arXiv:2512.23224v1 [math.QA] 29 Dec 2025

量子 K-理论的惠特尼关系：类型 C 旗流形

河野孝文

Abstract. 我们研究量子 K-环中与类型 C 旗流形上的典范丛相关的 λ_y-类之间的关系。这些关系称为量子 K-理论惠特尼关系。量子 K-理论惠特尼关系的证明策略基于半无限旗流形方法和 Borel 型表示。此外，我们发现量子 K-理论惠特尼关系构成量子 K-环的一组完整定义关系。由此得到类型 C 旗流形的量子 K-环的一种表示，称为惠特尼型表示，它是多项式环的一个商，与 Borel 型表示不同。

1. Introduction

设 X 为任意类型的部分旗流形。Givental [G] 和 Lee [Lee] 引入了旗流形 X 的环面等变量子 K-环 $QK_T(X)$，这是普通环面等变 K-环 $K_T(X)$ 的一种变形；其中，T 表示环面。$QK_T(X)$ 上的乘积 $\star$ 称为量子乘积，其定义借助于 K-理论 *Gromov–Witten* 不变量。为理解量子乘积，人们研究了带有生成元和关系式的 $QK_T(X)$ 的各种表示，包括 Borel 型表示、库仑支表示和惠特尼表示。本文聚焦于惠特尼表示。

对于 X 上的 T 等变向量丛 $\mathcal{E}$，我们用 $[\mathcal{E}]$ 表示 $\mathcal{E}$ 在 $K_T(X)$ 中的类。由 H], 在 [中引入的 T 等变向量丛 $\mathcal{E}$ 的*Hurzebruch* λ_y-类 $\lambda_y(\mathcal{E}) \in K_T(X)[y]$ 定义为

$$\lambda_y(\mathcal{E}) := 1 + y[\mathcal{E}] + y^2\left[\bigwedge^2 \mathcal{E}\right] + \cdots + y^{\mathrm{rk}(\mathcal{E})}\left[\bigwedge^{\mathrm{rk}(\mathcal{E})} \mathcal{E}\right],$$

其中，$\mathrm{rk}(\mathcal{E})$ 表示 $\mathcal{E}$ 的秩。对于定义在 X 上的环面等变向量丛之间的短正合列 $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to 0$，有

$$\lambda_y(\mathcal{E}_1) \cdot \lambda_y(\mathcal{E}_3) = \lambda_y(\mathcal{E}_2) \tag{1.1}$$

在 $K_T(X)[y]$ 中，其中 $\cdot$ 表示 $K_T(X)$（或 $K_T(X)[y]$）的乘积。恒等式 (1.1) 称为 K-理论惠特尼关系。

我们旨在将上述 K-理论惠特尼关系量子化。更具体地说，我们研究 $QK_T(X)[y]$ 中的量子乘积 $\lambda_y(\mathcal{E}_1) \star \lambda_y(\mathcal{E}_3)$。考虑情形 $X = \mathrm{Fl}(r_1, \ldots, r_k; n)$ 是一个 k- 步类型 A 旗流形，它参数化了 $\mathbb{C}^n$ 的所有向量子空间序列 $(0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_k \subset \mathbb{C}^n)$，其中对于 $1 \le i \le k$，维数 $\dim V_i = r_i$。于是，我们可以取平凡丛 $\mathbb{C}^n = X \times \mathbb{C}^n$ 的典范滤过 $0 = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_k \subset \mathbb{C}^n$。Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou（[GMSXZ^{2}1]）猜想，与典范向量丛相关的 λ_y-类的量子乘积结果如下：

$$\lambda_y(\mathcal{S}_j) \star \lambda_y(\mathcal{S}_{j+1}/\mathcal{S}_j) = \lambda_y(\mathcal{S}_{j+1}) - y^{r_{j+1}-r_j}\frac{Q_j}{1-Q_j}\det(\mathcal{S}_{j+1}/\mathcal{S}_j) \star (\lambda_y(\mathcal{S}_j) - \lambda_y(\mathcal{S}_{j-1})) \tag{1.2}$$

对于 $1 \le j \le k$，这里的 Q_1、.....、Q_k 是 $QK_T(X)$ 的诺维科夫变量，而 $\lambda_y(\mathcal{S}_{n+1}) = \lambda_y(\mathbb{C}^n) = \prod_{1\le j\le n}(1+yT_j)$，其中 $1 \le j \le n$ 的 $T_j \in R(T)$ 由 $\mathbb{C}^n$ 分解为一维 T-模给出（见 [GMSXZ^{2}1, 猜想 1.1]）。这个恒等式称为量子K-理论惠特尼关系（简称 QK-惠特尼关系）。这个 QK-惠特尼关系

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：14M15，次要分类：14N15，14N35，05E10。

Key words and phrases. 量子舒伯特演算、量子 K-理论、惠特尼关系、旗流形、半无限旗流形、切瓦利公式。

由 Gu、Mihalcea、Sharpe 和 Zou（[GMSZ2]）证明适用于 Grassmann 流形 $X = \mathrm{Gr}(k,n) := \mathrm{Fl}(k;n)$；由 Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou（[GMSXZ^{2}1]）证明适用于 $1 \le k \le n$, 以及关联簇 $X = \mathrm{Fl}(1,n-1;n)$；由 Huq-Kuruvilla（[HK]）证明适用于类型 A的任意偏旗流形。此外，Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou 在[GMSXZ^{2}1, 定理 1.4] 中证明，只要满足 Buch 和 Mihalcea 所述的量子 K-理论除子公理，即三点 K-理论 Gromov–Witten 不变量的恒等式，这个猜想便成立。最近，Lenart、Naito、Sagaki 和 Xu 在 [LNSX] 中证明了量子 K-理论除子公理（不仅适用于 $X = \mathrm{Fl}(r_1, \ldots\ldots, r_k; n)$，也适用于任意 X）。描述 QK-惠特尼关系的一个好处是，我们可以将 $QK_T(\mathrm{Fl}(r_1, \ldots\ldots, r_k; n))$ 表示为多项式环的商环。事实上，QK-惠特尼关系构成了 $QK_T(\mathrm{Fl}(r_1, \ldots\ldots, r_k, n))$ 的一组完整定义关系（[GMSXZ^{2}2, 推论 5.4]）。

由于 QK-惠特尼关系的研究近期才有所进展，目前已知的 QK-惠特尼关系显式描述仅适用于 A 部分旗流形；请注意，在 A 之外也有相关猜想（例如 [GMSZ1]）。本文旨在描述 C 型旗流形的 QK-惠特尼关系。令 $X = \mathrm{Fl}^{C_n}$ 为 C_n 型旗流形，它参数化所有如下序列:

$$(0 \subset V_1 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n})$$

各向同性子空间 $V_1, \ldots\ldots, V_n$，它们相对于一个固定辛形式满足 $\dim V_k = k$，其中$1 \le k \le n$。于是，我们可以取一个典范滤过

$$0 = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_n \subset \underline{\mathbb{C}}^{2n}$$

由平凡丛 $\mathbb{C}^{2n} = \mathrm{Fl}^{C_n} \times \mathbb{C}^{2n}$ 在 Fl^{C_n} 上的子丛构成，使得对于 $1 \le k \le n$，有 $\mathrm{rk}(\mathcal{S}_k) = k$。对于 Fl^{C_n} 上的 T-等变向量丛 $\mathcal{E}$，我们用 $\mathcal{E}^\vee$ 表示其对偶丛。我们用 $Q_1, \ldots\ldots, Q_n$ 表示 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的诺维科夫变量。我们约定 $Q_0 = 0$ 和 $\mathcal{S}_{-1} = 0$。主要结果如下。

定理 A (= 定理 3.1 + 定理 3.2)。 (1) 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$中，对于 $1 \le k \le n$，有

$$\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) \star \lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}) = \lambda_y(\mathcal{S}_k) - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star (\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) - \lambda_y(\mathcal{S}_{k-2})). \tag{1.3}$$

(2) 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$中，对于 $1 \le k \le n$，有

$$\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee) \star \lambda_y((\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee) = \lambda_y(\mathcal{S}_k^\vee) - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee] \star (\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee) - \lambda_y(\mathcal{S}_{k-2}^\vee)). \tag{1.4}$$

(3) 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$中，有

$$\begin{aligned}\lambda_y(\mathcal{S}_n) \star \lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee) &= \lambda_y(\underline{\mathbb{C}}^{2n}) \\ &- y^2 \sum_{p=1}^{n} \frac{Q_p \cdots Q_n}{1-Q_{p-1}} (\lambda_y(\mathcal{S}_{p-1}) - Q_{p-1}\lambda_y(\mathcal{S}_{p-2})) \star (\lambda_y(\mathcal{S}_{p-1}^\vee) - Q_{p-1}\lambda_y(\mathcal{S}_{p-2}^\vee)).\end{aligned} \tag{1.5}$$

虽然 (1.3) 和 (1.4) 与 (1.2) 类似，但 (1.5) 是类型 C 情形所特有的。

接着我们注意到，关系式 (1.3)、(1.4) 和 (1.5) 构成了 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 定义关系的完备集合，因此我们得到 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的一个表示，称为***Whitney*** 型表示。

定理 B (=定理 3.3)。 定义一个环 R_Q^{W}，使得

$$R_Q^{\mathsf{W}} := (R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!])[F_d^k, G_d^k, x_j, y_j \mid 1 \le k \le n,\ 1 \le d \le k,\ 1 \le j \le n].$$

取由以下元素生成的 R_Q^{W} 的理想 I_Q^{W}

$$F_d^k - \left(F_d^{k-1} + \frac{1}{1-Q_{k-1}}(F_{d-1}^{k-1} - Q_{k-1}F_{d-1}^{k-2})x_k\right) \quad \textit{for } 1 \le k \le n \textit{ and } 1 \le d \le k,$$

$$G_d^k - \left(G_d^{k-1} + \frac{1}{1-Q_{k-1}}(G_{d-1}^{k-1} - Q_{k-1}G_{d-1}^{k-2})y_k\right) \quad \textit{for } 1 \le k \le n \textit{ and } 1 \le d \le k,$$

$$\sum_{k=0}^{d} F_k^n G_{d-k}^n - \Bigg(e_d(T_1, T_2, \dots, T_n, T_n^{-1}, \dots, T_2^{-1}, T_1^{-1}) \\ - \sum_{p=1}^{n} \frac{Q_p \cdots Q_n}{1 - Q_{p-1}} \sum_{r=0}^{d-2} (F_r^{p-1} - Q_{p-1} F_r^{p-2})(G_{d-2-r}^{p-1} - Q_{p-1} G_{d-2-r}^{p-2}) \Bigg) \quad \textit{for } 1 \le d \le n,$$

$$F_1^1 - x_1,$$

$$G_1^1 - y_1,$$

$$x_j y_j = (1 - Q_{j-1})(1 - Q_j) \quad \textit{for } 1 \le j \le n;$$

这里， e_d 表示第 d个初等对称多项式， $T_k \in R(T)$ 对于 $1 \le k \le 2n$ ，由 $\mathbb{C}^{2n}$分解为一维 T-模得到；注意， $T_{n+1} = T_n^{-1}$、$T_{n+2} = T_{n-1}^{-1}$、……、 $T_{2n} = T_1^{-1}$。此外，我们约定，对于 $d > 0$， $F_d^{-1} = F_d^0 = 0$；对于 $1 \le k \le n$ 和 $d > k$， $F_d^k = 0$；对于 $-1 \le k \le n$， $F_0^k = 1$ 。

于是存在一个 $R(T)$-代数同构 $R_Q^{\mathsf{W}} / I_Q^{\mathsf{W}} \xrightarrow{\sim} QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$，使得

$$\begin{aligned} F_d^k &\mapsto \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k \right] && \textit{for } 1 \le k \le n \textit{ and } 1 \le d \le k, \\ G_d^k &\mapsto \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k^\vee \right] && \textit{for } 1 \le k \le n \textit{ and } 1 \le d \le k, \\ x_j &\mapsto [\mathcal{S}_j / \mathcal{S}_{j-1}] && \textit{for } 1 \le j \le n, \\ y_j &\mapsto [(\mathcal{S}_j / \mathcal{S}_{j-1})^\vee] && \textit{for } 1 \le j \le n. \end{aligned}$$

为证明定理 A，我们使用半无限旗流形理论。Kato（[K]）证明，半无限旗流形的 K-群与旗流形的量子 K-环作为 $R(T)$-模同构。借助这一同构，我们可以将计算 QK-惠特尼关系左侧时出现的 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中的某些量子乘积，转化为半无限旗流形的 K-群中的张量积。由于半无限旗流形的 K-群中的张量积满足乘法性质，我们可以得到 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中线丛类的恒等式（推论 4.11）。这些恒等式使我们能够计算 $\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) \star \lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})$ 和 $\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee) \star \lambda_y((\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee)$。为考察乘积 $\lambda_y(\mathcal{S}_n) \star \lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee)$，我们还使用一种额外方法，即 [KN2] 中给出的 Borel 型表示。由此可得 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中的一个关系（命题 5.4），从而能够化简这类乘积。

为证明定理 B，我们使用 Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou 建立的 Nakayama 型引理（[GMSXZ22]）。该引理表明，在满足一定条件时（定理 6.1），经典K-环 $K_T(X)$ 的同构可以提升为量子 K-环 $QK_T(X)$ 的同构。应用此引理，我们的 Whitney 型表示便归结为众所周知的 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 表示，由此得到定理。

本文结构如下。第 2 节中，我们固定根系的记号，特别是类型 C 根系的记号。此外，我们简要回顾旗流形及其 K-环。第 3 节中，我们给出 QK-惠特尼关系在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中的显式描述（定理 A），以及 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的 Whitney 型表示（定理 B）；它们是本文的主要结果。第 4 节中，我们回顾半无限旗流形及其 K-群。随后，我们计算若干研究 QK-惠特尼关系所需的量子乘积，其中部分证明留待附录 A。第 5 节中，我们证明定理 A。在计算 $\lambda_y(\mathcal{S}_n) \star \lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee)$ 时，我们回顾 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的 Borel 型关系。第 6 节中，我们回顾 Nakayama 型引理并证明定理 B。

致谢。 作者感谢 Takeshi Ikeda 和 Satoshi Naito 富有帮助的讨论。本研究获得了 JSPS 研究活动启动资助金 24K22842 的支持。

2. Preliminaries

2.1. 根系的记号。 首先，我们固定根系的记号。设 G 是定义在 $\mathbb{C}$ 上的连通单连通单代数群。取 G 的极大环面 T 以及包含 T 的 G 的 Borel 子群 B。此外，取与 G 相对的 G 的 Borel 子群 B^-；即 $B \cap B^- = T$。设 T 的李代数为 $\mathfrak{h}$，并记 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ 为 $\mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \to \mathbb{C}$ 的典范配对；此处 $\mathfrak{h}^* = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathfrak{h}, \mathbb{C})$。

取 Δ 的根系，其中 G，并令 Δ^+ 为所有正根的集合。我们用 I 表示 G 的 Dynkin 图的指标集，并用 α_i 表示对应于 i 的单根 $i \in I$。对于 $\alpha \in \Delta$，我们用 $\alpha^\vee$ 表示对应于 α 的余根。于是，我们定义 G 的根格 Q 和余根格 $Q^\vee$ 为

$$Q := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i, \quad Q^\vee := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i^\vee.$$

此外，对于 $\alpha \in \Delta$，我们设

$$|\alpha| := \begin{cases} \alpha & \text{if } \alpha \in \Delta^+, \\ -\alpha & \text{if } \alpha \in -\Delta^+. \end{cases}$$

设 W 为 G 的 Weyl 群。那么对于 $w \in W$，我们有 w 的一个提升 $\dot{w} \in G$。对于 $i \in I$，我们用 s_i 表示对应于 i 的简单反射。此外，我们用 $w_\circ \in W$ 表示 W 的最长元，并用 e 表示 W 的单位元。

设 $P = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\varpi_i$ 为 G 的权格，其中对于 $i \in I$， ϖ_i 表示第 i 个基本权。

2.2. 旗流形。 流形 G/B 称为旗流形。我们将（相反的）舒伯特胞腔 $X^{w,\circ}$ 定义为 $X^{w,\circ} := B^- \dot{w} B/B$。于是，我们有 G/B 的如下分解：

$$G/B = \bigsqcup_{w \in W} X^{w,\circ}.$$

舒伯特胞腔 $X^{w,\circ}$ 在 $w \in W$ 下的 Zariski 闭包 $X^w := \overline{X^{w,\circ}}$ 称为（相反的）舒伯特簇。

对于 $\lambda \in P$，我们用 $\mathbb{C}_\lambda$ 表示 B 的一维表示，其权为 λ。于是对于 $\lambda \in P$，我们将 $\mathcal{O}_{G/B}(\lambda)$ 上的线丛 G/B 定义为 $G \times_B \mathbb{C}_{-\lambda} \twoheadrightarrow G/B$。

2.3. 旗流形的经典 K-环与量子 K-环。 我们回顾旗流形的经典 K-环与量子 K-环的概念。我们用 $R(T)$表示 T的表示环。设 $K_T(G/B)$为 G/B的 T-等变 K-群，它是 G/B上的 T-等变向量丛范畴的 Grothendieck 群。它被定义为由（形式元素）$[\mathcal{E}]$ 生成的 $R(T)$-模，其中 T-等变向量丛 $\mathcal{E}$ 在 G/B上，并满足关系$[\mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_1] + [\mathcal{E}_3]$，对所有短正合列 $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to 0$均成立。于是， $K_T(G/B)$具有环结构，其乘法为 $[\mathcal{E}_1] \cdot [\mathcal{E}_2] = [\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{E}_2]$，其中 T-等变向量丛 $\mathcal{E}_1$、 $\mathcal{E}_2$ 在G/B上。由于 G/B 是光滑的， $K_T(G/B)$等同于 G/B上的T-等变凝聚层范畴的 Grothendieck 环。对于 T-等变凝聚层 $\mathcal{O}$，我们用$[\mathcal{O}]$ 表示 $\mathcal{O}$ 在 $K_T(G/B)$中的类。对于 $w \in W$，舒伯特簇 X^w 在$w \in W$ 下的类 $[\mathcal{O}^w]$ 称为舒伯特类。众所周知， $\{[\mathcal{O}^w] \mid w \in W\}$ 是 $K_T(G/B)$的一个 $R(T)$-基。

令 n 为 G的秩。那么， T-等变量子 K-环 $QK_T(G/B)$ 作为 $R(T)$-模，由下式定义：

$$QK_T(G/B) := K_T(G/B) \otimes_{R(T)} R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!].$$

其乘积记为 $\star$，通过 K 理论的 Gromov–Witten 不变量定义。详情参见 [G] 和 [Lee]。由此可知，舒伯特类构成 $QK_T(G/B)$ 的 $R(T)[\![Q_1, \ldots, Q_n]\!]$-基。

2.4. 类型 C 情形。本节重点讨论 G 为 C_n 型的情形。注意，这些设定与 [KN2, §2.3] 中的设定相同。令 J_{2n}^- 为 $2n \times 2n$ 矩阵

$$J_{2n}^- = \begin{bmatrix} O & J_n \\ -J_n & O \end{bmatrix},$$

其中 J_n 是定义如下的 $n \times n$ 矩阵

$$J_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

我们在 $\mathbb{C}^{2n}$ 上定义辛形式 $(\cdot,\ \cdot)$，其定义为 $(v,\ w) := {}^t v J_{2n}^- w$，其中 $v,\ w \in \mathbb{C}^{2n}$。我们用$M_{2n}(\mathbb{C})$表示所有具有复数项的 $2n \times 2n$ 矩阵的集合。接着令

$$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C}) := \{A \in M_{2n}(\mathbb{C}) \mid {}^t A J_{2n}^- A = J_{2n}^-\}.$$

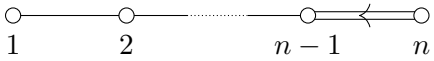
此 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 称为关于 $(\cdot,\ \cdot)$ 的**辛群**，它是类型 C_n的代数群。接着，我们可取 G的一个极大环面 T，如下所示:

$$T = \{\mathrm{diag}(z_1, z_2, \ldots, z_n, z_n^{-1}, \ldots, z_2^{-1}, z_1^{-1}) \mid z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}\},$$

其中 $\mathrm{diag}(a_1,\ \ldots,\ a_{2n})$ 表示一个 $2n \times 2n$ 对角矩阵，其项为 $a_1,\ \ldots,\ a_{2n}$。T 的李代数 $\mathfrak{h}$ 具有如下形式:

$$\mathfrak{h} = \{\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_2, -a_1) \mid a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}\}.$$

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 的 Dynkin 图如下:



我们定义 $\varepsilon_j \in \mathfrak{h}^*$ 如下:

$$\varepsilon_j(\mathrm{diag}(a_1, a_2, \ldots, a_n, -a_n, \ldots, -a_2, -a_1)) := a_j$$

对于 $\mathrm{diag}(a_1,\ a_2,\ \ldots\ldots,\ a_n,\ -a_n,\ \ldots\ldots,\ -a_2,\ -a_1) \in \mathfrak{h}$。那么，$j \in I := \{1, \ldots, n\}$ 的第 j 个基本权 ϖ_j 为

$$\varpi_j = \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_j$$

$\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 的权格 P 为

$$P = \bigoplus_{1 \le j \le n} \mathbb{Z}\varepsilon_j.$$

因此，我们有

$$R(T) = \mathbb{Z}[P] = \mathbb{Z}[\mathbf{e}^{\pm\varepsilon_1}, \ldots, \mathbf{e}^{\pm\varepsilon_n}]. \tag{2.1}$$

Weyl 群 W 在 P 上的作用可视为集合 $[1, \overline{1}] := \{1 < 2 < \cdots < n < \overline{n} < \cdots < \overline{2} < \overline{1}\}$ 上的带符号置换，通过 $w(\varepsilon_j) = \varepsilon_{\overline{w}(j)}$ 实现，其中 $w \in W$ 和 $1 \le j \le \overline{1}$；此处我们对 $1 \le j \le n$ 令 $\varepsilon_{\overline{j}} := -\varepsilon_j$。本文还使用 $[1, \overline{1}]$ 的子区间 $[a, b]$ 这一记号，其中 $1 \le a < b \le \overline{1}$，定义如下:

$$[a, b] := \{j \in [1, \overline{1}] \mid a \le j \le b\}.$$

令 B 为由 $\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 中所有上三角矩阵组成的 Borel 子群。则类型为 C_n 的旗流形 $\mathrm{Fl}^{C_n} := \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})/B$ 是一个对所有序列进行参数化的流形

$$(0 \subset V_1 \subset V_2 \subset \cdots \subset V_n \subset \mathbb{C}^{2n})$$

相对于辛形式 $(\cdot, \cdot)$ 的 $\mathbb{C}^{2n}$ 各向同性子空间，使得 $\dim V_k = k$ 对于 $1 \le k \le n$。在这种情况下，我们可以取典范滤过

$$0 = \mathcal{S}_0 \subset \mathcal{S}_1 \subset \mathcal{S}_2 \subset \cdots \subset \mathcal{S}_n \subset \underline{\mathbb{C}}^{2n}$$

由平凡丛 $\mathbb{C}^{2n} = \mathrm{Fl}^{C_n} \times \mathbb{C}^{2n}$ 上的子丛构成，定义在 Fl^{C_n} 上，使得 $\mathrm{rk}(\mathcal{S}_k) = k$ 对于 $0 \le k \le n$。于是我们得到如下序列

$$\underline{\mathbb{C}}^{2n} \twoheadrightarrow \mathcal{S}_n^\vee \twoheadrightarrow \cdots \twoheadrightarrow \mathcal{S}_2^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{S}_1^\vee \twoheadrightarrow \mathcal{S}_0^\vee = 0$$

对偶丛的。

注记 2.1。对于 $J \subset \{1, \ldots, n\}$，令

$$\varepsilon_J := \sum_{j \in J} \varepsilon_j = \sum_{j \in L_J} \varpi_j - \sum_{j \in M_J} \varpi_j;$$

其中

$$L_J := \{j \in [1,n] \mid j \in J \text{ and } j+1 \notin J\}, \quad M_J := \{j \in [1,n] \mid j \notin J \text{ and } j+1 \in J\}.$$

在 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $1 \le k \le n$，可得

$$\begin{aligned}
\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] &= \sum_{\substack{J \subset [1,k] \\ |J|=d}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)], \\
\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k^\vee\right] &= \sum_{\substack{J \subset [1,k] \\ |J|=d}} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_J)], \\
[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] &= [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)], \\
[(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee] &= [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_k)].
\end{aligned}$$

此外，在 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $0 \le d \le 2n$，可知

$$\left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n}\right] = e_d(\mathbf{e}^{\varepsilon_1}, \mathbf{e}^{\varepsilon_2}, \ldots, \mathbf{e}^{\varepsilon_n}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_n}, \ldots, \mathbf{e}^{-\varepsilon_2}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_1}),$$

其中 $e_d(x_1, \ldots\ldots, x_m)$ 表示变量 $x_1, \ldots\ldots, x_m$ 中的第 d 个初等对称多项式 .

2.5. **K-理论惠特尼关系**。设 y 为一个形式变量。对于 G/B 上秩为 r 的 T-等变向量丛 $\mathcal{E}$，在 [H], 中引入的 *Hirzebruch* λ_y-类 $\lambda_y(\mathcal{E})$ 定义为

$$\lambda_y(\mathcal{E}) := 1 + y[\mathcal{E}] + y^2\left[\bigwedge^2 \mathcal{E}\right] + \cdots + y^r\left[\bigwedge^r \mathcal{E}\right] \in K_T(G/B)[y].$$

对于 G/B 上 T-等变向量丛的短正合列 $0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_2 \to \mathcal{E}_3 \to 0$，已知 $\lambda_y(\mathcal{E}_2) = \lambda_y(\mathcal{E}_1) \cdot \lambda_y(\mathcal{E}_3)$。我们将此恒等式称为 K-理论惠特尼关系（简称 K-惠特尼关系）。在情形 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 中，短正合列

$$\begin{aligned}
0 \to \mathcal{S}_{k-1} \to \mathcal{S}_k \to \mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1} \to 0, \\
0 \to (\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee \to \mathcal{S}_k^\vee \to \mathcal{S}_{k-1}^\vee \to 0, \\
0 \to \mathcal{S}_n \to \underline{\mathbb{C}}^{2n} \to \mathcal{S}_n^\vee \to 0
\end{aligned}$$

对于 $1 \le k \le n$，推出

$$\lambda_y(\mathcal{S}_k) = \lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) \cdot \lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}), \tag{2.2}$$

$$\lambda_y(\mathcal{S}_k^\vee) = \lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee) \cdot \lambda_y((\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee), \tag{2.3}$$

$$\lambda_y(\underline{\mathbb{C}}^{2n}) = \lambda_y(\mathcal{S}_n) \cdot \lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee), \tag{2.4}$$

分别地。在下一节中，我们将考察量子 K理论中与（2.2）、（2.3）和（2.4）类似的关系，这些关系是本文的主要结果。

3. Whitney-type presentation of the quantum K-ring

我们描述 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$ 中类似于（2.2）、（2.3）和（2.4）的关系。为此，我们列举乘积的结果

$$\begin{aligned}&\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1})\star\lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}) && \text{对于 } 1\le k\le n,\\ &\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee)\star\lambda_y((\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee) && \text{对于 } 1\le k\le n, \text{ 以及}\\ &\lambda_y(\mathcal{S}_n)\star\lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee).\end{aligned}$$

我们可以推知，这些关系构成了 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$的一个定义关系系统，因此得到 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$的一个表示。

3.1. 量子 K理论的惠特尼关系。本文中，我们约定$Q_0 = 0$ 和 $\mathcal{S}_{-1} = 0$。首先，以下两个恒等式是类似于（2.2）和（2.3）的关系。

定理 3.1. (1) 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$ 中，对于 $1\le k\le n$，有

$$\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1})\star\lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}) = \lambda_y(\mathcal{S}_k) - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}]\star(\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1})-\lambda_y(\mathcal{S}_{k-2})). \tag{3.1}$$

(2) 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$ 中，对于 $1\le k\le n$，有

$$\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee)\star\lambda_y((\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee) = \lambda_y(\mathcal{S}_k^\vee) - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee]\star(\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}^\vee)-\lambda_y(\mathcal{S}_{k-2}^\vee)). \tag{3.2}$$

注意，上述恒等式与类型 A 旗流形的恒等式相似；参见 (1.2)。另一方面，下面这个与 (2.4) 类似的恒等式是类型 C 情形所特有的。

定理 3.2. 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})[y]$中，有

$$\begin{aligned}\lambda_y(\mathcal{S}_n)\star\lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee) &= \lambda_y(\mathbb{C}^{2n})\\ &\quad - y^2\sum_{p=1}^{n}\frac{Q_p\cdots Q_n}{1-Q_{p-1}}(\lambda_y(\mathcal{S}_{p-1})-Q_{p-1}\lambda_y(\mathcal{S}_{p-2}))\star(\lambda_y(\mathcal{S}_{p-1}^\vee)-Q_{p-1}\lambda_y(\mathcal{S}_{p-2}^\vee)).\end{aligned} \tag{3.3}$$

我们将恒等式 (3.1)、(3.2) 和 (3.3) 称为 Fl^{C_n} 的量子 K-理论惠特尼关系 （简称 QK-惠特尼关系）。

3.2. T 量子 K-环的 Whitney 型表示。定义一个环 R_Q^{W} 为

$$R_Q^{\mathsf{W}} := (R(T)[\![Q_1,\dots,Q_n]\!])[F_d^k, G_d^k, x_j, y_j \mid 1\le k\le n,\ 1\le d\le k,\ 1\le j\le n].$$

取由以下元素生成的 I_Q^{W} 的 R_Q^{W} 理想

$$F_d^k - \left(F_d^{k-1} + \frac{1}{1-Q_{k-1}}(F_{d-1}^{k-1} - Q_{k-1}F_{d-1}^{k-2})x_k\right) \quad \text{for } 1\le k\le n \text{ and } 1\le d\le k, \tag{3.4}$$

$$G_d^k - \left(G_d^{k-1} + \frac{1}{1-Q_{k-1}}(G_{d-1}^{k-1} - Q_{k-1}G_{d-1}^{k-2})y_k\right) \quad \text{for } 1\le k\le n \text{ and } 1\le d\le k, \tag{3.5}$$

$$\begin{aligned}&\sum_{k=0}^{d}F_k^nG_{d-k}^n - \Bigg(e_d(\mathbf{e}^{\varepsilon_1},\mathbf{e}^{\varepsilon_2},\dots,\mathbf{e}^{\varepsilon_n},\mathbf{e}^{-\varepsilon_n},\dots,\mathbf{e}^{-\varepsilon_2},\mathbf{e}^{-\varepsilon_1})\\ &\quad - \sum_{p=1}^{n}\frac{Q_p\cdots Q_n}{1-Q_{p-1}}\sum_{r=0}^{d-2}(F_r^{p-1}-Q_{p-1}F_r^{p-2})(G_{d-2-r}^{p-1}-Q_{p-1}G_{d-2-r}^{p-2})\Bigg) \quad \text{for } 1\le d\le n,\end{aligned} \tag{3.6}$$

$$F_1^1 - x_1, \tag{3.7}$$

$$G_1^1 - y_1, \tag{3.8}$$

$$x_jy_j = (1-Q_{j-1})(1-Q_j) \quad \text{for } 1\le j\le n; \tag{3.9}$$

其中， e_d 表示第 d 个初等对称多项式，并且我们约定 $F_d^{-1} = F_d^0 = 0$（当 $d \in \mathbb{Z}_{>0}$ 时）、 $F_d^k = 0$（当 $1 \le k \le n$ 时）以及 $d > k$（当 $-1 \le k \le n$ 时）。于是可以推出如下 $R(T)$-代数同构，称为 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的 *Whitney* 型表示。

定理 3.3。 存在一个 $R(T)$-代数同构 $R_Q^{\mathsf{W}}/I_Q^{\mathsf{W}} \xrightarrow{\sim} QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$，使得

$$\begin{aligned}
F_d^k &\mapsto \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] && \text{for } 1 \le k \le n \text{ and } 1 \le d \le k,\\
G_d^k &\mapsto \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k^\vee\right] && \text{for } 1 \le k \le n \text{ and } 1 \le d \le k,\\
x_j &\mapsto [\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1}] && \text{for } 1 \le j \le n,\\
y_j &\mapsto [(\mathcal{S}_j/\mathcal{S}_{j-1})^\vee] && \text{for } 1 \le j \le n.
\end{aligned}$$

4. Computation of quantum products

本节旨在回顾一种计算量子乘积的方法。在此计算中，半无限旗流形的 K-群起着关键作用。因此，本节将回顾半无限旗流形的 K-群的相关事实。接着，我们推导 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中线丛的量子乘积公式，以得到所需的 QK-惠特尼关系。暂且假设 G 属于任意类型。

4.1. 半无限旗流形及其 K-群。 我们用 N 表示 B 的幺正根基；注意 $B = TN$。按照 [MNS，第 3.1] 节（其基于 [K，第 1.4 节和第 1.5] 节）、 [O，第 2.1 节和第 2.3], [节、1], KN2，第 4. [节以及 2], KNS，第 4. 节，我们简要回顾半无限旗流形 $\mathbf{Q}_G$ 的定义。对于 $\lambda \in P$，我们用 $V(\lambda)$ 表示 G 中权为 λ 的不可约最高权表示。接着，我们将 $\mathbf{Q}_G$ 定义为元组 $(\ell_\lambda)_{\lambda \in P^+}$ 的集合，其中每一项都是直线 $\ell_\lambda \in \mathbb{P}(V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!])$，且满足 $\lambda \in P^+$；对于 λ， $\mu \in P^+$， $\ell_{\lambda+\mu}$ 在映射下对应于 $\ell_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \ell_\mu$

$$V(\lambda+\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!] \to (V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]) \otimes_{\mathbb{C}[\![z]\!]} (V(\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!])$$

由.....的嵌入诱导

$$V(\lambda+\mu) \hookrightarrow V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} V(\mu)$$

的表示　的表示。注意，上面的 $\ell_\lambda \otimes_{\mathbb{C}} \ell_\mu$ 是指其在 ma 下的像　p

$$(V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]) \otimes_{\mathbb{C}} (V(\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]) \to (V(\lambda) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]) \otimes_{\mathbb{C}[\![z]\!]} (V(\mu) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]).$$

于是，元组 $(\ell_\lambda)_{\lambda \in P^+}$ 由与 $i \in I$ 的基本权 ϖ_i 对应的直线 ℓ_{ϖ_i} 确定。因此，存在一个嵌入

$$\mathbf{Q}_G \hookrightarrow \prod_{i \in I} \mathbb{P}(V(\varpi_i) \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[\![z]\!]). \tag{4.1}$$

于是， $\mathbf{Q}_G$ 配备了一个概形结构，使得 (4.1) 是一个闭嵌入（见 [KNS，引理 4.4]）。我们称 $\mathbf{Q}_G$ 为半无限旗流形。注意， $\mathbf{Q}_G$ 带有一个 $(T \times \mathbb{C}^*)$- 作用。

对于满足 $m_i \in \mathbb{Z}$ 的 $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P$，我们将 $\mathbf{Q}_G$ 上的线丛 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\lambda)$ 定义为 $\boxtimes_{i \in I} \mathcal{O}(m_i)$ 在 (4.1) 下的拉回，其中第 i 个 $\mathcal{O}(m_i)$ 位于 $\mathbb{P}(V(\varpi_i))$ 上。注意，对于 λ， $\mu \in P$，有 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\lambda) \otimes \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mu) = \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\lambda+\mu)$。

半无限旗流形具有半无限舒伯特子簇，类似于旗流形的舒伯特簇。考虑映射 $G(\mathbb{C}[\![z]\!]) \to G$，定义为 $z \mapsto 0$，并将此映射下 B 的原像记作**I**。这个**I** 称为 $G(\mathbb{C}[\![z]\!])$ 的伊瓦霍里子群。令W_{af} 为 G 的仿射魏尔群。对于 $\xi \in Q^\vee$，我们用 $t_\xi \in W_{\mathrm{af}}$ 表示对应于 ξ 的平移元。于是有 $W_{\mathrm{af}} = \{wt_\xi \mid w \in W,\ \xi \in Q^\vee\} \simeq W \ltimes Q^\vee$。令

$$Q^{\vee,+} := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}_{\ge 0} \alpha_i^\vee$$

并定义 ${W^{\ge 0}}_{\mathrm{af}} := \{wt_\xi \mid w \in W,\ \xi \in Q^{\vee,+}\} \simeq W \times Q^{\vee,+}$。对于 $x = wt_\xi \in {W^{\ge 0}}_{\mathrm{af}}$，若满足 $w \in W$ 且 $\xi \in Q^{\vee,+}$，则令 $p_x := (z^{-\langle \lambda, w_\circ \xi \rangle} V(\lambda)_{ww_\circ \lambda})_{\lambda \in P^+}$，其中对于 $\mu \in P$， $V(\lambda)_\mu$ 是 $V(\lambda)$ 的一个 μ-权空间。于是， $\mathbf{Q}_G$ 的 $(T \times \mathbb{C}^*)$-不动点集合为 $\{p_x \mid x \in {W^{\ge 0}}_{\mathrm{af}}\}$；也就是说， $(T \times \mathbb{C}^*)$-不动点

$\mathbf{Q}_G$ 的点由 $W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}$ 参数化（KNS，§4.2], [O，§2.3]）。对于 $x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}$，我们将$\mathbf{Q}_G(x)$ 记为 p_x 的**I**-轨道的闭包，并称其为与 x 对应的半无限舒伯特簇。注意，$\mathbf{Q}_G(e) = \mathbf{Q}_G$。此外，对于 $x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}$，$\mathbf{Q}_G(x)$ 是$\mathbf{Q}_G$ 的一个（约化的）闭子概形。对于 $x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}$，我们将 $\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}$ 记为$\mathbf{Q}_G(x)$ 的结构层。

然后我们定义 K-群$\mathbf{Q}_G$。对于 $a = \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_{\lambda,\ k} q^k \mathbf{e}^\lambda \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$ 且满足 $c_{\lambda,\ k} \in \mathbb{Z}$，我们定义 $|a| := \sum_{\lambda \in P} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |c_{\lambda,\ k}| q^k \mathbf{e}^\lambda$。令 $\widetilde{K}'(\mathbf{Q}_G)$ 表示由所有形式和 $\sum_{x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}} a_x [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ 构成的 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$-模，其中 $a_x \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$ 满足 taamaatt。

$$\sum_{x \in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}} |a_x| \operatorname{gch} H^0(\mathbf{Q}_G, \mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)) \in \mathbb{Z}[P](\!(q^{-1})\!)$$

对于 :，其中 ()() :() () 对于 af 和，而 gch 表示 ()-权模的特征，其中环旋转作用的特征记为 。根据 K 定理 1.，(Q) 配备了类 ()()，用于 af 和 。特别地，(Q) 配备了线丛类 ()，用于 。

令 $K_{T \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ 为 $\widetilde{K}'(\mathbf{Q}_G)$ 的 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$-子模，它由所有满足 $a_x \in \mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$ 的形式和$\sum_{x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}} a_x [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$ 组成，其中

$$\sum_{x \in W_{\mathrm{af}}^{\geq 0}} |a_x| \in \mathbb{Z}[P](\!(q^{-1})\!).$$

那么，$K_{T \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$ 实际上是 $\widetilde{K}'(\mathbf{Q}_G)$ 的一个 $\mathbb{Z}[q, q^{-1}][P]$-子模（参见 [KNS，推论 4.31]）。此外，对于 $x \in W^{\geq 0}{}_{\mathrm{af}}$和 $\lambda \in P$，有 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)] \in K_{T \times \mathbb{C}^*}(\mathbf{Q}_G)$（依据 [KLN，定理 5.16]以及 [KNS，推论 5.12] 的证明）。

令 $K_T(\mathrm{Q}_G)$ 为 $K_{T \times \mathbb{C}^*}(\mathrm{Q}_G)$ 在 $q = 1$ 处的特化，并称其为 Q_G 的 T-等变K-群。于是可知，$K_T(\mathrm{Q}_G)$ 是一个 $R(T)(= \mathbb{Z}[P])$-模，由所有系数取自 $R(T)$ 的 $\{[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] \mid x \in W^{\geq 0}\mathrm{af}\ \}$ 的无穷线性组合构成。特别地，$\{[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}] \mid x \in W^{\geq 0}\mathrm{af}\ \}$ 构成 $K_T(\mathrm{Q}_G)$ 关于 $R(T)$ 的拓扑基；也就是说，$K_T(\mathrm{Q}_G)$ 中的每个元素都能唯一地写成 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]$，$x \in W^{\geq 0}\mathrm{af}$ 的无穷线性组合，系数取自 $R(T)$（[K，引理 1.22]）。此外，对于$x \in W^{\geq 0}\mathrm{af}$，有 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)] \in K_T(\mathrm{Q}_G)$（ $\lambda \in P$ K，定理 1.26]）；特别地，对于$\lambda \in P$，有 $[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\lambda)] = [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(e)}(\lambda)] \in K_T(\mathrm{Q}_G)$。

对于 $\xi \in Q^{\vee,\ +}$，我们定义 $\mathrm{t}_\xi \in \mathrm{End}(K_T(\mathbf{Q}_G))$，使得 $\mathrm{t}_\xi([\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}]) := [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x t_\xi)}]$，并将其线性延拓。若 $\xi = \alpha_i^\vee$ 对于 $i \in I$ 成立，则记作 $\mathrm{t}_i := \mathrm{t}^{\alpha_i^\vee}$。

我们回顾 $QK_T(G/B)$ 与 $K_T(\mathbf{Q}_G)$ 之间的关系。

定理 4.1 ([K、推论3.13 和定理 4.17])。存在一个 $R(T)$-模同构

$$\Phi : QK_T(G/B) \xrightarrow{\sim} K_T(\mathbf{Q}_G)$$

使得

(i) $\Phi(e^\mu Q^\xi [\mathcal{O}^w]) = e^{-\mu} t_\xi [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(w)}]$ 对于 $\mu \in P$、$\xi \in Q^\vee$、$^+$ 和 $w \in W$ 成立；以及

(ii) $\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varpi_i)] \star \mathcal{Z}) = [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(w_\circ \varpi_i)] \otimes \Phi(\mathcal{Z})$ 对于 $i \in I$ 和 $\mathcal{Z} \in QK_T(G/B)$ 成立。

注意，由于本文中线丛的约定与 [K] 中的约定不同，差异来自对合 $-w_\circ$所产生的扭曲，因此定理 4.1(ii) 的恒等式右端需要 $w_\circ$。

4.2. 量子壁室模型。Lenart 和 Postnikov（[LP]）引入了壁室模型，用于描述旗流形经典 K理论中的切瓦利公式。K_T（G/B）中的切瓦利公式是线丛类与一

Schube 个类的乘积展开为舒伯特类线性组合的恒等式；也就是说，它具有如下形式的恒等式

$$[\mathcal{O}_{G/B}(\lambda)] \cdot [\mathcal{O}^w] = \sum_{v \in W} c^v_{\lambda,w} [\mathcal{O}^v]$$

对于 $\lambda \in P$和 $w \in W$，其中 $c^v_{\lambda,w} \in R(T)$。随后，Lenart 和 Lubovsky（[LL]）引入了壁室模型的量子类比，称为量子 alcove 模型，用以构造特定 Kirillov–Reshetikhin 晶体（张量积）的组合模型。最近，Lenart、Naito 和 Sagaki（[LNS]）利用这一量子 alcove 模型，描述了半无限旗流形的 K-群中的切瓦利公式。在这种情形下，半无限情形的切瓦利公式是一个展开恒等式：将一个由线丛类扭曲的半无限 Schubert 类展开为半无限 Schubert 类的无限线性组合；也就是说，一个如下形式的恒等式

$$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(\lambda)] = \sum_{y \in W_{\mathrm{af}}} d^y_{\lambda,x} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(y)}]$$

对于 $\lambda \in P$和 $x \in W_{\mathrm{af}}$，其中 $d^y_{\lambda,x} \in R(T)$。本节遵循 [LNS, §3.2]，回顾量子 alcove 模型理论中所用组合对象的定义。接着，我们将在下一节回顾 $K_T(\mathbf{Q}_G)$ 和 $K_T(G/B)$ 中切瓦利公式的组合描述。

为介绍量子 alcove 模型，我们定义量子 Bruhat 图。

定义 4.2 ([BFP，定义 6.1])。量子 ***Bruhat*** 图 QBG(W)是一个以 Δ^+为标记的有向图，其顶点集为 W，且对于 $x,\ y \in W$ 和 $\alpha \in \Delta^+$，若满足以下条件之一，则存在一条边 $x \xrightarrow{\alpha} y$:

$$\begin{aligned} &\text{(B)}\ \ \ell(y) = \ell(x) + 1; \text{ or} \\ &\text{(Q)}\ \ \ell(y) = \ell(x) - 2\langle \rho, \alpha^\vee \rangle + 1, \end{aligned} \tag{Q}$$

其中，$\ell(\cdot)$表示长度函数 $W \to \mathbb{Z}_{\geq 0}$，而 $\rho = (1/2)\sum_{\alpha \in \Delta^+} \alpha$。如果满足 (B)（相应地，满足），则该边称为***Bruhat*** 边 （相应地，称为量子边）。

此外，我们引入壁室的概念。对于 $\alpha \in \Delta$ 和 $k \in \mathbb{Z}$，我们定义超平面$H_{\alpha,\ k}$在 $\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$ 中的 $= P \otimes_{\mathbb{Z}} \mathbb{R}$ 为

$$H_{\alpha,k} := \{\xi \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \mid \langle \xi, \alpha^\vee \rangle = k\}.$$

那么，壁室 是下列集合的一个连通分支

$$\mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \setminus \bigcup_{\alpha \in \Delta,\ k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,k}.$$

特别地，我们将基本巷道 $A_\circ$ 定义为

$$A_\circ = \{\xi \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}} \mid 0 < \langle \xi, \alpha^\vee \rangle < 1 \text{ for all } \alpha \in \Delta^+\}.$$

对于 $\lambda \in P$，我们设

$$A_\lambda = A_\circ + \lambda := \{\xi + \lambda \mid \xi \in A_\circ\}.$$

那么 A_λ 也是一个壁室。

如果 A 和 B 具有公共墙，我们就称它们相邻 。对于相邻壁室 A 和B 以及 $\alpha \in \Delta$，如果 A 和 B 的公共墙包含于$H_{\alpha,\ k}$，且存在某些$k \in \mathbb{Z}$ 和 α 点，使方向从 A 指向 B，则记作 $A \xrightarrow{\alpha} B$ 。

定义 4.3 ([LP，定义 5.2 和 5.4])。 (1) 壁室序列 $(A_0, \ldots, A_r)$ 称为一条***alcove*** 路径 ，如果对所有 $1 \leq k \leq r$， A_{k-1} 和 A_k 都相邻。若壁室路径 $\Gamma = (A_0, \ldots, A_r)$ 的长度 r 在所有从 A_0 到 A_r的壁室路径中最小，则称其为约化的 。

(2) 对于 $\lambda \in P$，根序列 $(\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$ 称为 λ-链 ，如果存在壁室路径 $(A_0, \ldots, A_r)$，满足 $A_0 = A_\circ$和 $A_r = A_{-\lambda}$，使得

$$A_\circ = A_0 \xrightarrow{-\gamma_1} A_1 \xrightarrow{-\gamma_2} \cdots \xrightarrow{-\gamma_r} A_r = A_{-\lambda}.$$

如果对应的 alcove 路径（$A_0, \ldots, A_r$）是约化的，我们就称 λ-链（$\gamma_1, \ldots . \gamma_r$）是约化的。

最后，我们引入可容许子集，它们是量子 alcove 模型理论中的主要研究对象。

定义 4.4 ([LL，定义 3.4], [LNS，定义 17])。设 $\lambda \in P$ 和 $w \in W$。取一条λ-链 $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$（不一定是约化的）。则称集合 $A = \{i_1 < \ldots < i_t\} \subset \{1, \ldots, r\}$（可以为空）为 w-可容许的，如果

$$\Pi(w, A) : w_0 \xrightarrow{|\gamma_{i_1}|} w_1 \xrightarrow{|\gamma_{i_2}|} \cdots \xrightarrow{|\gamma_{i_t}|} w_t \tag{4.2}$$

是量子布鲁哈特图 QBG(W) 中的一条有向路径。我们用 $\mathcal{A}(w, \Gamma)$ 表示所有$\{1, \ldots, r\}$的 w-可容许子集组成的集合。

我们定义切瓦利公式中使用的可容许子集的统计量。设 $\lambda \in P$ 和$w \in W$。取一条 λ-链 $\Gamma = (\gamma_1, \ldots, \gamma_r)$，其对应的 alcove 路径为 $(A_0, \ldots, A_r)$。固定一个 w- 可容许子集 $A = \{i_1 < \cdots < i_t\} \subset \{1, \ldots, r\}$。我们定义

$$n(A) := \#\{j \in A \mid \gamma_j \in -\Delta^+\}.$$

取由 (4.2) 定义的量子布鲁哈特图 QBG(W) 中对应的有向路径 $\Pi(w, A)$。我们定义 end(A) $\in W$ 和 down(A) $\in Q^\vee$ 如下:

$$\begin{aligned} \mathrm{end}(A) &:= w_t, \\ \mathrm{down}(A) &:= \sum_{\substack{1 \le k \le t \\ w_{k-1} \to w_k \text{ is a quantum edge}}} |\gamma_{i_k}|^\vee. \end{aligned}$$

然后，我们将 $\mathcal{A}(w, \Gamma)$ 的经典部分 $\mathcal{A}|_{Q=0}(w, \Gamma)$定义为

$$\mathcal{A}|_{Q=0}(w, \Gamma) := \{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma) \mid \mathrm{down}(A) = 0\}.$$

这只是 Lenart 和 Postnikov（[LP]）提出的（经典）壁室模型理论中的一个组合对象。

此外，我们还需要统计量 wt(A)。对于 $\alpha \in \Delta$和 $k \in \mathbb{Z}$，我们用$s_{\alpha, k}$ 表示关于 $H_{\alpha, k}$的反射，定义为 $s_{\alpha, k}(\xi) := \xi - (\langle \xi, \alpha^\vee \rangle - k)\alpha$，其中 $\xi \in \mathfrak{h}^*_{\mathbb{R}}$。对于 $1 \le k \le r$，取$l_k \in \mathbb{Z}$ 使得 A_{k-1} 和 A_k 的公共墙包含于 $H_{\gamma_k, -l_k}$中。令 $\widehat{r}_k := s_{\gamma_k, -l_k}$，其中$1 \le k \le r$。然后我们将 wt($A$) $\in P$定义为

$$\mathrm{wt}(A) := -w\widehat{r}_{i_1} \cdots \widehat{r}_{i_t}(-\lambda).$$

4.3. 切瓦利公式与线丛对应。 将一个半无限 Schubert 类与一个线丛类相乘所得的类展开为半无限 Schubert 类的无限线性组合，这一展开恒等式称为切瓦利公式。首先，我们回顾 Lenart、Naito 和 Sagaki（[LNS]）对切瓦利公式的组合描述。若整数序列 $\chi = (\chi_1, \ldots, \chi_l)$ 满足 $\chi_1 \ge \cdots \ge \chi_l > 0$，则称其为分拆。在这种情况下，我们称 l 为 χ的长度，记作 $\ell(\chi)$。此外，我们允许长度为 $\ell(\chi) = 0$ 的空分拆 $\chi = \emptyset$。在这种情况下，我们约定 $\chi = (0)$。对于 $\lambda = \sum_{i \in I} m_i \varpi_i \in P$，我们将 Par($\lambda$) 定义为

$$\overline{\mathrm{Par}}(\lambda) := \{\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_i)_{i \in I} \mid \boldsymbol{\chi}_i \text{ is a partition with } \ell(\boldsymbol{\chi}_i) \le \max\{m_i, 0\} \text{ for } i \in I\}.$$

或 $\boldsymbol{\chi} = (\boldsymbol{\chi}_i)_{i \in I} \in \mathrm{Par}(\lambda)$ 且 $\boldsymbol{\chi}_i = (\boldsymbol{\chi}_i^{(1)} \ge \cdots \ge \boldsymbol{\chi}_i^{(l_i)})$（注意 $l_i = \ell(\boldsymbol{\chi}_i)$），我们设

$$\iota(\boldsymbol{\chi}) := \sum_{i \in I} \boldsymbol{\chi}_i^{(1)} \alpha_i^\vee \in Q^{\vee, +};$$

这里，如果 $\boldsymbol{\chi}_i = \emptyset$ 是空分拆，那么我们理解为 $\boldsymbol{\chi}_i^{(1)} = 0$。切瓦利公式的组合描述如下。

定理4.5 ([LNS，定理 33])。设 $\lambda \in P$。取一个约化的 λ-链 Γ。此外，设 $x = wt_\xi \in W_{\mathrm{af}}$。在 $K_T(\mathbf{Q}_G)$ 中，我们有

$$[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(x)}(-w_\circ \lambda)] = \sum_{A \in \mathcal{A}(w, \Gamma)} \sum_{\boldsymbol{\chi} \in \overline{\mathrm{Par}}(\lambda)} (-1)^{n(A)} \mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(\mathrm{end}(A) t_{\xi + \mathrm{down}(A) + \iota(\boldsymbol{\chi})})}]$$

$$= \sum_{\boldsymbol{\chi}\in\overline{\mathrm{Par}}(\lambda)} \mathsf{t}_{\iota(\boldsymbol{\chi})} \sum_{A\in\mathcal{A}(w,\Gamma)} (-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A)t_{\xi+\mathrm{down}(A))}]$$

我们在此关注情形 $G=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。注意，在此情形下 $w_\circ\lambda=-\lambda$ for $\lambda\in P$。我们重点讨论情形 $\lambda=\pm\varepsilon_J$，其中某个 $J\subset[1,n]$。

若 $\lambda=\varepsilon_J$ 对于 $J\subset[1,n]$，则有

$$\overline{\mathrm{Par}}(\varepsilon_J)=\left\{(\boldsymbol{\chi}_j)_{1\le j\le n}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{\chi}_j \text{ is a partition with } \ell(\boldsymbol{\chi}_j)\le 1 \text{ for } j\in L_J,\\ \text{and } \boldsymbol{\chi}_j=\emptyset \text{ for } j\notin L_J\end{array}\right\}\simeq\mathbb{Z}_{\ge0}^{|L_J|}$$

并且对于 $\boldsymbol{\chi}=(\boldsymbol{\chi}_j)_{1\le j\le n}\in\overline{\mathrm{Par}}(\varepsilon_J)$，其中 $\boldsymbol{\chi}_j=(m_j)$ 且 $m_j\in\mathbb{Z}_{\ge0}$对于 $j\in L_J$，我们有 ave

$$\iota(\boldsymbol{\chi})=\sum_{j\in L_J} m_j\alpha_j^\vee.$$

考虑情形 $\lambda=-\varepsilon_J$ 对于 $J\subset[1,n]$。则有

$$\overline{\mathrm{Par}}(-\varepsilon_J)=\left\{(\boldsymbol{\chi}_j)_{1\le j\le n}\;\middle|\;\begin{array}{l}\boldsymbol{\chi}_j \text{ is a partition with } \ell(\boldsymbol{\chi}_j)\le 1 \text{ for } j\in M_J,\\ \text{and } \boldsymbol{\chi}_j=\emptyset \text{ for } j\notin M_J\end{array}\right\}\simeq\mathbb{Z}_{\ge0}^{|M_J|}$$

并且对于 $\boldsymbol{\chi}=(\boldsymbol{\chi}_j)_{1\le j\le n}\in\overline{\mathrm{Par}}(-\varepsilon_J)$，其中 $\boldsymbol{\chi}_j=(m_j)$ 且 $m_j\in\mathbb{Z}_{\ge0}$ 对于 $j\in M_J$，我们有

$$\iota(\boldsymbol{\chi})=\sum_{j\in M_J} m_j\alpha_j^\vee.$$

为完成切瓦利公式的计算，我们研究某些可容许子集的结构。我们将用到以下事实，其证明见附录 A。

命题 4.6. 假设 $G=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。取 $J\subset[1,n]$。令 $\lambda=\varepsilon_J$ 或 $\lambda=-\varepsilon_J$，并取一条约化的 λ-链 Γ。则有

$$\sum_{A\in\mathcal{A}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A)t_{\mathrm{down}(A))}]=\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A))].$$

在下面的推论中，我们将 $1/(1-\mathsf{t}_j):=\sum_{m=0}^\infty\mathsf{t}_j^m$记作 $1\le j\le n$，它是 $K_T(\mathbf{Q}_G)$ 上定义良好的算子。

推论 4.7. 假设 $G=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。取 $J\subset[1,n]$。

(1) 对于一条约化的 ε_J-链 Γ，有

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\varepsilon_J)]&=\left(\prod_{j\in L_J}\sum_{m_j=0}^\infty \mathsf{t}_{m_j\alpha_j^\vee}\right)\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A))]\\&=\left(\prod_{j\in L_J}\frac{1}{1-\mathsf{t}_j}\right)\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A))].\end{aligned}\tag{4.3}$$

(2) 对于一条约化的 $(-\varepsilon_J)$-链 Γ，有

$$\begin{aligned}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_J)]&=\left(\prod_{j\in M_J}\sum_{m_j=0}^\infty \mathsf{t}_{m_j\alpha_j^\vee}\right)\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A))]\\&=\left(\prod_{j\in M_J}\frac{1}{1-\mathsf{t}_j}\right)\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\mathrm{end}(A))].\end{aligned}\tag{4.4}$$

另一方面，Lenart 和 Postnikov 描述了任意 G 下（经典）K-环 $K_T(G/B)$ 的切瓦利公式，如下所示。

命题 4.8 ([LP, 定理 6.1])。设 $\lambda\in P$，并取一个约化的 λ-链 Γ。此外，设$w\in W$。在 $K_T(G/B)$ 中，我们有

$$[\mathcal{O}_{G/B}(\lambda)]\cdot[\mathcal{O}^w]=\sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(w,\Gamma)}(-1)^{n(A)}\mathbf{e}^{-\mathrm{wt}(A)}[\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}].\tag{4.5}$$

注 4.9。在 [LP], 中，切瓦利公式给出了舒伯特簇$X_w = B\dot{w}B/B$的类 $[\mathcal{O}_{X_w}]$ 的描述，而非反舒伯特类 $[\mathcal{O}^w]$。利用关系$X^w = w_\circ X_{w_\circ w}$ （其中 $w \in W$），我们得到（4.5）。

结合 (4.3)、(4.4) 和 (4.5)，我们得到以下对应关系。

命题 4.10. 假设 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。对于 $J \subset [1,n]$ 和 $\mathcal{Z} \in QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$，我们有

$$\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star \mathcal{Z}) = \left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin J,\, j+1\in J}} (1-\mathsf{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_I)] \otimes \Phi(\mathcal{Z}), \tag{4.6}$$

$$\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_J)] \star \mathcal{Z}) = \left(\prod_{\substack{2\le j\le n \\ j\notin J,\, j-1\in J}} (1-\mathsf{t}_{j-1}) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(\varepsilon_J)] \otimes \Phi(\mathcal{Z}). \tag{4.7}$$

证明. 由于可以用相同的论证证明 (4.7)，我们这里只证明 (4.6)。因为 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 由线丛类 $[\mathcal{O}_{G/B}(-\varpi_j)]$ 生成，其中 $1 \le j \le n$ 是 $R(T)[\![Q_1,\dots,Q_n]\!]$-代数（见 [MNS, §5]），因此只需证明

$$\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]) = \left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin I,\, j+1\in I}} (1-\mathsf{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_J)]$$

（参见定理 4.1 (ii)）。令 Γ 为一个约化的（$-\varepsilon_J$）-链。由 (4.5)，我们得到

$$[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] = [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \cdot [\mathcal{O}^e] = \sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)} (-1)^{n(A)} \mathbf{e}^{-\mathrm{wt}(A)} [\mathcal{O}^{\mathrm{end}(A)}].$$

在 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n}) \subset QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中。应用定理 4.1 中的 Φ，我们得到

$$\begin{aligned}
\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]) &= \sum_{A\in\mathcal{A}|_{Q=0}(e,\Gamma)} (-1)^{n(A)} \mathbf{e}^{\mathrm{wt}(A)} [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G(\mathrm{end}(A))}] \\
&= \left(\prod_{j\in M_J} (1-\mathsf{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_J)] \qquad \text{by (4.3)} \\
&= \left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin I,\, j+1\in I}} (1-\mathsf{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_J)],
\end{aligned}$$

如所求。 □

利用对应关系 (4.6) 和 (4.7)，我们得到以下恒等式，这些恒等式将用于计算 QK-惠特尼关系。

推论 4.11. 假设 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。令 $2 \le k \le n$，并取 $J \subset [1,k-1]$。则有

$$[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-Q_{k-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] & \text{if } k-1 \in J, \\ [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] & \text{if } k-1 \notin J, \end{cases} \tag{4.8}$$

$$[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})] = \begin{cases} \dfrac{1}{1-Q_{k-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_k)] & \text{if } k-1 \in J, \\ [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_k)] & \text{if } k-1 \notin J. \end{cases} \tag{4.9}$$

证明. 我们只证明 (4.8)，因为可以用相同的论证证明 (4.9)。由 (4.6)，计算得

$$\begin{aligned}
&\Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)]) \\
&= \left(\left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin J, j+1\in J}} (1-\mathtt{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_J)] \right) \otimes ((1-\mathtt{t}_{k-1})[\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_k)]) \\
&= \begin{cases} (1-\mathtt{t}_{k-1}) \left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin J\sqcup\{k\}, j+1\in J\sqcup\{k\}}} (1-\mathtt{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})] & \text{if } k-1\in J, \\ \left(\prod_{\substack{1\le j\le n-1 \\ j\notin J\sqcup\{k\}, j+1\in J\sqcup\{k\}}} (1-\mathtt{t}_j) \right) [\mathcal{O}_{\mathbf{Q}_G}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})] & \text{if } k-1\notin J. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Phi((1-Q_{k-1})[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})]) & \text{if } k-1\in J, \\ \Phi([\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})]) & \text{if } k-1\notin J. \end{cases}
\end{aligned}$$

由于 Φ 是 $R(T)$-模的一个同构，我们得到所需的恒等式 (4.8)。 □

5. The proof of quantum K-theoretic Whitney relations

5.1. **定理 3.1 的证明**。首先，我们给出 (3.1) 的证明。为此，我们证明以下恒等式。

引理 5.1。在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$中，对于 $1\le k\le n$ 和 $1\le d\le k$，有

$$\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] = \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \frac{1}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star \left(\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}\right] - Q_{k-1}\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-2}\right] \right). \quad (5.1)$$

证明。我们计算如下:

$$\begin{aligned}
&\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] \\
&= \sum_{\substack{J\subset[1,k] \\ |J|=d}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \\
&= \sum_{\substack{J\subset[1,k-1] \\ |J|=d}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] + \sum_{\substack{J\subset[1,k-1] \\ |J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\sqcup\{k\}})] \\
&= \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \sum_{\substack{J\subset[1,k-2] \\ |J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \\
&\quad + \frac{1}{1-Q_{k-1}} \sum_{\substack{J\subset[1,k-1] \\ k-1\in J \\ |J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \qquad \text{by (4.8)} \\
&= \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \frac{1}{1-Q_{k-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] \star \sum_{\substack{J\subset[1,k-1] \\ |J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \\
&\quad - \frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] \star \sum_{\substack{J\subset[1,k-2] \\ |J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]
\end{aligned}$$

$$= \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \frac{1}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_k)] \star \left(\sum_{\substack{J\subset[1,k-1]\\|J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] - Q_{k-1} \sum_{\substack{J\subset[1,k-2]\\|J|=d-1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \right)$$

$$= \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \frac{1}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star \left(\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}\right] - Q_{k-1}\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-2}\right]\right),$$

如所需。 □

定理 *3.1*（*1*）的证明。等式 (3.1) 的左边计算如下：

$$\begin{aligned} &\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) \star \lambda_y(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}) \\ &= \left(\sum_{d=0}^{k-1} y^d \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right]\right) \star (1 + y[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}]) \\ &= \sum_{d=0}^{k} y^d \left(\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] + \left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}\right] \star [\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \right). \end{aligned} \tag{5.2}$$

另一方面，等式 (3.1) 的右边计算如下：

$$\begin{aligned} &\lambda_y(\mathcal{S}_k) - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star (\lambda_y(\mathcal{S}_{k-1}) - \lambda_y(\mathcal{S}_{k-2})) \\ &= \sum_{d=0}^{k} y^d \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] - y\frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star \left(\sum_{d=0}^{k-1} y^d \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}\right] - \sum_{d=0}^{k-2} y^d \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-2}\right]\right) \\ &= \sum_{d=0}^{k} y^d \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] - \frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star \left(\sum_{d=1}^{k} y^d \left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}\right] - \sum_{d=1}^{k-1} y^d \left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-2}\right]\right) \\ &= \sum_{d=0}^{k} y^d \left(\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k\right] - \frac{Q_{k-1}}{1-Q_{k-1}}[\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1}] \star \left(\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}\right] - \left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-2}\right]\right)\right) \end{aligned} \tag{5.3}$$

由 (5.1)，我们得到 (5.2) =(5.3)，证毕。 □

然后，证明下列与 (5.1) 类似的恒等式，即可仿照 (3.1) 证明 (3.2)；其证明从略。

引理 5.2。在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $1 \le d \le k \le n$ 和 $1 \le d \le k$，有

$$\left[\bigwedge^d \mathcal{S}_k^\vee\right] = \left[\bigwedge^d \mathcal{S}_{k-1}^\vee\right] + \frac{1}{1-Q_{k-1}}[(\mathcal{S}_k/\mathcal{S}_{k-1})^\vee] \star \left(\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-1}^\vee\right] - Q_{k-1}\left[\bigwedge^{d-1} \mathcal{S}_{k-2}^\vee\right]\right).$$

5.2. **Borel 型关系**。 为了证明定理 3.2，我们需要回顾 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的 Borel 型关系，这些关系在 [KN2]，中有所描述，足以构造 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的定义理想；也就是说，构造 Laurent 多项式环 $(R(T)[\![Q_1,\dots,Q_n]\!][z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]$ 的一个理想 I_Q^{B}，使得

$$QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n}) \simeq (R(T)[\![Q_1,\dots,Q_n]\!])[z_1^{\pm1},\dots,z_n^{\pm1}]/I_Q^{\mathsf{B}}.$$

作为 $R(T)$-代数。这个同构称为 *Borel* 型表示。

定义 5.3 ([KN2，定义 6.1])。 设 $J \subset [1,1]$。

(1) 对于 $1 \le j \le n$，我们定义 $\varphi_J(j) \in \mathbb{Z}[\![Q_1,\dots,Q_n]\!]$ 为

$$\varphi_J(j) := \begin{cases} \dfrac{1}{1-Q_j} & \text{if } j, j+1 \in J, \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(2) 对于 $2 \le j \le n$，我们定义 $\varphi_J(\overline{j}) \in \mathbb{Z}[\![Q_1, \dots, Q_n]\!]$ 为

$$\varphi_J(\overline{j}) := \begin{cases} 1 + \dfrac{Q_{j-1}Q_j \cdots Q_n}{1 - Q_{j-1}} & \text{if } J = \{\cdots < j-1 < \overline{j-1} < \cdots\}, \\ \dfrac{1}{1 - Q_{j-1}} & \text{if } \overline{j}, \overline{j-1} \in J, \\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

(3) 我们设 $\varphi_J(\overline{1}) := 1 \in \mathbb{Z}[\![Q_1, \dots, Q_n]\!]$。

本文中，我们用 $\prod^\star$ 表示关于 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$上的量子乘积 $\star$的乘积。于是，Borel 型关系如下所述；这里回顾一下，对于 $1 \le j \le n$，有$\varepsilon_j = -\varepsilon_{\overline{j}}$。

命题 5.4 ([KN2, 推论 6.4])。 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$中，对于 $0 \le d \le 2n$，有

$$\sum_{\substack{J \subset [1,\overline{1}] \\ |J| = d}} \left(\prod_{1 \le j \le \overline{1}} \varphi_J(j) \right) \left(\prod_{j \in J}^{\star} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)] \right) = \left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n} \right]. \tag{5.4}$$

此外，我们还使用以下关系。

命题 5.5 ([KN2, 引理 6.7])。 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$中，对于 $1 \le j \le n$，有

$$[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_j)] = (1 - Q_{j-1})(1 - Q_j). \tag{5.5}$$

5.3. **定理 3.2 的证明**。 对于每个 $1 \le d \le 2n$，通过比较两边 y^d 的系数，我们证明 (3.3)。

引理 5.6。 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $1 \le d \le 2n$，我们有

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{k,l \ge 0 \\ k+l=d}} \left[\bigwedge^k \mathcal{S}_n \right] \star \left[\bigwedge^l \mathcal{S}_n^\vee \right] &= \left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n} \right] \\ &\quad - \sum_{p=1}^{n} \frac{Q_p Q_{p+1} \cdots Q_n}{1 - Q_p} \sum_{\substack{J,K \subset [1,n] \\ |J| + |K| = d \\ \max J = \max K = p}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)]. \end{aligned} \tag{5.6}$$

证明。 下文中，我们令 $K := \{j \top j \in K\}$ 表示 $K \subset [1,n]$。设 $J, K \subset [1,n]$。由 (4.8)，我们有

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] &= \left(\prod_{\substack{2 \le j \le n \\ j-1 \in J, j \in J}} \frac{1}{1 - Q_{j-1}} \right) \left(\prod_{j \in J}^{\star} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)] \right) \\ &= \left(\prod_{1 \le j \le n} \varphi_J(j) \right) \left(\prod_{j \in J}^{\star} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)] \right). \end{aligned}$$

此外，由（4.9）可得

$$\begin{aligned} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] &= \left(\prod_{\substack{2 \le j \le n \\ j-1 \in K, j \in K}} \frac{1}{1 - Q_{j-1}} \right) \left(\prod_{j \in K}^{\star} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_j)] \right) \\ &= \left(\prod_{\overline{n} \le j \le \overline{1}} \varphi_{\overline{K}}(j) \right) \left(\prod_{j \in \overline{K}}^{\star} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)] \right). \end{aligned}$$

因此可得

$$[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)]=\left(\prod_{1\le j\le n}\varphi_J(j)\right)\left(\prod_{\overline{n}\le j\le\overline{1}}\varphi_{\overline{K}}(j)\right)\left(\prod_{j\in J\sqcup\overline{K}}^{\star}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)]\right).$$

若 $\max\ J\neq\max K$，则有

$$\varphi_{J\sqcup\overline{K}}(j)=\begin{cases}\varphi_J(j) & \text{if } 1\le j\le n,\\ \varphi_{\overline{K}}(j) & \text{if } \overline{n}\le j\le\overline{1}.\end{cases}$$

因此得到

$$\left(\prod_{1\le j\le n}\varphi_J(j)\right)\left(\prod_{\overline{n}\le j\le\overline{1}}\varphi_{\overline{K}}(j)\right)=\prod_{1\le j\le\overline{1}}\varphi_{J\sqcup\overline{K}}(j).$$

假设 $\max J=\max\ K=:\ p_\circ$ 若 $p=n$，则可知

$$\varphi_{J\sqcup\overline{K}}(j)=\begin{cases}\varphi_J(j) & \text{if } 1\le j\le n-1,\\ \dfrac{1}{1-Q_n}=\left(1+\dfrac{Q_n}{1-Q_n}\right)\underbrace{\varphi_J(n)}_{=1} & \text{if } j=n\\ \varphi_{\overline{K}}(j) & \text{if } \overline{n}\le j\le\overline{1}.\end{cases}$$

若 $p<n$，则

$$\varphi_{J\sqcup\overline{K}}(j)=\begin{cases}\varphi_J(j) & \text{if } 1\le j\le n,\\ \varphi_{\overline{K}}(j) & \text{if } \overline{n}\le j<\overline{p+1} \text{ or } \overline{p}\le j\le\overline{1},\\ \left(1+\dfrac{Q_pQ_{p+1}\cdots Q_n}{1-Q_p}\right)\underbrace{\varphi_{\overline{K}}(\overline{p+1})}_{=1} & \text{if } j=\overline{p+1}.\end{cases}$$

因此，在 $\max J=\max\ K=p\in[1,n]$ 的情形下，得到

$$\begin{aligned}&\left(\prod_{1\le j\le n}\varphi_J(j)\right)\left(\prod_{\overline{n}\le j\le\overline{1}}\varphi_{\overline{K}}(j)\right)\\&\quad=\prod_{1\le j\le\overline{1}}\varphi_{J\sqcup\overline{K}}(j)-\frac{Q_pQ_{p+1}\cdots Q_n}{1-Q_p}\left(\prod_{1\le j\le n}\varphi_J(j)\right)\left(\prod_{\overline{n}\le j\le\overline{1}}\varphi_{\overline{K}}(j)\right).\end{aligned}$$

因此，我们计算

$$\begin{aligned}&\sum_{\substack{k,l\ge0\\k+l=d}}\left[\bigwedge^k\mathcal{S}_n\right]\star\left[\bigwedge^l\mathcal{S}_n^\vee\right]\\&=\sum_{\substack{k,l\ge0\\k+l=d}}\sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\|J|=k,|K|=l}}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)]\\&=\sum_{\substack{L\subset[1,\overline{1}]\\|L|=d}}\left(\prod_{1\le j\le\overline{1}}\varphi_L(j)\right)\left(\prod_{j\in L}^{\star}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)]\right)\\&\quad-\sum_{p=1}^{n}\sum_{\substack{k,l\ge0\\k+l=d}}\sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\|J|=k,|K|=l,\\\max J=\max K=p}}\frac{Q_pQ_{p+1}\cdots Q_n}{1-Q_p}\\&\qquad\times\left(\prod_{1\le j\le n}\varphi_J(j)\right)\left(\prod_{\overline{n}\le j\le\overline{1}}\varphi_{\overline{K}}(j)\right)\left(\prod_{j\in J\sqcup\overline{K}}^{\star}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)]\right)\end{aligned}$$

$$= \left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n}\right] - \sum_{p=1}^{n} \sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d,\\ \max J=\max K=p}} \frac{Q_pQ_{p+1}\cdots Q_n}{1-Q_p}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)],$$

如所需；在最后一个等式中，我们使用了（5.4）。 □

引理 5.7。 在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $1\le d\le 2n$ 和 $1\le p\le n$，我们有

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d\\ \max J=\max K=p}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] \\
&\quad= \frac{1-Q_p}{1-Q_{p-1}} \sum_{\substack{k,l\ge 0\\ k+l=d-2}} \left(\left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-1}\right] - Q_{p-1}\left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-2}\right]\right) \\
&\qquad\qquad \star\left(\left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-1}^\vee\right] - Q_{p-1}\left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-2}^\vee\right]\right).
\end{aligned} \tag{5.7}$$

证明。 假设 $p\ge 2$。我们计算得

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d\\ \max J=\max K=p}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] \\
&= \sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d\\ \max J=\max K=p}} \left(\varphi_J(p)[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\setminus\{p\}})]\star[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_p)]\right) && \text{by (4.8) and (4.9)} \\
&\qquad \star\left(\varphi_{\overline{K}}(\overline{p})[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_{K\setminus\{p\}})]\star[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_p)]\right) \\
&= \sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d\\ \max I=\max J=p}} (1-Q_{p-1})(1-Q_p) && \text{by (5.5)} \\
&\qquad \times\left(\varphi_J(p)[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_{J\setminus\{p\}})]\right)\star\left(\varphi_{\overline{K}}(\overline{p})[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_{K\setminus\{p\}})]\right) \\
&= (1-Q_{p-1})(1-Q_p) \\
&\qquad \times \sum_{\substack{k,l\ge 0\\ k+l=d-2}} \left(\sum_{\substack{J\subset[1,p-1]\\ p-1\in J\\ |J|=k}} \frac{1}{1-Q_{p-1}}[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] + \sum_{\substack{J\subset[1,p-1]\\ p-1\notin J\\ |J|=k}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\right) \\
&\qquad\qquad \star\left(\sum_{\substack{K\subset[1,p-1]\\ p-1\in k\\ |K|=l}} \frac{1}{1-Q_{p-1}}[\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] + \sum_{\substack{K\subset[1,p-1]\\ p-1\notin K\\ |K|=l}} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)]\right) \\
&= \frac{1-Q_p}{1-Q_{p-1}} \sum_{\substack{k,l\ge 0\\ k+l=d-2}} \left(\sum_{\substack{J\subset[1,p-1]\\ |J|=k}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] - Q_{p-1}\sum_{\substack{J\subset[1,p-2]\\ |J|=k}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)]\right) \\
&\qquad\qquad \star\left(\sum_{\substack{K\subset[1,p-1]\\ |K|=l}} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] - Q_{p-1}\sum_{\substack{K\subset[1,p-2]\\ |K|=l}} [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)]\right)
\end{aligned}$$

$$= \frac{1-Q_p}{1-Q_{p-1}} \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=d-2}} \left(\left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-1} \right] - Q_{p-1} \left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-2} \right] \right) \star \left(\left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-1} \right] - Q_{p-1} \left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-2} \right] \right),$$

如所需。若 $p=1$，则由于

$$[\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_1)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_1)] = 1 - Q_1$$

由（5.5），可知

$$\sum_{\substack{J,K\subset[1,n]\\ |J|+|K|=d\\ \max J=\max K=1}} [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_J)] \star [\mathcal{O}_{G/B}(\varepsilon_K)] = \begin{cases} 1-Q_1 & \text{if } d=2,\\ 0 & \text{if } d\neq 2. \end{cases}$$

这与（5.7）一致。 □

结合（5.6）和（5.7），我们得到如下结果。

命题5.8。在 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 中，对于 $1\leq d\leq 2n$，有

$$\sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=d}} \left[\bigwedge^k \mathcal{S}_n \right] \star \left[\bigwedge^l \mathcal{S}_n^\vee \right] = \left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n} \right] - \sum_{p=1}^{n} \frac{Q_p Q_{p+1}\cdots Q_n}{1-Q_{p-1}} \sum_{\substack{k,l\geq 0\\ k+l=d-2}} \left(\left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-1} \right] - Q_{p-1} \left[\bigwedge^k \mathcal{S}_{p-2} \right] \right) \star \left(\left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-1}^\vee \right] - Q_{p-1} \left[\bigwedge^l \mathcal{S}_{p-2}^\vee \right] \right). \tag{5.8}$$

定理 *3.2* 的证明。（5.8）的左端是 y^d 在 $\lambda_y(\mathcal{S}_n) \star \lambda_y(\mathcal{S}_n^\vee)$ 中的系数。另一方面，（5.8）的右端与（3.3）右端中 y^d 的系数相同；回顾

$$\left[\bigwedge^d \underline{\mathbb{C}}^{2n} \right] = e_d(\mathbf{e}^{\varepsilon_1}, \mathbf{e}^{\varepsilon_2}, \ldots, \mathbf{e}^{\varepsilon_n}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_n}, \ldots, \mathbf{e}^{-\varepsilon_2}, \mathbf{e}^{-\varepsilon_1}).$$

因此，(3.3) 成立。 □

6. The proof of the Whitney-type presentation

本节旨在证明定理 3.3。证明策略是运用 Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou（[GMSXZ^{2}2]）所建立的中山型论证，将 Whitney 型表示约化为 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的经典呈示。

本节中，我们回顾中山型论证，随后给出 Whitney 型表示的证明。

6.1. 量子 K-环的中山型结果。为证明定理 3.3，我们回顾 Gu、Mihalcea、Sharpe、Xu、Zhang 和 Zou（[GMSXZ^{2}2]）所建立的论证；该论证可作为交换环理论中中山引理的一个应用得到。在下述定理中，令 G 为任意类型。取一个抛物子群 $P\subset G$。我们用 $Q_1,\ldots,Q_k$ 表示与 G/P 相关联的诺维科夫变量。

定理 6.1（[GMSXZ^{2}2, 定理 4.1]）。假设我们给定了一个 $R(T)$ - 代数的同构

$$\Phi : R(T)[m_1,\ldots,m_s]/\langle P_1,\ldots,P_r\rangle \xrightarrow{\sim} K_T(G/P)$$

其中 $m_1,\ldots,m_s$ 是不定元，而 P_i 是变量 m_j 的多项式，其系数属于 $R(T)$。考虑任意幂级数

$$\widetilde{P}_i = \widetilde{P}_i(m_1,\ldots,m_s;Q_1,\ldots,Q_k) \in (R(T)[m_1,\ldots,m_s])[\![Q_1,\ldots,Q_k]\!]$$

使得

- $\widetilde{P_i}(m_1,\dots,m_s;\ 0,\dots,0) = P_i(m_1,\dots,m_s)$ 对所有 $m_1,\dots,m_s$ 以及所有 i和$\sim$
- $P_i(m_1,\dots,m_s;\ Q_1,\dots,Q_k) = 0$ 属于 $QK_T(G/P)$，其中 m_i 通过同构 Φ被视为 $QK_T(G/P)$ 中的元素。

于是，Φ 提升为一个 $R(T)[\![Q_1,\dots,Q_k]\!]$-代数的同构

$$\widetilde{\Phi} : (R(T)[\![Q_1,\dots,Q_k]\!])[m_1,\dots,m_s]/\langle \widetilde{P}_1,\dots,\widetilde{P}_r\rangle \xrightarrow{\sim} QK_T(G/P).$$

根据定理 6.1，我们可以将 $QK_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的同构问题化归为 $K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$ 的同构问题。

6.2. 定理 3.3 的证明。再次假设 $G = \mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。我们给出定理 3.3 的证明。为应用定理 6.1，我们应计算理想 I_Q^{W} 的生成元的限制。代入 $Q_1 = \cdots = Q_n = 0$ 后可见，(3.4) 变为

$$F_d^k - (F_d^{k-1} + F_{d-1}^{k-1}x_k) \quad \text{for } 1 \le k \le n \text{ and } 1 \le d \le k, \tag{6.1}$$

(3.5) 变为

$$G_d^k - (G_d^{k-1} + G_{d-1}^{k-1}y_k) \quad \text{for } 1 \le k \le n \text{ and } 1 \le d \le k, \tag{6.2}$$

(3.6) 变为

$$\sum_{k=0}^{d} F_k^n G_{d-k}^n - e_d(\mathbf{e}^{\varepsilon_1},\mathbf{e}^{\varepsilon_2},\dots,\mathbf{e}^{\varepsilon_n},\mathbf{e}^{-\varepsilon_n},\dots,\mathbf{e}^{-\varepsilon_2},\mathbf{e}^{-\varepsilon_1}) \quad \text{for } 1 \le d \le n, \tag{6.3}$$

而 (3.9) 变为

$$x_j y_j = 1 \quad \text{for } 1 \le j \le n, \tag{6.4}$$

而 (3.7) 和 (3.8) 不变。

设 I^{W} 是 $R^{\mathsf{W}} := R(T)[F_d^k, G_d^k, x_j, y_j \mid 1 \le k \le n,\ 1 \le d \le k,\ 1 \le j \le n]$ 的一个理想，由 (6.1)、(6.2)、(6.3)、(6.4) 以及 (3.7)、(3.8) 生成。若不会引起混淆，我们对 $a \in R^{\mathsf{W}}$ 的剩余类 $a + I^{\mathsf{W}}$ 使用相同的记号 a。于是，在 $R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}}$ 中，由 (6.4) 可得 $x_j y_j = 1, 1 \le j \le n$。因此，我们看到 x_j 和 y_j 可逆，且 $y_j = x_j^{-1}$。此外，由 (6.1) 和 (6.2)，在 $R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}}$ 中有

$$F_d^k = F_d^{k-1} + F_{d-1}^{k-1}x_k, \tag{6.5}$$

$$G_d^k = G_d^{k-1} + G_{d-1}^{k-1}x_k^{-1} \tag{6.6}$$

对于 $1 \le k \le n$ 和 $1 \le d \le k$。此外，由 (3.7) 和 (3.8)，我们有 $F_1^1 = x_1$ 和 $G_1^1 = x^{-1}$。

命题 6.2。在 $R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}}$，我们有

$$F_d^k = e_d(x_1,\dots,x_k) \tag{6.7}$$

and

$$G_d^k = e_d(x_1^{-1},\dots,x_k^{-1}) \tag{6.8}$$

对于 $1 \le k \le n$ 和 $1 \le d \le k$。

证明。为了证明 $F_d^k = e_d(x_1,\dots,x_k)$，只需验证 $e_d(x_1,\dots,x_k)$满足与 (6.5) 相同的递归恒等式；即，

$$e_d(x_1,\dots,x_k) = e_d(x_1,\dots,x_{k-1}) + e_{d-1}(x_1,\dots,x_{k-1})x_k;$$

根据初等对称多项式的定义，这显然成立。由于 $e_1(x_1) = x_1$，我们得到 (6.7)。用同样的方法，结合 (6.6) 和 $e_1(x_1^{-1}) = x_1^{-1}$，我们得到 (6.8)。□

命题 6.3。在 $R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}}$，我们有

$$\sum_{k=0}^{d} F_k^n G_{d-k}^n = e_d(x_1, x_2, \dots, x_n, x_n^{-1}, \dots, x_2^{-1}, x_1^{-1}) \tag{6.9}$$

对于 $1 \le d \le n$。

证明。 根据初等对称多项式的定义，我们有

$$\sum_{\substack{k.l\geq 0\\ k+l=d}} e_k(x_1,\dots,x_n)e_l(x_1^{-1},\dots,x_n^{-1}) = e_d(x_1,x_2,\dots,x_n,x_n^{-1},\dots,x_2^{-1},x_1^{-1}).$$

因此，命题 6.2 表明式 (6.9) 成立。 □

令 $R^{\mathsf{B}} := R(T)[z_1^{\pm 1},\dots,z_n^{\pm 1}]$，并取由以下元素生成的 R^{B} 的理想 I^{B}

$$e_d(z_1,z_2,\dots,z_n,z_n^{-1},\dots,z_2^{-1},z_1^{-1}) - e_d(\mathbf{e}^{\varepsilon_1},\mathbf{e}^{\varepsilon_2},\dots,\mathbf{e}^{\varepsilon_n},\mathbf{e}^{-\varepsilon_n},\dots,\mathbf{e}^{-\varepsilon_2},\mathbf{e}^{-\varepsilon_1}) \quad \text{for } 1\leq d\leq n.$$

由命题 6.2 和命题 6.3，我们可得以下结论。

推论 6.4. 我们有一个同构

$$\Xi_0 : R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}} \xrightarrow{\sim} R^{\mathsf{B}}/I^{\mathsf{B}}$$

$R(T)$ 代数的同构，使得 $\Xi_0(x_j) = z_j$，其中 $1\leq j\leq n$。

定理 *3.3* 的证明。存在一个众所周知的 $R(T)$-代数同构

$$K_T(G/B) \simeq R(T)\otimes_{R(T)^W} R(T)$$

适用于任意类型的 G（参见 [PR]）；其中 $R(T)^W$ 表示 W 不变元素构成的环$R(T)$。在 $G=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$ 情形下，(2.1) 推出

$$R^{\mathsf{B}}/I^{\mathsf{B}} \simeq R(T)\otimes_{R(T)^W} R(T)$$

并且我们得到一个 $R(T)$-代数同构

$$\Psi : R^{\mathsf{B}}/I^{\mathsf{B}} \xrightarrow{\sim} K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$$

使得对 $1\leq j\leq n$，有 $\Psi(z_j) = [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)]$。因此，我们得到一个同构

$$\Xi = \Psi\circ\Xi_0 : R^{\mathsf{W}}/I^{\mathsf{W}} \xrightarrow{\sim} K_T(\mathrm{Fl}^{C_n})$$

$R(T)$-代数同构，使得对 $1\leq j\leq n$，有 $\Xi(x_j) = [\mathcal{O}_{G/B}(-\varepsilon_j)]$。然后将定理 6.1 应用于此 Ξ，即可完成定理的证明。□

Appendix A. Proof of Proposition 4.6

我们给出命题 4.6 的证明。通过量子杨-巴克斯特变换 [KLN], , 可知只需针对一个特定的约化链证明该命题。

A.1. **关于 C 根系的注记**。假设 $G=\mathrm{Sp}_{2n}(\mathbb{C})$。对于 $1\leq i<j\leq n$，设

$$(i,j) := \varepsilon_i-\varepsilon_j, \quad (i,\bar{j}) := \varepsilon_i+\varepsilon_j.$$

此外，对于 $1\leq i\leq n$，令 $(i,i) := 2\varepsilon_i$。于是我们有

$$\Delta^+ = \{(i,j),(i,\bar{j}) \mid 1\leq i<j\leq n\}\sqcup\{(i,\bar{i}) \mid 1\leq i\leq n\}.$$

通过将 Weyl 群的元素 $w\in W$ 视为 $[1,1]$, 上的带符号置换，我们可以描述 QBG(W) 中布鲁哈特边／量子边的判定准则。为描述这一准则，我们对 $1\leq k\leq n$ 定义 $\mathrm{sign}(k) := 1$，并对 $1<k<n$ 定义 $\mathrm{sign}(k) := -1$。

引理 A.1 ([Len, 命题 5.7]). 设 $w\in W$。

(1) 对于 $1\leq i<j\leq n$，存在 *Bruhat* 边 $w \xrightarrow{(i,\ j)} ws_{(i,j)}$，位于 量子布鲁哈特图($W$) 中，当且仅当

- $w(i)<w(j)$</style>，以及
- 不存在任何 $i<k<j$ 使得 $w(i)<w(k)<w(j)$。

(2) </style>对于，在 量子布鲁哈特图(W) 中存在一条量子边 $w \xrightarrow{(i,j)} ws_{(i,j)}$ 当且仅当

- $w(i)>w(j)$，并且
- 对于所有 $i<k<j$，都有 $w(j)<w(k)<w(i)$。

(3) 对于 $1\leq i<j\leq n$，在 量子布鲁哈特图(W) 中存在一条边 $w \xrightarrow{(i,j)} ws_{(i,j)}$ 当且仅当

- $w(i)<w(\bar{j})$,
- 符号($w(i)$) = 符号($w(\bar{j})$)，并且

• 不存在任何满足以下条件的 $i < \bar{k} < j$ $w(i) < w(k) < w(j)$。

在这种情形下，这样一条边是 *Bruhat* 边。

(4) 对于 $1 \le i \le n$，在 量子布鲁哈特图(W) 中存在一条 *Bruhat* 边 $w \xrightarrow{(i,i)} ws_{(i,i)}$，当且仅当 *if*

• $w(i) < w(\bar{i})$（或者等价地，符号$(w(i)) = 1$），并且
• 不存在任何 $i < k < i$（或者等价地，$i < k \le n$）使得 $w(i) < w(k) < w(i)$。

(5) 对于 $1 \le i \le n$，在 量子布鲁哈特图(W) 中存在一条量子边 $w \xrightarrow{(i,i)} ws_{(i,i)}$，当且仅当

• $w(i) > w(\bar{i})$（或等价地，$\mathrm{sign}(w(i)) = -1$），并且
• 对所有 $i < k < i$（或等价地，$i < k \le n$），我们有 $w(\bar{i}) < w(k) < w(i)$。

A.2. 适当链。 按照 [KN1, §2.4], ，我们构造一条特定的链，足以证明命题 4.6。

定义A.2（参见 [D, (2.1) 和 (2.2)]）。 Δ^+ 上的全序 $\lhd$称为反射序（或凸序），如果对每个 $\alpha, \beta \in \Delta^+$ 且$\alpha + \beta \in \Delta^+$， $\alpha \lhd \alpha + \beta \lhd \beta$ 或 $\beta \lhd \alpha + \beta \lhd \alpha$ 之一成立。

对于 $\lambda \in P$，令

$$\Delta^+(\lambda)_{>0} := \{\beta \in \Delta^+ \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle > 0\},$$
$$\Delta^+(\lambda)_{=0} := \{\beta \in \Delta^+ \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = 0\},$$
$$\Delta^+(\lambda)_{<0} := \{\beta \in \Delta^+ \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle < 0\}.$$

此外，对于 $k \in \mathbb{Z}$，我们令

$$\Delta^+(\lambda)_{=k} := \{\beta \in \Delta^+ \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = k\}.$$

对于 $\lambda \in P$，我们用 $\lambda_+ \in P^+$表示 W-轨道 $W\lambda$ 中的唯一元素。我们将 $u(\lambda) \in W$定义为 $\{w \in W \mid w\lambda_+ = \lambda\}$ 中的唯一极小元，并将 $w(\lambda)$ 记为与 $u(\lambda)$ 相同集合中的唯一极大元。注意，若我们用 $w_\circ(\lambda_+)$ 表示抛物子群 $W_{\lambda_+} = \{w \in W \mid w\lambda_+ = \lambda_+\}$ 的最长元，则有 $w(\lambda) = u(\lambda)w_\circ(\lambda_+)$。那么，分解 $w_\circ = u(-\lambda)^{-1}u(\lambda)w_\circ(\lambda_+)$ 在 Δ^+ 上诱导出一个反射序 $\lhd$，使得对于 $\alpha \in \Delta^+(\lambda)_{<0}$、$\beta \in \Delta^+(\lambda)_{=0}$、$\gamma \in \Delta^+(\lambda)_{>0}$，有 $\alpha \lhd \beta \lhd \gamma$（参见 [KN1，注 2.11]）。

令 $J = \{i_1 < \cdots < i_r\} \subset [1, n]$ 并设 $\lambda = \varepsilon_J$。在我们的设定中，有

$$\Delta^+(\lambda)_{>0} = \{(i,j) \mid i < j,\ i \in J,\ j \notin J\} \sqcup \{(i,\bar{j}) \mid i < j,\ i \in J \text{ or } j \in J\} \sqcup \{(i,\bar{i}) \mid i \in J\},$$
$$\Delta^+(\lambda)_{=0} = \{(i,j) \mid i < j,\ i,j \in J\} \sqcup \{(i,j) \mid i < j,\ i,j \notin J\}$$
$$\sqcup \{(i,\bar{j}) \mid i < j,\ i,j \notin J\} \sqcup \{(i,\bar{i}) \mid i \notin J\},$$
$$\Delta^+(\lambda)_{<0} = \{(i,j) \mid i < j,\ i \notin J,\ j \in J\}.$$

为计算反射序 $\lhd$，我们使用以下约化表达式：

$$u(-\lambda) = (s_{i_r} \cdots s_{n-1}s_n s_{n-1} \cdots s_1)(s_{i_{r-1}+1} \cdots s_{n-1}s_n s_{n-1} \cdots s_2) \cdots \times (s_{i_1+r-1} \cdots s_{n-1}s_n s_{n-1} \cdots s_r),$$
$$u(\lambda) = (s_{i_1-1} \cdots s_2 s_1)(s_{i_2-1} \cdots s_3 s_2) \cdots (s_{i_r-1} \cdots s_{r+1} s_r),$$
$$w_\circ(\lambda_+) = s_1(s_2 s_1) \cdots (s_{r-1} \cdots s_2 s_1)(s_{r+1} \cdots s_{n-1}s_n)^{n-r}.$$

由于 $\lhd$的显式形式非常复杂，我们省略 $\lhd$的完整描述。取而代之的是，我们如下给出 $\lhd$ 在 $\Delta^+(\lambda)_{<0}$ 上的显式描述：

$$(i_1 - 1, i_1) \lhd \cdots \lhd (2, i_1) \lhd (1, i_1)$$
$$\lhd (i_2 - 1, i_2) \lhd \cdots \lhd (i_1 + 1, i_2) \lhd (i_1 - 1, i_2) \lhd \cdots \lhd (2, i_2) \lhd (1, i_2)$$
$$\lhd \cdots$$

$$\begin{aligned}
&\lhd (i_r-1,i_r)\lhd\cdots\lhd(i_{r-1}+1,i_r)\lhd(i_{r-1}-1,i_r)\lhd(i_{r-1}-2,i_r)\lhd\cdots\\
&\quad\cdots\lhd(i_{r-2}+2,i_r)\lhd(i_{r-2}+1,i_r)\lhd(i_{r-2}-1,i_r)\lhd(i_{r-2}-2,i_r)\lhd\cdots\\
&\quad\cdots\\
&\quad\cdots\lhd(i_2+2,i_r)\lhd(i_2+1,i_r)\lhd(i_2-1,i_r)\lhd(i_2-2,i_r)\lhd\cdots\\
&\quad\cdots\lhd(i_1+2,i_r)\lhd(i_1+1,i_r)\lhd(i_1-1,i_r)\lhd\cdots\lhd(2,i_r)\lhd(1,i_r).
\end{aligned}$$

然后，我们可以如下构造一个约化的 ε_J-链 $\Gamma_{\lhd}(\varepsilon_J)$，使其在 [KN1, §3.2] 的意义下“适合” $\lhd$：

$$\Gamma_1=(\gamma_1^{(1)},\dots,\gamma_p^{(1)})$$

其中 $\{\gamma_1^{(1)},\dots,\gamma_p^{(1)}\}=\Delta^+(\lambda)_{>0}$ 和 $\gamma_1^{(1)}\rhd\cdots\rhd\gamma_p^{(1)}$；

$$\Gamma_2=(\gamma_1^{(2)},\dots,\gamma_q^{(2)})$$

其中 $\{\gamma_1^{(2)},\dots,\gamma_q^{(2)}\}=\Delta^+(\lambda)_{=2}$ 和 $\gamma_1^{(2)}\rhd\cdots\rhd\gamma_q^{(2)}$；

$$\Gamma_3=(-\gamma_1^{(3)},\dots,-\gamma_r^{(3)})$$

其中 $\{\gamma_1^{(3)},\dots,\gamma_r^{(3)}\}=\Delta^+(\lambda)_{<0}$ 和 $\gamma_1^{(3)}\rhd\cdots\rhd\gamma_r^{(3)}$；并设

$$\Gamma_{\lhd}(\varepsilon_J)=(\gamma_1^{(1)},\dots,\gamma_p^{(1)},\gamma_1^{(2)},\dots,\gamma_q^{(2)},-\gamma_1^{(3)},\dots,-\gamma_r^{(3)}).$$

此外，如果 $\Gamma=(\beta_1,\ \dots\dots,\ \beta_r)$ 是一个关于 $\mu\in P$ 的约化的 μ-链，那么我们知道 $\Gamma^*:=(-\beta_r,\ \dots\dots,\ -\beta_1)$ 是一个约化的 $(-\mu)$-链。因此，如果我们设 $\Gamma(-\varepsilon_J):=\Gamma_{\lhd}(\varepsilon_J)^*$，那么 $\Gamma(-\varepsilon_J)$ 是一个约化的 $(-\varepsilon_J)$-链。注意， $\Gamma(-\varepsilon_J)$ 按此顺序由三个链 Γ_3^*、 Γ_2^* 和 Γ_1^* 拼接而成；也就是说，

$$\Gamma(-\varepsilon_J)=(\underbrace{\gamma_r^{(3)},\dots,\gamma_1^{(3)}}_{\Gamma_3^*},\underbrace{-\gamma_q^{(2)},\dots,-\gamma_1^{(2)}}_{\Gamma_2^*},\underbrace{-\gamma_p^{(1)},\dots,-\gamma_1^{(1)}}_{\Gamma_1^*}).$$

我们证明以下命题，由此可立即推出命题 4.6。

命题 A.3. (1) 对于 $A\in\mathcal{A}(e,\ \Gamma_{\lhd}(\varepsilon_J))$，有 $\mathrm{down}(A)=0$。
(2) 对于 $A\in\mathcal{A}(e,\ \Gamma(-\varepsilon_J))$，有 $\mathrm{down}(A)=0$。

首先，我们证明命题 A.3 (1)。为此，设

$$D(w):=\{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]\mid i<j,\ w(i)>w(j)\}.$$

对于一条有向路径

$$\mathbf{p}:w_0\xrightarrow{\gamma_1}w_1\xrightarrow{\gamma_2}\cdots\xrightarrow{\gamma_l}w_l,$$

在量子布鲁哈特图 $\mathrm{QBG}(W)$ 中，设

$$\begin{aligned}
\mathrm{init}(\mathbf{p})&:=w_0,\\
\mathrm{end}(\mathbf{p})&:=w_l,\\
\mathrm{wt}(\mathbf{p})&:=\sum_{\substack{1\le j\le l\\ w_{j-1}\to w_j\text{ is a quantum edge}}}\gamma_j^\vee.
\end{aligned}$$

然后，利用引理 A.1，我们可以证明以下引理。

引理 A.4. 设 $w\in W$，并假设

$$D(w)\subset\{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]\mid i<j,\ i\in J,\ j\notin J\}. \tag{A.1}$$

(1) 设 $w\xrightarrow{\gamma}w'$ 是一条 *Bruhat* 边，且 $\gamma\in\Delta^+(\lambda)_{>0}$。那么我们有

$$D(w')\subset\{(i,j)\in[1,n]\times[1,n]\mid i<j,\ i\in J,\ j\notin J\}.$$

(2) 设 $w=w_0\xrightarrow{\gamma_1}w_1\xrightarrow{\gamma_2}\cdots\xrightarrow{\gamma_l}w_l$ 是 量子布鲁哈特图(W) 中的一条有向路径，使得 $\gamma_1,\dots,\gamma_l\in\Delta^+(\lambda)_{<0}$ 且 $\gamma_1\rhd\cdots\rhd\gamma_l$。那么我们有

$$\{\gamma_1,\dots,\gamma_l\}\subset\{(i_r-1,i_r),\dots,(i_2-1,i_2),(i_1-1,i_1)\}\setminus\{(i_k,i_l)\mid 1\le k<l\le r\}$$

且有向路径中的所有边都是布鲁哈特边。

证明。首先，我们证明 (1)。注意，根据假设 (A.1)，对于满足 $i \notin J$ 或 $j \in J$ 的 $1 \leq i < j \leq n$，我们有 $w(i) < w(j)$。在此证明中，我们隐含地使用引理 A.1。

情形 1：$\gamma = (p, q)$，其中 $p < q$、$p \in J$ 和 $q \notin J$。对于 $1 \leq k \leq n$，我们看到

$$w'(k) = \begin{cases} w(q) & \text{if } k = p, \\ w(p) & \text{if } k = q, \\ w(k) & \text{if } k \neq p, q. \end{cases}$$

令 $1 \leq i < j \leq n$，并比较 $w(i)$ 和 $w(j)$。

子情形 1.1：$i \notin J$。在此情形下，$i \neq p$。

若 $i = q$，则 $j \neq p, q$，因此 $w'(i) = w(p)$，$w'(j) = w(j)$。若 $j \in J$，则 $w(p) < w(j)$，因为 $p < q = i < j$ 且 $j \in J$。因此 $w'(i) < w'(j)$。接着假设 $j \notin J$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，我们看到 $w(p) < w(q)$。此外，$w(q) < w(j)$，因为 $q = i < j$ 且 $q \notin J$。因此$w(p) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i \neq q$。由于 $i \neq p, q$，因此 $w'(i) = w(i)$。令 $j \in J$。若 $j = p$，则 $w'(j) = w(q)$。由于 $i < j = p < q$ and $i \notin J$，我们有 $w(i) < w(q)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。若 $j \neq p$，则由于 $j \neq p, q$，有$w'(j) = w(j)$。于是，由于 $i < j$and $i \notin J$，有 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。接下来，令 $j \notin J$。若 $j = q$，则 $w'(j) = w(p)$。若 $i < p$，则 $i \notin J$ 推出 $w(i) < w(p)$，进而得到$w'(i) < w'(j)$。假设 $p < i < j = q$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，$w(p) < w(i) < w(q)$ 不可能成立。另一方面，$i < q$ and $i \notin J$ 推出 $w(i) < w(q)$。因此我们得到$w(i) < w(p) < w(q)$。所以 $w'(i) < w'(j)$。若 $j \neq q$，则 $w'(j) = w(j)$。由于 $i \notin J$，我们得到 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。

子情形 1.2：$i \in J$和 $j \in J$。在此情形下，$i, j \neq q$。

若 $i = p$，则 $w'(i) = w(q)$，且 $w'(j) = w(j)$。假设 $i = p < j < q$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，$w(p) < w(j) < w(q)$ 不可能成立。另一方面，$p < j$ 和 $j \in J$ 蕴含$w(p) < w(j)$。因此 $w(p) < w(q) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。若 $q < j$，则 $j \in J$蕴含 $w(q) < w(j)$，进而 $w'(i) < w'(j)$。

若 $j = p$，则 $w'(i) = w(i)$，且 $w'(j) = w(q)$。由于 $i < j = p$ 和 $p \in J$，可知$w(i) < w(p)$。此外，由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，有 $w(p) < w(q)$。因此 $w(i) < w(q)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

若 $i, j \neq p$，则 $w'(i) = w(i)$ 且 $w'(j) = w(j)$。由于 $j \in J$，我们有 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。

情形 2：$\gamma = (p, q)$，其中 $1 \leq p < q \leq n$ and $p \in J$。对于 $1 \leq k \leq n$，我们看到

$$w'(k) = \begin{cases} w(\overline{q}) & \text{if } j = p, \\ w(\overline{p}) & \text{if } j = q, \\ w(k) & \text{if } j \neq p, q. \end{cases}$$

子情形 2.1：$j \in J$。假设 $i = p$。则 $w'(i) = w(q)$。若 $j = q$，则 $w'(j) = w(p)$。由于 $q = j \in J$，我们有 $w(p) < w(q)$。因此 $w'(i) = w(q) < w(p) = w'(j)$。若 $j \neq q$，则$\overline{w'(j)} = \overline{w}(j)$。由于 $j \in J$，我们有 $w(p) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，$w(p) < w(j) < w(q)$ 不可能成立。因此我们有 $w(q) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i = q$。那么 $j \neq p$。因此 $w'(i) = w(p)$，且 $w'(j) = w(j)$。根据 $j \in J$，我们有$w(q) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边，$w(q) < w(j) < w(p)$（等价地，$w(p) < w(j) < w(q)$）不可能成立。因此 $\overline{w}(p) < \overline{w}(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i \neq p, q$。那么 $w'(i) = w(i)$。若 $j = p$，则 $w'(j) = w(q)$。由于 $p \in J$，我们有$w(i) < w(p)$。由于 $w(p) < w(q)$，我们得到 $w(i) < w(q)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。若 $j = q$，则 $w'(j) = w(p)$。由于$q = j \in J$，我们有 $w(i) < w(q)$。由于 $w(p) < w(q)$，我们得到$w(i) < w(q) < w(p)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。若 $j \neq p, q$，则 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$，因为 $j \in J$。

子情形 2.2：$i \notin J$和 $j \notin J$。在这种情形下，$i, j \neq p$。

假设 $i = q$。那么 $j \neq q$ 和 $w'(i) = w(p)$, $w'(j) = w(q)$。由于 $q = i \notin J$，我们有 $w(q) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边， $w(q) < w(j) < w(p)$ 不可能成立。因此 $w(p) < w(j)$，从而 $w'(i) = w'(j)$。

假设 $j = q$。那么 $w'(i) = w(i)$，且 $w'(j) = w(p)$。由于 $i \notin J$，我们有 $w(i) < w(q)$。由于 $w(q) < w(p)$，我们得到 $w'(i) = w(i) < w(p) = w'(j)$。

假设 $i,\ j \neq q$。由于 $i \notin J$，我们有 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。

情形 3： $\gamma = (p, \overline{q})$，其中 $p < q$、 $p \notin J$ 和 $q \in J$。

子情形 3.1： $j \in J$。在此情形下， $j \neq p$。

假设 $i = p$。那么 $w'(i) = w(q)$。若 $j \equiv q$，则 $w'(j) = w(p)$。由于 $q \in J$，我们有 $w(p) < w(q)$，因而 $w'(i) = w(q) < w(p) = w'(j)$。若 $j \neq q$，则 $w'(j) = w(j)$。由于 $j \in J$，我们有 $w(p) < w(j)$。由于 $x \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边， $w(p) < w(j) < w(q)$ 不可能成立。因此 $w(q) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i = q$。那么 $w'(i) = w(p)$，且 $w'(j) = w(j)$。由于 $j \in J$，我们有 $w(q) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边， $w(q) < w(j) < w(p)$ 不可能成立。因此， $w(p) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i \neq p,\ q$。那么 $w'(i) = w(i)$。如果 $j = q$，那么 $w'(j) = w(p)$。由于 $q \in J$，我们有 $w(i) < w(q)$。由于 $w(q) < w(p)$，我们得到 $w'(i) < w'(j)$。如果 $j \neq q$，那么我们有 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。

子情形 3.2： $i \notin J$ 和 $j \notin J$。在这种情形下， $i,\ j \neq q$。

假设 $i = p$。那么 $w'(i) = w(q)$，且 $w'(j) = w(j)$。由于 $p \notin J$，我们有 $w(p) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边， $w(p) < w(j) < w(q)$ 不可能成立。因此 $w(q) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $j = p$。那么 $w'(i) = w(i)$，且 $w'(j) = w(q)$。由于 $i \notin J$，我们有 $w(i) < w(p)$。由于 $w(p) < w(q)$，我们得到 $w'(i) < w'(j)$。

假设 $i,\ j \neq p$。那么我们看到 $w'(i) = w(i) < w(j) = w'(j)$。

情形 4： $\gamma = (p,\ \overline{p})$，其中 $p \in J$。对于 $1 \leq k \leq n$，我们看到

$$w'(k) = \begin{cases} w(\overline{p}) & \text{if } k = p, \\ w(k) & \text{if } k \neq p. \end{cases}$$

注意到 $w'(p) > w(p)$，因为 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边。

子情形 4.1： $i \notin J$。在这种情形下，我们可以清楚地验证 $w'(i) < w'(j)$，因为 $w'(i) = w(i) < w(j) \leq w'(j)$。

子情形 4.2： $i \in J$ 和 $j \in J$。若 $i \neq p$，则由与子情形 4.1 相同的论证，显然有 $w'(i) < w'(j)$。若 $i = p$，则 $w'(i) = w(p)$。由于 $j \in J$，我们有 $w(p) < w(j)$。由于 $w \xrightarrow{\gamma} w'$ 是一条 Bruhat 边， $w(p) < w(j) < w(p)$ 不可能成立。因此 $w(p) < w(j)$，从而 $w'(i) < w'(j)$。

因此，我们得出结论：若 $i \notin J$ 或 $j \in J$，则有 $w'(i) < w'(j)$。这证明了 (1)。下面证明 (2)。为此，我们证明以下内容：

断言。若 $\gamma_1 = (i_{t_1} - 1, i_{t_1}) \ldots, \gamma_{l-1} = (i_{t_{l-1}} - 1, i_{t_{l-1}})$ 且 $r \geq t_1 > \cdots > t_{l-1} > 1$，那么对于某个 $1 \leq t_s < t_{l-1}$， $\gamma_l = (i_{t_s} - 1, i_{t_s})$ 成立，并且 $w_{l-1} \xrightarrow{\gamma_l} w_l$ 是一条 *Bruhat* 边。

设 $w_{l-1} := w, w_l := w'$。我们约定 $t_0 = r + 1$。令 $1 \leq s < t_{l-1}$，并取满足 $k \notin J$ 的 $1 \leq k < i_s$。若 $k \neq i_s - 1$，则存在某个 $k < p < i_s$。由于 $k \notin J$，有 $w(k) < w(p)$。由于 $i_s \in J$，有 $w(p) < w(i_s)$。因此 $w(k) < w(p) < w(i_s)$，故不存在任何 Bruhat 边 $w \xrightarrow{(k, i_s)} w'$。因此 γ 必定与 $(i_s - 1, i_s)$ 相同。此外，由于 $w(i_s - 1) < w(i_s)$，这条边必定是一条 Bruhat 边。这个断言证明了该命题的 (2)。□

命题 *A.3*（*1*）的证明。令 $A \in \mathcal{A}(e, \Gamma_{\lhd}(\varepsilon_J))$，对 $k = 1, 2, 3$，取 $A^{(k)}$ 中与 Γ_k 对应的子集。再取量子布鲁哈特图 QBG(W) 中分别与 $A^{(1)}$、 $A^{(2)}$、 $A^{(3)}$ 对应的有向路径 Π_1, Π_2, Π_3。那么 Π_1 是相对于 $\lhd$ 的标签递减路径，且所有标签

都包含在 $\Delta^+(\lambda)_{>0}$ 中。注意，$\mathrm{init}(\Pi_1) = e$。由于 $\mathrm{end}(\Pi_1) > e$ 在布鲁哈特序下，我们可以取一条从 e 到 $\mathrm{end}(\Pi_1)$ 的最短有向路径，该路径位于量子布鲁哈特图 QBG(W) 中，且仅包含 Bruhat 边。由于标签递减路径是最短路径，我们看到 Π_1 也是从 e 到 $\mathrm{end}(\Pi_1)$ 的所有有向路径中最短的（参见 [BFP，定理 6.4]）。根据 [P，引理 1（2）]（另见 [LNS^3, 命题 8.1]），若 p_1 和 p_2 是最短有向路径，且 $\mathrm{init}(\mathsf{p}_1) = \mathrm{init}(\mathsf{p}_2)$、$\mathrm{end}(\mathsf{p}_1) = \mathrm{end}(\mathsf{p}_2)$，则 $\mathrm{wt}(\mathsf{p}_1) = \mathrm{wt}(\mathsf{p}_2)$。因此 $\mathrm{wt}(\Pi_1) = 0$。此外，由引理 A.1（3），有 $\mathrm{wt}(\Pi_2) = 0$。由引理 A.4（1），$w := \mathrm{end}(\Pi_2)$ 满足 (A.1)。于是由引理 A.4（2），有 $\mathrm{wt}(\Pi_3) = 0$。因此 $\mathrm{down}(A) = \mathrm{wt}(\Pi_1) + \mathrm{wt}(\Pi_2) + \mathrm{wt}(\Pi_3) = 0$，证毕。□

为证明命题 A.3（2），我们注意到以下引理，该引理可由下述事实轻易验证：

$$\Delta^+(\lambda)_{<0} \subset \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le n\}.$$

引理 A.5。设 $e \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_l} w$ 是量子布鲁哈特图(W) 中的一条有向路径，其中 γ_1、……、$\gamma_l \in \Delta(\lambda)_{<0}$。则对于 $1 \le k \le n$，有 $w(k) \in \{1, \dots, n\}$。

推论 A.6。设 $e \xrightarrow{\gamma_1} \cdots \xrightarrow{\gamma_l} w$ 是量子布鲁哈特图(W) 中的一条有向路径，使得

- 所有边都是布鲁哈特边，并且
- γ_1、……、$\gamma_l \in \Delta^+(\lambda)_{<0}$。

因此，在量子布鲁哈特图(W) 中不存在满足 $\gamma \in \Delta^+(\lambda)_{=2}$ 的边。

证明。根据引理 A.1（3），这可由以下事实推出：对所有 $1 \le i < j \le n$，$\mathrm{sign}(w(i)) = 1 \ne -1 = \mathrm{sign}(w(j))$。□

命题 A.3（2）的证明。令 $A \in \mathcal{A}(e, \Gamma(-\varepsilon_J))$，并对 $k = 1$、2、3，取 A 中与 Γ_k^* 对应的子集 $A^{(k)}$。对 $k = 1$、2、3，令 Π_k^* 为量子布鲁哈特图 QBG(W) 中与 $A^{(k)}$ 对应的一条有向路径。由于 $\mathrm{end}(\Pi_3)$ 在布鲁哈特序下 $> e$，且 Π_3 是量子布鲁哈特图 QBG(W) 中关于 $\lhd$ 的标签递增路径，我们由命题 A.3（1）证明中恒等式 $\mathrm{wt}(\Pi_1) = 0$ 的相同理由可知，$\mathrm{wt}(\Pi_3^*) = 0$。于是由推论 A.6 可知，Π_2^* 是一条平凡路径（长度为 0）。因此，与 A 对应的有向路径 $\Pi(e, A)$ 是按此顺序将 Π_3^* 和 Π_1^* 拼接而成的，并且这是量子布鲁哈特图 QBG(W) 中关于 $\lhd$ 的一条标签递增路径。由于 $\mathrm{end}(A)$ 在布鲁哈特序下 $> e$，我们得出 $\mathrm{down}(A) = \mathrm{wt}(\Pi(e, A)) = 0$，证毕。□

References

[BFP] F. Brenti, S. Fomin 和 A. Postnikov，Weyl 群的混合 Bruhat 算子与杨–巴克斯特方程，*Int. Math. Res. Not. IMRN* **1999** (1999)，第 8 期，419–441。[D] M.J. Dyer，Hecke 代数与 Bruhat 区间的剖分，*Compostio Math.* **89** (1993 1, 91 115)，第 – 期。[G] A. Givental，量子 K 理论中的 WDVV 方程，*Michigan Math. J.* **48** (2000)，295–304。[GMSZ1] W. Gu、L. Mihalcea、E. Sharpe 和 H. Zou，辛 Grassmann 流形的量子 K 理论，*J.* ( )，论文编号 pp. *Geom. Phys.* **177** 2022 104548, 38。[GMSZ2] W. Gu、L. Mihalcea、E. Sharpe 和 H. Zou，Grassmann 流形的量子 K 理论、Wilson 线算子与 Schur 丛，*Forum Math. Sigma* **13** (2025)，论文编号 e140，共 38 页。[GMSXZ^{2}1] W. Gu、L.C. Mihalcea、E. Sharpe、W. Xu、H. Zhang 和 H. Zou，部分旗簇的量子 K Whitney 关系，arXiv:2310.03826。[GMSXZ^{2}2] W. Gu、L.C. Mihalcea、E. Sharpe、W. Xu、H. Zhang 和 H. Zou，齐性空间量子 K 理论的 Nakayama 结果，arXiv:2507.15183。[H] F. Hirzebruch，代数几何中的拓扑方法，R. L. E. Schwarzenberger 从德文译出并撰写附录一；作者与 Schwarzenberger 为第三版英文版撰写序言；A. Borel 撰写附录二。重印 1978 年版，《数学经典》，Springer-Verlag，柏林，1995。[HK] I. Huq-Kuruvilla，部分旗簇的量子 K 环、库仑支与 Bethe 拟设，arXiv:2409.15575。[K] S. Kato，半无限旗流形等变 K 理论上的环结构，*Ann. of Math. (2)* **202** 2025 3, 1001 1075 ( )，第 – 期。[KN1] T. Kouno 和 S. Naito，任意权的量子 Lakshmibai–Seshadri 路径推广，*Algebr. Represent. Theory* **27** (2024)，第 6 期，2321–2353。[KN2] T. Kouno 和 S. Naito，类型 C 旗流形环面等变量子 K 环的 Borel 型表示，*Forum Math. Sigma* **13** (2025)，论文编号 e198。

[KLN] T. Kouno、C. Lenart 和 S. Naito，量子 alcove 模型的新结构及其在表示论和舒伯特演算中的应用， *J. Comb. Algebra* **7** (2023)，第 3–4 期，347–400。[KNS] S. Kato、S. Naito 和 D. Sagaki，半无限旗流形的等变 K 理论与 Pieri–Chevalley 公式， *Duke Math. J.* **169** (2020)，第 13 期，2421–2500。[Lee] Y.-P. Lee，量子 K 理论 I：基础， *Duke Math. J.* **121** (2004)，第 3 期，389–424。[Len] C. Lenart，从 Macdonald 多项式到超越类型 A *J. Combin. Theory* 的 charge 统计量，( )，第 – 期。 *Ser. A* **119** 2012 3, 683 712
[LL] C. Lenart 和 A. Lubovsky，alcove 模型的推广及其应用， *J. Algebr.* ( )，第 – 期。[LP] C. Lenart 和 *Comb.* **41** 2015 3, 751 783
A. Postnikov， K *Int. Math.* 理论与表示论中 *Res. Not. IMRN* **2007** 2007 12, 038, 65
的仿射魏尔群，( )，文章编号 rnm pp。[LNS] C. Lenart、S. Naito 和 D. Sagaki，半无限旗流形与量子 K 理论的一般 Chevalley 公式， *Selecta Math. (N.S.)* **30** (2024)，第 3 期，论文编号 39，共 44 页。[LNSX] C. Lenart、S. Naito、D. Sagaki 和 W. Xu，附录由 L.C. Mihalcea 和 W. Xu 撰写，旗流形量子 K 理论的除子公理，arXiv:2505.16150。[LNS^3] C. Lenart、S. Naito、D. Sagaki、A. Schilling 和 M. Shimozono，Kirillov-Reshetikhin 晶体的统一模型 I：抛物量子 Bruhat 图的提升， *Int. Math. Res. Not. IMRN* ( )，第 – 期。[MNS] T. Maeno、**2015** 2015 7, 1848 1901
S. Naito 和 D. Sagaki，类型 A 旗流形环面等变量子 K 理论环的表示，第一部分：定义理想， *J. Lond. Math. Soc. (2)* **111** (2025)，第 3 期，论文编号 e70095，共 43 页。[O] D. Orr，半无限旗流形的等变 K *Selecta Math.* 理论作为 nil-DAHA 模，( )，论 *(N.S.)* **29** 2023 3, 45, 26
文编号，pp。[P] A. Postnikov，量子 Bruhat 图与舒伯特多项式， *Proc. Amer. Math. Soc.* **133**(2005)，第 3 期，699–709。[PR] H. Pittie 和 A. Ram，-从 K G/B *Electron. Res.* 理论中的 *Announc. Amer. Math. Soc.* **5** 1999 102 107
Pieri-Chevalley 公式，( )，–。

Department of Applied Mathematics, Faculty of Science and Engineering,
Waseda University,Japan*Email address*: t.kouno@aoni.waseda.jp