arXiv:2512.23303v1 [math.CO] 29 Dec 2025

有限网格的双色染色：蒂博·盖莱定理的若干变体

Bogdan Dumitru* Mihai Prunescu†‡

摘要

蒂博·盖莱的一个著名但非构造性定理指出，对于任何有限集 A （属于 $\mathbb{Z}^n$），以及任意有限种颜色 c，都存在一个最小的 m，使得对有限m^n网格进行的任何染色，都无法避免其中某个位似 A 呈单色。我们求得（或确认）了等边三角形、正方形以及各种类型矩形的m 。此外，我们将问题从位似推广到一般的相似变换，或由某些特殊旋转生成的相似变换。特别地，我们计算了与 $1 \times k$ 相似（取向不限）的格点矩形的 Gallai 相似数，其中 $k = 2$，3，4。这些解是在命题逻辑可满足性问题（SAT）的框架下找到的。有些问题通过受控暴力搜索得以解决；对于计算量更大的问题，我们则使用了现代 SAT求解器和对称性破缺技术。我们还解决了关于三角形和正方形的其他一些小问题，并为三角格上的正六边形以及 $\mathbb{Z}^3$中的三维立方体找到了新的下界。

关键词：二染色；方格；三角格；单色构形；相似变换；位似；取向；SAT 求解；蒂博·盖莱定理；拉姆齐理论。
数学学科分类：05C15, 05B05, 52C05, 68V15

1 引言

根据范德瓦尔登的一个定理，对于所有自然数 k 和 l，都存在一个自然数 n（k，l），使得无论我们如何用 k 种颜色给数轴上任意一个长度为 n（k，l）的线段中的自然数着色，都存在一个长度为 l的单色等差数列，参见 [14]。欣钦的著作 [10]中给出了一个非常漂亮的证明。我们注意到，某个长度为 l 的等差数列既与标准等差数列 $\{0, 1, \ldots, l-1\}$相似，又与之位似，因为在一维情形下，这两个概念是一致的。

集合 $B \subset \mathbb{Z}^n$ 是集合 $A \subset \mathbb{Z}^n$ 的 $\mathbb{Z}$-**位似**像，如果存在 $y \in \mathbb{Z}^n$ 和 $x \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$使得 $B = xA + y$。一般来说，我们只使用**“位似”**这一术语。

定理 1.1（Gallai）设 A 是 $\mathbb{Z}^n$ 的有限子集。那么，$\mathbb{Z}^n$ 的任意有限染色都包含一个单色子集 B，它与 A 位似，比例为 $\mathbb{Z}$。

有多种证明，例如 R. Rado 的证明 [11]，以及 E. Witt 提出的一个极其简短的证明 [16]。另请参阅 Soifer 的精彩专著 [12]。所有证明都与范德瓦尔登定理一样，证明了存在一个自然数 m，它取决于 A和颜色数 c，使得

*布加勒斯特大学，数学与信息学院。 bogdan.dumitru@fmi.unibuc.ro
†逻辑、优化与安全研究中心（LOS），布加勒斯特大学数学与计算机科学学院，Academiei 14，布加勒斯特（RO-010014），罗马尼亚； mihai.prunescu@gmail.com
‡罗马尼亚科学院西米翁·斯托伊洛数学研究所，第5研究组，邮政信箱 1-764，RO-014700 布加勒斯特，罗马尼亚。
mihai.prunescu@imar.ro

无论如何为有限网格 $\{0,1,\ldots,m-1\}^n$着色，该集合都包含一个与 A位似的单色子集 B 。

遗憾的是，这些证明并非具有计算有效性。根据证明，对于相应的 m，只能得到极其巨大的上界。另一方面，该问题的复杂性使得寻找 m 的最小值变得困难。

令 $\mathbf{\Gamma(A,c)} \in \mathbb{N}$ 为满足以下条件的最小自然数：对于有限网格$\{0,1,\ldots,\Gamma(A,c)-1\}^n$的任意 c-染色，我们都无法避免该有限网格的某个子集 B与 A位似且为单色。给定有限网格的边长 m，可以将所有与 A 位似的子集均非单色这一条件写成布尔公式。如果 $m \geq \Gamma(A,c)$，表示该条件的命题公式就是 **不可满足**的，而与 $m < \Gamma(A,c)$对应的命题公式则是**可满足**的。我们将 $\Gamma(A,c)$称为集合 A 在 c 种颜色下的**Gallai 位似数**。

从几何角度来看，有趣的不仅是位似，相似变换也同样有趣。**相似变换**是一个函数 $\sigma\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$，满足 $\sigma = \tau \circ \delta \circ \rho$，其中 ρ是旋转， δ是伸缩， τ 是平移。

由于位似是相似变换的一种特殊情形，Gallai 定理意味着，对于每个有限子集 $A \subset \mathbb{Z}^n$ 以及每种颜色数 c，都存在一个最小值 $\mathbf{\Sigma}(\mathbf{A},\ \mathbf{c})$，使得对有限网格 $\{0,1,\ldots,\Sigma(A,\ c)-1\}^n$ 进行任何染色，都无法避免该有限网格中的某个有限子集 B与 A相似且为单色。相似子集会带来更多约束，通常有：

$$\Sigma(A,c) \leq \Gamma(A,c).$$

我们将 $\Sigma(A,\ c)$称为 A 在 c 种颜色下的**Gallai 相似数**。我们探讨以下问题：给定 A和 c，求 Gallai 数 $\Sigma(A,\ c)$和 $\Gamma(A,\ c)$。为解决这些问题，我们寻找使相应命题公式不可满足的最小 m。关于命题逻辑中可满足性的概述，请参阅 Biere 等人编写的手册 [3]。

我们只讨论二染色情形，但对于任意 $c \geq 2$，情况也类似。
在大多数实验中，维数为 $n = 2$。在大多数情况下， A 会是三角形或正方形。为了更好地可视化这些构形，我们将在三角网格中考察等边三角形。

对于这两个问题，我们都采用**受控暴力搜索**。该方法可描述如下：将网格 G_m 嵌入到 G_{m+1} 中；在三角形情形下，添加一行由 $m+1$ 个等距点组成的点，在正方形情形下，则添加一行和一列，各由 $m+1$ 个格点组成——这意味着新增 $2m+1$ 个格点。对于任意一个避免某些特定单色构形的解 $s\colon G_m \to \{0,1\}$，我们列出所有能够扩展 s、并且在更大的网格中避开给定单色构形的解 $s'\colon G_{m+1} \to \{0,1\}$——也就是说$s' \,|\, G_m = s$。当然，只需检查包含新增格点的构形。如果 $m+1 = \Gamma(A,\ c)$，或者 $m+1 = \Sigma(A,\ c)$，则不再存在这样的扩展。我们将包含 $m(m+1)/2$ 个点的有限三角网格记作 T_m，将包含 m^2 个点的有限方格网记作 S_m。

受控暴力搜索足以解决三角形中的双色相似性和位似问题，以及正方形中的双色相似性问题。然而，对于正方形中的位似问题，这种方法就不再可行了，因为计算时间过长，前提是只使用一个处理器。或许可以通过使用计算机网络，并在不同的处理器或计算机上运行并行扩展任务，加快受控暴力搜索的计算。我们则使用了带有对称性破缺的现代 SAT 求解来解决这个问题。因此，我们发现 $\Gamma(\square,\ 2) = 15$，证实了 Walton 和 Li 在 [15] 以及 Bacher 和 Eliahou [2] 中得出的结果。

如果尝试根据 Witt 的证明估算 $\Gamma(\square,\ 2)$，得到的上界也只有数千。这表明此类证明可能在多大程度上缺乏效力。

对于 $k \geq 2$，令 R_k 为矩形 $R_k = \{0,1\} \times \{0,k\}$。我们求得 $\Gamma(R_k, 2)$ 在 $k = 2, 3, 4, 5$ 时的值。我们还探讨了如何同时禁止正方形和 $R'_k = \{0,k\} \times \{0,1\}$ 的位似图像。此外，对于与 R_k 相似的矩形（所有取向），我们计算了 $\Sigma(R_k, 2)$ 在 $k = 2, 3, 4$ 时的值。其他一些关于矩形的研究探讨的是不同的问题。文献 [6]和 [13]研究的是多颜色矩形网格，其中不存在单色的水平矩形。我们的方法与之不同：我们只考虑方形网格的二染色，避免出现仅一种类型的单位矩形的单色位似图像，以补充 Gallai 定理。

我们还将基于 SAT 的方法应用于三角格中的正六边形以及 $\mathbb{Z}^3$ 中轴平行的立方体，从而得到相应极小不可满足构形的非平凡下界。

开放问题 1： 是否有其他方法可以计算 *Gallai* 数?

开放问题 2： 在多大程度上能够为我们的结果找到人类可读的证明?

Ramsey 理论是组合学的一个分支，研究在表面混乱的大型结构中出现的有序性，参见 [7], 。因此，寻找精确的 Gallai 数自然是这一框架下的问题。另一种值得应用的有趣技术是伪布尔规划，参见 [8]。事实上，正方形 $ABCD$ 不是单色的这一条件可以写成：

$$0 < s(A) + s(B) + s(C) + s(D) < 4,$$

其中，加法在 $\mathbb{Z}$ 中进行， s 的取值为 0 或 1。

2 线性问题

我们先从一个简单的问题开始。能否用两种颜色给平面方格晶格 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 着色，例如白色和黑色，使得每个顶点为格点且边平行于坐标轴的正方形都包含奇数个黑色顶点？考虑方形网格 $S_3 = \{0,1,2\} \times \{0,1,2\}$。我们为其中涉及的格点赋予布尔变量 $x_1, x_2, \ldots, x_9$，其中 $x_i = 0$ 表示相应的格点被涂成白色。相应的点构成如下矩阵：

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ x_4 & x_5 & x_6 \\ x_7 & x_8 & x_9 \end{pmatrix}$$

每个边平行于坐标轴的正方形都包含奇数个黑色顶点这一条件，可以转化为域 $\mathbb{F}_2$上的以下线性方程组：

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_4 + x_5 &= 1 \\ x_2 + x_3 + x_5 + x_6 &= 1 \\ x_4 + x_5 + x_7 + x_8 &= 1 \\ x_5 + x_6 + x_8 + x_9 &= 1 \\ x_1 + x_3 + x_7 + x_9 &= 1 \end{aligned}$$

我们将第一、第二、第三和第四个方程相加。由此可得：

$$x_1 + x_3 + x_7 + x_9 = 0,$$

而这与第五个方程矛盾。我们证明了以下结论：

定理 2。**1** S_2 是能够接受一种 2 色染色 s： $S_m \to \{0,1\}$的极大有限方格网 S_m，且每个顶点均为格点的水平正方形都包含奇数个黑色顶点。

我们再来尝试一道同类型的题目。我们要寻找极大网格 $S_m = \{0,1,\ldots,m-1\} \times \{0,1,\ldots,m-1\}$ 和染色 $c\colon S_m \to \{0,1\}$，使得单位正方形 $\{0,1\}\times\{0,1\}$ 的每个位似图像都恰好有两个白色顶点和两个黑色顶点。

对于 $m \geq 2$，单位正方形的位似图形集合，也称为轴平行正方形或水平正方形，构成以下集合：

$$\square_m = \{\ \{(i,j),(i+a,j),(i+a,j+a),(i,j+a)\} \subseteq S_m \mid i,j,a \in \mathbb{N}, a \neq 0\}.$$

由于 $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}$ 的二染色是一个函数 $s\colon \mathbb{Z}\times\mathbb{Z} \to \{0,1\}$，我们将考虑正方形 m-网格的二染色，$s\colon S_m \to \{0,1\}$。为了写出关于染色的布尔约束，我们为 S_m 关联布尔变量集合 m^2 $\{s(x,\ y) \mid 0 \leq x,\ y < m\}$。

公式

$$\delta(s(A),s(B),s(C),s(D)) := [s(A)+s(B)+s(C)+s(D) = 2],$$

其中加法在 $\mathbb{Z}$ 中进行，表示正方形 $ABCD$ 恰好有两个顶点属于每种颜色。我们考虑如下布尔公式族：

$$\Pi_m := \bigwedge_{ABCD \in \square_m} \delta(s(A),s(B),s(C),s(D)),$$

Π_m 是一个含有 m^2 个变量的布尔公式，因为 $\delta(a,\ b,\ c,\ d)$ 也可以写成

$$\delta(a,b,c,d) = \bar{a}\bar{b}cd \vee \bar{a}b\bar{c}d \vee \bar{a}bc\bar{d} \vee a\bar{b}\bar{c}d \vee a\bar{b}c\bar{d} \vee ab\bar{c}\bar{d},$$

合取用并置表示，x 的否定记作 $\bar{x}$。Π_m 可满足，当且仅当存在一个染色 $c\colon S_m \to \{0,1\}$ 满足给定性质。通过受控暴力搜索可以找到极大解：

定理 2.2 公式 Π_m 可满足，当且仅当 $m \leq 4$。因此，S_4 是能够接受二染色、且网格上顶点构成的所有水平正方形都恰有2个黑色顶点的极大网格。

证明：Π_2 有 6 个解，Π_3 有 8 个解，Π_4 有 8 个解。极大解见图 1。Π_5 不可满足。□

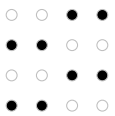

图 1：对 4×4 网格进行二染色，使网格上顶点构成的每个水平正方形都恰有两个白色顶点和两个黑色顶点。这是该问题的一个极大解。

3 单色子集

设 S 是一个有限点集，$\mathcal{A}$ 是由 S的某些子集构成的族。我们想要找到一个布尔（命题）公式，以表达在某种染色 $s\colon S \to \{0,1\}$下，没有任何子集 $A \in \mathcal{A}$ 是单色的这一事实。为此，我们为 S中的每个元素引入布尔变量 $\{x_i \mid i \in S\}$。对于某个集合 A，我们写下条件，要求 A 不是单色的：

$$\varepsilon(A) = \varepsilon^+(A) \wedge \varepsilon^-(A) = \left(\bigvee_{i\in A} x_i\right) \wedge \left(\bigvee_{i\in A} \neg x_i\right).$$

事实上， $\varepsilon^+(A)$表示至少有一个 x_i 为 1，而 $\varepsilon^-(A)$表示至少有一个 x_i 为 0。现在我们定义布尔（命题）公式：

$$\Upsilon = \Upsilon(S, \mathcal{A}) = \bigwedge_{A \in \mathcal{A}} \varepsilon(A).$$

下面的陈述是显然的：

引理 3.1 命题公式 $\Upsilon(S, \mathcal{A})$ 不可满足，当且仅当对于每一种 2-染色s： $S \to \{0, 1\}$ 都存在 $A \in \mathcal{A}$ 使其为单色。

在接下来的各节中，集合 $S = T_m$ 或 $S = S_m$ 将表示具有 m 行的有限三角形、正方形或立方网格，而 $\mathcal{A} = \mathcal{A}_m$ 将表示一个子集族，例如所有顶点位于网格上的水平正三角形、所有水平或斜方形，等等。相应的公式：

$$\Upsilon_m = \Upsilon(S_m, \mathcal{A}_m)$$

将表达这样一个事实：我们可以避免感兴趣的单色子集。根据 Gallai 定理，总会存在一个最小的 m_0，使得相应的公式 Υ_{m_0} 不可满足。所有满足 $k \geq m_0$ 的公式 Υ_k 同样不可满足。我们的目标是为各种子集族寻找相应的 m_0。我们将记号 $\Upsilon(S, \mathcal{A})$ 用作一个算子，它将一对 $(S, \mathcal{A})$ 与一个命题公式相关联，其中 S 是有限的，而 $\mathcal{A}$ 是 S的一个给定子集族。

使用 SAT 求解器时，我们利用了 $\Upsilon(S, \mathcal{A})$ 已经是合取范式（CNF）这一事实。因此，在准备输入数据时，对于每个 $A \in \mathcal{A}$，都要将两个析取**子句** $\varepsilon^+(A)$ 和 $\varepsilon^-(A)$ 加入子句列表。

4 三角形

本节专门讨论等边三角形。它们是以下平面三角格的自然子集。三角格是 $T = \langle 1, \theta \rangle$，其中 $\theta = e^{\frac{\pi i}{3}}$。对于 $m \geq 1$，三角形m-网格是如下集合

$$T_m = \{a + b\theta \mid a, b \in \mathbb{N},\, a + b < m\}.$$

集合 T_m 含有 $m(m+1)/2$ 个元素。为了描述其中的元素，引入按层排列的坐标系会很方便。根据这一坐标系，每一层都包含点 (x, y)，其中 $0 \leq y < m$ 是层的编号， $0 \leq x \leq y$ 是该层 $y+1$ 个点的纵坐标 y。T_m 的凸包是边长为 $m-1$ 的等边三角形。

所有顶点位于 T_m 中的等边三角形集合 E_m 可表示如下：

$$E_m = \{\ \{(i,j), (i-a, j+b), (i+b, j+a+b)\} \subseteq T_m \mid i, j \in \mathbb{N},\, a, b \in \mathbb{Z}, (a,b) \neq (0,0)\},$$

其中，顶点按照水平定向坐标系给出。我们还关注边平行于坐标轴且朝上定向的等边三角形：

$$\Delta_m = \{\ \{(i,j), (i+a, j), (i, j-a)\} \subseteq T_m \mid i, j, a \in \mathbb{N}, a \neq 0\},$$

以及 边平行于坐标轴且朝下定向的等边三角形 ：

$$\nabla_m = \{\ \{(i,j), (i-a, j-a), (i, j-a)\} \subseteq T_m \mid i, j, a \in \mathbb{N}, a \neq 0\}.$$

Δ_m 和 ∇_m 是 E_m 的子集。
我们引入三类命题公式：

$$\Phi_m := \Upsilon(T_m, E_m),$$

$$\Gamma_m := \Upsilon(T_m, \Delta_m \cup \nabla_m), \qquad \Psi_m := \Upsilon(T_m, \Delta_m).$$

Φ_m 的可满足性对应于 T_m 存在一种二染色，使得其中没有与网格中的单位三角形相似的单色等边三角形。公式 Ψ_m 编码了对轴平行向上定向三角形的相应限制，也就是位似情形。公式 Γ_m 表示轴平行向上和向下定向三角形不是单色的。

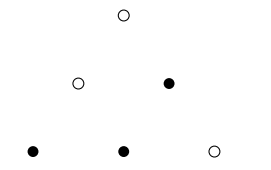

图2：这个着色网格 T_3 不含任何水平、斜向或反向的等边三角形。它是此问题的一个极大解。

定理4.1 公式 Φ_m 可满足，当且仅当 $m \leq 3$。因此 $\Sigma(\triangle, 2) = 4$。对 T_4 进行着色时，必然会出现水平、斜向或反向的单色等边三角形。

证明：使用受控暴力搜索，我们找到 Φ_2 的 6 个解，以及 Φ_3 的 18 个解。图2展示了一个极大解。公式 Φ_4 不可满足。□

定理4.2 公式 Γ_m 和 Ψ_m 可满足，当且仅当 $m \leq 4$。因此$\Gamma(\triangle, 2) = 5$。对 T_5 进行着色时，必然会出现水平向上定向的单色等边三角形。这是水平向上定向等边三角形位似类的最佳界。

证明：使用受控暴力搜索处理 Γ_m，我们发现 $m = 2$ 有 6 个解，$m = 3$ 有 18 个解，$m = 4$ 有 36 个解。图3展示了一个极大解。Ψ_m 的情况相同。此外，$m \leq 4$、Γ_m 和 Ψ_m 的解也相同。Γ_5 和 Ψ_5 不可满足。□

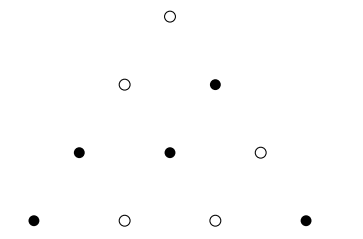

图3：这个着色网格 T_4 不含任何单色的水平向上定向三角形。它是此问题的一个极大解。我们注意到，网格中包含一个倾斜的等边三角形。当然，由于 $\Sigma(\triangle, 2) = 4$，这是无法避免的。

5 个正方形

方格为 $S = \langle 1, i \rangle \subseteq \mathbb{C}$，我们将其与 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 对应。对于 $m \geq 1$，正方形 m-网格是集合

$$S_m = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{N}, a < m, b < m\}.$$

在笛卡尔坐标中，我们有

$$S_m = \{0, 1, \ldots, m-1\} \times \{0, 1, \ldots, m-1\}.$$

集合 S_m 有 m^2 个元素，而 S_m 的凸包是一个边长为 $m-1$的正方形。 S_m 中所有顶点均位于其中的正方形组成的集合 F_m 可定义如下：

$$F_m = \{\ \{(i,j),(i+b,j-a),(i+a+b,j+b-a),(i+a,j+b)\} \subseteq S_m \mid i,j \in \mathbb{N},\ a,b \in \mathbb{Z}, (a,b) \neq (0,0)\}.$$

我们还关注那些与格轴平行的正方形：

$$\square_m = \{\ \{(i,j),(i+a,j),(i+a,j+a),(i,j+a)\} \subseteq S_m \mid i,j,a \in \mathbb{N}, a \neq 0\}.$$

我们考虑两族布尔公式：

$$\Omega_m := \Upsilon(S_m, F_m),$$

$$\Xi_m := \Upsilon(S_m, \square_m).$$

Ω_m 表示不含单色水平或斜置正方形的着色，对应于相似变换问题。 Ξ_m 表示不含单色水平正方形的着色，对应于 Gallai 定理中最初提出的位似问题。

受控暴力法可以应用于族 (Ω_m)，类似于三角形情形。在此情形下，该方法给出了极大解的完整分类。

定理 5.1 公式 Ω_m 可满足，当且仅当 $m \leq 6$。因此 $\Sigma(\square,2) = 7$。不可能对 S_7 进行着色而不出现水平或斜置单色正方形。

证明：Ω_2, 248有 14 个解，Ω_3, 5006 有 个解，Ω_4, 7120 有 个解，Ω_5, 56 有 个解，Ω_6有 个解。极大解见图 4。Ω_7 不可满足。□

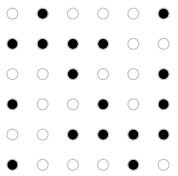

图 4：一种 6×6 网格的二染色，其中不存在单色水平或斜方形。这是该问题的一个极大解。

对于 Ξ_m 受控暴力法而言，一旦 m变得适中，该方法的表现就不再理想。作者成功展示了 Ξ_{12} 的解，但仅凭该方法不足以判定 Ξ_{13} 和 Ξ_{14} 是否可满足。

随着受控暴力法达到极限，我们转向了更专业的 SAT 求解。
我们采用了现代 CDCL 求解器，具体而言，使用 CaDiCaL 生成不可满足性证明，并使用 Kissat 对可满足实例进行深度搜索，参见说明 [4]。关于另一个用于 SAT 原型开发的实用 Python 工具包 PySAT，参见 [9]。为缓解指数级搜索空间，我们采用了静态对称性破缺，并使用 BreakID （参见说明 [5], ）剪枝相关二面体群作用下的同构配置（对于方格，见 D_8 ），同时结合全局颜色反演。该方法使我们能够解决正方形的 Ξ_{14} 情形，并探索某些特殊矩形、六边形和立方体中远大于受控暴力法所能处理范围的区域。这促使我们确认了 Walton 和 Li 的结果[15]:

定理 5.2（Walton - Li）公式 Ξ_m 可满足，当且仅当 $m \leq 14$。因此， $\Gamma(\square,2) = 15$。对 S_{15} 进行染色时，必然会出现水平单色正方形。这是水平正方形位似类的最佳界。

证明：对于 $m = 14$，与 Ξ_{14} 对应的 SAT 实例是可满足的。通过基于 SAT 的方法，可以构造出一个相应的 14×14 网格的 2-染色，其中不含单色轴平行正方形，见图 5。对于 $m = 15$，我们生成了与 Ξ_{15} 对应的 SAT 实例，并将其交给 CaDiCaL 求解器；该求解器生成了一个证明不可满足性的 DRAT（删除、归结、非对称重言式）证明。证明轨迹约有 15 GB，证明了不存在一种 15×15 网格的 2-染色能够避免出现单色轴平行正方形。因此，Ξ_{15} 不可满足。

□

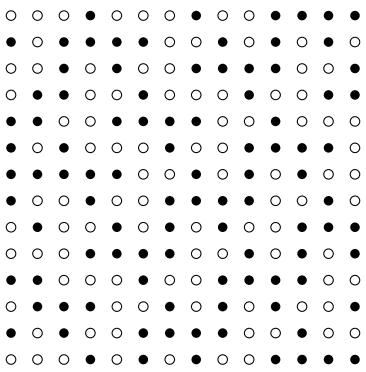

图 5：对 14×14 网格的一种二染色，其中不存在单色水平正方形。这是该问题的一个极大解。但由于一个 14×14 网格可以划分为四个互不相交的 7×7 网格，并且 $\Sigma(\square, 2) = 7$，因此至少存在四个斜向同色正方形。

6 矩形

本节研究方形网格 S_m 中的矩形。固定一个整数 $k \geq 2$，并考虑以下 4 点构型

$$R_k := \{(0,0), (1,0), (0,k), (1,k)\} \subset \mathbb{Z}^2.$$

相似情形（任意方向）。我们希望禁止 S_m 中与 R_k 相似（在欧几里得平面中）的单色矩形，且其取向任意。
令 $(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2$，其中 $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$，并定义两个向量

$$u = (a, b), \qquad v = (kb, -ka).$$

于是 $u \cdot v = 0$ 和 $\|v\| = k\|u\|$，因此对每个基点 $(x,\ y) \in \mathbb{Z}^2$，以下四个点

$$(x, y), \quad (x, y) + u, \quad (x, y) + v, \quad (x, y) + u + v$$

是一个与 R_k 相似的矩形的顶点。
对于 $m \geq 1$，我们将包含于 S_m 中的所有此类矩形定义为一个族：

$$C_m^{(k)} = \{\{(x, y), (x + a, y + b), (x + kb, y - ka), (x + a + kb, y + b - ka)\} \subseteq S_m \,|\, x, y \in \mathbb{N},\ a, b \in \mathbb{Z},\ (a, b) \neq (0, 0)\}.$$

类比前面的章节，定义

$$\Omega_m^{(k)} := \Upsilon(S_m, C_m^{(k)}).$$

因此，$\Omega_m^{(k)}$ 可满足，当且仅当存在一种对 S_m 的二染色，使其不含与 R_k 相似的单色矩形。

位似情形（轴平行）。A $\mathbb{Z}$的位似图像 R_k 形式如下

$$Q_k(i,j,d) := (i,j) + d \cdot R_k = \{(i,j),(i+d,j),(i,j+kd),(i+d,j+kd)\},$$

其中（$i,\ j$） $\in \mathbb{Z}^2$ 且 $d \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$。因此， d 和 kd 分别是水平边长和垂直边长。对于 $k \geq 2$ 和 $m \geq 1$，考虑集合

$$A_m^{(k)} = \{\, Q_k(i,j,d) \mid d \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ i,j \in \mathbb{N},\ i+d < m,\ j+kd < m \,\}.$$

此外，我们考虑旋转矩形

$$R'_k = \{(0,0),(k,0),(0,1),(k,1)\},$$

及其 $\mathbb{Z}$-位似图形

$$Q'_k(i,j,d) := (i,j) + d \cdot R'_k = \{(i,j),(i+kd,j),(i,j+d),(i+kd,j+d)\},$$

其水平边长为 kd ，垂直边长为 d。它们的集合为

$$B_m^{(k)} = \{\, Q'_k(i,j,d) \mid d \in \mathbb{N} \setminus \{0\},\ i,j \in \mathbb{N},\ i+kd < m,\ j+d < m \,\}.$$

类比等边三角形和正方形，定义

$$\Theta_m^{(k)} := \Upsilon(S_m, A_m^{(k)} \cup B_m^{(k)}).$$

T以下公式 $\Xi_m^{(k)}$对应于矩形 R_k的 $\mathbb{Z}$-位似图形 ：

$$\Xi_m^{(k)} := \Upsilon(S_m, A_m^{(k)}).$$

在我们的实现中，我们以 DIMACS CNF 格式生成 $\Xi_m^{(k)}$、 $\Theta_m^{(k)}$ 和 $\Omega_m^{(k)}$，并使用 Python 库 PySAT 作为接口，通过 CDCL SAT 求解器（Kissat 和 CaDiCaL）求解。对于可满足的实例，我们输出一个见证着色。对于第一个不可满足的实例，我们还会生成不可满足性的 DRAT 证书，可由 DRAT 检查器独立验证。

安全的对称性破缺：由于全局颜色反演会将任意一个满足条件的染色映射为另一个满足条件的染色，因此可以通过添加单元子句 $\neg x_{0,\,0}$，安全地固定 $x_{0,\,0} = 0$ 。这样可以消除颜色翻转对称性，同时不会排除任何可满足的网格尺寸。

定理 6.1 $\Omega_m^{(k)}$ 的第一个不可满足实例出现在

$$m = 8 \ for\ k = 2, \qquad m = 13 \ for\ k = 3, \qquad m = 15 \ for\ k = 4.$$

因此，

$$\Sigma(R_2, 2) = 8, \qquad \Sigma(R_3, 2) = 13, \qquad \Sigma(R_4, 2) = 15.$$

因此，无法在这些网格中避免出现与 R_k 类似且方向任意的单色矩形。

定理 6.2 $\Theta_m^{(k)}$ 不可满足的最小网格出现在：

$$m = 23 \ \ for\ k = 2, \qquad m = 27 \ \ for\ k = 3, \qquad m = 28 \ \ for\ k = 4.$$

因此，这些网格无法着色而不出现与 R_k 或 R'_k位似的单色轴平行矩形，也就是说，两个取向中都会出现。

k	第一个不可满足 m	变量 $=m^2$	矩形	子句
2	23	529	4554	9109
3	27	729	5112	10225
4	28	784	4256	8513

表1： m 在 $\Theta_m^{(k)}$处取 $k=2$，3，4 时的最小不可满足实例规模。考虑的矩形数量是 $\Xi_m^{(k)}$中的两倍。子句包括单子句 $\neg x_{0,\,0}$。

k	$m=\Gamma(R_k,\,2)$	变量 $=m^2$	矩形	子句
2	27	729	3744	7489
3	40	1600	8697	17395
4	52	2704	14768	29537
5	66	4356	24687	49375

表2： $m=\Gamma(R_k,\,2)$ 下 $\Xi_m^{(k)}$在 $k=2$，3，4，5 时的最小不可满足实例规模。子句包括单子句 $\neg x_{0,\,0}$。

定理6.3 $\Xi_m^{(k)}$不可满足时的最小网格出现在 m的以下取值处：

$$\Gamma(R_2,2)=27,\qquad \Gamma(R_3,2)=40,\qquad \Gamma(R_4,2)=52,\qquad \Gamma(R_5,2)=66.$$

因此，在这些网格上进行染色时，无法避免出现与 R_k位似的单色轴平行矩形。对于相应的位似类而言，这些是 *Gallai* 定理的最佳界。

作为参考， $m=\Gamma(R_k,\,2)$ 下的不可满足实例包含 m^2 个变量和 $2\cdot$（#矩形）个 $+1$子句。额外的 $+1$ 对应于 $\neg x_{0,\,0}$。图6展示了 $k=2$和 $m=26$的一种极大着色，即 $\Xi_{26}^{(2)}$ 的一个满足赋值。

7 对称类

为了正确分类不同的解，我们将二面体群 D_6 对等边三角形的作用下属于同一轨道的解视为相同；对于正方形，则对应地考虑 D_8 。

群 D_6 由一个轴对称 σ 和一个中心旋转 ρ 生成，包含 6 个元素。在以 0 开始编号的三角形 m-网格 T_m 上，我们可以取

$$\sigma(x,y)=(y-x,x),\qquad \rho(x,y)=(m-1-y,m-1-y+x).$$

我们称两个解 $s_1(T_m)$和 $s_2(T_m)$是 D_6-**等价** 的，如果存在某个 $\lambda\in D_6$ ，使得对所有$0\le x\le y<m$ ，都有 $s_1(x,\ y)=s_2(\lambda(x,\ y))$。
群 D_8 由一个轴对称 σ 和一个中心旋转 ρ 生成，包含 8 个元素。在以 0 开始编号的正方形 m-网格 S_m 上，我们可以取

$$\sigma(x,y)=(y,x),\qquad \rho(x,y)=(m-1-y,x).$$

我们称两个解 $s_1(S_m)$和 $s_2(S_m)$是 D_8-**等价** 的，如果存在某个 $\lambda\in D_8$ ，使得对所有$0\le x,\ y<m$ ，都有 $s_1(x,\ y)=s_2(\lambda(x,\ y))$。
由于 0 和 1 之间没有哪种颜色更优先，我们加入颜色翻转函数 $f\colon\{0,1\}\to\{0,1\}$ with$f(0)=1$and $f(1)=0$。我们称两个解 $s_1(T_m)$ 和 $s_2(T_m)$ **等价**，如果它们要么是 D_6-等价的，要么 $s_1(T_m)$ 和 $f\circ s_2(T_m)$ 是 D_6-等价的。我们称两个解

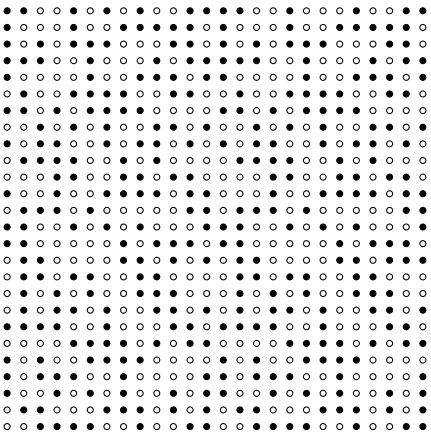

图6： S_{26} 的一种染色，不含边长为（d， $2d$）的单色轴平行矩形。这是族 $\Xi^{(2)}$ 的极大解。

$s_1(S_m)$ 和 $s_2(S_m)$ **等价**，如果它们要么是 D_8-等价的，要么 $s_1(S_m)$ 和 $f \circ s_2(S_m)$ 是D_8-等价的。

通过受控暴力搜索找到的极大解，分别在D_6、 D_8 的作用下，以及全局颜色翻转下进行了比较 f。

定理 7.1 根据对称性，问题 Φ、 Γ、 Ψ、 Π和 Ω的极大解表现如下：

1. Φ_3 的18个解分为四个 D_6-等价类：两个含6 个元素，两个含3个元素。若加入颜色翻转，则得到两个等价类：一个含12 个元素，另一个含6个元素。*2.* Γ_4 的36 个解分为六个含六个元素的 D_6-等价类。若加入颜色翻转，这些等价类合并为三个含十二个元素的等价类。由于 Γ_4 的解与 Ψ_4的解相同，我们也求解了这些解的等价问题。*3.* Π_4 的8 个解分为两个含四个元素的 D_8-等价类。若加入颜色翻转，等价类不变。*4.* Ω_6 的56 个解分为六个含八个元素的 D_8-等价类，以及另外两个含四个元素的 D_8-等价类。若加入颜色翻转，六个含八个元素的等价类合并为三个含十六个元素的等价类，而两个含四个元素的等价类保持不变。

我们还通过统计二面体群 D_8 与颜色翻转作用下的等价类，研究了 Ξ_m 小规模 m 的解空间结构。对于 $m = 4$， Ξ_4的解恰好有 727 个不同的等价类。对于 $m = 5$，我们发现恰好有 48 974 个不同的等价类。对于 $m = 6$，在计算中止之前，等价类的数量就已经超过了 500 000。这说明解空间中存在严重的组合爆炸，这与在 $m = 15$处突然相变为不可满足性形成鲜明对比。

8 六边形和立方体的下界

我们首先将研究扩展到三角格上的正六边形。我们将格点映射到一个坐标系 $\mathbb{Z}^2$，其中有效点（x， y）满足 $x \equiv y$ （模 2）。在这种几何结构中，

边长为 s 的正六边形定义为由六个顶点组成的集合

$$H(x,y,s)=\{(x,y),(x+2s,y),(x,y+2s),(x+2s,y+2s),(x-s,y+s),(x+3s,y+s)\},$$

用合适的坐标表示。在针对六边形的 SAT 编码中，参数 m 是矩形窗口 $R_m^*=\{(x,\ y)\ \in\mathbb{Z}^2$ 的大小：$0\le x<2m,\quad 0\le y<m,\quad x\equiv y$ （模 2）$\}$。
我们关注的集合是

$$\hexagon_m=\{H(x,y,s)\,|\,s\in\mathbb{N},s>0,H(x,y,s)\subseteq R_m^*\},$$

表示不存在这种单色六边形的命题公式为：

$$H_m=\Upsilon(R_m^*,\hexagon_m).$$

我们将正六边形的 **Gallai 数** 定义为满足以下条件的最小数 m：无论如何对 R_m^* 中的元素进行二染色，都会出现一个单色的轴平行六边形。

定理 8.1 公式 H_{94} 可满足。三角格上正六边形的 *Gallai* 数至少为 95。

每一行都有 m 个有效点，因此 $|R_m^*|=m^2$；特别地，$|R_{94}^*|=94^2=8836$。边长为 s 的正六边形，其垂直跨度为 $2s$，因此必须满足 $s\le\lfloor(m-1)/2\rfloor$，故其直径至多为 $2\lfloor(m-1)/2\rfloor<m$。对于 $m=94$，可得 $s\le46$，直径为 ≤92。因此，H_{94} 可满足意味着存在对 R_{94}^* 的一种二染色，其中没有直径不超过 92 的单色六边形。

这与方格情形形成鲜明对比：轴平行正方形对应的 Gallai 数为 15。尽管三角格的局部连通性更高，但它似乎为避免出现单色结构提供了大得多的组合自由度，因为正六边形由六个顶点构成，而不是四个。

接下来我们考虑三维类比。在离散网格 $\{0,\dots,n-1\}^3$ 中，我们寻找单色的轴平行立方体。边长为 s 的立方体由 8 个顶点确定，这些顶点是集合 $\{x,x+s\}$、$\{y,y+s\}$ 和 $\{z,z+s\}$ 的笛卡尔积。

定理 8.2 对于 $\mathbb{Z}^3$、$\Gamma(\{0,1\}^3,\ 2)\ \ge181$ 中的三维立方体。

证明：按照上述方法应用带有对称性破缺的 SAT 编码后，我们找到了 $180\times180\times180$ 网格的一种二染色，其中不含单色的轴平行立方体。这表明立方体的 Gallai 数至少为 181。截至本文撰写时，我们尚未得到上界，因此其确切值仍未解决。□

这个较大的下界与一个简单的概率考量相一致：一个立方体由 8 个顶点组成，因此在对无限格进行随机二染色时，给定立方体为单色的概率仅为 $2^{-7}=1/128$。这一相对宽松的局部约束使得可以对非常大的网格进行染色，而不会必然产生单色立方体。

9 不可分几何的推论

以下是关于一些无限格的着色以及欧几里得平面着色的一些推论。

推论 9.1 对于无限三角格 s：$T\to\{0,1\}$ 的任意染色 T，经染色的格子包含：

1. 无穷多个边长为 ≤ 3、取向各异的单色等边三角形。*2.* 无穷多个边长为 ≤ 4、与格轴平行且朝上取向的单色等边三角形。

此外，每一种类型都有无穷多个更大的单色等边三角形，且它们的边长没有上界。

证明：第一个断言成立，是因为公式 Φ_m 可满足当且仅当 $m \leq 3$。这意味着，无论如何对 T_4进行染色，其中的元素都将构成一个顶点位于这些元素中的单色等边三角形。但 T_4 的边长为 3。第二个断言源于以下事实： Ψ_m 可满足当且仅当 $m \leq 4$。至于单色三角形的边长没有上界这一事实，注意对于所有 $k \in \mathbb{N}$，我们可以改为考虑三角格 $k\mathbb{Z} + k\mathbb{Z}\theta$。□

推论 9.2 对于方格的每一种染色 s： $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \to \{0, 1\}$，该方格包含：

1. 无穷多个与格轴平行、具有偶数个黑色顶点的正方形，其边长为 ≤ 2。*2.* 无穷多个与格轴平行、黑色顶点数与白色顶点数不同的正方形，其边长为 ≤ 4。*3.* 无穷多个单色水平或斜置正方形，其边长为 ≤ 6。*4.* 无穷多个单色水平正方形，其边长为 ≤ 14。

此外，每种类型都有无穷多个更大的正方形，且其边长没有上界。

证明：第一个结论是将线性问题作为开胃菜来考察所得的推论。第二个结论由关于公式 Π_m 的定理 2.2 得出，第三个结论则由关于公式 Ω_m的定理 5.1 得出。根据定理 5.2， $\mathbb{Z}^2$ 的每个 15×15 子网格都包含一个单色的轴平行正方形。无限格 $\mathbb{Z}^2$ 包含无穷多个两两不相交的 15×15子网格，因此我们可以得到无穷多个这样的正方形。它们的边长至多为 14，因为这是包含在网格 15×15 中的正方形的最大边长。
同样，方格包含具有任意大单位距离的子群 $k\mathbb{Z} \times k\mathbb{Z}$，这些结果也适用于这类方格。□

以下命题与 Alm 在 [1], 中证明的命题类似，是 Gallai 定理的推论。在所引的研究中，Alm 未注意到密度方面。

推论 9.3 如果 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是一个单连通开集，且 s： $\mathbb{R}^2 \to \{0, 1, \ldots, k-1\}$ 是平面的一种k染色，那么 U 中包含连续统多个单色等边三角形和连续统多个单色正方形。

证明：取一个等边三角形 $T \subset U$。根据 Gallai 定理，我们知道存在一个最小网格 T_m，它无法在不出现单色等边三角形的情况下进行 k染色。将 T 的边等分为 $m-1$ 段，并在 T内构造一个 T_m 的副本。现在，这个有限网格被 k 染色，因此出现了一个单色等边三角形。对这个网格进行连续统多个无穷小平移，仍可使其保持在 U内，而且每次平移后都会出现一个单色等边三角形。正方形的证明完全相同。 □
但是，如果没有关于最小网格的任何信息，就无法为这些单色图形的边长设定下界。可以作如下改进：

推论 9.4 设 $s:\ \mathbb{R}^2 \to \{0,1\}$ 是平面的一种染色，且 $U \subset \mathbb{R}^2$ 是一个单连通开集。

1. 对于包含在 U 中、边长为 d 的每个等边三角形 T $(d \in \mathbb{R}, d > 0)$，$U$ 中都包含连续统多个单色等边三角形，且它们的每个边长 l 都满足 $d \geq l \geq d/4$。所有这些等边三角形的边都平行于 T 的边，并且与 T 取向相同。此外，U 中也包含连续统多个单色等边三角形，且它们的每个边长 l 都满足 $d \geq l \geq d/3$。

2. 对于包含在 U 中、边长为 d 的每个正方形 S $(d \in \mathbb{R}, d > 0)$，$U$ 中都包含连续统多个单色正方形，且它们的每个边长 l 都满足$d \geq l \geq d/14$。所有这些正方形的边都平行于 S 的边。此外，U 中也包含连续统多个单色正方形，且它们的每个边长 l 都满足 $d \geq l \geq d/6$。

证明：将网格 T_5 匹配到三角形 T 上，就会得到一个单色等边三角形，它与 T 平行、取向相同，边长为 $\geq d/4$。对于满足 $T + \vec{x} \subset U$的每个平移 $T + \vec{x}$，情况都一样，因此我们得到连续统多个边长为 l 的单色等边三角形，其中 $d \geq l \geq d/4$ 与 T 平行，且取向与 T相同。其他结论也有类似的证明。□

对于矩形 R_2、R_3、R_4 或 R_5的位似图形，也可以陈述类似的推论。

参考文献

[1] **Jeremy F. Alm**关于平面染色的 *Gallai* 定理的无限基数版本。arXiv:1304.3154 [math.CO], 2014.[2] **Roland Bacher, Shalom Eliahou**不含常数 *2*-正方形的极值二元矩阵。《组合学杂志》1，77–100，2010 年。[3] **Armin Biere, Marijn Heule, Hans van Maaren, Toby Walsh (eds.)**《可满足性手册》。人工智能与应用前沿，第 185 卷，IOS Press，2009 年。[4] **Armin Biere, Katalin Fazekas, Mathias Fleury, Maximilian Heisinger***CaDiCaL*、*Kissat*、*Paracooba*、*Plingeling* 和 *Treengeling* 参加 *SAT* 竞赛 *2020*。载于：SAT 竞赛 2020——求解器与基准描述，第 50–53 页，2020 年。[5] **Jo Devriendt, Bart Bogaerts, Maurice Bruynooghe, Marc Denecker***BreakID*：*ASP* 的静态对称性破缺。《逻辑编程理论与实践》17(1)，1–35，2017 年。[6] **Stephen Fenner, William Gasarch, Charles Glover, Semmy Purewal**网格的无矩形着色。arXiv:1005.3750v2 [math.CO], 2012.[7] **Ronald L. Graham, Bruce L. Rothschild, Joel H. Spencer**拉姆齐理论，第二版。Wiley-Interscience 离散数学与优化丛书，John Wiley & Sons Inc.，纽约，1990 年。[8] **Peter L. Hammer, Sergiu Rudeanu** 伪布尔规划。《运筹学》17(2)，233–261，1969 年。[9] **Alexey Ignatiev** *PySAT*：用于基于 *SAT* 预言机进行原型开发的 *Python* 工具包。载于：SAT 2018 论文集，LNCS 10929，第 428–437 页，Springer，2018 年。[10] **A. Y. Khinchin**《数论三珍》。Dover 数学丛书，纽约，1998 年。

[11] **Richard Rado** 关于组合分析的注记。《伦敦数学会会刊》(2) 48，122–160，1943 年。[12] **Alexander Soifer**《数学染色手册：染色数学及其创造者的多彩人生》。 Springer，纽约，2009 年。[13] **Bernd Steinbach, Christian Posthoff**极其复杂的四色无矩形网格：多值问题的解决方案。 载于：2012年IEEE第42届国际多值逻辑研讨会（ISMVL），第 37–44 页，2012 年。[14] **Bartel Leendert van der Waerden**关于 *Baudets* 猜想的证明。《新数学档案》15，212–216，1927 年。[15] **Paul Walton, Wing-Ning Li**通过 *SAT* 求解器搜索无单色正方形的拉姆齐网格着色。 载于：2013年国际信息科学与应用会议（ICISA），IEEE，2013 年。DOI：10.1109/ICISA.2013.6579363。[16]**Ernst Witt** 初等几何的一个组合定理。《数学通讯》6(5)，18–19，1951 年。