arXiv:2512.23259v1 [math.HO] 29 Dec 2025

伽利略与惠更斯：音乐与科学

Athanase Papadopoulos*

摘要

文森佐·伽利莱与康斯坦丁·惠更斯都是人文主义者和杰出的音乐家，前者生活于文艺复兴晚期，后者则生活于近代早期。他们各自的儿子伽利略和克里斯蒂安都是科学家，其重要性无论怎样评价都不为过。本章旨在为并列介绍伽利莱家族与惠更斯家族的遗产铺陈背景。这将使我们有机会探讨数学、音乐与声学，也探讨近代诞生之际的科学概况。

本文的最终版本将刊载于《文森佐·伽利莱：音乐与科学之间的文艺复兴》一书，由 Natacha Fabbri 和 Ferdinando Abbri 编，Leo S. Olschki 出版社出版，佛罗伦萨，2025 年。

美国数学学会分类号：01A45、00A65、85-03。

关键词：克里斯蒂安·惠更斯、康斯坦丁·惠更斯、文森佐·伽利莱、伽利略、马兰·梅森、Ren´e 笛卡尔、数学与音乐、振动弦、落体、平面曲线、声学、音乐律制、天文学史、音乐史、摆。

1 引言

文森佐·伽利莱（约1520—1591）在西方思想史上占有特殊地位，这既源于他的著作及其与同时代人的关系，也尤其源于他对儿子的教育，以及他对儿子伽利略（1564—1642）的推动；伽利略是现代物理学的奠基人。在本章中，我希望拓宽对文森佐·伽利莱的考察视角，同时聚焦于某些科学与文化事实，这些事实使我们得以比较：一方面，文森佐·伽利莱与其子伽利略的遗产；另一方面，康斯坦丁·惠更斯（1596—1687）与其子

*Institut de Recherche Mathématique Avancée 与 Centre de Recherche et d'Expérimentation sur l'Acte Artistique (ITI CREAA)。地址：IRMA，斯特拉斯堡大学及法国国家科学研究中心，Ren´e Descartes 街 7 号，67084 斯特拉斯堡 Cedex，法国；电子邮箱：athanase.papadopoulos@math.unistra.fr

克里斯蒂安（1629—1695）的遗产。探讨伽利略家族与惠更斯家族的遗产，也将使我们有机会谈谈科学与音乐的总体关系。

文森佐·伽利莱和康斯坦丁·惠更斯都是出色的音乐家，都会演奏鲁特琴和键盘乐器。他们也都是多产的作曲家。如今，惠更斯的音乐仍在演奏。文森佐·伽利莱不仅是一位出色的鲁特琴演奏家，还用这种乐器对音程进行实验，以支持他针对八度划分以及对协和与不协和的感知所探讨的理论问题。他们各自的儿子伽利略和克里斯蒂安，以各自的方式发展了父亲关于音乐的思想。一些作者正确地指出，年轻的伽利略曾目睹父亲用这件乐器进行实验，并凭借自己的数学知识协助父亲。[1] 我们还将回顾他们的一些科学成就；在这个近代初期的时期，我们将并列介绍这些贡献。

数学、物理学和天文学是16和17世纪取得显著发展的主要科学领域。此外，还有一个与音乐密切相关的领域：声学。这是一门理论与实验科学，研究声音及其产生和传播、乐器、音程以及若干相关课题。文森佐·伽利莱和康斯坦丁·惠更斯都曾涉足这门科学。他们的儿子伽利略和克里斯蒂安也投身于声音科学，其他同时代的杰出科学家亦是如此，例如约翰内斯·开普勒（1571—1630）、勒内·笛卡尔（1596—1650）、马兰·梅森（1588—1648）、约翰·沃利斯（1616—1703）、艾萨克·牛顿（1643—1727）等。还应将布莱兹·帕斯卡（1623—162）列入此名单。他是一位宗教神秘主义者和数学家，与克里斯蒂安·惠更斯同时代，也是本章的主要人物之一：帕斯卡的第一本书论述声音理论，书名为《声音论》（Traité des sons），是他11岁时写的。值得注意的是，大体而言，那个时代为声音研究作出贡献的伟大人物，也正是那些取得重大数学和物理学发现的人。特别是，笛卡尔被视为解析几何之父，牛顿则被视为微分学的两位创始人之一——另一位是戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（1646—1716年），顺便一提，他也对声音理论抱有浓厚兴趣；梅森对数论作出了重大贡献。在这一领域，还可以列举其他几位科学家。在接下来的章节中，我们将提及伽利略和克里斯蒂安·惠更斯的一些声学著作，并由此谈及音乐领域——这是他们父母最钟爱的活动。

2 文森佐·伽利莱

文森佐·伽利莱出生于一个商人家庭，该家族属于佛罗伦萨的小贵族阶层。他在比萨省的一个市镇圣玛丽亚阿蒙泰长大。他娶了朱莉娅·文图里·德利·阿曼纳蒂，她出身于一个富裕而有教养的

[1]例如参见 Stillman Drake，《早期现代科学中的音乐与哲学》，载于 V. Coelho（编），《伽利略时代的音乐与科学》，多德雷赫特，克卢维尔，1992年，第3-16页。

家庭。温琴佐会弹鲁特琴、教授音乐并创作牧歌。他撰写了有关音乐理论的著作。他对歌唱有自己的见解，偏爱单声部歌唱，并提倡采用古希腊戏剧风格的歌唱宣叙调——尽管当时人们对后者所知甚少。几十年后，这种风格催生了意大利歌剧。和当时大多数音乐家一样，文森佐·伽利莱秉承纯粹的希腊传统，对音乐的数学层面颇感兴趣。他是卡梅拉塔学院的成员。该学院由乔瓦尼·德·巴尔迪（1534—1612年）创立；巴尔迪是韦尔尼奥伯爵，一位佛罗伦萨贵族、作家、作曲家、艺术评论家，也是美第奇家族的亲密友人。巴尔迪比伽利略小约二十四岁，并将他纳入自己的庇护之下。

在伽利略的论著中，尤其值得注意的是他的《古代与现代音乐对话》。[2] 他被认为是第一个观察到这一点的人：要使张紧的弦发出的音符升高一个八度音程，必须将弦的张力增加到原来的四倍，而不是两倍；这与毕达哥拉斯学说相矛盾，因为该学说认为整数比1/2普遍对应于八度音程。文森佐·伽利莱在其约于1589年写成的《八度音程比例多样性的论述》中描述了这样一个实验。这部论著考察了产生八度音程的不同方式（在古希腊术语中，八度音程称为diapason，因此得名）。[3] 他的实验包括在一根振动弦的一端悬挂一组砝码，并观察到：在保持弦长不变的情况下，要产生八度音程，砝码必须增加到原来的四倍，而不是两倍。同样，要产生五度，砝码必须乘以4/9，而不是2/3。文森佐·伽利莱的发现是几 ८श१年后由马兰·梅森提出的弦振动一般定律的结果。该定律指出，张紧的弦产生的振动频率与弦的张力平方成反比，而不是与张力本身成反比。梅森定律有时被认为是已知的第一条非线性物理定律。下文中我们还会多次提到梅森。

文森佐·伽利莱亲自进行了实验。在这一方面，他和其他方面一样，教导儿子伽利略实验的重要性，以及不要盲目依赖既有理论，不论这些理论有多么古老。通过他的实验，我们得以一窥伽利莱作为“技艺者”的一面；这里的技艺者取自希腊语 techn^e 的原义，兼有“艺术”与“技艺”之意。以下这段摘自同一篇论著的文字，[4] 被视为伽利莱秉持“实验方法”的佐证；几十年后，这种方法将主导科学：“能够称量、计数或测量的事物并不多。”

伽利莱他的实验使他对教条产生怀疑，至少不会盲目接受它们 ，

[2] Vincenzo Galilei，《古代与现代音乐对话》，佛罗伦萨，G. Marescotti，1581年，Claude V. Palisca 译，收录于《文艺复兴音乐思想中的人文主义》，《古代与现代音乐对话》，纽黑文和伦敦，耶鲁大学出版社，1985年。[3] 参见 Vincenzo Galilei，《关于八度音程比例多样性的论述》，Claude V. Palisca 译：《关于八度音程比例多样性的特别论述》，收录于《佛罗伦萨卡梅拉塔：文献研究与译文》，耶鲁大学出版社，纽黑文，1988年。[4]参见 *Discorso* 第181页，脚注3。

甚至包括那些德高望重的权威人士所持的教条，正如他在《古代与现代音乐对话》中所写的那样：[5]

> 关于 [毕达哥拉斯的理论]，我想指出两种人们因各种著述而深信不疑的错误观点；我自己也曾认同这些观点，直到通过万事之师——实验——查明真相。

谈到毕达哥拉斯学派，这里值得回顾的是，他们在音乐理论中只承认有理数（整数之比），这就排除了对律制音阶的一切考量，因为律制音阶需要开整数的 n次方根，而这类根通常是无理数。[6]

文森佐·伽利莱对待科学的态度，在以下这段摘自其《论不协和音的运用》的文字中也有所体现：[7]

> 在阁下开始解开 [关于当今所用自然音阶之本质], 的那些问题的症结之前，我希望，在感官所能触及的领域中，始终撇开权威不谈（正如亚里士多德在《物理学》第八卷中所说），也摒弃那种有偏见的理性——它否定任何对真理的 [感官] 认知。因为在我看来，那些为了证明自己的某个结论，便要我们仅凭权威相信他们、却不提出任何其他论据的人，做法十分荒唐；甚至可以说（借用这位哲学家[8]的话），他们简直像愚蠢的傻瓜。

至于温琴佐的儿子伽利略，无须再说他如何挺身反对教条；我们知道，他为此付出了自由的代价，余生都遭到软禁。

现在我将谈谈惠更斯父子，并想先引用三段话，一段出自父亲，另外两段出自儿子。这些引文说明，他们二人都像温琴佐和伽利略一样，谨慎看待规则的滥用。第一段引文摘自康斯坦丁·惠更斯于1658年10月10日写给亨利·迪蒙的一封信。他写道：[9]

> 我并非不熟悉这些规则，但我发现它们一致性甚少，作者之间也有许多矛盾 [...]

---

[5]参见《伽利略时代的音乐与科学》英译本第269页，脚注2。[6]不妨回顾一下，毕达哥拉斯学派发展出一套科学与哲学体系，认为整数及其比值（即“有理数”）构成了万物关系的基础，而不仅仅是音乐关系。整数是毕达哥拉斯学派所有理论的基础，涵盖道德、政治以至宇宙和超宇宙领域。[7]译文见 Claude V. Palisca, *Was Galileo's Father an Experimental Scientist?* 载于《伽利略时代的音乐与科学》，多德雷赫特／波士顿／伦敦，克卢维尔学术出版社，1992年，第143—151页（该句见第143页）。[8]也就是说，指亚里士多德。[9]Jacob Adolf Worp《康斯坦丁·惠更斯书信集》（1608—1687年），海牙，马丁努斯·努霍夫，1911—1917年。参见第五部分，第311页，信件5591。

同样，他的儿子克里斯蒂安在手稿《通过将八度划分为31个等分音程的和谐周期》（1691年）（《全集》，第XX卷，第17页）的页边写下了这样一句话：[10] “Non audio qui allegant authoritatem。”[11] （我不听那些为了抬高自己而诉诸权威的人。）[12]

同样地，请允许我引用惠更斯的以下一句话，重印于《惠更斯全集》第XXIII卷第342页）：“ 怀疑令心灵痛苦。因此，人人都乐于赞同那些声称自己已经找到了确定性的人。”

现在，我们来详细探讨本章特别关注的第二位音乐家——康斯坦丁·惠更斯。

3 康斯坦丁·惠更斯

康斯坦丁·惠更斯出身于荷兰贵族阶层。传记作者告诉我们，他童年时就学习读写多种语言，同时学习数学和哲学。对于天资聪颖的贵族男孩来说，这样的教育并不罕见。此外，他还接受了扎实的音乐教育，先是由父亲教导，之后则师从名师。他擅长演奏鲁特琴、维奥尔琴、泰奥尔巴琴、小型拨弦古钢琴和管风琴。在自传中，他写道：[13] “我始终勤勉不懈地致力于音乐最重要的部分——复调音乐。我甚至敢说，我已接近意大利人，而他们堪称典范。”

惠更斯以外交官为业，周旋于贵族、大使和大臣之间。1625年，他成为拿骚的弗雷德里克-亨利（奥兰治亲王）的秘书。当时，后者是法国的盟友。他一生忠于这个亲王家族，多次代表他们执行外交任务，足迹遍及巴黎、凡尔赛、英格兰及其他欧洲国家。除了会演奏多种乐器，他还是一位作曲家和音乐理论家。《康斯坦丁·惠更斯通信与音乐作品》的编者指出，他将音乐置于一切之上，而且从不

[10]凡提及惠更斯《全集》，均指 Christiaan Huygens, *Œuvres complètes*，共22卷，荷兰科学学会，海牙，1888—1950年。[11]《音乐档案夹》，第16—19页。 *Œuvres complètes*，第XX卷，第155—164页；该卷第327—336页附有法语译文 Renzo Caddeo, Xavier Hascher, Franck Jedrzejewski, Athanase Papadopou-los，克里斯蒂安·惠更斯：《音乐与声音论著》，拉丁语著作译文，并附数学、历史及音乐方面的评论，Hermann出版社，“音乐理论”丛书，巴黎，2021年。本章以下将此书简称为 *Écrits sur la musique*。[12]惠更斯在这条边注中提及的权威人士是马兰·梅森。[13]参见 Astrid de Jager *Constantijn Huygens' Passion: Some Thoughts About the Pathodia sacra et profana*, 57, 1《荷兰皇家音乐史学会学报》，第（2007）期，第29—41页；另见Jacob Adolf Worp：《康斯坦丁·惠更斯自传片段》，载《历史学会会刊与通讯》第十八卷（1897年），第1—121页；新版：《康斯坦丁·惠更斯书信集》[《康斯坦丁·惠更斯书信集》1608—1687], , Ineke Huysman编，Huygens ING；元数据取自Worp版，原由《书信集》、CKCC项目及Huygens ING（海牙）提供。

不带着他的鲁特琴出行。[14]

康斯坦丁·惠更斯还是一位多产的诗人，使用拉丁语、佛兰芒语、意大利语、英语、德语和法语创作。他翻译用这些语言以及其他语言写成的书籍；他常说，翻译是磨炼语言能力的方式。他的大量书信几乎全都用法语写成。他的诗歌和音乐作品至今仍是荷兰文化遗产的重要组成部分。《康斯坦丁·惠更斯通信与音乐作品》的编者估计，他创作的音乐作品超过800首。[15] 康斯坦丁·惠更斯的诗歌已有英文印刷译本。[16] 他的作品也有多种录音版本。

康斯坦丁·惠更斯还是一位拉丁语学者，对哲学和数学抱有浓厚兴趣。Condorcet在《康斯坦丁之子克里斯蒂安颂词》的开篇谈到他的父亲时写道：[17] “在那个新生的启蒙思想甚至比嫉妒更能激起感激之情的时代，人们并不认为，一个地方官员爱好文学和哲学是无用或危险的消遣。”

惠更斯与勒内·笛卡尔关系密切。笛卡尔为躲避审查制度而流亡荷兰；当笛卡尔被指控不敬神时，惠更斯为他辩护。Condorcet在同一篇《颂词》中写道：“我们不会因为康斯坦丁·惠更斯敢于研习拉丁诗歌，并研究笛卡尔的物理学和几何学而赞扬他；但我们会赞扬他身居要职，却有勇气公开与这位哲学家为友——此人被诬告不敬神，并遭一个危险敌人的迫害。”惠更斯和笛卡尔保持着频繁的通信，讨论数学、屈光学、机械技艺和透镜。两人就物质、重力、运动原因以及许多其他话题交流见解。作为朋友，他们也谈论日常琐事和遇到的人。在亚当和塔纳里版《笛卡尔全集》第三卷中，第736至824页全是笛卡尔与康斯坦丁·惠更斯于1640年1月3日至1643年6月26日之间往来的信件。[18]

笛卡尔经常拜访惠更斯。他对朋友的儿子克里斯蒂安的才华印象深刻；克里斯蒂安从小就展现出非凡的创造力和对数学的热情。与此同时，康斯坦丁不断向朋友介绍儿子的进展。笛卡尔密切关注年轻的克里斯蒂安的成长。他也很欣赏克里斯蒂安对音乐理论的兴趣；音乐理论这一主题自笛卡尔年轻时起便一直令他着迷，而他也通过书信往来持续钻研这一领域。一个恰当的例子是他写给康斯坦丁的一封信

[14] 参见 Willem Jozef Andries Jonckbloet的序言，载于： Jan Pieter Nicolaas Land （编），《十七世纪的音乐与音乐家：康斯坦丁·惠更斯的通信与音乐作品》，荷兰音乐史学会，E. J. Brill，莱顿，1882年。[15] Jonckbloet序言第XXVI页，脚注14。[16]参见《康斯坦丁·惠更斯爵士诗选》（1596—1687），载于《阿姆斯特丹荷兰黄金时代研究》，阿姆斯特丹大学出版社，有多个版本。

[17]Marie-Jean-Antoine-Nicolas de Caritat de Condorcet, *Éloge d'Huyghens*，载于《Condorcet文集》第二卷，由A. Condorcet O'Connor和M. F. Arago编，Firmin Didot，巴黎，1847年，第54—72页。

[18]René Descartes，由Charles Adam和Paul Tannery编《文集》，巴黎，Cerf，1897—1913年。

惠更斯在 1646[19] 中，笛卡尔告知康斯坦丁他曾与作曲家兼音乐理论家Joan Albert Ban有过书信往来，[20] 并在信中谈到了他的儿子克里斯蒂安。当时克里斯蒂安17岁：

> 如果你的次子想在这方面钻研 [音乐], ，他可以通过纠正班纽斯和我，并指出我们俩都对此一无所知，来获得这样的机会。正如我在那里所说，我们的理由既非数学上的，也非物理学上的，而只是道德上的，因此很容易找到与之相反的其他理由。如果他就这个主题写了什么，我会很乐意拜读。

马兰·梅森也经常与康斯坦丁·惠更斯通信。他称康斯坦丁·惠更斯为“音乐之父或庇护人”。[21] 两人之间的通信，以及后来梅森与克里斯蒂安·惠更斯之间的通信，包含许多与伽利略的著作有关的问题，正如我们将在本章后文回顾的那样。这位最低派修士熟悉两位伽利略家族成员的著作，在通信中，他充当了他们与惠更斯家族之间的纽带。事实上，梅森对伽利略的《论述与证明：关于两门新科学——力学与局部运动》进行了意译并加以评论，其中对后者的声音实验作了详尽评论。[22] 在与康斯坦丁和克里斯蒂安·惠更斯的通信中，梅森曾多次谈及落体问题，以及伽利略详细探讨过的其他问题。我们将在下文讨论这些问题。

梅森与好友康斯坦丁·惠更斯的通信涉及许多主题，其中当然包括音乐。两人围绕这一主题的交流既涉及技术问题，也涉及实际事务：他们常常分享对当时音乐家、乐器、音乐教师等的看法，也探讨如何从各个方面改进音乐。

在一封日期为1月 12, 1647,[23] 的信中，梅森与康斯坦丁·惠更斯讨论了谐音问题（不过，他并未使用“谐波”一词），并解释说，这种现象是他在音乐中遇到过的最大难题：

> 何种情形、何时以及为何，最低的一个音，或几个音合在一起，除了各自的音调之外，还会产生一个更高的音？

[19] *Œuvres Complètes*，第XXII卷，第25封信。[20]Joan Albert Ban（或 Joannes Albertus Bannius, 1597—1644）是一位天主教神父、作曲家和音乐理论家。他与康斯坦丁·惠更斯、梅森和笛卡尔均有往来，并著有一部*Dissertatio epistolica de musica natura*（1637年）。[21] *Œuvres Complètes* 第I卷，第27封信，见下文引文。[22]参见 Marin Mersenne（编辑、译者），《伽利略的新思想：佛罗伦萨公爵的数学家兼工程师，论自然运动与强制运动的比例，以及力学和物理学中最精妙的内容》。H. Guenon，巴黎，页码。新版：《伽利略的新思想》，校勘版，附导言和注释，Pierre Costabel 和 Michel-Pierre Lerner 编，Bernard Rochot 作序，共2卷，科学史丛书，文本与 ´研究，巴黎，Vrin，1973年。[23] *Œuvres Complètes* 第I卷，第27封信。

> 高出十二度或双五度的音。这种现象也会出现在被拨动的维奥尔琴的粗弦上。因为，如果你在房间里保持绝对安静，并全神贯注地轻轻或微弱地拨动 [维奥尔琴的细绳] [.....] 你总会听到一个声音 [，它伴随着] 原本的声音发出回响，高出十二度，而且常常还会有另一个高出十七度的声音。 [.....] 当然，既然你完全可以被称为音乐之父或音乐的守护者，这个难题值得你不要将其留给世人；而且，就你而言，不应由任何人 [而非你], [以一种] 清晰明了的方式来阐明，使任何人都能明白其中的理性。”[24]

在另一封写给朋友、日期为1648年3月17日的信中（第I卷，第4封信），梅森探讨了鲁特琴最佳形状的相关问题（该采用抛物线还是双曲线等）。他提到“一把鲁特琴，或一把标有四分音的15弦泰奥尔巴琴”。4月 6, 1648,[25]，康斯坦丁·惠更斯告知梅森，一位英国贵族“从法国给他带来了一把来自博洛尼亚的精美古董大鲁特琴，是他弹过的最好的琴”。他接着询问梅森，认为哪种鲁特琴形状能产生最美妙的共鸣，原因又是什么。谈到这个问题时，他告诉梅森：“我凭经验知道一些东西，这些经验很少会骗我，不过我的阿基米德将负责推理理论方面的问题。”[26]

康斯坦丁·惠更斯是一位真正的艺术爱好者。他的儿子克里斯蒂安的《全集》编者报告说，康斯坦丁是最早（也许是最早的一位）领悟伦勃朗天才的人之一。[27] 他负责为奥兰治家族委托创作绘画，并为他们购入了几幅伦勃朗的作品。

现在，我们更具体地转向这两位后辈：伽利略·伽利莱和克里斯蒂安·惠更斯。

4 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯，I

伽利略和克里斯蒂安·惠更斯都成长于有利于智力发展的环境中。儿时，他们都有机会结识路过家宅的音乐家和其他艺术家。文森佐·伽利莱希望儿子成为一名医生，而康斯坦丁·惠更斯则认为儿子会步其后尘，从事外交工作。然而，两个儿子都没有走上父亲的道路：伽利略先是成为数学教授，后来又教授力学和天文学；克里斯蒂安则主要靠父亲的年金生活，之后靠路易十四的年金维生——路易十四将他纳入庇护之下；后来，他还依靠自己一些发明的收入生活，主要是手表和时钟。他为此获得了法国国王授予的独家经营权。

[24] 最后一句法语原文是：“诚然，既然人们有充分理由称您为音乐之父或赞助人，那么这个难题值得您留给世人；至于您自己，则不应让任何人来证明它，无论此人的论证多么清晰，人人都能看出其中的道理。”
[25] *Œuvres Complètes*，第二卷，第47a号信。[26]“阿基米德”是康斯坦丁·惠更斯给儿子克里斯蒂安起的绰号。
[27] *Œuvres Complètes* 第二十二卷，第405页。

在科学研究方法上，克里斯蒂安·惠更斯和伽利略都倾向于运用几何学来解决数学和物理问题，这承袭了古希腊人、尤其是阿基米德的纯粹传统。这种方法适用于光学、流体静力学，以及更广义的物体平衡学等领域，也适用于面积与体积问题及许多其他问题。两人从未谋面。伽利略于1642年在阿切特里的别墅中遭软禁期间去世时，惠更斯年仅十三岁。

从某个时候起，已经与康斯坦丁·惠更斯保持长期通信的梅森，应康斯坦丁的请求，开始给他的儿子写信。事实上，在一封日期为12月 23, 1646,[28] 的信中，惠更斯写给梅森："从现在起，我只会充当你们二人文学往来中的通信地址。"他称作"我的小数学家"的儿子当时17岁。几天后（在一封日期为1月14日1647,[29]的信中，惠更斯写给梅森："你对我的阿基米德评价过高，但我知道，他绝不会辜负你对他的期望。"这封信是对梅森1月 3, 1647,[30] 来信的回复。梅森在信中谈到了克里斯蒂安关于落体的想法，并告诉这位朋友，他相信，如果儿子继续沿着起步时的道路钻研，总有一天会超越阿基米德。落体问题尤其引起了伽利略·伽利略的兴趣，我们将在下文对此进行讨论。

克里斯蒂安·惠更斯主要是一位数学家。他是皇家科学院的创始成员之一，也很可能是当时巴黎最杰出的数学家。戈特弗里德·威廉·莱布尼茨（1646—1716年）在1672—1676年旅居巴黎期间，曾师从惠更斯。[31] 两人始终保持着密切而丰富的书信往来。在通信中，莱布尼茨经常向惠更斯展示自己的数学成果，并征求他的意见。

接下来的章节中，我将讨论伽利略家族和惠更斯家族都感兴趣的若干科学课题。出于编年顺序的考虑，我将依次探讨振动弦、落体、摆、曲线和天文学方面的问题；惠更斯自年轻时起便对这些问题都很感兴趣。随后，我将转而讨论音乐律制这一问题。它深受两位伽利略和两位惠更斯的关注，克里斯蒂安·惠更斯晚年也曾对此作出重要研究。

我首先要谈的是弦振动问题。对伽利略而言，这是对其父亲开创的工作的延续。对克里斯蒂安·惠更斯而言，这项工作也是对他父亲的致敬，而音乐是他父亲最喜爱的活动。

[28] *Œuvres Complètes*, 第 I 卷，第 23a 封信。[29] *Œuvres Complètes*, 第 I 卷，第 27a 封信。
[30] *Œuvres Complètes*, 第 I 卷，第 24 封信。[31]1672年，莱布尼茨以外交官的身份抵达巴黎，受美因茨选帝侯派遣，前往执行一项面见路易十四的使命。他当时 26 岁，刚刚发明了他的计算机。莱布尼茨接受这项使命的隐秘原因，是想结识一些科学家，其中包括比他年长 17 岁、已在巴黎居住六年的克里斯蒂安·惠更斯。莱布尼茨的计划成功了，在巴黎逗留期间，他一直跟随惠更斯学习几何学和物理学。

5 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯，II：振动弦

克里斯蒂安·惠更斯对伽利略关于声音理论的研究十分了解，并在其作品 Le Son 中提到了这项研究。[32] 该作品第二部分的标题是："毕达哥拉斯关于协和弦长度之比，以及伽利略和其他学者关于其振动次数之比的论述。"[33]

梅森在一封写给克里斯蒂安·惠更斯、日期为11月 16, 1646,[34] 的信中，谈到了一个相关的问题。他写道：

> 我忘了问 [你父亲] 你是否会弹鲁特琴；如果会，我恳请你看看是否愿意研究这个有趣的问题：为什么细绳 AB（例如你指定的最高音弦）[35] 牢牢固定在 A，发出某个声音后，必须将张力增至原来的 B 四倍，才能达到八度；而只需在 C 将它缩短一半，就能使音高升至八度。我知道，你的力学基础告诉我们，要使运动速度加倍，也许需要四倍的力；请你着手证明这一点，你亲笔写下的证明对我将弥足珍贵。

这里可以回想一下，梅森在早十年（1636年）出版的《和谐大全》中给出了一个公式（用现代术语来说）：振动弦发出的声音，其频率与弦长成反比，而与弦张力的平方根成正比。事实上，梅森在写给惠更斯的信中，试图理解为什么要对张力取平方根。这个问题也与文森佐·伽利莱的发现有关，我们此前已经提到过：要使一根弦发出高一个八度的声音，必须将这根弦的张力除以4，而不是除以2。此类有关音程的问题，在惠更斯余生中一直令他着迷。几天后，惠更斯回信给梅森（信的日期为1646年11月）：[37]

> 关于你向我提出的音乐问题，我认为还需要进一步推敲：[38] 我在你的 physicomat. 一书中读到这个问题后，常常对此进行思索；但在我看来，要解决它十分困难，而且必然如此，否则当今这么多杰出人士就不会对此视而不见。

[32] *Œuvres Complètes*，第XIX卷，第353页及后续页。[33]关于这一主题对伽利略著作的引用是伽利略的 *Dialogo Secundo Discorsi e dimostrazioni matematiche intorno a due nuove scienze attenenti alla meccanica e i movimenti locali*，《和谐大全》，莱顿，1638年，Ludovico Elzeviro。[34] *Œuvres Complètes*，第I卷，第17封信。[35]最高音弦是弦乐器中最细、音调最高的细绳。[36] Marin Mersenne，《和谐大全》，包含音乐的理论与实践，S´ébastien Cramoisy，巴黎，1636年。[37] *Œuvres Complètes* 第I卷，第20封信。[38] *Ego amplius deliberandum* 这是泰伦斯（公元前2世纪）的一句名言，此后也被其他人引用，意思是问题尚不明确，需要进一步思考、了解或审议。

这里值得一提的是，梅森进行了大量实验，并在他的《论声音的性质、原因与效果》中对此作了描述。[39] 在他的诸多命题中，我想提一下其中一条：振动弦发出的音调并不取决于振动幅度（即第 24 页的命题 XXIX）。我们或许会觉得这理所当然，但这并非先验显而易见。

在写给克里斯蒂安·惠更斯的信中，梅森一边提出问题，一边分享自己对所探讨问题的想法。在 1 月 8 日的信中，1647,[40] 他再次探讨弦张力对所产生音程的影响。他这样引入话题："[令尊]十分喜爱音乐，我希望你能为了他而乐于解开一个和声难题；你自己也可以用鲁特琴试一试 [.....]"。随后，他又向对方提出了我们先前提到的同一个问题（音调与张力的关系），并作了更详细的说明，解释如何通过使用砝码使细绳的张力加倍。在同一封信中，梅森写道："关于我告诉你的那根用于升至八度的和声音弦所受的四倍张力，我记得自己在《弹道学》[41] 命题 36 中讨论过此事；阅读该命题或许能让你想到真正的证明。"

几年后，即1673年，克里斯蒂安·惠更斯发现，振动弦问题与摆的问题之间存在着深刻的联系，而他当时正在深入研究后者。借助这一联系，他得以确立隐藏在梅森公式背后的数学定律，该公式描述了振动弦的频率。我们建议有兴趣的读者参阅惠更斯的文章《等时性振动一般理论的发现》D ´ecouverte de la th ´eorie g ´en ´erale de l'i sochronisme des vibrations.[42]

克里斯蒂安·惠更斯所着手研究的另一个问题，也是伽利略此前曾感兴趣的问题，是落体问题。这个问题涉及寻找这些物体的加速度定律，但同时，更根本地说，它还关乎理解为什么我们放手的物体会开始下落。这同样并非一个显而易见的事实。下一节将讨论这一问题。

6 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯（三）：落体

我们先回顾一些事实，它们有助于理解落体问题。

[39] Marin Mersenne,《论声音的性质、原因与效果》：论协和音、不协和音、比例、类别、调式、歌曲、作曲及各种和声乐器，巴黎，巴黎，纪尧姆·博德里，1636年。[40] *Œuvres Complètes*，第I卷，第25封信。[41] 见 *Ballistica, et acontismologia*，属于 *Cogita physico-mathematica*的一部分，巴黎，1644年，第1–140页（单独编页）。[42] *Œuvres Complètes*，第XVIII卷，第489–495页，亦收录于 *Écrits sur la musique*的第16章。

文艺复兴时期，人们测量了从塔顶落下的物体，并注意到一个先验看来并不明显的事实：同时释放的重物，甚至很重的物体，几乎同时落地。当时人们还知道，落体的速度并非恒定，而是会发生加速度；人们认为，这种加速度是“按照自然数的序列”变化的，[43] 这句话的意思是：如果把物体下落的时长分成相等的时间段，且物体在第一个时间段内移动一个单位的长度，那么它在第二个时间段内移动两个单位，第三个时间段内移动三个单位，以此类推。换句话说，人们认为速度与经过的时间成正比；或者用现代术语来说，自由落体的加速度是恒定的。落体定律已包含在亚里士多德物理学中。[44] 伽利略想到用斜面来对落体进行实验：他将球放在斜面上滚落，并假定物体沿垂直平面下落与沿斜面下落遵循同一规律；采用斜面的好处在于，物体下落得更慢，因此更便于测量。在此背景下，值得一提的是，伽利略没有时钟来测量时间。为了研究落体，他不得不设计一些巧妙的装置，例如水钟；具体而言，他通过测量从细管流入大水罐底部的水的重量，来评估经过的时间。《两门新科学的数学论述与证明》中记述了这些实验。[45]

现在我们来谈谈克里斯蒂安·惠更斯。他从小就对同一个问题感兴趣。在一封日期为9月 3, 1646[46] 的信中（当时他17岁），他写给了兄弟（也叫）康斯坦丁：

> AB是一段高度，从此处将重物C放下。我证明，它在下落的第一个[时间间隔内经过一段如图所示的距离CD；在第二个 [与第一个相等的]时间间隔内，经过3段这样的距离，到达E；在第三个 [] 时间间隔内，经过5段距离；在第四个时间间隔内，经过7段距离；如此继续，每次的进程都会增加，始终在上一段距离的基础上再加上第一段距离的两倍。……除此之外，我还证明了，如果将它朝任意方向抛出，它描绘出的轨迹都是一条抛物线；对于这些以及由此引出的无数其他结论，我此前从未听说过相关证明，直到我亲自发明了它。

惠更斯的解法与伽利略的相同。梅森知道这个问题很难。在一封日期为 13, 1646,[47] 的信中，他写信给克里斯蒂安·惠更斯，谈到

[43]这是伽利略的术语，另见脚注52。[44]亚里士多德在《第四卷》第四卷第3节中提出了一条定律：用现代术语来说，一个受力 F 作用的运动点，在时间 t 内所经过的距离等于 Ft。我们知道这条定律是错误的，但至少它确实存在。人们通常认为，这是目前所知最早的运动定律表述。[45]《 *Discorsi* 》第三日，见《 *Opere*》第III卷第108页， Galileo Galilei《作品集》，新版，G. Barb`era，佛罗伦萨，1966年。
[46] *Œuvres Complètes*，第I卷，第11封信。[47] *Œuvres Complètes*，第I卷，第13a封信。

这个问题，特别指出：“我非常敬重 [你的父亲], ，也相信他会乐于与你讨论你所说已有证明的那些命题，所以我只想谈谈最后一个命题；除非我亲眼看到证明，否则我不相信你已经证明了它。”随后，他阐述了自己关于落体的想法，但没有得出明确结论。与此同时，他还与这位年轻的通信对象讨论弹道学以及物体的抛物线轨迹。这是伽利略曾作出重大贡献的领域。事实上，伽利略不仅对物体的垂直下落感兴趣，也关注那些受到初始（非垂直）推动的物体的轨迹。他发现，除非推动方向垂直，否则这种轨迹总是抛物线；这一发现奠定了后来发展为理论弹道学的基础，而康斯坦丁·惠更斯（父亲）早在儿子涉足这一课题之前，就已对它颇感兴趣。在同一封信中，梅森写信告诉克里斯蒂安·惠更斯，若要使轨迹保持抛物线，“施加于抛射体的推动力就绝不能停止；然而，像推动力这样容易施加的作用，也同样容易迅速消失。暴力不能持久”。谈到这个问题的最后，他说道：

> 尽管如此，如果你不顾这一考虑，仍认为自己的证明成立，我很乐意请你告知我；然后，如果你的推导正确，我会告诉你如何展示这种暴力 [力] ，这样你就能确定作用点，使你的效应以更大的力度冲击。我还想补充说，伽利略从他关于运动的所有论述中所采用的原理并不牢靠；尽管在较小的高度上，比例大体上相当吻合，但在较大的高度上，它们几乎总是不成立。 [.....]

11月 16, 1646,[48] ，梅森再次致信克里斯蒂安·惠更斯：“我向你保证，我对你关于落体 [的证明]之精妙赞叹不已，以至于我相信，伽利略若能请你为他的观点作担保，定会欣喜不已。”在我们已结合弦张力问题引用过的、日期为1647年1月8日的致克里斯蒂安·惠更斯的信中，梅森再次谈到落体问题，并提及他近期的著作《新的物理数学观察》[50] ，他打算不久后寄给对方：

> 我确信，这一切都很值得您考虑；我希望您能与我一同思考，尤其是它如何质疑伽利略以1、3、5、7等数字表示的加速度比例——这也是 [您的], 观点；此外，其中还包含许多与笛卡尔先生的某些原理 [相矛盾] 的内容。[51] [52]

[48] *Œuvres Complètes*，第 I 卷，第 17 封信。[49] *Œuvres Complètes*，第 I 卷，第 25 封信。
[50] Marin Mersenne，《新的物理数学观察》，巴黎，安托万·贝尔蒂耶，1647年。[51]这意味着，在他的新著作中，梅森证明了这个比例并不正确。[52] 重要的是要记住，伽利略并没有微分学的工具；这门学科是几十年后由莱布尼茨、牛顿、惠更斯、雅各布·伯努利和约翰·伯努利，以及洛必达侯爵等数学家发展起来的。尤其是，他并不熟悉导数这一概念

除了落体定律，惠更斯还想弄清楚物体被放开后为何会开始下落。尽管我们对此习以为常，因此这种现象并不令人惊讶，但这个问题仍然合乎情理。亚里士多德曾对此作过大量论述。与他研究的所有事物一样，他寻求其中的原因。他给出的解释是，每种物体都趋向于自己的自然位置——重物趋向地球，火则趋向天空。即使到了今天，尽管关于这一主题已有古今各种理论，“为何”会有吸引力以及吸引力“如何”发挥作用的问题仍悬而未决，或者至少极难解释。

很自然地，皮埃尔-西蒙·拉普拉斯（1749—1827）在《宇宙体系论》中论述落体问题时，只提到了伽利略的名字。他写道：[53] “伽利略凭借关于物体下落的非凡发现，为运动科学奠定了最初的基础。几何学家追随这位伟人的脚步，终于将整个力学归结为一般公式；这些公式唯有在分析学方面臻于完善，才算尽善尽美。”[54] 但与此同时，他将落体问题与摆的运动问题之间关系的发现归功于惠更斯（同上，第 II 卷，第 260 页）：“从振荡运动过渡到落体的直线运动，是一项巧妙的见解。振荡运动的持续时间可以非常精确地观测；我们至今仍要感谢惠更斯提出了这一见解。” [55] 因此，接下来我们将转向摆。摆的运动也属于运动学领域，而运动学正是伽利略和克里斯蒂安·惠更斯研究的核心。对摆的研究与时钟这一概念密切相关。伽利略生命的最后几年一直在思考如何设计这样一种仪器。惠更斯制造摆钟，实现了伽利略的一个梦想。让我们详细了解一下。

用来表达速度，更不用说用二阶导数来表达加速度了。为了表述数学结果，他使用古希腊人的几何语言，也就是阿基米德和阿波罗尼奥斯的语言，常常借助图形表示来呈现这些结果，例如谈到“曲线上不同点处切线的偏离”，或使用类似的说法。在这里这段文字中，伽利略依据的是欧几里得《 *Elements*》中阐述的比例理论及其局限。尤其是，根据这一理论，不能将两个性质不同的量相除，例如距离和时间；因此，伽利略无法将速度定义为距离除以时间，也不能写出距离与时间的平方成比例。例如，他写道，自由落体的加速度“依奇数序列递增：1、3、5、7.....”，意思是：若在时刻

$$1 \qquad 1, \qquad 2 \qquad 1+3=4 \qquad 3 \qquad 4+5=,$$
$$9 \qquad 4 \qquad 9+7=16$$

所经过的距离为；那么在时刻，它将为；在时刻，它将为；依此类推。用现代术语来说，这意味着所经过的距离与时间的平方成正比。[53] Pierre-Simon de Laplace, 《世界体系论》。巴黎，社会圈印刷所，法国剧院街4号。法兰西共和国第四年（1796年），第一卷，第238页。[54] “伽利略凭借关于物体下落的卓越发现，为运动科学奠定了最初的基础。几何学家沿着这位伟人的足迹前行，终于将整个力学归结为一般公式，如今所欠缺的只剩分析学的完善。”[55] “[.....] 从振荡运动（其持续时间可以非常精确地观测）转向重物的直线运动，这一过渡是一个巧妙的发现，我们至今仍要归功于惠更斯。”

7 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯，IV：摆

伽利略的名字也与摆的理论联系在一起。他被认为是最早主张在严谨的物理数学框架内研究摆的等时性（即其振荡的规律性）的人，尽管这种规律性早在他之前就已为人所观察。据说，他在 1581年（当时 17 岁）还是一名医学生时，便萌生了等时性的想法：他观察烛台摆动时，[56] 对其规律性感到困惑，于是尝试通过计数振荡周期，并将其与自己的脉搏频率相比较，来验证自己的直觉。[57]

1658年，也就是惠更斯出版《摆钟论》第一版的同一年，亦是伽利略逝世16年后，美第奇家族的利奥波德亲王请伽利略的弟子、后来又师从托里拆利，并获任托斯卡纳大公首席工程师的文森佐·维维亚尼撰写一篇回忆录，正式阐明伽利略对摆钟的贡献。四年前，维维亚尼曾出版伽利略传记，[59] 其中谈及摆及其在天文学和医学上的用途（测量脉搏）。但维维亚尼并未在传记中提到任何有关摆钟的工作。在呈交给亲王的报告中，维维亚尼声称伽利略曾设想过这种摆钟，却从未造出过。伽利略的儿子文森齐奥·伽利略，[60] 曾在佛罗伦萨工匠多梅尼科·巴莱斯特里的协助下尝试制造一台，但巴莱斯特里去世后，项目便中止了。尽管如此，维维亚尼还是提到了一位为费迪南多二世大公效力的钟表匠；几年后，他按照不同于文森齐奥·伽利略的构想，造出了一台摆钟。与此同时，维维亚尼承认惠更斯是第一个造出摆钟的人。克里斯蒂安·惠更斯《著作集》第三卷收录了一份维维亚尼写给利奥波德·德·美第奇的信件形式的文献，其中

[56]据传，那是比萨大教堂吊灯的摆动；参见 Alexandre Koyré,´伽利略与比萨实验： `关于一个传说，载于：《科学思想史研究》，伽利玛出版社，巴黎，1965年，第 213-223 页。[57]这里值得注意的是，如上所述，在那个时代，还没有手表或时钟可以用来计时。很久以后，伽利略在其《作品集》中谈到了这一现象，该书出版于 。这是伽利略为捍卫日心说理论而写的主要著作；这一理论于 1615 年遭罗马宗教裁判所谴责。当然，正是这本书引发了伽利略的审判，审判于该书出版后的第二年举行。[58] *Œuvres Complètes*，第 XVII 卷。[59]参见 Vincenzo Viviani，文森齐奥·维维亚尼所著《伽利略·伽利莱先生生平纪事》，载于：A. Favaro 编，《伽利略·伽利莱作品全集》，佛罗伦萨，Barbera 出版社，第 XIX 卷，附录 III，1968年，第 602 页起。这是伽利略的第一部传记。在这部早于惠更斯《摆》四年的著作中，维维亚尼没有提到伽利略曾想过用摆来制造时钟。维维亚尼只提及摆的定律，以及摆在医学上用于测量脉搏、在天文学上用于测量天体现象持续时间的情况。[60]文森齐奥·伽利莱（1619—1649）是伽利略·伽利莱与玛丽娜·甘巴的私生子；两人还育有另外两个孩子，也都是非婚生子女。

他报告了这一问题。[61]

伊斯梅尔·布利奥在一封日期为1月 9, 1660,[63] 的信中，寄给克里斯蒂安·惠更斯一幅从佛罗伦萨收到的图纸，图中描绘了一座由伽利略开始设计的摆钟。惠更斯在一封日期为1660年1月22日的信中（同一卷第12页，信件编号711）回复了布利奥：

> 您寄给我伽利略当年开始设计的时钟图样，让我十分高兴。我看到其中的摆和我的一样好；但应用方式不同：首先，他没有使用称为“碰撞轮”的车轮，而是用了一种笨拙得多的装置取而代之。其次，他没有用细网或窄带悬挂摆，而是 [让它] 以一种方式悬挂，使摆的全部重量都压在它摆动所绕的轴上；毫无疑问，这正是他的方法不够成功的主要原因，因为我从经验中得知，这会使运动变得困难得多，也容易导致时钟停摆。尽管伽利略和我想到了一样的摆的用途，这与其说对我不利，不如说反倒对我有利，因为我做到了他没能做到的事，而且我此前并不知道他或世上任何人曾让这一发明成为可能。

关于伽利略是否可能发现摆钟的问题，时常有人提出。[64]无论如何，可以确定的是，伽利略曾对摆进行过大量实验。他不仅发现了小振幅振荡的等时性，还想到可以利用摆的摆动来计时。他迫切需要这样的装置来进行天文观测；为此，他曾安排一人负责计数摆动次数。

最后，让我引用一段克里斯蒂安·惠更斯于1658年11月1日[65] 写给皮埃尔·珀蒂的信：[66] “至于确定每个时钟所用摆的长度，我本可以概括说明各个摆的振动与其长度之间的比例，但伽利略、梅森神父以及许多其他作者已经充分论述了所有与这些比例有关的内容，因此我觉得没有必要在这篇说明中再加以介绍。”

---

[61]第673b号信，1659年8月20日；第673a号信的附录I。同一卷 *ŒuvresComplètes*中，编者提到，吉罗拉莫·蒂拉博斯基在其著作 *Storia della Letteratura Italiana*（罗马，1785年，第VII卷，第155页）中，引用了1774年的 *Novelle Fiorentine* （第10号，第150页），其中称：“内利参议员收藏着一份关于摆钟的记述，由文森佐·维维亚尼于1659年写成。根据这份记述，伽利略只是在1640年设想了这种时钟，却没有将其造出；他的儿子文森齐奥曾尝试在佛罗伦萨工匠多梅尼科·巴莱斯特里的帮助下造出一台，但因骤然离世，未能看到它完工。”[62]伊斯梅尔·布利奥（1605—1694）是一位数学家、天文学家、古希腊文本译者、图书管理员和环球旅行家。他与皮埃尔·伽桑狄、克里斯蒂安·惠更斯、马兰·梅森和布莱兹·帕斯卡交情甚笃，也是英国皇家学会最早接纳的外国会员之一。[63] *Œuvres Complètes*，第III卷，第8页，第707号信。[64]参见 *Écrits sur la musique*中的记述，第122页及以下。[65]皮埃尔·珀蒂（1598—1677）是一位工程师、顾问和地理学家，后来担任路易十四的筑城总监。他与帕斯卡、惠更斯及其他科学家有交往。[66] *Œuvres Complètes* 第II卷，第546号信。

总之，显然，在惠更斯之前，伽利略已经想到可以利用摆来制造时钟；然而，他未能实现这一计划，尽管他长期以来一直渴望拥有一座准确的时钟。

8 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯，V：曲线

本节我想探讨与数学曲线相关的问题，尤其是两条由几何方式定义、应用于艺术与科学，并引起两位科学家——伽利略和克里斯蒂安·惠更斯——关注的曲线。第一条曲线有许多名称，如悬链线、悬链等。[67] 伽利略和惠更斯都研究过这条曲线，后者还纠正了前者的研究。第二条曲线称为摆线，是摆钟理论的核心。这两条曲线也都曾应用于建筑：第一条用于建造大型穹顶，第二条则用于桥梁建造。

我们再次从惠更斯与梅森之间的通信谈起。

在一封写给梅森、日期为十月 28, 1646,[68] 的信中，克里斯蒂安·惠更斯提出了另一个伽利略已探讨过的问题，即所谓悬链线的形状，也就是一条两端悬挂、仅受自身重量作用的链条所形成的曲线。伽利略在其1638年出版的《两门新科学的数学论述与证明》中错误地断言，这条曲线是抛物线的一段。这部著作被视为现代物理学的奠基性文献之一。在给梅森的信中，惠更斯指出了伽利略的错误。他告诉通信对象，打算在即将寄出的一封信中向他证明，这条曲线并非抛物线的一段。同时，惠更斯写道，他将向梅森展示一项计算，说明必须对一条“无重力数学绳”施加多大的压力，才能使它呈现为抛物线。惠更斯还预见到，这条曲线无法用一个简单的方程来描述。

在此不妨回顾一下：自古代以来，数学家研究过大量曲线。古希腊人深入研究了圆锥曲线（椭圆、抛物线、双曲线），也研究了所谓的“机械曲线”。这类曲线是某些几何轨迹问题或作图问题的解，需要借助机械工具才能绘制。阿基米德螺线、[69] 笛沙格叶形线、[70] 割圆曲线、[71] 蚶线[72] 等都属于此类。由于具有美感，

[67]在梅森和惠更斯的信中，这条曲线都被称为“chaˆınе pendue”或“corde pen- dante”，意为“悬链”或“悬挂的绳索”，但它还有其他名称：chaˆınette、alysoid 等。[68] *Œuvres Complètes*，第 I 卷，第 14 封信。[69] 这是一种用于化圆为方、三等分角，以及在20世纪用于设计留声机唱片的曲线。[70]一种三次曲线，曾用于倍立方问题；公元前3至2世纪由戴奥克利斯研究，17世纪由克里斯蒂安·惠更斯和皮埃尔·德·费马研究。[71]这条曲线由希庇阿斯于公元前420年前后提出，并用于三等分角。[72]泛指与其他曲线相距某个有限距离而得到的曲线。最

所有这些曲线都被用于现代艺术。

悬链面似乎未曾在古希腊受到过研究。在克里斯蒂安·惠更斯所处的时代，解析几何刚刚创立，当时研究的曲线基本上都是由方程定义的，而悬链面并不属于这一类。克里斯蒂安·惠更斯生性好奇、不拘一格，因此这条特殊的曲线自然会引起他的兴趣。惠更斯在1646年10月28日写给梅森的信末提到了自己关于悬链面的研究结果：[73] “为了不耽误您太久，我就此搁笔；我会在另一封信中寄给您证明，说明悬挂的绳索或链条不会形成抛物线，以及要对一根数学意义上不受重力影响的绳索施加怎样的压力，才能使它形成 [抛物线]； [这一结果] 的证明，我不久前也找到了。”

同年11月16日，[74] 梅森回信说，他期待拜读惠更斯的证明，并指出惠更斯的说法确实与伽利略的看法相矛盾。他还补充说，若能弄明白年轻的惠更斯自认为已经知道的、需要对链条施加多大压力才能使其呈抛物线形，他会非常高兴；他还说，也想知道要对细绳施加多大压力，才能使它呈双曲线或椭圆形。“如果你能做到这一点，”他写道，“你就超越了自己。”梅森与惠更斯围绕这一话题进行了数次书信往来。惠更斯的信中包含数学命题，并对他所声称的事实给出了证明。感兴趣的读者可以在克里斯蒂安·惠更斯《全集》第一卷中找到这些信件。

最后谈谈悬链：这种曲线倒置后曾用于多种穹顶建筑，包括佛罗伦萨的圣母百花大教堂、巴黎先贤祠的中间穹顶，以及2016年落成、覆盖开裂旧石棺的切尔诺贝利拱顶。原因不仅在于美观：悬链线是一种弧线，其重量使结构保持稳定。它在力的传递中发挥着核心作用，这又是艺术家的直觉胜过数学家形式证明的一个例子。

现在我们继续讨论另一条吸引了两位科学家注意的曲线——摆线。这条曲线是这样形成的：车轮沿直线滚动时，车轮圆周上的一个点所经过的轨迹。这条曲线具有一种优美的性质，称为等时性：如果让一个质点无摩擦地沿这条曲线滑动，那么无论其初始高度如何，它到达曲线底部所需的时间总是相同的。这是克里斯蒂安·惠更斯研究摆钟时的一项重要发现。

布莱兹·帕斯卡（1623—1662）提出了几个有关摆线的问题：方程、弧长、该曲线下方区域的面积、由其

著名的蚶线归功于公元前3世纪的尼科米德，并用于三等分角问题。[73] *Œuvres Complètes*，第一卷，第14封信。
[74] *Œuvres Complètes*，第一卷，第17封信。

旋转所生成的物体的体积，等等。这些问题必然会引起克里斯蒂安·惠更斯的兴趣，因为它们涉及一条通过机械方式定义的曲线，而机械学正是他热衷的领域。他的《著作全集》第二卷收录了帕斯卡的笔记、他关于这条曲线的通信摘录，以及帕斯卡、伊斯梅尔·布利奥和其他数学家围绕同一主题的交流。根据 C. de Waard（马兰·梅森《通信集》的编者）的说法，研究摆线的问题最早是由梅森于1615年前后提出的。[75]

惠更斯于1658年发现了摆线的等时性，并意识到可以将其应用于摆钟的研究。事实上，他发现，如果让摆沿着这样的曲线摆动，振荡周期便不受摆长影响。使用这种装置，就好像摆长不断变化，而振荡周期却始终不变。他还发现了摆线的另一项重要数学性质：如果让摆在摆线的两段等长弧线之间摆动，那么摆端描绘的就不是圆弧，而是摆线弧。从数学上说，这一性质意味着摆线弧的渐开线也是摆线。

伽利略早于惠更斯研究摆线，而且很喜欢这条曲线。他用它来绘制桥拱。他没有预见到惠更斯后来发现的那些性质。在1640年2月24日写给博纳文图拉·卡瓦列里的信中，他谈到这条曲线时写道：[76]“五十多年前，我就想到描绘这条拱形曲线，并赞叹它优美的弧度，认为它适合用于桥拱。我曾多次尝试证明这条曲线以及它与弦所围成的面积具有某种性质。起初，我以为这个面积可能是生成它的圆面积的三倍；但事实并非如此，尽管差距并不大。”[77] 关于伽利略在摆线方面的研究，有兴趣的读者可参阅拉卢贝尔`的版本。[78]

作为一条曲线，摆线在古代就已受到研究，并引起了文艺复兴时期数学家的兴趣。它的各种变体被广泛运用于现代艺术中。[79]

最后，我们还要谈几句作为伽利略·伽利莱继承者的天文学家克里斯蒂安·惠更斯。

---

[75]参见

Cornelis de Waard *Une lettre inédite de Roberval du 6 janvier 1637 contenant le premier énoncé , , de la cycloïde* ´ 220 224, 1921《数学科学通报》，第二辑，第 XLV 卷，第 页。—巴黎，Gauthier-Villars，。[76] Galileo Galilei年 月 日第 3972 号信，载于：《作品集》，新版，G. Barb`era，佛罗伦萨，1966年。[77]“五十多年前，我就想到要描述那条弯曲的线，并惊叹于它极其优美的曲线形态，认为它适合用作桥拱。我曾围绕它以及它与弦所围成的区域做过各种尝试，试图证明某种性质。起初我以为这个区域可能是生成它的圆的三倍；但事实并非如此，`尽管差距不大。”

[78]Antoine de Laloubère，耶稣会士 Lalovera 著《伽利略与托里拆利的摆线二十命题》，图卢兹，1658年7月21日，法国国家图书馆，珍本部，RES- V-857。[79]以“摆线”为题的现代艺术作品数量几乎无穷无尽。

9 伽利略与克里斯蒂安·惠更斯，VI：土星

克里斯蒂安·惠更斯的主要天文学著作是《土星系统》，[80] 这部论著于1659年出版，记述了他发现土星卫星及其环的经过。1657年，他开始用一架望远镜观测土星，其性能远胜伽利略的望远镜：放大倍率为100倍，而伽利略的望远镜只有30倍。

惠更斯将他的《土星系统》献给了莱奥波尔多·德·美第奇亲王。对惠更斯而言，这一献词是宣告自己承袭伽利略一脉的另一种方式。数十年前，伽利略曾在同一个王公家族的庇护下于佛罗伦萨工作；1610年1月，他发现了木星的四颗卫星，并将其献给美第奇家族，以纪念托斯卡纳大公科西莫二世及其三位兄弟弗朗切斯科、卡洛和洛伦佐，将它们命名为美第奇之星（Medicean stars）。[81] 伽利略的发现再次违背了亚里士多德学说所认为的：所有行星和其他天体都围绕地球运行；这一发现进一步表明，地球并不是天文学体系的绝对中心，其他行星也可能拥有自己的卫星，就像地球一样。我们的两位科学家——伽利略和惠更斯——使用的都是自行设计的望远镜。惠更斯亲自打磨透镜；事实上，这正是他最喜欢的活动之一。[82]伽利略能够观测到土星的环，但他没有意识到那是一个环；他把它视为一种神秘的物体（他称之为“神秘的附属物”；事实上，环的朝向不同，呈现出的形状也不同）。是惠更斯凭借强大的望远镜和系统性的观测，认识到那是一个环（实际上是一组环）。下面读一段克里斯蒂安·惠更斯写给莱奥波尔多·德·美第奇亲王、文笔优美的献词，是很有意义的：

> 在这本小册子中，我研究的是天体空间中距离极其遥远的物体；若没有应用科学的帮助，这些物体便处于人类观测范围之外。我确信，许多人会说，我花了太多心力去考察那些依一般看法与我们关系不大的事物，而身边近在咫尺、值得研究的事物仍有那么多。然而，说这种话的人似乎不太明白，天体研究远胜于其他任何研究；我们的思索竟能延伸至自然中距离如此遥远的地方，这本身是多么壮阔的事实。那些地方虽显得幽暗而渺小，实际上却光辉灿烂、广大无比。倘若我们因为这些物体距离遥远，便认为它们与我们关系不大，那我们无疑就不配拥有理性赋予我们的心智——凭借它，我们得以轻易穿越天体空间的浩瀚；也不配拥有那件奇妙而值得无数赞誉、用于扩展视野的仪器。借助这件仪器，我们还能凭视觉本身抵达恒星所在的区域

[80] *Œuvres Complètes* 第十五章。[81]如今，这四颗卫星被统称为伽利略卫星。[82]这是另一个故事，不过惠更斯正是通过打磨透镜的工作结识了斯宾诺莎，而斯宾诺莎本人也以此谋生。说到透镜，我还要提一下，惠更斯发明了一种名为 *magic lantern* 的装置，它利用一系列透镜将绘制在玻璃上的图像投射到墙壁或屏幕上。

> 。正是利用这项发明，我如今比此前任何人都更深入地探入土星那遥远的领域，已经走到这段漫长旅程的尽头只剩百分之一的地方；倘若我 somehow 能够跨越这最后一段路，天哪，我将有多少消息、又会带来怎样的消息！

最后，请允许我引用《土星系统》开篇的一段，其中惠更斯提到了伽利略的观测：“伽利略用光学镜观察天体 [.....] ，并且先于所有其他人向世人揭示了行星的奇妙现象。在我看来，他观测结果中最令人惊叹的，莫过于他发表的有关土星的发现。”

在最后一节中，我将探讨一个此前提及的音乐理论问题，即律制。

10 音乐与律制

克里斯蒂安·惠更斯《全集》第二十卷的标题是《音乐与数学》。本卷第1至174页专论音乐。《全集》的编者将这两个主题编入同一卷，并非只是为了方便。惠更斯的音乐研究以数学为基础，这与他之前大多数杰出学者在这一领域的研究一脉相承。对此，请允许我引用克里斯蒂安·惠更斯于1661年8月1日寄给 R. Moray 的一封信：[85]

> 我花了几天时间研究音乐和单弦琴的划分，并欣然将代数应用于其中。我还发现，对数在这方面大有用处。从那时起，我便开始思考这些奇妙的数字，并赞叹那些将它们带给我们的人的勤勉与耐心。

请允许我提一下，克里斯蒂安·惠更斯关于声音理论的著作并未收录在《音乐与数学》卷中；这些著作在《全集》的其他卷中重刊并附有评论，例如第十九卷，其总标题为《理论与物理力学，1666—1695》，其中收录了他关于人声、振动弦、声音传播及其他相关主题的实验笔记；还有第十八卷，标题为《摆钟，或摆锤钟，至1695年》，其中重刊了他部分关于谐振的著作。

《第二十卷》中收录的作品包括关于歌唱的论文，以及其他深入探讨古代和现代作者的作品及其所用各种调式、四音列和律制的文章。这里有两篇作品尤其值得关注，它们都是专论律制的笔记集，分别是

[83]这段文字以拉丁语和法语刊载于《 *Œuvres Complètes*》第十五卷，第十五册，第214页及以下。[84]罗伯特·莫雷（约1608—1673年）是苏格兰科学家，也是英国皇家学会的创始人之一。[85] *Œuvres Complètes*，第三册，第307—308页。

《单弦琴的划分》[86] 和《新的和声循环》[87] 。前者最初以拉丁语写成，后由编辑在《音乐论著》第八章中译为法语；该卷专门介绍克里斯蒂安·惠更斯的音乐研究，并附有编辑的注释和评论。[88]这篇论述以对数为基础，对大量律制和八度划分进行了详细计算。其中一些律制采用四分之一音差和七分之一逗号进行划分。惠更斯的主要目标是找到一种律制，使五度、四度、三度和六度音程的准确度尽可能接近理想值。

第二部作品集《新的和声循环》包含了惠更斯关于将八度划分为31个等分音程的理论基础。惠更斯建议将这种律制用于乐器和人声。他证明，这种律制的音程与中全音律[89] 的音程之间的差异无法辨别。构成这篇最后论文的作品包含了对音程极为详尽的计算。这部作品很可能是克里斯蒂安·惠更斯对音乐理论最广为人知的贡献，对20世纪音乐产生了不可忽视的影响。[90]

我想提及一篇名为《关于古代音乐理论家著作的笔记》的文章。 法语译文的全文可见于《音乐论著》第203—226页。在这篇文章中，惠更斯对一些古代作者的音乐著作进行了批判性评述，例如埃拉托色尼的《单弦琴的划分》、马库斯·梅博姆的音律表，以及阿里斯托克塞努斯、欧几里得、高登提乌斯、托勒密、阿里斯蒂德斯·昆提利安、沃利斯等许多人的理论。他曾数次提到吉奥塞福·扎尔利诺（1517—1590），讨论其对古代学者的看法。我将重点关注后者，因为文森佐·伽利莱曾公开批评他的理论。事实上，我将引用惠更斯在另一篇文章中对扎尔利诺作品的论述；这篇文章紧接前文，题为《关于近代作者音乐著作的笔记》。在这一语境中，“近代”指的是始于弗朗西斯科·萨利纳斯（1513—1590）和扎尔利诺的时代。这篇文章比第一篇更长，

[86] *Œuvres Complètes*，第XX卷，第41—60页。对于法语词“monocorde”，惠更斯写作“mono- chorde”，这更接近希腊语。[87] *Œuvres Complètes*，第XX卷，第139—174页。[88]参见脚注42。[89]中全音律（或称平均律）是一种律制，其构造基于尽可能获得更多纯三度的愿望。[90]关于惠更斯将八度划分为31个等分音程的工作所产生的影响，在 *Ecrits sur la musique*第17章和第18章中作了较为详尽的讨论；该书还介绍了31度律制理论在惠更斯之前和之后的一些发展。书中特别提到了尼古拉·维琴蒂诺的弧线大键琴和弧线大管风琴、维托·特拉松蒂诺的全音域键盘乐器、乔瓦尼·巴蒂斯塔·多尼的五音大键琴、弗朗切斯科·尼盖蒂的全弦大键琴，以及20世纪建造的、能够产生惠更斯31种声音的键盘乐器。阿德里安·福克（1887—1972）对这些乐器作了评述；他是一位荷兰物理学家和作曲家，按照惠更斯的31等分音程律制创作音乐。福克还讨论了惠更斯的音乐研究与莱昂哈德·欧拉关于谐波七度和数字7的运用，以及其体裁分类之间的关系。同一章还附有若干基于这31种声音创作的20世纪和21世纪音乐作品的注释说明，这些作品展现了克里斯蒂安·惠更斯理论工作对现代音乐的直接影响。[91] *Œuvres Complètes*，第XX卷，第89—103页。

并以法语刊载于《音乐论著》第227—265页。 ´在这篇文章中，惠更斯提到了将八度划分为12个相等半音的做法，相关段落开头写道：“阿里斯托克塞努斯将八度划分为12个相等的半音，文森佐·伽利莱认为这是最佳的划分方式。梅森将其用于鲁特琴。”在这篇文章的多处地方，惠更斯批评了扎尔利诺的理论。具体而言，他写道：[93]

> 扎利诺在《论述》第4篇、命题1中说， [律制这一概念] 是由另一个人偶然发现的——但不知道此人是谁。同样，在《音乐补遗》第四卷第12章（34）中，他高度赞扬了这一发明。在《和声学原理》第二卷第42章中，他描述了一种平庸的律制：大三度和小三度与纯律音高的偏差相等，而五度和四度相差音差的2/7。在第43章中，他试图证明不存在任何可接受的律制，并且不赞成这样一种律制：从大音程中减去1/2音差，并将同样的数值加到小音程上。然而，这种律制确实正确且出色。不过，在当时，人们还没有完全理解这一点。事实上，扎利诺提到， [只有五度和四度] 在那里保持纯正。 [……]

惠更斯的批评针对扎利诺《和声论证》中的某些段落，以及《和声学原理》中的另一些段落。尤其是，这段文字的最后一句指的是《和声学原理》第128页，[94] 扎利诺在此提到一种律制：将纯律音差分配到大音程和小音程之间，使其中一个缩短半个音差，另一个则延长半个音差，而所有其他音程——因此也包括四度和五度——都保持自然比例。然而，在真正的中全音律中，五度缩小四分之一个音差，四度则相应增大。我们已在《音乐论著》 ´一书中对所有这些批评作了评论。[95] 稍后，惠更斯谈到扎利诺时写道：“他对自己所懂的几何学大肆炫耀，而几何学只涉及比例，其他人也都如此，比如音乐学家波爱修、格拉雷安和萨利纳斯。”他还写道，扎利诺“把一切都搅乱了，将古代音乐及其术语与现代音乐混为一谈，例如用古希腊人的名称来命名音调，如最低音之首音、隔弦音之第三音等，而且总是谈论四音列。”随后，惠更斯又对扎利诺提出的音程算术作了更多技术性批评，指出了后者的错误。

惠更斯在其著名的《致博瓦尔的巴斯纳日，论和谐循环书》（Lettre ` a Basnage de Beauval touchant le cycle harmonique，题为 Novus Cyclus harmonicus，写于1691年）中，以简洁的方式概述了他所推荐的31等分平均律。[96] 信中附有计算和表格，表明这种划分所得音程与那些

[92]原文混杂了法语和拉丁语。[93]参见 *Écrits sur la musique*第223页。[94]Gioseffo Zarlino《和声原理》，其中除音乐相关内容外，还阐释了许多诗人、历史学家和哲学家的著作段落，阅读时可以对此有清楚了解，弗朗切斯科·德·弗朗切斯基，威尼斯，1558年；重印版，Broude Brothers，纽约，1965年。[95]参见脚注42。[96] 这封信发表于 *Histoire des Ouvrages des sçavans* ，Henri Basnage de

五度（对应3/2的比例）、四度（4/3）、大三度（5/4）、小三度（6/5）、大六度（5/3）和小六度（8/5）之间的差异微乎其微，“即便是听觉最敏锐的人也完全无法察觉”。在同一封信中，惠更斯指出，萨利纳斯提到将八度划分为31个相等部分的做法，“但只是为了谴责它”。他还说，梅森也予以反对。最后，他声称自己“已用几何学原理证明了这种划分的优越性，并驳斥了这两位著名作者对它所作的不公正评判”。

让我以一段关于科学的总体思考来结束本章。

11 作为结论

我们通常用“科学革命”来指称西方科学在十六世纪末和十七世纪最初几十年间的发展时期（粗略而言，大致对应伽利略·伽利雷最为活跃的时期）。这一表述中的“革命”一词意在暗示与“旧”科学决裂，并以全新的方式探究科学的原则和过程，尤其强调实验。[97] 从这个意义上说，“科学”一词或许也包括音乐，至少涉及声学时是如此。我要强调的是，即便发生了“革命”，发现本身仍然进展缓慢；它们往往凝聚了几代科学家的研究成果。这是我在此所作叙述可以得出的结论之一。

致谢 本研究得到跨学科主题研究所 CREAA 的支持，属于斯特拉斯堡大学 ITI 2021-2028 计划的一部分；该计划由法国国家科学研究中心和法国国家健康与医学研究院参与（经费来自斯特拉斯堡大学卓越计划 ANR-10-IDEX-0002，以及法国未来投资计划框架下的 SFRI-STRAT’US ANR-20-SFRI-0012）。作者谨向阿尔卡季·普洛特尼茨基致谢，感谢他审阅初稿并提出宝贵意见；也感谢埃尔温·薛定谔国际数学物理研究所（维也纳）在本章写作期间提供的款待。

博瓦尔担任该书的主编（鹿特丹，1691年10月，第78—88页），相关内容重印于《*Œuvres Complètes.*[97]》第十卷第169—174页。这里我想引用阿尔卡季·普洛特尼茨基的话。他强调，对数学的重视同样重要；他倾向于用“变革”而非“革命”一词。我还借用了他引用海德格尔的一句话：“现代科学之所以是实验性的，是因为它以数学构想为基础。”关于海德格尔这句引文的出处，以及这一观点的某些理据，参见 Arkady Plotnitsky一文：“纯数学的全部资源”：数学物理学与作为物理学的数学，载于《拓扑学论文集——献给瓦伦丁·波切纳鲁》，L. Funar 和 A. Papadopoulos 编，施普林格·查姆，2025年，第505—576页。