arXiv:2512.23182v1 [math.NA] 29 Dec 2025

一种用于高精度保证下特征值界的两阶段有限元方法 *

刘雪峰† Michael Plum‡

摘要

尽管标准高阶协调有限元方法能够轻松得到极其精确的上界，但要获得高精度且有保证的特征值下界仍然十分困难。近年来，采用 Crouzeix–Raviart 元或线性协调元等方法发展的严格方法，并不能很好地推广到高阶有限元方法。一些非标准有限元方法可以给出精确的特征值界，但技术上较为复杂。通过标准高阶协调有限元方法获得准确上界与同样精确的严格下界之间长期存在的差距，使得这一问题在技术上颇具挑战性，也成为竞争激烈的研究方向。本文提出一种新的两阶段严格算法，通过在分级网格上采用高阶有限元方法来弥合这一差距，并得到与相应高阶上界同样精确的严格特征值下界，数值算例证明了这一点。针对正方形区域和哑铃形区域上的拉普拉斯算子与 Steklov 特征值问题的数值实验表明，该方法具有较高的精度和效率，尤其适用于分级网格或高度非均匀网格。这些结果证实，所提出的方法为长期以来获得精确、可靠的特征值下界这一难题提供了一种实用且具有竞争力的解决方案。

关键词。 特征值界，Crouzeix–Raviart 有限元法，保证计算，拉普拉斯算子特征值问题，Steklov 特征值问题，Lehmann–Goerisch 定理

AMS 学科分类。65N30,65N 25.

*本研究部分获得了编号为 JP20KK0306、JP24K00538、JP21H00998 的资助，以及日本—中国双边联合研究项目（JPJSBP120237407）的支持。

†东京女子基督教大学文理学院，日本东京都杉并区善福寺 2 丁目 6-1，邮编 167-8585（xfliu@lab.twcu.ac.jp）。

‡卡尔斯鲁厄理工学院分析研究所，德国卡尔斯鲁厄 Englerstraße 2，邮编 76131（michael.plum@kit.edu）。

1 引言

尽管标准的高阶协调有限元方法（FEM）很容易得到极为精确的上界，但要获得高精度、有保证的特征值下界仍然很困难。为发挥高阶有限元方法的优势，Carstensen 等人开发了几种非标准有限元方法，以获得高精度的下界 [16, 17, 18]。这些方法效果显著，但技术上较为复杂，不易应用。

本文转而将经典的 Lehmann–Goerisch 定理与标准高阶有限元方法结合，以获得质量可与著名的 Rayleigh–Ritz 上界相媲美的特征值下界。通常，单独使用 Lehmann–Goerisch 定理并非易事，因为它需要大量谱预信息，即某个较高特征值的粗略下界。为解决这一困难，第二作者提出了同伦方法（初步构想见 [46, 47]，后续发展见 [44, 第 10]章），并将其应用于许多算例，但这种方法可能需要大量额外步骤和数值计算。相比之下，我们提出一种简单得多的方法：利用基于投影的特征值下界（例如通过 Crouzeix–Raviart 有限元法获得）为 Lehmann–Goerisch 定理提供必要的谱预信息，从而避免使用同伦方法；因此，在 Lehmann–Goerisch 框架内采用标准高阶有限元方法，即可得到高精度且完全有保证的特征值下界。

特征值问题是数值分析中最基础的课题之一，围绕其上界和下界估计，人们已提出了大量方法；基础理论见 [5]，基于有限元方法的特征值技术综述见 [10]。下文将回顾不依赖额外假设的严格验证特征值界相关文献，并在更广阔的背景下介绍我们的方法。

第二作者提出的同伦方法 [47] 建立了一族特征值问题，将目标特征值问题与具有已知谱界的基础问题联系起来，然后对这一同伦过程中特征值的变化进行严格估计。这种相当通用的方法也适用于具有本质谱的自伴特征值问题，因此尤其适用于无界区域上的偏微分方程特征值问题。应用同伦方法需要构造一个基础问题，这通常可以通过理论技术得到。同伦方法利用了

Lehmann–Goerisch 定理以及从相应前一同伦步骤中获得的粗略特征值界，从而产生精确的特征值界（参见早期论文 [29, 8, 23, 2, 46, 47, 49]，以及 [44，第 10] 章中的系统介绍）。

当投影误差可以显式估计时，基于投影的方法是另一种能够给出显式特征值界的有效途径 [9, 26, 33, 37, 31, 27, 14, 15]。在 [9], Birkhoff 等人通过投影到分段三次多项式上，得到了光滑 Sturm–Liouville 系统的特征值界。在 [35]和 [37], 中，Birkhoff 的思路得到拓展：研究者利用与协调有限元方法相关的 Galerkin 投影，为拉普拉斯特征值问题提出了有保证的双侧界。所提出的特征值界能够自然地处理定义在任意形状有界多边形区域上的问题。基于投影误差的方法还被用于具有紧预解式的一般自伴微分算子 [31] ，以及由半正定双线性型表述的特征值问题 [60, 32], ；这类问题中可能出现本质谱。同时，研究者采用非协调有限元方法，以便轻松获得投影误差的估计。在不同研究团队的努力下，所提出的基于投影的方法已成功应用于多种特征值问题，包括拉普拉斯算子 [31, 15], 、双调和算子 [14, 39, 30], 、Stokes 算子 [57, 34], 、Steklov 算子 [60, 42] 和 Maxwell 算子 [20]。值得指出的是，由于基于投影的方法无法利用高阶有限元方法或分级网格的优势，因此，为了获得高精度特征值界而采用网格细化应用这类方法，成本较高。这一缺陷促使我们转而采用 Lehmann–Goerisch 定理，以获得更精确的特征值界。请注意，上述方法与可提供特征值上界的 Rayleigh–Ritz 方法相结合，可以给出双侧特征值界，并提供被界定特征值的指标信息。因此，特征值排除区间也可自动获得。

另一种有趣的方法是在无法获得特征值指标信息时，验证特征值存在与不存在的范围，例如针对非自伴问题。Nakao 等人 [45],、Lahmann 等人 [28] 和 Watanabe 等人 [54, 52, 53] 提出了通过识别特征值存在和不可能存在的范围来确定特征值界的方法。该特征值问题被转化为研究某些非线性微分方程的解的存在性和唯一性，并可采用 [43, 48, 44] 中所述的技术。在 Nagatou 等人 [41], 的工作中，使用 Birman–Schwinger 方法来识别特征值

排除范围。另请参见 [44,第 9 节3]中的一般性说明。

在有限元方法领域，为微分算子确定双侧特征值界也是一项重要且困难的任务。对于网格构造良好的特殊区域，已有证明表明，采用质量集中法得到的近似特征值可直接给出特征值下界 [24]。当特征函数存在奇异性时，许多非协调有限元方法也能给出特征值的渐近下界。也就是说，随着网格尺寸趋于零，计算得到的特征值从下方收敛至精确值。参见早期工作 [3] 以及综述 [59, 40]。然而，如何验证所需的前提条件（即网格尺寸足够小），以确保获得渐近下界，目前仍不明确。近期，Carstensen 等人开发了非标准有限元方法，以直接给出可利用非均匀（分级）网格的特征值界 [16, 17, 18]。与标准有限元方法相比，采用这类方法会显著增加自由度数量，并使有限元空间更加复杂。

本文的贡献 本文提出了一种新的两阶段算法，用于为微分算子提供高精度保证的特征值界。不同于基于投影的特征值界，所提出的算法利用 Lehmann–Goerisch 定理，充分发挥了高阶有限元方法和分级网格的优势。

在所提出算法的第一阶段中，为处理由半正定双线性型构造的特征值问题（例如 Steklov 特征值问题），针对 [60] 中提出的特征值下界给出了一种新的简洁证明（另见 [26, 27, 15, 37]）：

$$\lambda_k \geq \frac{\lambda_{k,h}}{1 + C_h^2 \lambda_{k,h}} \,. \tag{1.1}$$

这里，$\lambda_{k,\,h}$ 是由有限元方法得到的离散矩阵特征值问题的第 k 个精确特征值（详情见 §3.2），而C_h 是一个可以显式计算的量。这里，非协调有限元方法很有帮助，因为随后可以利用与有限元空间相关的局部插值算子的误差常数轻松确定量 C_h 。新的证明简化了 [60], 的证明；后者考虑了相对于该算子核空间的复杂空间分解。该证明的另一个特点是，不再需要正定性假设

$a(\cdot,\ \cdot)$ 在 $V(h)$ 上（定义见 §3.1）；参见注 3.2。

在第二阶段，基于第一阶段以较低计算强度获得的粗略特征值界（式 (1.1)），利用 Lehmann–Goerisch 定理与高阶协调有限元方法，给出高精度特征值界。Lehmann–Goerisch 定理是一个通用的理论框架，在给定粗略的先验特征值界和高质量近似特征函数的情况下，可提供尖锐且最优的特征值界。以往研究 [36, 38, 51] 探讨了将 Lehmann–Goerisch 定理与有限元方法结合以导出尖锐特征值界。第 4 节和第 5 节分别讨论了 Lehmann–Goerisch 定理在拉普拉斯算子和 Steklov 特征值问题中的应用。

我们总结所提出的两阶段算法在实现高精度特征值界方面的优势。

(a) 采用高阶有限元空间，即使在粗网格上也能获得高精度特征值界。例如，对于单位正方形区域，使用 8×8 网格上的二阶 Lagrange 有限元，我们证明通过两阶段算法，第一 Steklov 特征值满足以下界：

$$\underline{0.240079083} \le \lambda_1 \le \underline{0.240079091}\ .$$

在 §5.1 的数值算例中，我们考虑了一个具有邻近特征值的问题。基于 Lehmann– Goerisch 定理的高精度界足够准确，能够区分这些特征值的包围区间，从而证明它们之间满足严格不等式；而使用相同区域三角剖分计算的粗糙投影型特征值界，精度远远不足以实现这种区分。

(b) Lehmann–Goerisch 定理可以利用分级网格，而式 (1.1) 中基于投影的特征值下界则无法做到这一点。

(c) 根据数值证据，与基于投影误差的方法可能得到的次优界相比，利用 Lehmann–Goerisch 定理可为所关注的特征值提供具有最优收敛率的特征值下界。例如，将显式下特征值界式 (1.1) 应用于 Steklov 特征值问题时，其收敛率为 $O(h)$，因为

$C_h = O(\sqrt{h})$（h：网格尺寸），即使对于凸区域也是如此；与其自身的收敛率 $\lambda_{k,\ h}$ 相比，这一收敛率并非最优；详见注3.4。相反，所提出的算法第二阶段采用线性拉格朗日有限元法得到的特征值界，其收敛率为 $O(h^2)$。

本文其余部分安排如下。第2节介绍抽象表述的特征值问题及其基本性质。第3节作为所提出的算法的第一阶段，介绍基于投影的特征值界，并给出一个新的简明证明。此外，还详细说明了如何将这些特征值界应用于拉普拉斯算子和 Steklov 特征值问题。第4节作为第二阶段，讨论基于 Lehmann–Goerisch 定理的高精度特征值界。第5节给出计算结果，以展示所提出的特征值界定算法的效率。最后，第6节总结本文的结果。

2 变分特征值问题

首先，我们来为即将讨论的目标特征值问题陈述假设。

设 V和 W是可分 Hilbert空间，分别配备由内积 $a(\cdot,\cdot)$ 和 $b(\cdot,\cdot)$ 所诱导的范数 $\|\cdot\|_a$和 $\|\cdot\|_b$。设 γ:$V \to W$ 是一个紧线性算子，并考虑以下特征值问题。

求出 $u \in V \setminus \{0\}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$a(u,v) = \lambda b(\gamma u, \gamma v) \quad \forall v \in V. \tag{2.1}$$

为研究此特征值问题，我们引入解算子$G:\ W \to V$，使得对于任意 $f \in W$，$Gf \in V$都唯一地满足以下方程:

$$a(Gf, v) = b(f, \gamma v) \quad \forall v \in V.$$

容易看出，G 是有界的，因此 $\mathcal{K} := G\gamma:\ V \to V$ 是一个紧自伴正半定算子。算子 $\mathcal{K}$ 的特征值问题是求特征函数 $u_k \in V \setminus \{0\}$ 及其对应的特征值 $\mu_k \geq 0$，使得

$$b(\gamma u_k, \gamma v) = \mu_k\, a(u_k, v) \quad \forall v \in V. \tag{2.2}$$

注 2.1. 现在，我们用两个具体的特征值问题来说明上述框架。对于有界区域$\Omega \subset \mathbb{R}^k$上的拉普拉斯特征值问题，我们采用以下设定。

$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega), \quad W = L^2(\Omega) \ ; \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx, \quad b(u,v) = \int_\Omega uv \, dx; \\ \gamma : \textit{embedding operator.} \end{cases} \tag{2.3}$$

对于有界 *Lipschitz* 区域 $\Omega \subset \mathbb{R}^k$上的 *Steklov* 特征值问题，我们采用如下设定。

$$\begin{cases} V = H^1(\Omega), \quad W = L^2(\partial\Omega) \ ; \\ a(u,v) = \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, dx, \quad b(u,v) = \int_{\partial\Omega} uv \, ds; \\ \gamma : \textit{trace operator.} \end{cases} \tag{2.4}$$

的谱我们总结一下基于紧对称算子谱理论的标准结果。当 $\mathrm{Ker}(\mathcal{K}) = \{0\}$ 时，$\mathcal{K}$ 的特征值由一个有限序列（当 $\dim(V) < \infty$ 时）或可数序列（当 $\dim(V) = \infty$ 时）的非零 μ_k' 组成，使得

$$\mu_k \geq \mu_{k+1} (> 0) \text{ for } k \geq 1; \quad \lim_{k\to\infty} \mu_k = 0 \text{ if } \dim(V) = \infty \ .$$

注意，这些特征值按照其重数重复计入。当 $\dim(\mathrm{Ker}(\mathcal{K})) > 0$ 时，$b(\gamma \cdot, \gamma \cdot)$ 在V上仅为半正定；除了非零 μ_k' 之外，0 也是 $\mathcal{K}$的特征值，且其重数可能为无穷大。

的空间分解注意，$\mathrm{Ker}(\mathcal{K})(\subset V)$ 可由 [1]刻画

$$\mathrm{Ker}(\mathcal{K}) = \{u \in V \mid b(\gamma u, \gamma u) = 0\} = \{u \in V \mid \gamma u = 0\} \ .$$

于是，V具有如下 a-正交分解：$V = \mathrm{Ker}(\mathcal{K}) \oplus \mathrm{Ker}(\mathcal{K})^\perp$。

我们在 V 上引入瑞利商 $R(\cdot)$：对于 $v \in V, v \neq 0$,

$$R(v) := \frac{b(\gamma v, \gamma v)}{a(v,v)}. \tag{2.5}$$

[1]注意，对于满足 u 的 $b(\gamma u, \gamma u) = 0$，我们有 $\gamma u = 0$，因为 $b(\cdot, \cdot)$ 是 W 上的内积。因此，$\mathcal{K}u = G\gamma u = 0$。另一方面，对于满足 $\mathcal{K}u = 0$ 的 u，我们有 $b(\gamma u, \gamma v) = a(\mathcal{K}u, v) = 0 \ \forall v \in V$，从而 $b(\gamma u, \gamma u) = 0$。

特征值 μ_k 是 R 在 V 上的驻值。以下原理在研究特征值问题时发挥着重要作用（例如参见 [25, 55, 45]）。

$$\mu_k = \max_{H_k \subset V} \min_{v \in H_k \setminus \{0\}} R(v) = \min_{S_{k-1} \subset V} \max_{v \perp S_{k-1}, v \neq 0} R(v) \ . \tag{2.6}$$

此处， H_k 表示 V的一个 k维子空间，而 S_k 表示 V的一个子空间，且 $\dim(S_k)$ 为 $\leq k$。

设 $\{u_1, u_2, \ldots\}$ 是与 μ_k相对应的特征函数的 a正交归一系。定义 $E_k := \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_k\}$。那么，特征值 μ_k 可表征如下：

$$\mu_k = \min_{v \in E_k \setminus \{0\}} R(v) = \max_{v \in V \setminus \{0\},\ v \perp E_{k-1}} R(v), \tag{2.7}$$

3 第一阶段：基于投影的显式特征值界

作为所提出的算法的第一阶段，我们介绍一种基于投影的方法，该方法可为目标特征值生成易于实现的下界。第一作者已在一系列论文中对这类方法进行了深入研究 [37, 31, 32]。另请参见 [9, 26, 27, 15]。

我们回顾目标特征值问题：求 $u \in V$和 $\mu \geq 0$ ，使得

$$b(\gamma u, \gamma v) = \mu a(u, v) \quad \forall v \in V \ . \tag{3.1}$$

线性偏微分算子的特征值问题通常针对非零特征值 μ_k的倒数来表述。记 $\lambda_k = 1/\mu_k$。于是

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots, \quad \text{and} \quad a(u_k, v) = \lambda_k b(\gamma u_k, \gamma v) \quad \forall v \in V \ . \tag{3.2}$$

3.1 离散化特征值问题与下特征值界

设 V_h 是用于逼近 V的有限维空间；$\dim(V_h) = d(< \infty)$。假设 V_h 和 V 从某个较大的向量空间继承相同的加法和数乘运算，使得 $V(h) := V + V_h$ 定义良好。设 $\widehat{a}(\cdot, \cdot)$ 是 $V(h)$ 上的半正定双线性型，且其在 V_h 上的限制是 V_h上的内积。假定 $\widehat{a}(\cdot, \cdot)$ 是 $a(\cdot, \cdot)$ 在 $V(h)$ 上的扩张，其含义是

$$\widehat{a}(u, v) = a(u, v) \quad \text{for any } u, v \in V \ .$$

注意，$\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 在 $V(h)$ 上不一定是正定的。以下是 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 在 $V(h)$ 上非正定的一个例子[2]：$V=\{(x,0)\mid x\in\mathbb{R}\}$, $V_h=\{(0,y)\mid y\in\mathbb{R}\}$, $V(h)=V+V_h=\mathbb{R}^2$, $\widehat{a}(u,v)=u^{\mathsf{T}}\begin{pmatrix}1&2\\2&4\end{pmatrix}v$ 对于 $u,v\in V(h)$。由 $\widehat{a}$ 诱导的半范数或范数仍记为 $\|\cdot\|_a$。

假设算子 γ 可扩展为紧线性算子$\widehat{\gamma}$：$V(h)\to W$，即 $\widehat{\gamma}u=\gamma u$ 对 $u\in V$成立。本文余下部分中，若不会引起混淆，我们将 $a(\cdot,\cdot)$ 和 γ分别记作 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 和 $\widehat{\gamma}$。

离散特征值问题 特征值问题 (3.1) 在 V_h 上的近似为：求 $\mu_h\geq 0$ 和 $u_h\in V_h\setminus\{0\}$，使得

$$b(\gamma u_h,\gamma v_h)=\mu_h a(u_h,v_h)\quad\forall v_h\in V_h\ . \tag{3.3}$$

近似特征值记为

$$\mu_{1,h}\geq\mu_{2,h}\geq\cdots\geq\mu_{d',h}>\mu_{d'+1,h}=\cdots=\mu_{d,h}=0\ .$$

这里，$(d-d')$ 是 $b(\gamma\cdot,\ \gamma\cdot)$ 在 V_h上的核的维数。令 $\{u_{k,h}\}_{k=1}^{d}$为与特征值 $\mu_{k,\ h}$对应的 a-正交归一特征函数。定义$E_{k,\ h}:=$张成空间$\{u_{1,h},\cdots,u_{k,h}\}$。

与式 (3.2) 相对应，我们也考虑其倒数形式：求$\lambda_h>0$ 和 $u_h\in V_h$，$\gamma u_h\neq 0$ 使得

$$a(u_h,v_h)=\lambda_h b(\gamma u_h,\gamma v_h)\quad\forall v_h\in V_h. \tag{3.4}$$

上述问题有 d' 个正特征值

$$\lambda_{1,h}\leq\lambda_{2,h}\leq\cdots\leq\lambda_{d',h};\quad\lambda_{k,h}=1/\mu_{k,h}\quad(1\leq k\leq d')\ . \tag{3.5}$$

特征值的极大极小原理和极小极大原理表明

$$\mu_{k,h}=\max_{H_{k,h}\subset V_h}\ \min_{v_h\in H_{k,h}\setminus\{0\}}R(v_h)=\min_{S_{k-1,h}\subset V_h}\ \max_{\substack{v_h\in V_h\setminus\{0\},\\ v_h\perp S_{k-1,h}}}R(v_h)\ . \tag{3.6}$$

这里，$H_{k,h}$ 表示 k的一个 V_h维子空间，而$S_{k-1,h}$ 表示 V_h 的一个子空间，并满足 $\dim(S_{k-1,h})\ \leq\ k-1$。对于特征子空间$E_{k,h}$，我们还有

$$\mu_{k,h}=\min_{v_h\in E_{k,h}\setminus\{0\}}R(v_h)=\max_{\substack{v_h\in V_h\setminus\{0\}\\ v_h\perp E_{k-1,h}}}R(v_h)\ . \tag{3.7}$$

[2]感谢 Ryoki Endo 构造了这个例子。

定义投影 P_h：$V(h) \to V_h$，使得对于任意 $u \in V(h)$，

$$\widehat{a}(u - P_h u, v_h) = 0 \qquad \forall v_h \in V_h. \tag{3.8}$$

注意到，由于 $\widehat{a}(\cdot,\ \cdot)$ 是 V_h 上的内积，而 $\widehat{a}(u,\ \cdot)$ 是 V_h 上的有界线性泛函，因此 P_h 定义良好。此外，很容易确认 $P_h^2 = P_h$，即 P_h 是一个投影。根据（3.8），关于范数 $\|\cdot\|_a$，我们有 $u \in V(h)$ 的如下分解：

$$\|P_h u\|_a^2 + \|(I - P_h)u\|_a^2 = \|u\|_a^2 \ . \tag{3.9}$$

不同于 [31], ，我们不假设 P_h 是 $V(h)$ 上的正交投影；一般而言，它未必是正交投影，因为 $\widehat{a}$ 可能不是 $V(h)$ 上的内积。

下面给出利用投影 P_h 的显式特征值界定理。

定理 3.1。假设以下关系对于 P_h 的投影误差估计成立：

$$\|\gamma(I - P_h)v\|_b \le C_h \|(I - P_h)v\|_a \quad \forall v \in V(h)\,, \tag{3.10}$$

其中 C_h 是某个可计算量。μ_k 的显式上界为

$$\mu_k \le \mu_{k,h} + C_h^2, \quad k = 1, 2, \cdots, d. \tag{3.11}$$

对于 $\mu_k \neq 0$，上述估计给出了 λ_k 的以下下界：

$$\lambda_k \ge \frac{\lambda_{k,h}}{1 + C_h^2 \lambda_{k,h}}, \quad k = 1, 2, \cdots, d'\,. \tag{3.12}$$

证明。我们先考虑存在非零的 $v \in E_k (\subset V)$ 使得 $P_h v = 0$ 的情形。于是，P_h 的误差估计表明

$$\|\gamma v\|_b = \|\gamma(I - P_h)v\|_b \le C_h \|(I - P_h)v\|_a = C_h \|v\|_a, \text{ i.e., } R(v) \le C_h^2.$$

因此，由性质 (2.7) 可得 $\mu_k \le R(v) \le C_h^2 \le \mu_{k,\ h} + C_h^2$。

现在考虑任意非零 $v \in E_k$, $P_h v \neq 0$ 的情形，这意味着 $\dim(P_h(E_k)) = k$。取特殊的 $H_{k,\ h} := P_h(E_k)$，则式 (3.6) 中对$\mu_{k,\ h}$ 的刻画可得

$$\min_{v_h \in P_h(E_k) \setminus \{0\}} R(v_h) \le \mu_{k,h}\,.$$

假设 $v_h = P_h\phi$ ($\phi \in E_k$) 在 $P_h(E_k)$ 中使 R 达到最小值。因此，

$$\|\gamma P_h\phi\|_b \le \sqrt{\mu_{k,h}}\|P_h\phi\|_a .$$

进一步利用 P_h 的误差估计，以及相对于 $\|\cdot\|_a$ 范数的 ϕ分解： $\|P_h\phi\|_a^2 + \|(I - P_h)\phi\|_a^2 = \|\phi\|_a^2$，可得

$$\begin{aligned}\|\gamma\phi\|_b &\le \|\gamma P_h\phi\|_b + \|\gamma(I - P_h)\phi\|_b \\ &\le \sqrt{\mu_{k,h}}\ \|P_h\phi\|_a + C_h\|(I - P_h)\phi\|_a \\ &\le \sqrt{\mu_{k,h} + C_h^2}\ \|\phi\|_a .\end{aligned}$$

由于 $\phi \in E_k$，(2.7) 中 μ_k 的性质给出估计 $\mu_k \le R(\phi) \le \mu_{k,\,h} + C_h^2$。

□

注 3.2。 我们强调定理 *3.1* 及其证明的两个特点。在 *[31]*, 的定理 *4.3* 中，假设 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 在 $V(h)$上正定。当前定理不再需要这一假设，因此可应用于更复杂的特征值问题，例如 *Maxwell* 特征值问题；在这类问题中，关于 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 在 $V(h)$ 上正定性的论证较为微妙。另一个特点是，通过使用 μ 而非 λ，这里的证明避免了对空间分解 $V = \mathit{Ker}(\mathcal{K}) \oplus \mathit{Ker}(\mathcal{K})^{\perp}$的复杂讨论；在 *[60]* 中曾使用这一分解来处理 λ的瑞利商中出现的 $b(\gamma\cdot,\gamma\cdot)$ 不正定的问题。

3.2 基于投影的特征值界的应用

定理 3.1 给出的特征值下界已应用于各种微分算子。在本节中，为了准备高精度特征值界的研究，我们回顾两个模型特征值问题的若干已知结果：拉普拉斯特征值问题和 Steklov 特征值问题。

分析在 Sobolev 空间框架下进行。设 Ω 是 $\mathbb{R}^k$ 中的一个具有利普希茨边界的有界区域。 $L^2(\Omega)$ 函数空间是 Ω 上实值平方可积函数的集合，其内积记为 $(\cdot,\cdot)_\Omega$ 或 $(\cdot,\cdot)$。我们采用 Sobolev 空间 $W^{k,p}(\Omega)$ 的标准记号，以及相应的范数 $\|\cdot\|_{k,p,\Omega}$ 和半范数 $|\cdot|_{k,p,\Omega}$（例如，参见 [1]）。对于 $p = 2$，定义 $H^k(\Omega) = W^{k,2}(\Omega), \|\cdot\|_{k,\Omega} = \|\cdot\|_{k,2,\Omega}, |\cdot|_{k,\Omega} = |\cdot|_{k,2,\Omega}$。

为便于误差分析和计算，从现在起我们假设 $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ 是有界多边形区域。设 $\mathcal{T}^h$ 是 Ω 的一个三角剖分。给定一个单元 $K \in \mathcal{T}^h$， h_K 表示 K最长边的长度。令 $h_{max} := \max_{K\in\mathcal{T}^h} h_K$。也就是说， h_{max} 是该三角剖分的最大边长。下面引入定义在 $\mathcal{T}^h$上的 Crouzeix–Raviart有限元空间 V_h^{CR}:

$$V_{\mathrm{CR}h} := \{v \mid v \text{ 在每个 } K \in \mathcal{T}^h \text{ 上都是线性函数，并且在内部边的中点处连续}\}. \tag{3.13}$$

由于 $V_h^{\mathrm{CR}} \not\subset H^1(\Omega)$，我们引入离散梯度算子 ∇_h，对 $v_h \in V_h^{\mathrm{CR}}$逐单元计算梯度。为简单起见，$\|\nabla_h v_h\|_{L^2(\Omega)}$仍记作$\|\nabla v_h\|_{L^2(\Omega)}$ 或$|v_h|_{1,\Omega}$。

3.2.1 拉普拉斯特征值问题

我们考虑与齐次狄利克雷边界条件相关的拉普拉斯特征值问题:

求 $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega = \lambda (u, v)_\Omega \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\ . \tag{3.14}$$

为应用定理 3.1，我们对式 (3.14) 采用如下设置（参见备注 2.1）：

$$\begin{cases} V = H_0^1(\Omega),\ W = L^2(\Omega),\ a(u,v) = (\nabla u, \nabla v)_\Omega,\ b(u,v) = (u,v)_\Omega, \\ \gamma:\ \text{the compact embedding operator } H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^2(\Omega). \end{cases}$$

定义 V_h 为

$$V_h = \{v_h \in V_h^{\mathrm{CR}} \mid v_h = 0 \text{ at midpoints of boundary edges of } \mathcal{T}^h\}\ .$$

定义 $\gamma_h:\ V_h \to L^2(\Omega)$ 为嵌入算子，并通过 $\hat{\gamma}(v + v_h) := \gamma v + \gamma_h v_h$ ($v \in V$, $v_h \in V_h$) [3] 定义 $\hat{\gamma}:\ V(h) \to L^2(\Omega)$。

由于 V_h 是有限维的， γ_h 是紧的。因此，利用 γ的紧性，我们得到 $\hat{\gamma}$的紧性。注意， v_h 可能是不连续的

[3]尽管分解 $v + v_h$ 并不唯一，但由于 $\hat{\gamma} v = \gamma v = \gamma_h v$ 对 $v \in V \cap V_h$成立，因此该定义是适定的。

在内部边上，并且不一定在 $\partial\Omega$ 上消失。对于 $V(h)$，双线性型 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 定义为

$$\widehat{a}(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h \, \mathrm{d}x \quad \forall\, u_h, v_h \in V(h)\,. \tag{3.15}$$

对于任意 $u,\ v \in V$，有 $\widehat{a}(u,\ v) = a(u,\ v)$。

拉普拉斯特征值的显式下界设$\lambda_{k,\ h}^{\mathrm{CR}}$ 为 Crouzeix–Raviart 有限元法给出的第 k 个离散特征值。由定理 3.1 可得以下下界。

$$\lambda_k \geq \frac{\lambda_{k,h}^{\mathrm{CR}}}{1 + C_h^2 \lambda_{k,h}^{\mathrm{CR}}} \quad (1 \leq k \leq \dim(V_h))\,. \tag{3.16}$$

对于二维区域的三角剖分，C_h 可取为 C_h =0.1893h_{max} [31]。若改用协调有限元法而非 Crouzeix–Raviart 有限元法，计算 C_h 会更加复杂；参见 [37]。值得指出的是，要利用式（ 3.16 ）得到 λ_k 的可靠下界，必须严格求解 Crouzeix–Raviart 有限元法所得离散矩阵的特征值问题，从而得到$\lambda_{k,\ h}^{\mathrm{CR}}$的精确下界。需要注意的是，可以通过例如 [7]中提出的算法获得矩阵特征值包络。

3.2.2 Steklov 特征值问题

这里的一个具体特征是，双线性型 $b(\cdot,\ \cdot)$ 诱导出 $\mathcal{K} = G\gamma$ 的非零核。

Steklov 特征值问题 求 $\lambda > 0$ 和 $u \in H^1(\Omega)$，$\gamma u \neq 0$使得

$$(\nabla u, \nabla v)_\Omega + (u, v)_\Omega = \lambda(\gamma u, \gamma v)_{\partial\Omega} \quad \forall\, v \in H^1(\Omega). \tag{3.17}$$

这里，$\gamma:\ H^1(\Omega) \mapsto L^2(\partial\Omega)$ 是迹算子。由于 Ω 是有界 Lipschitz 区域，γ 是一个紧算子；例如参见 [19]。

为应用定理 3.1，我们采用如下设置（参见注 2.1）

$$V := H^1(\Omega),\ W := L^2(\partial\Omega),\ a(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_\Omega + (u,v)_\Omega,\ b(u,v) := (u,v)_{\partial\Omega}.$$

对于离散特征值问题，取 $V_h := V_h^{\mathrm{CR}}$和 $V(h) := V + V_h$。令 $\gamma_h:\ V_h \to W$ 为定义在

$\mathcal{T}^h$边界单元上的函数的分片迹算子。对于 $v + v_h \in V(h)$，其中 $v \in V$和 $v_h \in V_h$，$\widehat{\gamma}(v + v_h) := \gamma v + \gamma_h v_h$.[4]

在 $V(h)$ 上定义 $\widehat{a}(\cdot,\cdot)$ 为

$$\widehat{a}(u_h, v_h) := \sum_{K\in\mathcal{T}^h} \int_K \nabla u_h \cdot \nabla v_h + u_h v_h \, \mathrm{d}x \quad \forall\, u_h, v_h \in V(h)\,. \tag{3.18}$$

对 $u, v \in V$，成立 $\widehat{a}(u, v) = a(u, v)$。

设 P_h： $V(h) \mapsto V_h$ 为式 (3.8) 中所定义的投影。为应用定理 3.1，需要如下投影误差估计。

$$\|\gamma(u - P_h u)\|_{L^2(\partial\Omega)} \le C_h \|u - P_h u\|_{1,\Omega},\ \forall u \in V\,.$$

在 [60]，中，利用由 (3.4) 计算得到的 $\lambda_{1,h}$ 的值，量 C_h 的一个显式值给出为

$$C_h := 0.6711 \max_{K\in\mathcal{T}_b^h} \frac{h_K}{\sqrt{H_K}} + \frac{0.1893}{\sqrt{\lambda_{1,h}}} \max_{K\in\mathcal{T}^h} h_K\ , \tag{3.19}$$

在假设 $\mathcal{T}_b^h$ 的所有单元在 $\partial\Omega$ 上恰好各有一条边的条件下。这里，$\mathcal{T}_b^h$ 是 $\mathcal{T}^h$ 中在 $\partial\Omega$ 上具有一条边的单元的集合；对于 $K \in \mathcal{T}_b^h$，H_K 表示 K 相对于其边界边的高。

值得指出的是，在式 (3.19) 中，除由区域上的特征值问题所确定的项 $\lambda_{1,h}$外，其余各项仅与网格有关，并且本质上与区域的形状无关。再次注意，若采用协调有限元法而非 Crouzeix–Raviart 有限元方法，将使 C_h的计算更为复杂；参见 [42]。

Steklov 特征值的显式下界设 $\lambda_k^{\mathrm{CR}}{}_{,h}$ 为 V_h 中由 Crouzeix–Raviart 有限元法得到的第 k 个离散特征值。结合定理 3.1 以及 P_h 的显式投影误差估计，我们得到方程 (3.17) 中 Steklov 特征值的显式下界，

$$\lambda_k \ge \frac{\lambda_{k,h}^{\mathrm{CR}}}{1 + C_h^2 \lambda_{k,h}^{\mathrm{CR}}} \quad (k = 1, 2, \cdots, d')\,. \tag{3.20}$$

这里，$d' = \dim(V_h) - \dim(\mathrm{Ker}(\gamma_h))$, $\mathrm{Ker}(\gamma_h) = \{v_h \in V_h \,|\, \gamma_h v_h = 0\}$。

[4]拉普拉斯特征值问题的情形请参见脚注。

备注 3.3. 由于 C_h （对于非协调有限元法，也适用于协调有限元法）取决于三角剖分的全局最大边长，因此，基于投影的界 (3.16) 和 (1.1) 在网格渐变适中的非均匀网格上表现良好，但在单元尺寸差异很大的强分级网格上，其精度会下降（即极小单元与极大单元并存）。这也是我们提出两阶段方法的动机之一。

注3.4. 注意，由于 $C_h = O(\sqrt{h})$ 当 $h \to \overline{0}$ 时，式 (3.20) 中得到的特征值下界仅以速率 $O(h)$收敛。与近似特征值本身相比，这并非最优；对于 H^2-正则解，其收敛速率为 $O(h^2)$，参见例如 *[59]*。

4 第二阶段：利用 Lehmann–Goerisch 定理构造高精度特征值界

到目前为止，在研究特征值界的第一阶段中，我们已成功利用非协调 Crouzeix–Raviart 单元空间等方法构造了基于投影的特征值下界。为了得到尖锐的特征值界，一个自然的想法是细化网格，或提高有限元空间中所用多项式的次数。对于非协调有限元法，可以通过细化网格来提高精度，但通常无法获得高阶 Crouzeix–Raviart 类有限元法。

相反，在所提出的算法的第二阶段中，为了获得高精度特征值界，我们将介绍 Lehmann–Goerisch 定理，并采用高阶协调有限元方法以及第一阶段获得的粗略特征值界。

采用 Lehmann–Goerisch 定理和协调有限元法的思路也已成功用于界定 Poincar´e 常数，其中高阶协调有限元方法可得到相当有效的特征值界（见[36]），并用于为各种非线性边值问题给出计算机辅助的存在性与多重性证明（例如见 [48, 12, 11, 44]）；

4.1 Lehmann–Goerisch 定理

下面介绍应用 Lehmann–Goerisch 定理所研究的特征值问题的表述。

求出 $u \in D$ 和 $\lambda \in \mathbb{R}$，使得:

$$M(u,v) = \lambda N(u,v) \quad \forall v \in D\ . \tag{4.1}$$

符号沿用 F. Goerisch 原文中的用法。与式 (2.1) 中定义的特征值问题相比，我们有

$$D = V, \quad M(\cdot,\cdot) = a(\cdot,\cdot), \quad N(\cdot,\cdot) = b(\gamma\cdot,\gamma\cdot)\ .$$

Lehmann–Goerisch 定理首先声明，在某个范围内存在特征值。进一步利用可由我们算法的第一阶段获得的粗略特征值界，可以得到式 (4.1) 特征值的高精度界。

现在，让我们列出 Lehmann–Goerisch 定理的假设 [5]。

假设：

A1 设 D 为实向量空间，$M(\cdot,\ \cdot)$ 和 $N(\cdot,\ \cdot)$ 为 D 上的对称双线性型。$M(\cdot,\ \cdot)$ 在 D 上正定。

A2 存在特征对序列 $\{(\lambda_i,\ \varphi_i)\}_{i\in\mathbb{N}}$，属于 $\mathbb{R}\times D$，且满足

$$M(\varphi_i, v) = \lambda_i N(\varphi_i, v) \quad \forall v \in D; \quad M(\varphi_i,\varphi_j) = \delta_{ij} \quad \text{for } i,j \in \mathbb{N}\ .$$

这里，δ_{ij} 是克罗内克δ。此外，

$$N(v,v) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i \left|N(v,\varphi_i)\right|^2 \quad \forall v \in D\ . \tag{4.2}$$

A3 设 X 为一个实向量空间，b_G 为 X上的对称半正定双线性型。设 $T: D \to X$ 为一个线性算子，使得

$$b_G(Tu,Tv) = M(u,v) \quad \forall u,v \in D\ .$$

A4 给定 $v_1,\ v_2,\ \cdots,\ v_n \in D$，令 $w_1,\ w_2,\ \cdots,\ w_n \in X$ 满足

$$b_G(w_i, Tv) = N(v_i, v) \quad \forall v \in D \quad (i = 1,\ldots,n)\ . \tag{4.3}$$

A5 给定 $\rho \in \mathbb{R}$、$\rho > 0$，定义 $n\times n$ 矩阵 $A_0,\ A_1,\ A_2,\ A,\ B$ 如下

$$A_0 := \big(M(v_i,v_j)\big)_{i,j=1}^n,\ A_1 := \big(N(v_i,v_j)\big)_{i,j=1}^n,\ A_2 := \big(b_G(w_i,w_j)\big)_{i,j=1}^n,$$

[5]这里的假设与 [22, 21]中的相同。请注意，[22]中的假设是用算子表述的，而在Goerisch和Albrecht后来的论文 [21], 中，特征值问题和假设则是用双线性型表述的。

$$A := A_0 - \rho A_1, \quad B := A_0 - 2\rho A_1 + \rho^2 A_2. \tag{4.4}$$

假设 B 是正定的。设 $\nu_1 \le \nu_2 \le \cdots \le \nu_n$ 为 $Az = \nu Bz$ 的特征值。设 q 为其中负特征值的个数。

现在，我们引用 Lehmann–Goerisch 定理的结论。

定理 4.1 (Lehmann–Goerisch 定理)。 在假设 *A1-A5* 下，对于每个 $k\,(1 \le k \le q)$，区间 $[\rho - \rho/(1-\nu_k)\ \rho)$ 至少包含 k个 $\{\lambda_i\}_{i\in\mathbb{N}}$的特征值（按重数计）。

定理 4.1。 给定 $v \in D$，令 $\tilde{u} \in D$ 为方程的解：

$$M(\tilde{u}, \phi) = N(v, \phi) \quad \forall \phi \in D\ . \tag{4.5}$$

对于任意满足以下条件的 $w \in X$

$$b_G(w, T\phi) = N(v, \phi) \quad \forall \phi \in D\ ,$$

有 $b_G(w, w) \ge b_G(T\tilde{u}, T\tilde{u}) = M(\tilde{u}, \tilde{u})$。

证明。 令 $\widehat{w} := w - T\tilde{u} \in X$。由于

$$b_G(\widehat{w}, T\phi) = b_G(w, T\phi) - M(\tilde{u}, \phi) = N(v, \phi) - N(v, \phi) = 0 \quad \forall \phi \in D\,,$$

我们有

$$b_G(w, w) = b_G(T\tilde{u} + \widehat{w}, T\tilde{u} + \widehat{w}) = b_G(T\tilde{u}, T\tilde{u}) + b_G(\widehat{w}, \widehat{w}) \ge b_G(T\tilde{u}, T\tilde{u}).$$

□

注 4.2. （ w_i 项的选取）一般而言，在条件 (4.3) 下， w_i 的选取有一定自由度。选取$b_G(w_i, w_i)$ 取值“较小”的 w_i，将得到“较好”的特征值下界。事实上，在约束条件 (4.3) 下， $b_G(w_i, w_i)$在 $w_i = T\widetilde{u}_i$处取得最小值，其中 $\widetilde{u}_i$ 由 *Lehmann* 方法的标准设置通过求解 (4.5) 得到。然而，这个原始的 *Lehmann* 方程通常难以（甚至无法）显式求解。*Goerisch* 引入 w_i 项（称为“*Goerisch* 的 *XbT* 概念”；参见例如 *[44,* 引理 *10.25]*），使得构造 w_i 更具灵活性，从而获得目标特征值问题的特征值界。在实际计算中，我们构造一个有限维空间 $X_h(\subset X)$

并通过求解最小化问题来计算 w_i 项（参见 *[36, 注 5]*和 *[44, 注 10.26 (c)]*）：

$$\min_{w_i \in X_h} b_G(w_i, w_i) \ \textit{subject to condition}\ (4.3)\,. \tag{4.6}$$

为了得到严格的特征值界，最小化问题方程 (4.6) 尽管不需要精确求解，但条件 (4.3) 必须严格满足。

从现在起，假设 A_1 为正定矩阵。令 Λ_n 为 $A_0 x = \Lambda A_1 x$ 的最大特征值。

人们已努力验证假设 A5 中矩阵 B 的正定性，参见例如 [44，定理 10.10、10.21、10.29]。下面的引理给出了实现这一目标的直接条件。

定理 4.2。在 $\rho > \Lambda_n$ 的情况下，方程 (4.4) 中的矩阵 B 确实是正定的，正如假设 *A5* 所要求的那样。

证明。令 $v(\neq 0)$ 为 v_1、v_2、.....、$v_n \in D$ 的线性组合。令 $\tilde{u}$ 为将方程 (4.5) 中的 v_i 替换为 v 后所得的解。也就是说，

$$M(\tilde{u}, \phi) = N(v, \phi),\ \forall \phi \in D. \tag{4.7}$$

令 $\widehat{w} := T\tilde{u}$。我们有 $b_G(\widehat{w}, Tv) = b_G(T\tilde{u}, Tv) = M(\tilde{u}, v) = N(v, v)$，并且

$$0 \le b_G(Tv - \rho\widehat{w}, Tv - \rho\widehat{w}) = M(v, v) - 2\rho N(v, v) + \rho^2 b_G(\widehat{w}, \widehat{w}).$$

此外，$b_G(Tv - \rho\widehat{w}, Tv) \neq 0$，否则，

$$M(v, v) = b_G(Tv, Tv) = b_G(\rho\widehat{w}, Tv) = \rho N(v, v).$$

然而，$M(v, v) - \rho N(v, v) = 0$ 与 $\rho > \Lambda_n$ 这一假设相矛盾。

根据已确认的事实 $b_G(Tv - \rho\widehat{w}, Tv) \neq 0$，我们有 [6]

$$b_G(Tv - \rho\widehat{w}, Tv - \rho\widehat{w}) > 0. \tag{4.8}$$

给定任意满足以下条件的 $w \in X$

$$b_G(w, T\phi) = N(v, \phi) \quad \forall \phi \in D,$$

[6]注意，对于任意对称的半正定双线性型 $b_G(\cdot, \cdot)$，由柯西–施瓦茨不等式，$b_G(f, f) = 0 \quad b_G(f, g) = 0 \quad g \in X$ 意味着 (,) 对所有均成立。

根据引理 4.1，我们有 $b_G(w,w) \geq b_G(\widehat{w},\widehat{w})$。进一步利用不等式 (4.8)，

$$M(v,v) - 2\rho N(v,v) + \rho^2 b_G(w,w) \geq M(v,v) - 2\rho N(v,v) + \rho^2 b_G(\widehat{w},\widehat{w})$$
$$= b_G(Tv - \rho\widehat{w}, Tv - \rho\widehat{w}) > 0.$$

这意味着矩阵 B 是正定的。 □

以下定理给出了定理 4.1 的一个应用，即利用 ρ作为 λ_{m+1}的下界，来求得 n 特征值 λ_{m-n+1}，$\cdots$，λ_m的下界；相关特征值的示意图见图 1。

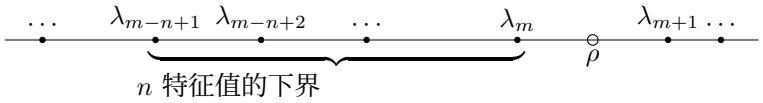

图 1：利用 Lehmann–Goerisch 定理界定特征值。

定理 4.3。 假设 ρ 是某个 $m \geq n$ $(m \in \mathbb{N})$的第 $(m+1)$个特征值 λ_{m+1}的下界，即

$$\rho \leq \lambda_{m+1} \ . \tag{4.9}$$

若满足假设 *A1-A5*，则下列下特征值界成立。

$$\lambda_{m+1-k} \geq \rho - \frac{\rho}{1-\nu_k} \quad (1 \leq k \leq q) \, . \tag{4.10}$$

特别地，如果 $\rho > \Lambda_n$，那么 $\nu_n < 0$，即 $q = n$，并且

$$\lambda_{m+1-k} \geq \rho - \frac{\rho}{1-\nu_k} \quad (1 \leq k \leq n) \, . \tag{4.11}$$

我们指出，在 $m = n$ 的情况下，在本质条件下（另见 [44, 定理 10.31]）

$$\Lambda_n < \rho \leq \lambda_{n+1} \, , \tag{4.12}$$

(4.11) 右端为 λ_1、$\cdots$、λ_n 提供下界。

注4.4. 需要特别指出，在我们提出的两阶段算法中，第一阶段的基于投影的特征值下界用于计算满足 (4.9) 或 (4.12) 的 ρ 。

注 4.5。 根据 *Lehmann–Goerisch* 定理给出的下界关于 先验 下界 ρ （$\leq \lambda_{m+1}$）单调递增（ *[6]*中的定理 ***4.1***）。实际上，即使 ρ 较为粗略，只要 v_i 是精确特征函数的良好近似，式 （4.10）中的特征值界仍然很精确。

4.2 Lehmann–Goerisch 定理在具体特征值问题中的应用

本节展示 Lehmann–Goerisch 定理在两个具体特征值问题中的应用: Dirichlet 拉普拉斯算子特征值问题和 Steklov 特征值问题。为简化论述, 我们在此考虑前 n个特征值的下界。通常，应用 Lehmann–Goerisch 定理并不需要从第一特征值开始。

Lehmann–Goerisch方法的一个特点是，当目标解存在奇异性时，它可以利用分级网格（即在可能出现奇异部分的区域附近进行加密的网格），恢复近似解的收敛率。与基于插值或基于投影的误差估计的定理 3.1 所给出的特征值下界不同，使用分级网格时，Lehmann–Goerisch 定理给出的特征值下界不受粗糙单元尺寸的影响。最后一节的数值计算中提供了一个使用 L形区域分级网格的示例，以展示这一特点。

为了实现 Lehmann–Goerisch 定理，我们先为当前考虑的二阶特征值问题引入若干有限元空间。请注意，此处多项式的次数定义为各变量指数之和。例如， xy的次数为 2。以下有限元空间的阶数 p 将取为$p \geq 1$。

- 设 CG_h^p 为由次数不超过 p 的连续分片多项式构成的拉格朗日有限元空间。

• 设 RT_h^p(⊂ H(散度 ;Ω)) 为次数为p的 Raviart–Thomas有限元空间:

$$\mathrm{RT}_h^p := \Big\{ v \ : v = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} + c_3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \ \text{ on each element } K, \text{ where the } c_i\text{'s} \\ \text{are polynomials on } K \text{ of degree up to } p; \\ v \cdot \vec{n} \text{ is continuous across each interior edge } e. \Big\} .$$

• 令 DG_h^p 为次数不超过 p的分片多项式空间。Raviart–Thomas空间的性质表明，div(RT_h^p) =DG_h^p。

4.3 拉普拉斯算子特征值问题

我们考虑式（3.14）定义的特征值问题，旨在获得 λ_1，$\cdots$，λ_n的高精度特征值界。假设 λ_n 和λ_{n+1} 彼此充分分离。值得指出的是，为应用定理 4.3 获得前 n个特征值的下界，第一阶段得到的基于投影误差的下界至关重要，并将在选择 ρ 时使用，使得 $\Lambda_n < \rho \le \lambda_{n+1}$ （见注4.4）。

为 Lehmann–Goerisch 定理引入如下设定。

$D := H_0^1(\Omega);\ M(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_\Omega,\ N(u,v) := (u,v)_\Omega \quad \forall u, v \in D\,.$

Goerisch 的 XbT 设定取为

$$X := \left(L^2(\Omega)\right)^2; \quad b_G(u,v) := (u,v)_\Omega \quad \forall u, v \in X\ ; \quad T := \nabla\ .$$

取（3.14）中满足假设A2的特征对 $\{\lambda_i, u_i\}_{i=1}^\infty$。容易验证假设A3，即对于所有 $u,\ v \in D,\ b_G(\nabla u,\ \nabla v) = M(u,\ v)$。

现在，我们来说明 Lehmann–Goerisch 定理所要求的函数选择。

选择 v_i 考虑离散特征值问题：求$u_h(\neq 0)$，使其属于 CG_h^p，且满足 $\lambda_h \in \mathbb{R}$。

$$M(u_h, v_h) = \lambda_h N(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathrm{CG}_h^p\ . \tag{4.13}$$

用 $\{\lambda_{i,h}, u_{i,h}\}_{i=1}^n$ 表示前 n 个特征值对应的精确特征对。Lehmann–Goerisch 定理的 A4 中所需的近似特征函数 v_1、$\cdots$、v_n 选为 $v_i \approx u_{i,h}$。请注意，v_i 不必与 $u_{i,h}$ 完全相等，因为在 Lehmann–Goerisch 定理的框架下，允许使用任意协调近似。

计算 w_i 对于每个 v_i ($\approx u_{i,h}$)，$w_i \in X = (L^2(\Omega))^2$ 的约束条件 (4.3) 变为

$$(w_i, \nabla v) = (v_i, v) \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)\,. \tag{4.14}$$

根据散度的分布定义，条件 (4.14) 意味着 w_i属于 H(散度 ; Ω)，且必须满足 [7]

$$\operatorname{div} w_i + v_i = 0 \quad \text{in } \Omega\,. \tag{4.15}$$

由于 $v_i \in \mathrm{CG}_h^p$ ($\subset \mathrm{DG}_h^p$ = 散度 (RT_h^p))，因此可以找到一个 $w_i \in \mathrm{RT}_h^p$，使其精确满足 (4.15)。也就是说，散度 $w_i + v_i = 0$ 逐点成立。在数值计算中，通过使用来自 DG_h^p 的检验函数来表示方程 (4.15)，即要求

$$(\operatorname{div} w_i + v_i, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in \mathrm{DG}_h^p\,.$$

方程 (4.15) 的解 w_i 并不唯一。为了选择一个"较好"的 w_i以获得紧的特征值界，我们按照注 4.2 考虑以下最小化问题:

$$\min_{w_i \in \mathrm{RT}_h^p} \|w_i\| \quad \text{subject to } \operatorname{div} w_i + v_i = 0\,. \tag{4.16}$$

方程 (4.16) 的鞍点形式是求 $(w_i,\ \phi_{i,h}) \in \mathrm{RT}_h^p \times \mathrm{DG}_h^p$，使得

$$\begin{cases} (w_i, q_h) + (\phi_{i,h}, \operatorname{div} q_h) = 0 \quad \forall q_h \in \mathrm{RT}_h^p\,, \\ (\operatorname{div} w_i, \psi_h) + (v_i, \psi_h) = 0 \quad \forall \psi_h \in \mathrm{DG}_h^p\,. \end{cases} \tag{4.17}$$

系统 (4.17) 存在唯一解 $(w_i,\ \phi_{i,h})$（例如参见 [4], [13] 的 §IV.1 命题 1.1）。如定理 4.2 所述，要获得严格的特征值界，w_i 不一定必须是方程 (4.16) 的精确极小化解，但必须严格满足约束条件 (4.15)。这样的 w_i 可以通过使用区间算术求解方程 (4.17)，作为区间函数得到；然而，与使用近似求解器求解方程 (4.17) 相比，这需要额外的计算成本。关于如何高效计算 w_i，请参见注 4.6，其中介绍了在特征值问题中引入移位的技巧。

[7] 在 (4.14) 中取来自 $C_0^\infty(\Omega)$ 的检验函数 v，可知分布意义下的散度 w_i 实际上属于 $L^2(\Omega)$，且散度 $w_i + v_i = 0$ 成立。

选择 ρ 在第一阶段，我们应用 §3 中的基于投影的方法，获得特征值 λ_{n+1} 的精确下界 ρ，即 $\rho \leq \lambda_{n+1}$。在特征值下界 (3.16) 中使用 Crouzeix–Raviart 有限元法时，ρ 取为

$$\rho := \frac{\lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}}}{1 + C_h^2 \lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}}} .$$

利用上述 v_i 和 w_i，构造 Lehmann–Goerisch 定理 A5 中的矩阵 A_1、A_1、A_2、A 和 B $(i = 1, \cdots, n)$。令 Λ_n 为具有矩阵 A_0 和 A_1 的特征值问题的最大特征值：

$$A_0 x = \Lambda A_1 x . \tag{4.18}$$

适当选取 n，使得 λ_n 和 λ_{n+1} 彼此分离，便可利用加密网格和 ρ 计算 v_i，从而确保满足以下条件

$$(\lambda_n \leq)\ \Lambda_n < \rho \leq \lambda_{n+1} .$$

注意，上述对 ρ 的选取意味着 B 是正定的；见引理 4.2。

为了便于理解 Lehmann–Goerisch 定理的描述，我们在算法 1 中总结计算流程。

注 4.6。下面介绍一种常用技术，该技术可避免在求取 w_i 项时，对线性方程组 (4.17) 进行繁重的计算。第 5 节中的示例未采用此技术，但这里仍予以介绍，以备将来使用。考虑带有移位 $\lambda(> 0)$ 的特征值$\widehat{\ }$问题，其设置如下：

$$D := H_0^1(\Omega);\ M(u,v) := (\nabla u, \nabla v)_\Omega + \widehat{\lambda}(u,v)_\Omega,\ N(u,v) := (u,v)_\Omega\ \forall u, v \in D.$$

Goerisch 的 XbT 设置取为 $X := \left(L^2(\Omega)\right)^3$，$Tu := \{\nabla u, u\} (\in X)$，其中 $u \in D$。将每个 $u \in X$ 改写为 $u = \{u^{(1)}, u^{(2)}\}$，$u^{(1)} \in \left(L^2(\Omega)\right)^2$，$u^{(2)} \in L^2(\Omega)$。对于 u，$v \in X$，

$$b_G(u,v) := (u^{(1)}, v^{(1)})_\Omega + \widehat{\lambda}(u^{(2)}, v^{(2)})_\Omega .$$

对于每个近似特征函数 v_i，条件式 (4.3) 对于 $w_i = \{w_i^{(1)}, w_i^{(2)}\} \in X$ 变为

$$div\, w_i^{(1)} + \widehat{\lambda} w_i^{(2)} + v_i = 0 \quad in\ \Omega. \tag{4.20}$$

算法 1 基于 Lehmann–Goerisch 定理的保证的特征值界

目标： 前 n 个特征值的下界。假设 λ_n 和 λ_{n+1} 彼此充分分离，从而满足条件 (4.19)。

步骤：

步骤 1：近似求解特征值问题 (4.13)，得到 $v_i(\approx u_{i,\,h}) \in \mathsf{CG}_h^p$。严格求解特征值问题 (4.18)，得到 Λ_n，它为 $\lambda_{n,\,h}$ 提供上界。

步骤 2：使用区间算术，以验证方式求解 V_h^{CR} 中的特征值问题 (3.14)，计算 $\lambda_{n+1,\,h}^{\mathrm{CR}}$。对 V_h^{CR} 和 CG_h^p 使用加密网格，得到一个满足以下条件的 ρ

$$\lambda_{n,h} \le \Lambda_n < \rho := \frac{\lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}} 1 + C_h^2 \lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}}}{\le} \lambda_{n+1} \ . \tag{4.19}$$

步骤 3：对于每个 v_i $(1 \le i \le n)$，令 w_i 为满足等式 (4.15) 的解，该解满足 (4.17)。

步骤 4：利用函数 v_i、w_i $(1 \le i \le n)$ 定义 A_0、A_1、A_2、A 和 B。设 $Ax = \nu Bx$ 的特征值为 $\nu_1 \le \cdots \le \nu_n$。关系 $\lambda_{n,\,h} < \rho$ 确保 B 和 $-A$ 为正定，因此 $\nu_n < 0$。(3.14) 中 λ_k 的下界为

$$\lambda_k \ge \rho - \rho/(1 - \nu_{n+1-k}) \quad (1 \le k \le n) \, .$$

对于给定的 $v_i \approx u_{i,h}$，通过使用近似求解器求解方程 (4.17) 来计算 $w_i^{(1)} \in \boldsymbol{RT}_h^p$。然后，以严格方式计算 $w_i^{(2)}$，即 $w_i^{(2)} = (-$散度$(w_i^{(1)}) - v_i)/\widehat{\lambda}$。所得的 $w_i = \{w_i^{(1)}, w_i^{(2)}\}$ 严格满足条件方程(4.20)。在当前设定下应用 ***Lehmann–Goerisch*** 定理，可直接得到平移后的特征值的下界，进而通过重新减去平移量 $\widehat{\lambda}$，得到原始特征值的界。

4.4 Steklov 特征值问题

在本小节中，我们考虑 Steklov 特征值问题中第一个 n 特征值的高精度界。下面给出 Lehmann–Goerisch 定理所需的设定。

(a) 令 $D = H^1(\Omega)$，并定义双线性型 $M(\cdot,\cdot)$ 和 $N(\cdot,\cdot)$ 如下

$$M(u,v) := \int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + uv \, \mathrm{d}x, \quad N(u,v) := \int_{\partial\Omega} \gamma u \gamma v \, \mathrm{d}s \ \ \forall u, v \in D \, .$$

这里，γ 是迹算子。

(b) 令 $\{\lambda_i, u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 为特征值问题 (3.2) 的特征对。注意，$\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathrm{Ker}(\mathcal{K})^\perp (\subset H^1(\Omega))$ 的完备正交系统，其中正交补是相对于 $M(\cdot,\cdot)$ 而取的。给定 $v \in D$，将 v 分解为 $v = v_0 + v'$, $v_0 \in H_0^1(\Omega)$, $v' \in \mathrm{Ker}(\mathcal{K})^\perp$ 以及

$$v' = \sum_{i=1}^{\infty} M(v', u_i) u_i. \tag{4.21}$$

由于 $v_0 \in H_0^1(\Omega) = \mathrm{Ker}(\mathcal{K})$，我们有 $M(u_i, v_0) = \lambda_i N(u_i, v_0) = 0$。因此，

$$M(u_i, v) = M(u_i, v') = \lambda_i N(u_i, v') = \lambda_i N(u_i, v).$$

显然，$M(u_i, u_j) = \delta_{ij}$，且 $N(u_i, u_j) = 1/\lambda_i \delta_{ij}$($\delta_{ij}$: 克罗内克δ)。因此，利用 (4.21) 以及 $N(\cdot,\cdot)$ 关于 $M(\cdot,\cdot)$ 的连续性，

$$\begin{aligned} N(v,v) = N(v',v') &= \sum_{i=1}^{\infty} N(u_i,u_i) \cdot |M(v',u_i)|^2 \\ &= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_i} \cdot \lambda_i^2 |N(v',u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |N(v',u_i)|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i |N(v,u_i)|^2 \, . \end{aligned}$$

根据上述论证，我们已确认假设 A2 中的 $\{\varphi_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ 可以取为 $\{u_i\}_{i\in\mathbb{N}}$。

(c) 令 $X = \left(L^2(\Omega)\right)^3$，并定义 $b_G(\cdot,\cdot)$，其中 $\phi, \psi \in X$，定义为 $b_G(\phi,\psi) := \int_\Omega \phi \cdot \psi \, dx$. 令 $Tv := \{\nabla v, v\}$，其中 $v \in D$。因此，对于所有 $u, v \in D$，都有 $b_G(Tu, Tv) = M(u,v)$。

现在，我们来介绍 Lehmann–Goerisch 定理所需的函数。

选择 v_i 我们来考虑离散特征值问题:

$$M(u_h, v_h) = \lambda_h N(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathrm{CG}_h^p \ . \tag{4.22}$$

或者反过来,

$$N(u_h, v_h) = \mu_h M(u_h, v_h) \quad \forall v_h \in \mathrm{CG}_h^p \ . \tag{4.23}$$

取 $\mu_{i,h} (i = 1, \cdots, n)$ 为方程 (4.23) 的 n 个最大正特征值，并取$u_{i,h} \in \mathrm{Ker}(\mathcal{K})^\perp (i = 1, \cdots, n)$ 为相应的特征函数。然后，定义 $\lambda_{i,h} := 1/\mu_{i,h} (i = 1, \cdots, n)$。Lehmann–Goerisch 定理 A4 所要求的函数 $v_1, \cdots, v_n$ 在 CG_h^p 中选取为$u_{1,h}, \cdots, u_{n,h}$的近似函数。

计算 w_i 对于每个 $v_i \approx u_{i,\ h}$，用于确定$w_i = \{w_i^{(1)}, w_i^{(2)}\} \in X$, $w_i^{(1)} \in (L^2(\Omega))^2$, $w_i^{(2)} \in L^2(\Omega)$ 的方程 (4.3) 变为

$$(w_i^{(1)}, \nabla v)_\Omega + (w_i^{(2)}, v)_\Omega = (\gamma v_i, \gamma v)_{\partial\Omega} \quad \forall v \in D. \tag{4.24}$$

容易看出，$w_i^{(1)}$ 必须属于 H(散度；Ω)，并满足

$$-\mathrm{div}\, w_i^{(1)} + w_i^{(2)} = 0 \text{ in } \Omega, \quad w_i^{(1)} \cdot \vec{n} = \gamma v_i \text{ on } \partial\Omega. \tag{4.25}$$

因此，$w_i^{(2)} :=$ 散度 $w_i^{(1)}$ 必须选取为，由此

$$b_G(w_i, w_i) = \|w_i^{(1)}\|_\Omega^2 + \|\mathrm{div}\, w_i^{(1)}\|_\Omega^2 \ .$$

由于 $\{(w_h \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} : \ w_h \in RT_h^p\}$ 包含 $\mathcal{T}^h$ 的边界边上所有次数为p 的分片多项式，因此可以从 RT_h^p 中选取 $w_i^{(1)}$，使方程 (4.25) 的第二个方程成立。正如注 4.2 所述，w_i 项通过近似求解以下最小化问题来确定:

$$\min_{w_i^{(1)} \in RT_h^p,\ (w_i^{(1)} \cdot \vec{n})|_{\partial\Omega} = \gamma v_i} \|w_i^{(1)}\|_\Omega^2 + \|\mathrm{div}\, w_i^{(1)}\|_\Omega^2 \ . \tag{4.26}$$

最小化问题方程 (4.26) 等价于以下变分问题：求 $w_i^{(1)} \in RT_h^p$，使得在 $\partial\Omega$ 上有 $w_i^{(1)} \cdot \vec{n} = \gamma v_i$，并且

$$(w_i^{(1)}, w_h)_\Omega + (\mathrm{div}\ w_i^{(1)}, \mathrm{div}\ w_h)_\Omega = 0 \quad \forall w_h \in \mathrm{RT}_{0,h}^p. \tag{4.27}$$

这里，$\mathrm{RT}_{0,\ h}^p := \{w_h \in \mathrm{RT}_h^p \mid w_h \cdot \vec{n} = 0 \text{ 在 } \partial\Omega\}$ 上。

ρ 的选择

取 ρ作为通过 Crouzeix– Raviart 有限元方法获得的 λ_{n+1} 的下特征值界。也就是说,

$$\rho := \frac{\lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}}}{1 + C_h^2 \lambda_{n+1,h}^{\mathrm{CR}}}.$$

定义矩阵 A_0, A_1 如下

$$A_0 := \big(M(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^n , \quad A_1 := \big(N(v_i, v_j)\big)_{i,j=1}^n. \tag{4.28}$$

注意，根据 v_1, $\cdots$, v_n 的选择, A_1 是正定的。设 Λ_n 为特征值问题 $A_0 x = \Lambda A_1 x$ 的最大特征值。通过适当选择特征值指标 n 并采用加密网格，可以确保 $\Lambda_n < \rho$。

Lehmann–Goerisch 定理的矩阵 设 $\nu_k (k = 1, \cdots, n)$ 为 $Ax = \nu Bx$ 的负特征值，其中

$$A_2 = \big(b_G(w_i, w_j)\big)_{i,j=1}^n, \quad A = A_0 - \rho A_1, \quad B = A_0 - 2\rho A_1 + \rho^2 A_2. \tag{4.29}$$

由此得到以下下界。

$$\lambda_k \geq \rho - \frac{\rho}{1 - \nu_{n+1-k}} \quad (1 \leq k \leq n). \tag{4.30}$$

注 4.7。 除了采用本节讨论的 $D = H^1(\Omega)$ ，我们也可以采用 $D = Ker(\mathcal{K})^{\perp} (\subset H^1(\Omega))$ 来得到相同的特征值界，同时保持 M、 N、 T、 X 与本节 ***(a)***、***(b)*** 和 ***(c)*** 中的设定相同。由于近似特征向量 $v_i \in CG_h^p$ 可能不属于 $D = Ker(\mathcal{K})^{\perp}$，因此需要付出更多努力来处理这一问题。引入关于 $M(\cdot, \cdot)$ 的正交投影 $P : H^1(\Omega) \mapsto Ker(\mathcal{K})^{\perp}$ ，并将 v_i 分解为

$$v_i = Pv_i + (I - P)v_i; \quad Pv_i \in Ker(\mathcal{K})^{\perp}, \ (I - P)v_i \in Ker(\mathcal{K}) \ .$$

令 $\tilde{v}_i := Pv_i$。实际上，我们应用 *Lehmann–Goerisch* 定理，并用 $\tilde{v}_i$ $(i = 1, \cdots, n)$替换 v_i。注意， $\tilde{v}_i$ 仅用于理论分析，无需显式计算。由于 $v_i - \tilde{v}_i \in Ker(\mathcal{K})$，我们有$\gamma(v_i - \tilde{v}_i) = 0$ 在 $\partial\Omega$上成立。因此， $\gamma v_i = \gamma \tilde{v}_i$。于是，由$\tilde{v}_i$ 产生的 w_i 项与 v_i的相同。在构造矩阵 A_0、A_1、 A_2时，我们没有在(4.28)中使用 v_i ，而是采用 $\widetilde{A}_0 := \big(M(\tilde{u}_i, \tilde{u}_j)\big)_{i,\ j=1}^n$。

由投影 P关于 $M(\cdot,\cdot)$的正交性可得，对于所有 $u \in H^1(\Omega)$，都有 $M(u,u) \geq M(Pu,Pu)$。因此，$A_0 - \widetilde{A}_0$是半正定的。

Lehmann–Goerisch 定理利用以下特征值问题：

$$\widetilde{A}x = \tilde{\nu}\widetilde{B}x \quad (\widetilde{A} := \widetilde{A}_0 - \rho A_1,\ \widetilde{B} := \widetilde{A}_0 - 2\rho A_1 + \rho^2 A_2)\ .$$

设 Λ_n 为 $A_0x = \Lambda A_1 x$的最大特征值。那么 $\Lambda_n \leq \Lambda_n$。通过取 $(\Lambda_n \leq)\ \Lambda_n < \rho \leq \lambda_{n+1}$，可知 $-A$ 是正定的。由引理 *4.2* 给出的 B 的正定性可知，$B - A = \rho(\rho A_2 - A_1)$ 同样是正定的。经过适当变换，确定 $\tilde{\nu}$ 和 ν （它们均为负数）的特征值问题可表示为

$$(\widetilde{A}_0 - \rho A_1)x = \frac{\tilde{\nu}}{1-\tilde{\nu}}(\rho A_2 - A_1)x, \quad (A_0 - \rho A_1)x = \frac{\nu}{1-\nu}(\rho A_2 - A_1)x\ .$$

根据特征值的极小极大原理，有 $\tilde{\nu}_k \leq \nu_k (k = 1, \cdots, n)$。因此，通过理论项 $\tilde{\nu}_i$，我们得到与式 (4.30)相同的下界。也就是说，

$$\lambda_k \geq \rho - \frac{\rho}{1-\tilde{\nu}_{n+1-k}} \geq \rho - \frac{\rho}{1-\nu_{n+1-k}} \quad (1 \leq k \leq n)\ . \tag{4.31}$$

5 计算结果

本节讨论拉普拉斯算子和 Steklov 特征值问题。对于每个问题，通过应用定理 3.1 中基于投影的特征值界以及 Lehmann–Goerisch 定理 4.1，分两步获得高精度特征值界。数值结果展示了所提出算法的特点：§5.1 展示了该算法对非均匀网格或分级网格的适应性；§5.2 展示了 Steklov 特征值界的高精度结果，以及收敛率的恢复。

为获得特征值的严格界，我们使用区间算术和基于 Sylvester 惯性定律的方法 [7] ，精确求解矩阵的特征值问题。

5.1 Dirichlet 拉普拉斯特征值

考虑哑铃形区域 Ω 上的 Dirichlet 拉普拉斯特征值问题。该区域由两个单位正方形通过一条宽度为

0.40625 的长条连接而成（见图 3）。特征值的近似值如下：

$$\lambda_1 \approx 19.515307, \quad \lambda_2 \approx 19.515448, \quad \lambda_3 \approx 47.510661, \quad \lambda_4 \approx 47.519450,$$

$$\lambda_5 \approx 49.342953, \quad \lambda_6 \approx 49.342955\ .$$

与这六个特征值对应的近似特征函数按行顺序绘于图 2 中。

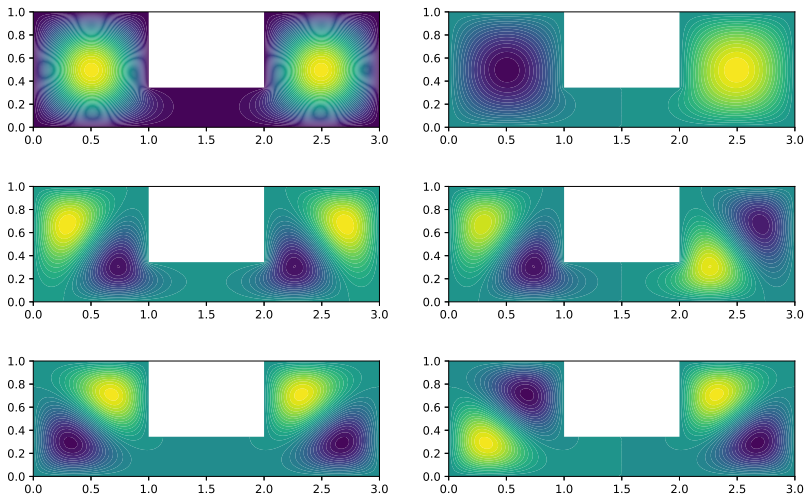

图 2： λ_i 的近似特征函数（$1 \le i \le 6$）（哑铃形区域）

有限元计算采用分级网格。根据解的正则性，三角形单元的尺寸选取为：

$$h(r) \approx \begin{cases} h_{\max}\, r^{1/3}, & \text{for } r < 1, \\ h_{\max}, & \text{for } r \ge 1, \end{cases}$$

其中， r 表示单元到区域两个再入角的距离， $h_{\max}$ 表示网格的最大边长。

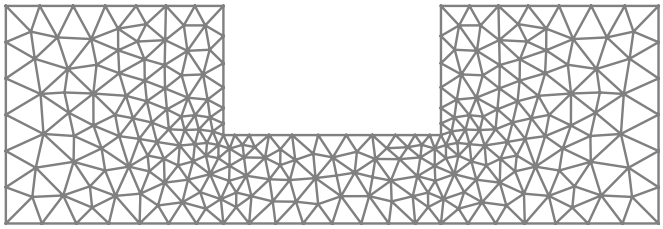

图3：哑铃形区域的分级网格

对于满足 $h_{\max} = 0.0298$ 的网格，我们采用 Crouzeix–Raviart 有限元法，通过投影误差常数$C_h = 0.1893 h_{\max}$ 和定理 3.1 计算 λ_7 的严格下界：

$$C_h \le 0.00565, \quad \lambda_{7,h}^{\mathrm{CR}} \in [74.37604, 74.37605], \quad \lambda_7 \ge 74.19986.$$

因此，对于 Lehmann–Goerisch 方法， ρ的 λ_7 下界设为

$$\rho = 74.0 < \lambda_7.$$

这里我们特意将 ρ 取为远低于基于$\lambda_{7,\,h}^{\mathrm{CR}}$得到的 λ_7 下界，以说明即使对 λ_7 的估计较粗糙，仍然可以得到λ_1， $\cdots$， λ_6的非常精确的界。

采用不同算法得到的严格下界和上界列于表1。在这项计算中，我们采用 Crouzeix–Raviart 有限元法（简称 CR）、Lagrange 有限元方法（CG）和 Lehmann–Goerisch 方法（LG），计算表中所示的特征值下界和上界。图3展示了最大边长（即网格尺寸）为 $h_{\max} = 0.194$ 的网格示例。我们将高度细化的$\widetilde{\ }$网格上得到的特征值数值作为参考特征值（记为 λ_i），并据此计算下界和上界的误差，如表2所示。

需要指出的是，第一阶段得到的基于投影的下界 λ_i^{CR}精度远远不足以区分 λ_3 和 λ_4。虽然已知λ_1 和 λ_2 彼此不同，但事先并不清楚 λ_3 和λ_4 是否不同。这里，我们采用了一个相当精细的网格，其中包含 1654 个单元；其协调空间 CG_h^3 的自由度为=30044。通过计算经验证的特征值界，我们严格确认了它们彼此不同。将 Lehmann–Goerisch 定理应用于特征值簇 λ_3, $\cdots$， λ_6 和

表1：拉普拉斯特征值的下界和上界（哑铃形区域，$h_{\max} = 0.290$，单元数量 =177）。

λ_i	下界：λ_i _			上界：λ_i ¯	
	CR	LG(p=1)	LG(p=2)	CG(p=1)	CG(p=2)
λ_1	18.5595	19.2865	19.5080	20.1365	19.5265
λ_2	18.5596	19.2867	19.5082	20.1366	19.5266
λ_3	41.9488	41.1170	47.2888	51.0975	47.6105
λ_4	41.9554	41.1189	47.2978	51.1087	47.6192
λ_5	43.7222	41.5923	49.2050	53.3572	49.4143
λ_6	43.7222	41.5926	49.2050	53.3572	49.4143

表1所示特征值界误差（哑铃形区域，˜相对于 λ_i）

	下界误差：$\widetilde{\lambda}_i - \underline{\lambda}_i$			上界误差：$\lambda_i -$ ¯ $\widetilde{\lambda}_i$	
	CR	LG(p=1)	LG(p=2)	CG(p=1)	CG(p=2)
λ_1, λ_2	4.9e-02	1.2e-02	3.7e-04	3.2e-02	5.7e-04
λ_3, λ_4	1.2e-01	1.3e-01	4.7e-03	7.5e-02	2.1e-03
λ_5, λ_6	1.1e-01	1.6e-01	2.8e-03	8.1e-02	1.4e-03

下界 $\rho = 74 \leq \lambda_7$，我们得到

$$\lambda_3 \leq 45.6099 < 45.6495 \leq \lambda_4 \,. \tag{5.1}$$

需要注意的是，即使采用能够成功区分 λ_3 和λ_4的配置，所得结果仍然过于粗略，无法确认 λ_5 和 λ_6是否可以区分。要区分这两个特征值（若它们不同，但目前尚不确定），还需要进一步努力。注 4.6 中的平移技术或许能提供更高效的方法，因为它避免了严格求解式 (4.17) 中大型线性方程组的必要。

对于递归细化网格，图 4 展示了特征值各类界的误差收敛情况。从数值结果中可以观察到所提出算法的以下特点。

1. 对于对应于 λ_1、.....、 λ_4 的特征函数，它们可能不具备

完整的 H^2 正则性，使用分级网格可以使采用线性有限单元计算得到的相关特征值界达到 $O(h^2)$ 的最优收敛率。

2. 当特征函数具有较高正则性时（从图 2 中的数值图来看， λ_5 和 λ_6 对应的特征函数似乎正是如此），通过 Lehmann–Goerisch 方法得到的下界，以及通过拉格朗日有限元方法得到的上界，分别对 $p = 1$ 和 $p = 2$ 呈现出最优收敛率 $O(h^2)$ 和 $O(h^4)$。

3. 与使用 Crouzeix–Raviart 有限元方法得到的结果相比，采用多项式次数为 $p = 2$ 的协调有限元方法（即 CG_h^2）的 Lehmann–Goerisch 方法能够为特征值给出明显更精确的下界。

5.2 Steklov 特征值

本节考虑两个模型 Steklov 特征值问题：一个定义在单位正方形上

$$\Omega = (0,1) \times (0,1),$$

另一个定义在 L形区域上

$$\Omega = (0,2) \times (0,2) \setminus [1,2) \times [1,2).$$

对于每个例子，我们都通过定理 3.1 得到一个粗略的下界，并通过 Lehmann–Goerisch 定理得到一个高精度下界。

正方形区域通过变量分离法，这个特征值问题可以求得闭式解，但需解一个含两个未知数的超越方程组。这些闭式解表明$\lambda_2 = \lambda_3$。

我们用 $N \times N$ 网格对 Ω 进行均匀三角剖分； $N = 8$见图 5。网格尺寸 $h_{\max}$ ，最大边长为$h_{\max} = \sqrt{2}/8$ ，当$N = 8$时。采用协调有限元法和 CG_h^2 及 $N = 32$，我们得到前四个 Steklov 特征值的数值（另见，例如， [58]）：

$$\lambda_1 \approx 0.24007909, \quad \lambda_2 = \lambda_3 \approx 1.49230326, \quad \lambda_4 \approx 2.08264706\,.$$

这 4 个特征值对应的特征函数绘于图 6 中。

对于具有 $N = 64$ 的网格，我们采用 Crouzeix–Raviart 有限元法，通过式 (3.19) 中的投影误差常数和定理 3.1 计算 λ_4 的下界：

$$C_h \le 0.12717, \quad \lambda_{4,h}^{\mathrm{CR}} \in [2.08216, 2.08217], \quad \lambda_4 \ge 2.01433.$$

因此，在应用 Lehmann–Goerisch 定理时，我们取 $n = 3$ 和

$$\lambda_3 < 1.49246 \le \rho = 2.0 < \lambda_4. \tag{5.2}$$

图7展示了计算得到的特征值界相对于高精度参考值的收敛情况。注意，λ_2 和 λ_3的结果几乎相同。我们观察到，与 Crouzeix–Raviart方法的收敛率$O(h)$相比（理论讨论另见注3.4），P_1 协调有限元方法结合 Lehmann–Goerisch 定理得到的下界恢复了 $O(h^2)$收敛率，与 Lagrange有限元法所得上界（Rayleigh–Ritz）的 $O(h^2)$收敛率相匹配。

L形区域 图8展示了 L形区域上前四个特征值对应的计算特征函数。第一、第三和第四个近似特征函数关于轴 $x_1 = x_2$反射对称，而第二个则反对称。

我们采用几何分级网格，其中 $h_K = O(r^{1/3})$，r 表示单元 K 到凹角的距离（见图5）。

对于具有 $h_{\max} = 0.031$ 的分级网格，我们采用 Crouzeix–Raviart 有限元法得到以下量：

$$C_h \le 0.14902, \quad \lambda_{4,h} \in [1.69171, 1.69172], \quad \rho = 1.6 < 1.63045 \le \lambda_4.$$

图9展示了特征值界相对于高精度参考值的收敛情况。请注意，使用 Crouzeix–Raviart方法得到的特征值下界仅呈现 $O(h)$收敛，这是由投影误差项 $C_h = O(\sqrt{h})$导致的，详见注3.4。对于 λ_2 在 $p = 2$ 下的特征值界，观察到的 $O(h^2)$收敛率表明，与 λ_1 和 λ_3对应的特征函数相比，与 λ_2对应的特征函数缺乏更高的正则性。在分级网格上，P_1 协调有限元法对下界和上界均达到预期的 $O(h^2)$收敛率。相比之下，P_2 协调有限元法对第二个特征值呈现较低的 $O(h^2)$收敛率，而对第一个和第三个特征值仍保持 $O(h^4)$收敛。根据这一观察，可以推测，与第一个和第三个特征值对应的特征函数具有 H^3 正则性。

关于严格特征值界的讨论 为控制浮点误差和舍入误差，我们采用区间算术，通过 INTLAB [50] 并结合 Behnke 方法 [7], ，如本节开头所述。这为所得广义矩阵特征值问题提供了完全经验证的特征值界。基于设置(5.2)得到的经验证 Steklov 特征值界列于表3和表4中。

请注意，应用 Lehmann–Goerisch 方法时对特征值簇的选择会影响下界的精度。例如，对于 Steklov 特征值，选择

$$\lambda_1 < \rho = 1.45 \le \lambda_2,$$

在正方形区域的 8×8 三角剖分上，并使用二阶拉格朗日有限元空间 CG_h^2，我们得到以下严格界：

$$\underline{0.240079083} \le \lambda_1 \le \underline{0.240079091}; \quad \overline{\lambda}_1 - \underline{\lambda}_1 = 8.00\mathtt{E}{-09}.$$

这一结果明显比表 3 中所示的结果更精确，后者是使用更精细的 32×32 三角剖分计算得出的。

表 3：使用 $p = 2$ 和 $N = 32$得到的 Steklov 特征值严格界（正方形区域）

严格界	界间隙：$\overline{\lambda_i} - \underline{\lambda_i}$
$\underline{0.2}3993698 \le \lambda_1 \le \underline{0.2}4007908546$	1.42E-04
$\underline{1.492}04771 \le \lambda_2 \le \underline{1.492}303245657$	2.56E-04
$\underline{1.492}04789 \le \lambda_3 \le \underline{1.492}303278880$	2.56E-04

摘要

本文提出了一种两阶段算法，用于获得微分算子的高精度保证特征值界。将该算法应用于 Dirichlet 拉普拉斯特征值问题和 Steklov 特征值问题，证明了该算法能够适应分级网格和高阶有限元方法，并提供高精度特征值界。值得指出的是，除了二阶微分算子外，所提出的算法还可应用于高阶微分算子，例如双调和算子。关于双调和算子的早期方法

表 4： $p = 2$ 和 h =0。118（L形区域）的 Steklov 特征值严格界

严格界	界差： $\lambda_i - \overline{\lambda}_i$ _
$\underline{0.341414}120 \leq \lambda_1 \leq \underline{0.34141}605885$	1.93E-06
$\underline{0.616}711190 \leq \lambda_2 \leq \underline{0.616}98333496$	2.72E-04
$\underline{0.984274}379 \leq \lambda_3 \leq \underline{0.98427}919894$	4.83E-06

可参见 [22, 56] ，更详细的讨论将在我们后续的工作中给出。

参考文献

[1] R. A. Adams 和 J. J.F. Fournier。*Sobolev* 空间。Elsevier，2003。

[2]J. Albrecht and F. Goerisch. Lehmann 方法在振动问题中的应用。载于 J. Albrecht、L. Collatz、W. Velte 和 W. Wunderlich 编，特征值问题的数值处理，第 *4* 卷 / 特征值问题的数值处理，第 *4* 册：*1986* 年 *11* 月 *30* 日至 *12* 月 *6* 日在奥伯沃尔法赫举行的研讨会，第 1–9 页，巴塞尔，1987 年。Birkh¨auser Basel。[3] M.G. Armentano and R.G. Dur´an. 采用非协调有限元方法得到特征值的渐近下界。*Electron. Trans. Nu-mer. Anal*，17(2):93–101，2004 年。[4] D.N. Arnold and F.Brezzi. 混合与非协调有限元方法：实现、后处理与误差估计。*RAIROMath. Model. & Numer. Anal.*，19:7–32，1985 年。[5] I. Babuˇska and J. Osborn. 特征值问题。载于 P. G. Ciarlet 和 J. L. Lions 编，有限元方法（第 *1* 部分），《数值分析手册》第 II 卷，第 641–787 页。Elsevier Science Publishers，North-Holland，1991 年。[6]C. Beattie and F. Goerisch. 计算自伴算子特征值下界的方法。*NumerischeMathematik*，72(2):143–172，1995 年。

[7] H. Behnke. 利用互补变分原理计算特征值的有保证界。*Computing*，47(1):11–27，1991 年。[8] H. Behnke and F. Goerisch. 自伴问题特征值的包含区间。*Topics in Validated Computations (ed. J. Herzberger), North- Holland,* 阿姆斯特丹，第 277–322 页，1994 年。[9] G. Birkhoff, C. De Boor, B. Swartz, and B. Wendroff. 采用分段三次多项式的 Rayleigh–Ritz 近似。*SIAM* 数值分析杂志，第 188–203 页，1966 年。[10] D. Boffi. 特征值问题的有限元近似。*ActaNumerica*，19:1–120，2010 年。[11] B. Breuer, J. Hor´ak, P.J. McKenna, and M. Plum. 对非线性支撑梁中的行波进行计算机辅助存在性与多重性证明。微分方程杂志，224(1):60–97，2006 年。[12] B. Breuer, P.J. McKenna, and M. Plum. 半线性边值问题的多重解：计算多重性证明。微分方程杂志，195(1):243–269，2003 年。[13] F. Brezzi and M. Fortin. 混合有限元方法。施普林格，1991 年。[14] C. Carstensen and D. Gallistl. 双调和方程的有保证特征值下界。*Numerische Mathematik*，126(1):33–51，2014 年。[15] C. Carstensen and J. Gedicke. 有保证的特征值下界。*Mathematics of Computation*，83(290):2605–2629，2014 年。[16] C. Carstensen, Q. Zhai, and R. Zhang. 骨架有限元方法能够计算特征值下界。*SIAM* 数值分析杂志，58(1):109–124，2020 年。[17] Carsten Carstensen, Alexandre Ern, and Sophie Puttkammer. 采用混合高阶方法得到椭圆算子特征值的有保证下界。*Numerische Mathematik*，149(2):273–304，2021 年。[18] Carsten Carstensen and Sophie Puttkammer. 双拉普拉斯问题特征值的直接有保证下界及其最优先验收敛率。*SIAM* 数值分析杂志，61(2):812–836，2023 年。[19] F. Demengel and G. Demengel. 椭圆型偏微分方程理论的函数空间。施普林格，2012 年。

[20] D. Gallistl 和 V. Olkhovskiy。麦克斯韦特征值的计算下界。*arXiv* 预印本 *arXiv:2110.02605*，2021。[21] F. Goerisch 和 J. Albrecht。计算特征值下界的新方法的收敛性。载于*1985*年*8*月*26*日至*30*日在捷克斯洛伐克布尔诺举行的国际微分方程及其应用会议论文集，第303–308页。施普林格，1986。[22] F. Goerisch 和 H. Haunhorst。偏微分方程特征值问题的特征值界。*ZAMM*《应用数学与力学杂志》/《应用数学与力学杂志》¨，*65:129–135，1985*。[23] F. Goerisch 和 Z. He。利用变分方法确定特征值的保证界 I。载于计算算术与自验证数值方法，第137–153页。Academic Press Professional, Inc.，1990。[24] J. Hu、Y. Huang 和 H. Shen。集中质量有限元方法对特征值的下近似。《计算数学杂志》，22:545–556，2004。[25] T. Kato。线性算子的扰动理论。施普林格柏林，海德堡，1966。[26] F. Kikuchi 和 X. Liu。 P_0 和 P_1 三角形有限元的插值误差常数估计。《计算方法与应用力学工程》，196:3750–3758，2007。[27] K. Kobayashi。三角形单元上的插值常数。载于《数学应用*2015*》，第110–124页。中国科学院数学与系统科学研究院，2015。[28] J.R. Lahmann 和 M. Plum。布拉修斯型线下奥尔-索末菲方程的计算机辅助不稳定性证明。*ZAMM*《应用数学与力学杂志》/《应用数学与力学杂志》¨：应用数学与力学，*84(3):188–204，2004*。[29] N. J. Lehmann。最优特征值包围。《数值数学》，5(1):246–272，1963。

[30] S. Liao、Y. Shu 和 X. Liu。Fujino–Morley 插值误差常数的最优估计。《日本工业与应用数学杂志》，36(2):521–542，2019。[31] X. Liu。自伴微分算子经验证特征值界的框架。应用数学与计算，267:341–355，2015。[32] X. Liu。由对称半正定双线性型定义的微分算子的显式特征值界。《计算与应用数学杂志》，371:112666，2020。[33] X. Liu 和 F. Kikuchi。三角形有限元上P_0 和 P_1 插值的误差常数分析与估计。东京大学数学科学杂志，17:27–78，2010。[34] X. Liu、M. T. Nakao、C. You 和 S. Oishi。Stokes 方程有限元解的显式后验与先验误差估计。《日本工业与应用数学杂志》，38(2):545–559，2021。[35] X. Liu 和 S. Oishi。任意多边形区域上拉普拉斯算子的经验证特征值计算。载于*2010*年*10*月*18*日至*21*日举行的 *RIMS* 研讨会论文集，第 1733 卷，第 31–39 页。RIMS 讲究录，2011。[36] X. Liu 和 S. Oishi。三角形有限元 P_0 插值常数的保证高精度估计。日本工业与应用数学杂志，30:635–652，2013。[37] X. Liu 和 S. Oishi。任意形状多边形区域上拉普拉斯算子的经验证特征值计算。*SIAM* 数值分析杂志，51(3):1634–1654，2013。[38] X. Liu、T. Okayama 和 S. Oishi。具有奇异性的拉普拉斯算子的高精度特征值界。载于计算机数学，第311–323页。施普林格，2014。[39] X. Liu 和 C. You。三角形有限元上二次拉格朗日插值常数的显式界。应用数学与计算，319:693–701，2018。《计算领域最新进展》。[40] F. Luo、Q. Lin 和 H. Xie。计算拉普拉斯特征值问题的上下界：通过结合协调与非协调

协调有限元方法。中国科学：数学, 55(5):1069–1082, 2012.[41] K. Nagatou, M. Plum, and M. T. Nakao. 对受扰动周期的一维薛定谔算子进行特征值排除。英国皇家学会学报 *A* 辑：数学、物理与工程科学, 468(2138):545–562, 2012.[42] T. Nakano, Q. Li, M. Yue, and X. Liu. 利用协调有限元方法求解斯捷克洛夫算子的有保证的特征值下界。应用数学计算方法, (0), 2023.[43] M. T. Nakao. 非线性边值问题弱解存在性的数值验证方法。数学分析与应用杂志, 164(2):489–507, 1992.[44]M. T. Nakao, M. Plum, and Y. Watanabe. 偏微分方程的数值验证方法与计算机辅助证明。施普林格, 2019.[45] M. T. Nakao, N. Yamamoto, and K. Nagatou. 二阶椭圆算子特征值的数值验证。日本工业与应用数学杂志, 16(3):307–320, 1999.[46] M. Plum. 通过数值同伦方法确定二阶常微分算子的特征值包含区间。*Zeitschrift f¨ur angewandteMathematik und Physik ZAMP*, 41(2):205–226, 1990.[47] M. Plum. 二阶椭圆微分算子特征值的界。*Zeitschrift f¨ur Angew. Math. und Phys.*, 42(6):848–863, 1991.[48] M. Plum. 非线性椭圆边值问题解的数值存在性证明与显式界。*Computing*, 49(1):25–44, 1993.[49] M. Plum. 特征值的有保证数值界。载于斯图姆–刘维尔问题的谱理论与计算方法, 第191卷, 第313–332页。CRC出版社, 1997.[50] S. Rump. Intlab 区间实验室。载于 T. Csendes, 编, 可靠计算的发展, 第77–104页。Kluwer Academic Publishers, 多德雷赫特, 1999。

[51] Tom´aˇs Vejchodsk´y. 特征值双侧界的三种方法——比较。偏微分方程数值方法, 34(4):1188–1208, 2018年.[52] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, and M. T. Nakao. 对 Poiseuille流中 Orr-Sommerfeld问题的计算机辅助稳定性证明。《非线性理论及其应用》, 2(1):123–127, 2011年.[53] Y. Watanabe, K. Nagatou, M. Plum, and M. T. Nakao. Hilbert空间中特征值问题的特征值排除域经验证计算。*SIAM* 数值分析杂志, 52(2):975–992, 2014.[54] Y. Watanabe, M. Plum, and M. T. Nakao. 对 Poiseuille流中 Orr-Sommerfeld问题的不稳定性进行计算机辅助证明。*ZAMM*《应用数学与力学杂志》*/Zeitschrift f¨ur Angewandte Mathematik und Mechanik*：应用数学与力学, 89(1):5–18, 2009.[55] H.F. Weinberger. 特征值逼近的变分方法。工业数学学会, 1974.[56] C. Wieners. 四阶边值问题中最低的 N 个特征值的界。*Computing*, 59:29–41, 1997.[57] M. Xie, H. Xie, and X. Liu. 使用非协调有限元求解 Stokes特征值问题的显式下界。《日本工业与应用数学杂志》, 35(1):335–354, 2018年.[58] Y. Yang, Q. Li, and S. Li. Steklov 特征值问题的非协调有限元近似。《应用数值数学》, 59(10):2388–2401, 2009.[59] Y. Yang, Z. Zhang, and F. Lin. 使用非协调有限元从下方逼近特征值。中国科学：数学, 51(1):1– 18, 2010.[60] C. You, H. Xie, and X. Liu. Steklov 特征值问题的保证的特征值界。*SIAM* 数值分析杂志, 57(3):1395–1410, 2019年。

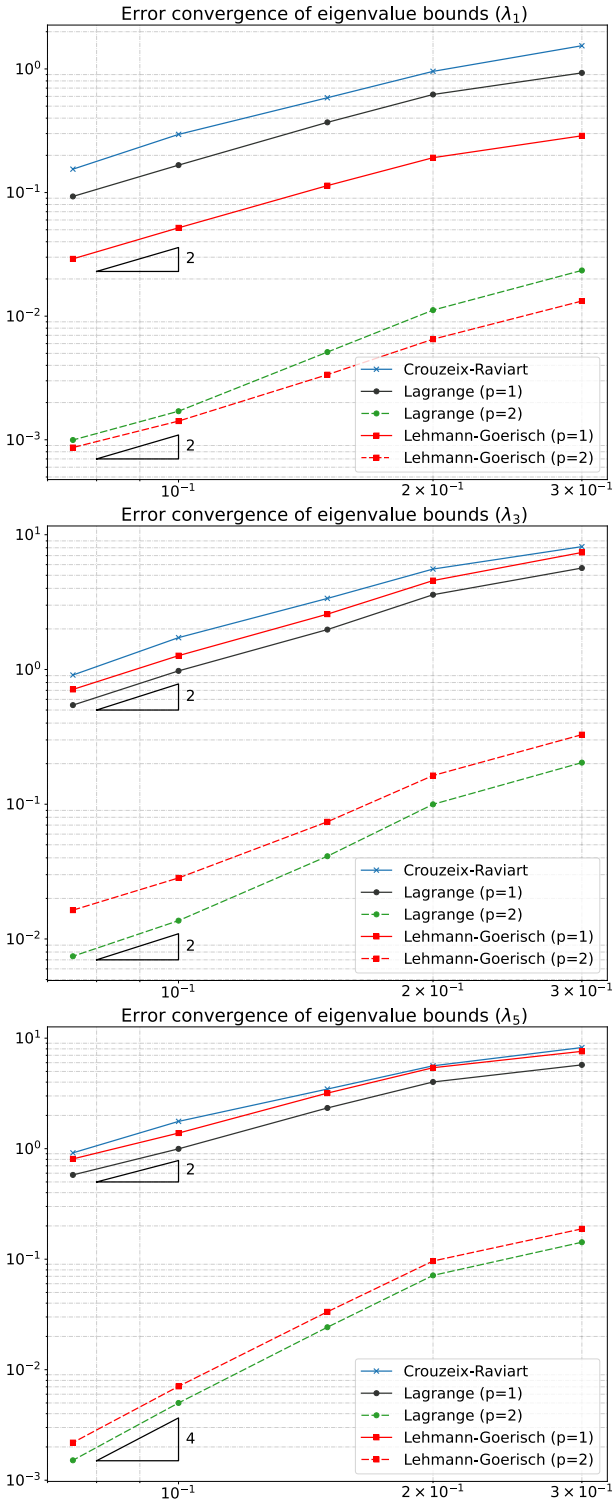

图 4：哑铃形区域的拉普拉斯特征值界的收敛性（x轴：网格尺寸 $h_{\max}$； y轴：误差大小）。

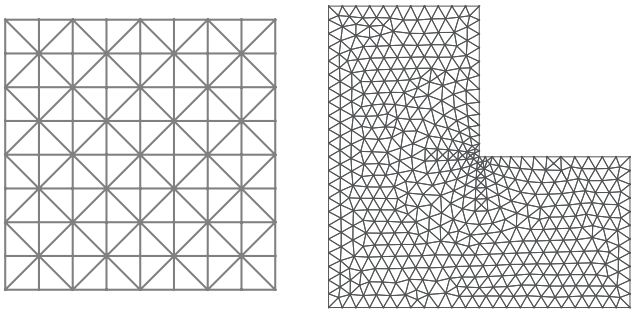

图 5：正方形区域的均匀网格和 L形区域的分级网格

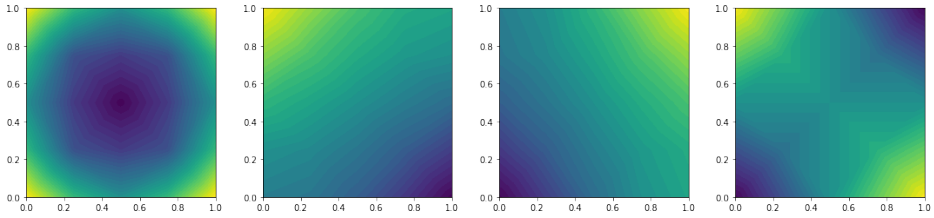

图 6：Steklov 特征值 $\lambda_i (1 \leq i \leq 4)$ 的近似特征函数（正方形区域）。

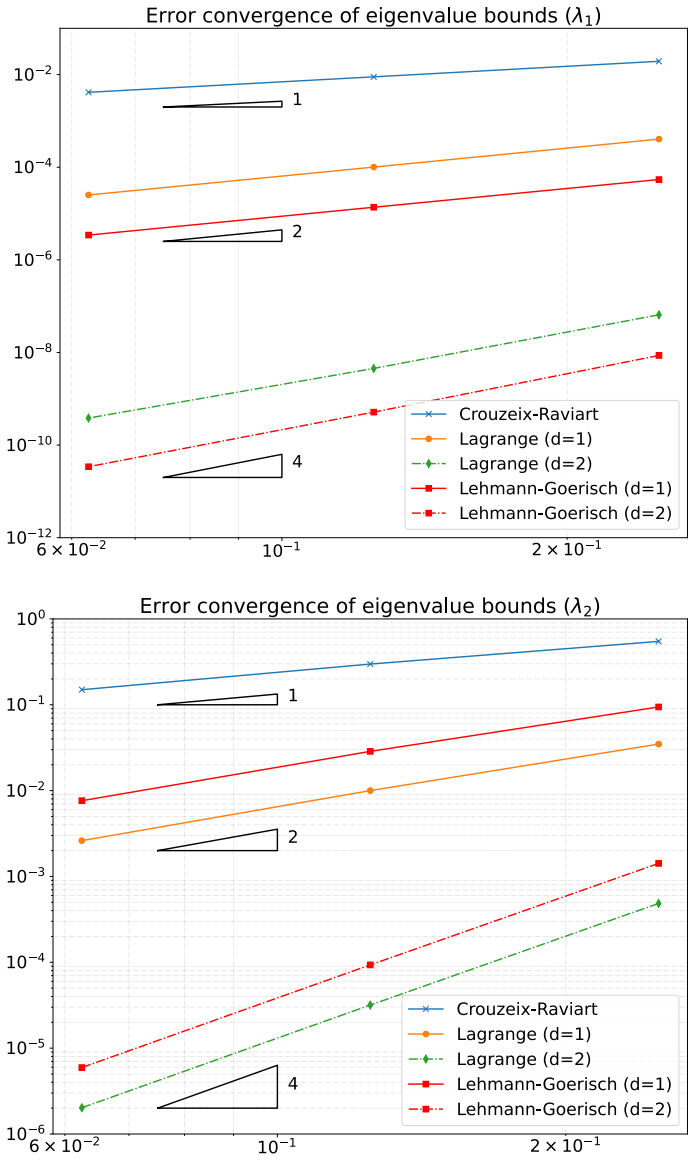

图7：单位正方形区域上 Steklov 特征值界的误差收敛（x 轴：网格尺寸； y 轴：误差大小）。

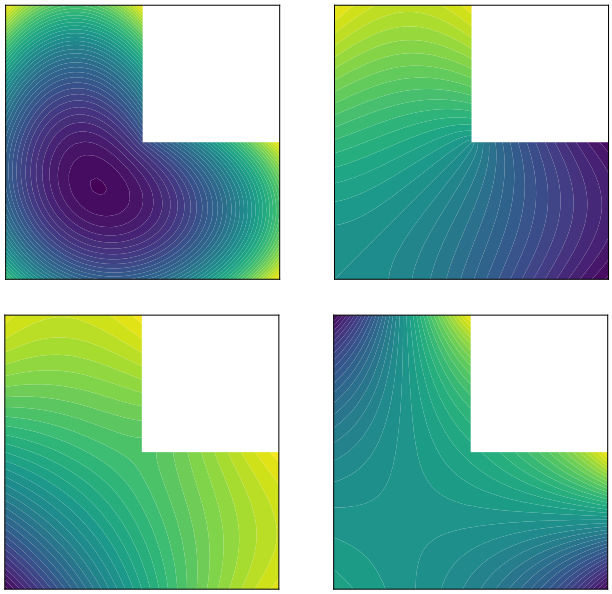

图8：Steklov 特征值 λ_i's ($1 \leq i \leq 4$)（L形区域）的近似特征函数

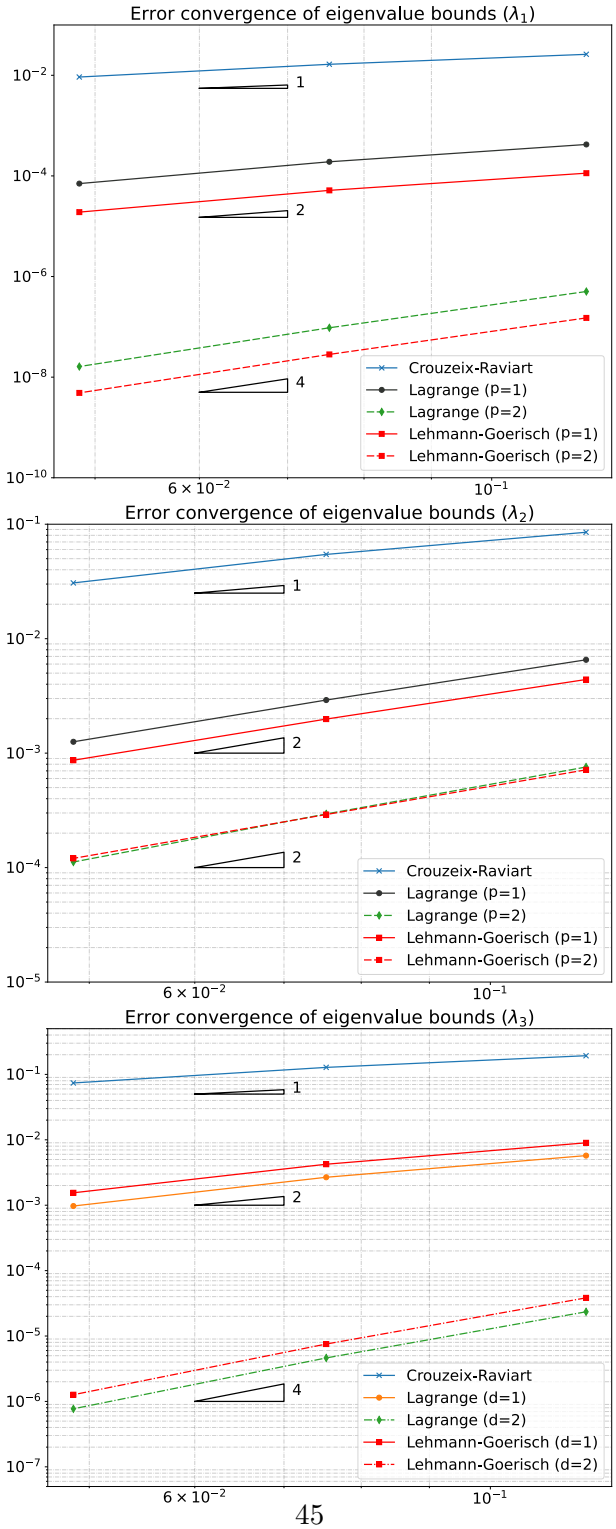

图9：L形区域上 Steklov 特征值界的误差收敛（x轴：网格尺寸 $h_{\max}$； y轴：误差大小）。