量加厚的自然双射 $\check{C}(X, Z; r) \to \check{C}^m(X, Z; r)$ 是一个0-同伦交错，因此这些滤过具有同构的持久同调模。

我们指出，存在一个 0-同伦交错 [6, 定义 3。5] 比单纯说同伦交错距离为零更强——事实上，这还意味着同伦交错距离 [6, 定义 3。6]的定义中所取的下确界能够达到。当 X 是一个有限维波兰度量空间时，推论 3.6 意味着 [13, 推论 3]。

证明。 这是以下事实的推论：对于所有 $r \leq r'$，下列图表均可交换，其中水平箭头是包含映射，垂直箭头是自然双射，而这些双射

都是同伦等价。

$$\begin{array}{ccc} \mathrm{VR}(X;r) & \hookrightarrow & \mathrm{VR}(X;r') \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \mathrm{VR}^m(X;r) & \hookrightarrow & \mathrm{VR}^m(X;r') \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \check{\mathrm{C}}(X,Z;r) & \hookrightarrow & \check{\mathrm{C}}(X,Z;r') \\ \simeq\downarrow & & \downarrow\simeq \\ \check{\mathrm{C}}^m(X,Z;r) & \hookrightarrow & \check{\mathrm{C}}^m(X,Z;r') \end{array}$$

□

4. $V^m(\mathcal{W})$的强局部可缩性

本节证明，对于紧度量空间 $\mathcal{W}$ 上的任意一致有界开覆盖X，空间 $V^m(\mathcal{W})$ 都是强局部可缩的——事实上是严格强局部可缩的。按照小节2.9中的定义，这意味着每个 $\mu \in V^m(\mathcal{W})$ 都有一个邻域局部基，其邻域可强变形收缩到 μ。与之前一样，特别值得关注的是，在第 $\mathcal{W}$ 2.3节中选择以得到 $V^m(\mathcal{W}) = \mathrm{VR}^m(X;r)$ 或 $V^m(\mathcal{W}) = \check{\mathrm{C}}^m(X,Z;r)$ 的情形。

设 $\mathcal{W}$ 是紧可度量化空间 X的一个一致有界开覆盖。用 $P(X)$ 表示 X上所有概率测度的集合，用 $M(X)$ 表示 X的所有测度构成的空间。根据黎曼—里斯表示定理， $M(X)$ 与 $C(X)$的对偶空间同构，因此 $M(X)$ 是一个巴拿赫空间。特别地，讨论 $P(X)$的凸子集是有意义的。

4.1. **另一种基**。 由于 X 是紧的，我们已经陈述过（见命题 2.1），$V^m(\mathcal{W})$ 上的弱拓扑与由瓦瑟斯坦度量诱导的拓扑一致。在本小节中，我们将构造该拓扑的一个方便的基，由以下定义的集合 $N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$ 组成。

对于 X上的测度 $\eta = \sum_{i=1}^n p_i\delta_{y_i}$、连续函数 $f\colon X \to \mathbb{R}$以及 X的子集 Y，记

$$\eta(Y) = \sum_{y_i\in Y} p_i \quad \text{and} \quad \eta(f) = \sum_{i=1}^n p_i f(y_i).$$

Re称 P(X)上的弱拓扑的基由以下形式的集合给出

$$\widetilde{O}(\eta, h_1, \dots, h_k, \varepsilon) = \{\nu \in P(X) \,:\, |\eta(h_i) - \nu(h_i)| < \varepsilon \text{ for } i = 1,2,\dots,k\},$$

其中 h_1、h_2、……、h_k 是 X上的实值连续函数，且 $\varepsilon > 0$。定义

$$O(\eta, h_1, \dots, h_k, \varepsilon) = \widetilde{O}(\eta, h_1, \dots, h_k, \varepsilon) \cap V^m(\mathcal{W}).$$

设 $\eta = \sum_{i=1}^n p_i\delta_{y_i}$ 是 $V^m(\mathcal{W})$中的一个测度。设 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}$ 是 X 的一个由互不相交的开子集组成的集合，并且对所有 i都有 $y_i \in U_i$，且 $\cup\mathcal{U} := \cup_{i=1}^n U_i$ 包含于 $\mathcal{W}$中的某个元素内。对于任意 $\varepsilon > 0$，令

$$N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon) = \{\nu \in V^m(\mathcal{W}) \,:\, |\eta(U_i) - \nu(U_i)| < \varepsilon \text{ for all } i\}.$$

我们将在引理 4.3 中看到，形如 $N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$ 的集合构成了 $V^m(\mathcal{W})$ 在 η处的基。

引理 4.1。对于每个

$$\nu = \sum_{j=1}^m w_j\delta_{a_j} \in N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$$

存在一族互不相交的开集 $\mathcal{V}=\{V_1,\dots,V_m\}$，位于 X 中，并且 $\delta>0$，使得 $\cup\mathcal{V}$ 包含于 $\mathcal{W}$ 的某个元素中，满足对所有 $j=1,\ 2,\ \dots\dots,\ m$，均有 $a_j\in V_j$，并且

$$N(\nu,\mathcal{V},\delta)\subseteq N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon).$$

证明。令 $\delta=\frac{1}{2m}\min\{\varepsilon-|\eta(U_i)-\nu(U_i)|:i=1,2,\dots,n\}$。由于 $\nu\in V^m(\mathcal{W})$，我们有 $\{a_1,\dots,a_m\}$包含于 $\mathcal{W}$的某个元素中。取a_1、……、a_m的互不相交的开邻域 V_1、……、V_m，使得当 $a_j\in U_i$时，$V_j\subseteq U_i$成立，并且 $\cup\mathcal{V}$包含于 $\mathcal{W}$的某个元素中。令 $\mathcal{V}=\{V_1\dots,V_m\}$。令 $\zeta=\sum_{k=1}^{l}q_k\delta_{c_k}\in N(\nu,\mathcal{V},\delta)$。那么对所有 $i=1$、2、……、n，我们有

$$\begin{aligned}|\nu(U_i)-\zeta(U_i)|&\le|\nu(U_i)-\nu(U_i)|+|\nu(U_i)-\zeta(U_i)|\\&<\varepsilon-2m\delta+\sum_{\{j:V_j\subseteq U_i\}}|\nu(V_j)-\zeta(V_j)|+\left|\sum_{c_k\notin\cup\mathcal{V}}q_k\right|\\&<\varepsilon-2m\delta+m\delta+m\delta=\varepsilon.\end{aligned}$$

因此 $\zeta\in N(\nu,\mathcal{U},\varepsilon)$。 □

引理 4.2. 对于每个形如 $N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$ 的集合，都存在函数 h_1，h_2，……，h_k，使得

$$O(\eta,h_1,\dots,h_k,\varepsilon)\subseteq N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon).$$

证明。设 $\eta=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta_{y_i}$，并设 $\mathcal{U}=\{U_1,U_2,\dots,U_n\}$ 是 X的一族互不相交的开子集，其中对所有 i都有 $y_i\in U_i$，且 $\cup\mathcal{U}$ 包含于 $\mathcal{W}$ 的某个元素中。

考虑从 X 到 $[0,1]$ 的函数 f_1、……、f_n，使得对于所有 $i=1$、2、……、n，都有 $f_i(U_i)=\{1\}$和 $f_i(U_j)=\{0\}$，且对于所有 $j\neq i$都成立。另考虑从 X 到 $[0,1]$ 的函数 g_1、……、g_n，使得对于所有$i=1$、2、……、n，都有 $g_i(y_i)=1$ 和 $g_i(X\setminus U_i)=\{0\}$。我们声称

$$O(\eta,f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n,\varepsilon)\subseteq N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon).$$

考虑 $\nu\in O(\eta,f_1,\dots,f_n,g_1,\dots,g_n,\varepsilon)$。注意到

$$\eta(U_i)-\nu(U_i)=\eta(f_i)-\nu(U_i)\le\eta(f_i)-\nu(f_i)<\varepsilon$$

and

$$\eta(U_i)-\nu(U_i)=\eta(g_i)-\nu(U_i)\ge\eta(g_i)-\nu(g_i)>-\varepsilon.$$

这意味着 $|\eta(U_i)-\nu(U_i)|<\varepsilon$，因此 $\nu\in N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$。 □

引理 4.3. 形如 $N(\eta,\mathcal{U},\varepsilon)$ 的集合构成了$V^m(\mathcal{W})$ 在 η 处的一个基。

证明。设 $\eta=\sum_{i=1}^{n}p_i\delta_{y_i}$。引理 4.1 和 4.2 表明，形如 $N(\nu,\mathcal{U},\varepsilon)$ 的集合在弱拓扑下是开集。考虑一个开集 $O(\nu,h_1,\dots,h_k,\varepsilon)$。设

$$M=1+\max\{|h_t(x)|:x\in X,\ t=1,2,\dots,k\},$$

并令$\delta=\frac{\varepsilon}{M(2n+1)}$。存在一组 $\mathcal{U}=\{U_1,\dots,U_n\}$互不相交的开邻域，分别属于$y_1$、……、$y_n$，使得 $\cup\mathcal{U}$包含在 $\mathcal{W}$中的某个元素内，并且对于每个 $i=1,\ 2,\ \dots\dots,\ n$，我们

对于所有 $x \in U_i$ 和 $t = 1, 2, \ldots\ldots, k$，都有 $|h_t(y_i) - h_t(x)| < \delta$。取 $\nu = \sum_{j=1}^{m} w_j \delta_{a_j} \in N(\eta, \mathcal{U}, \delta)$。那么

$$\begin{aligned}
|\eta(h_t) - \nu(h_t)| &= \left| \sum_{i=1}^{n} p_i h_t(y_i) - \sum_{j=1}^{m} w_j h_t(a_j) \right| \\
&\le \left| \sum_{i=1}^{n} \left(p_i h_t(y_i) - \sum_{a_j \in U_i} w_j h_t(a_j) \right) \right| + \left| \sum_{a_j \notin \cup \mathcal{U}} w_j h_t(a_j) \right| \\
&\le \left| \sum_{i=1}^{n} \left(p_i h_t(y_i) - \sum_{a_j \in U_i} w_j h_t(y_i) \right) \right| + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{a_j \in U_i} w_j |h_t(y_i) - h_t(a_j)| \right) + M \sum_{a_j \notin \cup \mathcal{U}} w_j \\
&< M \sum_{i=1}^{n} \left| p_i - \sum_{a_j \in U_i} w_j \right| + \delta + Mn\delta \\
&\le M \sum_{i=1}^{n} |\eta(U_i) - \nu(U_i)| + M(n+1)\delta \\
&\le Mn\delta + M(n+1)\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

因此 $\nu \in O(\eta, h_1, \ldots, h_k, \varepsilon)$。 □

4.2. **通过迈克尔选择定理实现强局部可缩性：多值映射**。我们证明 $V^m(\mathcal{W})$ 在定理 4.10 中严格强局部可缩时，将用到迈克尔选择定理 [20],下面回顾该定理。

多值映射 $F\colon X \to Y$ 将子集 $F(x) \subseteq Y$赋给每个点 $x \in X$。F 的选择 是一个函数 $f\colon X \to Y$，满足对所有 $x \in X$都有 $f(x) \in F(x)$。

定理 4.4 (迈克尔选择定理 [20])。设 X 是一个仿紧空间，Y 是一个巴拿赫空间，且 $F\colon X \to Y$ 是一个取非空、凸且闭值的下半连续多值映射。那么 F 有一个连续选择 $f\colon X \to Y$。此外，若 A 是 X 的闭子集，且$g\colon A \to Y$ 是 $F|_A$ 的连续选择，则可假设 f 延拓了 g。

回顾一下，多值映射 $F\colon X \to Y$ 是下半连续 的，当且仅当对 Y 的任意开子集 S，集合 $\{x \in X \mid F(x) \cap S \neq \varnothing\}$ 是 X 中的开集。

现在我们引入证明定理 4.10所需的记号。对于 X的任意子集 U，定义

$$\begin{aligned}
P_U &= \{\mu \in V^m(\mathcal{W}) \mid \operatorname{supp}\mu \cap U \neq \varnothing\} \\
P^U &= \{\mu \in V^m(\mathcal{W}) \mid \operatorname{supp}\mu \subseteq U\}.
\end{aligned}$$

此外，对于由子集 $U_i \subseteq X$ 构成的有限集合 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$，令 t

$$P_{\mathcal{U}} = \bigcap_{i=1}^{n} P_{U_i}.$$

命题 4.5、4.6和 4.7 的证明很简短，这里从略。

命题 4.5。如果 U 是 X的开子集，那么 P_U 在$V^m(\mathcal{W})$中是开集。如果 $\mathcal{U} = \{U_1, \ldots, U_n\}$ 是 X的开子集的集合，那么 $P_{\mathcal{U}}$ 在$V^m(\mathcal{W})$中是开集。

命题 4.6。 对于任意 $Y \subseteq X$，集合 P^Y 是 $P(X)$的凸子集。特别地， P^Y 是可缩的，并且每个 $\mu \in P^Y$ 都是 P^Y的强变形收缩。

在本小节中，我们始终固定 $\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}$ 为 $V^m(\mathcal{W})$中的一个测度。令 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$为 X的一族互不相交的开子集，其中对所有 i都有 $x_i \in U_i$，且 $\cup\mathcal{U}$包含于 $\mathcal{W}$ 的某个元素中。对于任意 $\varepsilon > 0$，令

$$P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon) = \{\nu \in V^m(\mathcal{W}) \ : \ \mathrm{supp}(\nu) \subseteq \cup\mathcal{U} \text{ and } |\nu(U_i) - \mu(U_i)| \leq \varepsilon \text{ for all } i\}.$$

命题 4.7。 $P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon)$ 是凸的。

~令 $B(\mu)$ 为 $P(X)$ 中关于瓦瑟斯坦度量、以 μ为中心的一个开球，并令$B(\mu) = \tilde{B}(\mu) \cap V^m(\mathcal{W})$。注意， $\tilde{B}(\mu)$ 在 $P(X)$中是凸的，而 $B(\mu)$ 通常不是：原因在于，例如，在 Vietoris–Rips 度量加厚中，两个直径小于 r的支撑的并集，其直径可能大于 r。回忆一下，$\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$是 X 的一族互不相交的开子集，对所有 i都有 $x_i \in U_i$，并且 $\cup\mathcal{U}$ 包含于 $\mathcal{W}$的某个元素中。我们将证明，当覆盖 $\mathcal{U}$足够小时， μ 的开邻域 $P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$ 是强可缩的。

注意，对于一个无限紧空间 X，空间 $P(X)$可视为赋范空间 $\mathbb{R}^{C(X)}$中的一个凸紧无限维子集。因此，根据克利定理 l_2 （定理 1） [17,，它可以仿射且拓扑地嵌入希尔伯特空间（因而也嵌入巴拿赫空间）1]。

定义多值映射 $F\colon P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \to P(X)$ 如下

$$F(\zeta) = \{\nu \in P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon) \mid \mathrm{supp}(\nu) \subseteq \mathrm{supp}(\zeta)\}. \tag{2}$$

我们将使用迈克尔选择定理 [20] 来得到连续选择 $f\colon P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \to P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon)$。因此，我们需要证明 F的取值非空、凸且闭，并且F 是下半连续的。

命题 4.8。 对于任意 $\zeta \in P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$， F 的取值均非空、凸且闭。

证明。 根据假设，$\mathrm{supp}(\zeta)$ 包含一个形如 $\{y_1^i, y_2^i, \ldots, y_{n_i}^i\}_{i=1}^n$的集合，其中 $y_j^i \in U_i$ 对每个 i均成立。令

$$\nu = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i}{n_i} \sum_{j=1}^{n_i} \delta_{y_j^i},$$

其中 $\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}$。不难验证， $\nu \in F(\zeta)$。

这 F 是取闭值的，因为 $F(\zeta)$ 中所有测度的支撑都包含在 ζ的支撑中；此外，根据 $P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon)$的定义即可得出。凸性则由命题4.6和4.7得出。□

命题 4.9。 多值映射 $F\colon P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \to P(X)$ 定义于(2) 是下半连续的 .

证明。 为了验证 F 是下半连续的，我们必须证明：对于 $P(X)$的任意开子集 S， 集合 $\{\xi \in P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \mid F(\xi) \cap S \neq \varnothing\}$在 $P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$中是开集。我们按照以下方案进行：对于任意 $\zeta \in P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$、任意 $\nu \in F(\zeta)$以及 ν的任意小邻域 N， 定义 ζ 的一个小邻域 N'， 使得对于每个 $\xi \in N'$，都存在 $\lambda \in F(\xi) \cap N$。

Let

$$\zeta = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n_i} w_j^i \delta_{y_j^i} + \sum_{t=1}^{k} w_t \delta_{y_t},$$

其中，对于所有 i， $y_j^i \in U_i$；对于所有 $t = 1$， k， 2， ……， k。取 $\nu \in F(\zeta)$。接下来，考虑 ν 的一个~开邻域，根据引理 4.3，可设其形式为 $N = N(\nu, \mathcal{U}, \alpha)$。此外，若 $\mathcal{V} = \{V_j^i \mid i = 1, \ldots, n, j = 1, \ldots, n_i\}$ 是点 y_j^i 的一个互不相交的开邻域族，且对于所有 i都有 $V_j^i \subseteq U_i$，并且若 $\mathcal{V}' = \{V_j^i \mid y_j^i \in \operatorname{supp}\nu\}$，则还可进一步假设 $N = N(\nu, \mathcal{V}', \alpha)$。选择 $\beta > 0$，使得对于所有 i、 j都有 $\beta < w_j^i$，并且 $N' \coloneqq N(\zeta, \mathcal{V}, \beta)$包含于 F的定义域 $P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$中。考虑 $\xi \in N'$。注意到， β 的选择意味着对于所有 i、 j都有 $\operatorname{supp}\xi \cap V_j^i \neq \varnothing$。对于每个 $i = 1$， 2， ……， n 以及 $j = 1$， 2， ……， n_i，取 $z_j^i \in \operatorname{supp}\xi \cap V_j^i$，并令

$$\lambda = \sum_{V_j^i \in \mathcal{V}'} \nu(V_j^i) \delta_{z_j^i}.$$

容易看出，对于 $i = 1$、 2、……、 n， $\lambda(U_i) = \nu(U_i)$，且 $\operatorname{supp}\lambda \subseteq \operatorname{supp}\xi$。因此 $\lambda \in F(\xi)$。此外，对于所有 $V_j^i \in \mathcal{V}'$， $\lambda(V_j^i) = \nu(V_j^i)$，故 $\lambda \in N$。于是， $\lambda \in F(\xi) \cap N$，如所需。□

定理 4.10。若 X 是紧可度量化空间，则$V^m(\mathcal{W})$是严格强局部可缩的 .

证明。与本节其他部分一样，设 $\mu = \sum_{i=1}^{n} m_i \delta_{x_i}$ 是 $V^m(\mathcal{W})$ 中的一个测度。我们必须证明， μ有一个邻域局部基，其元素可强变形收缩到 μ。

考虑一个开球 $B(\mu)$。由引理 4.3，我们可以找到 $\varepsilon > 0$以及由下列集合构成的一族 $\mathcal{U} = \{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$互不相交的开邻域，它们分别是 x_1， x_2， ……， x_n，使得 $\cup\mathcal{U}$包含于 $\mathcal{W}$中的某个元素，且 $P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon) \subseteq B(\mu)$。通过选取足够小的 ε，我们还可以要求$P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon) \subseteq P_{\mathcal{U}}$。

令 $F\colon P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \to P(X)$ 为如下定义的多值映射，定义方式与前文相同：

$$F(\zeta) = \{\nu \in P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon) \mid \operatorname{supp}(\nu) \subseteq \operatorname{supp}(\zeta)\}.$$

根据命题 4.8 和 4.9， F 是一个下半连续映射，其取值非空、闭且凸。因此，我们可以应用迈克尔选择定理 [20] （见定理 4.4），得到一个连续选择 $f\colon P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu) \to P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon)$。此外，根据选取定理的相对版本，我们可以假设 $f(\mu) = \mu$。

为了构造一个将 $P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$ 变形收缩到 μ 且固定 μ 的变形收缩，我们首先用直线同伦将 ζ 与 $f(\zeta)$ 连接起来。事实上，注意到对所有 $0 \leq t \leq 1$，都有 $(1-t)\zeta + t \cdot f(\zeta) \in \tilde{V}^m(\mathcal{W}) \cap B(\mu) = B(\mu)$，因为 $\operatorname{supp} f(\zeta) \subseteq \operatorname{supp}\zeta$；而该直线同伦的连续性则由 [4, 命题 2.4] 或 [1, 引理 3.9] 得出。在此收缩下， $P_{\mathcal{U}} \cap B(\mu)$ 的像包含于 $P(\mu, \mathcal{U}, \varepsilon)$ 中，而根据命题 4.7，该集合是凸的。任何包含 μ 的凸集都可以强变形收缩到 μ，由此完成证明。□

推论 4.11。设 X 是一个紧度量空间，并且设 $r > 0$。那么 $VR^m(X; r)$ 是严格强局部可缩的。如果 $Z \supseteq X$ 是一个将 X 上的度量延拓的度量空间，那么 $\check{C}^m(X, Z; r)$ 是严格强局部可缩的。

5. 结论

我们最后提出一些开放性问题。

(1) 对于 X 紧致但不一定有限维的情形，$\mathrm{VR}^m(X;r)$ 是绝对邻域收缩体还是绝对邻域延拓? (2) 对于 X 紧致的情形，任意两个足够接近的映射到 $\mathrm{VR}^m(X;r)$ 中是否同伦？（已知对于绝对邻域收缩体，此结论成立，因此这是问题 (1) 的一个弱化版本。）(3) 对于 X 任意度量空间，$\mathrm{VR}^m(X;r)$ 是否强局部可缩？(4) 什么时候可以将一个从 n-球面到 $\mathrm{VR}\,S^n \to \mathrm{VR}^m(X;r)$ 的映射变形（在同伦意义下），使其像包含于 $\mathrm{VR}^m(X;r) \cap \mathrm{P}_{n+1}(X)$ 中？(5) 设 X 为绝对邻域收缩体。什么时候 $\mathrm{VR}^m(X;r) \cap \mathrm{P}_{n+1}(X)$ 是绝对邻域收缩体?

参考文献

[1] Michał Adamaszek、Henry Adams 和 Florian Frick。《通过最优传输进行度量重构》。SIAM 应用代数与几何期刊，2(4)：597–619，2018。[2] Michał Adamaszek、Henry Adams 和 Samadwara Reddy。《椭圆的维托里斯–里普斯复形》。拓扑与分析杂志，11：661–690，2019。[3] Henry Adams、Florian Frick 和 Žiga Virk。《维托里斯加厚与复形具有同构的同伦群》。应用与计算拓扑学报，7(2)：221–241，2023。[4] Henry Adams、Facundo Mémoli、Michael Moy 和 Qingsong Wang。《基于最优传输的度量加厚的持久拓扑》。代数与几何拓扑，4：393–447，2024。[5] VN Basmanov。《协变函子、收缩与维数》。载于《科学院院刊》，第271卷，第1033–1036页。俄罗斯科学院，1983。[6] Andrew Blumberg 和 Michael Lesnick。《同伦交错距离的普适性》。《美国数学会汇刊》，376(12)：8269–8307，2023。[7] Vladimir I Bogachev。《测度论》。施普林格，2007。[8] Martin R Bridson 和 André Haefliger。《非正曲率度量空间》，第319卷。施普林格科学与商业媒体，2011。[9] Gunnar Carlsson、Tigran Ishkhanov、Vin de Silva 和 Afra Zomorodian。《自然图像空间的局部行为》。《国际计算机视觉杂志》，76：1–12，2008。[10] Clifford H Dowker。《度量复形的拓扑》。《美国数学杂志》，74(3)：555–577，1952。[11] Vitalii V Fedorchuk。《拓扑学中的概率测度》。《俄罗斯数学调查》，46(1)：45，1991。[12] Robert Ghrist。《条形码：数据的持久拓扑》。《美国数学会通报》，45(1)：61–75，2008。[13] Patrick Gillespie。《维托里斯加厚与复形弱同伦等价》。应用与计算拓扑学报，8(1)：35–53，2024。[14] Allen Hatcher。《代数拓扑》。剑桥大学出版社，剑桥，2002。[15] Jean-Claude Hausmann。《关于度量空间的维托里斯–里普斯复形及一种上同调理论》。《数学年刊研究》，138：175–188，1995。[16] Gopinath Kallianpur。《概率测度弱收敛的拓扑》。《数学与力学杂志》，第947–969页，1961。[17] Victor L Klee。《凸集的一些拓扑性质》。《美国数学会汇刊》，78(1)：30–45，1955。[18] Janko Latschev。《闭黎曼流形附近度量空间的维托里斯–里普斯复形》。《数学档案》，77(6)：522–528，2001。[19] Solomon Lefschetz。《代数拓扑》，第27卷。美国数学会，1942。[20] Ernest Michael。《连续选择 II》。《数学年刊》，64(3)：562–580，1956。[21] Katsuro Sakai。《一般拓扑学的几何方面》。施普林格，2013。

[22] Leopold Vietoris。《紧致空间的高阶连通性与一类保持连通性的映射》。《数学年刊》，97(1)：454–472, 1927。[23] Cédric Villani。《最优传输：旧与新》，第338卷。施普林格，柏林，2008。