arXiv:2512.23342v1 [math.SP] 29 Dec 2025

多分辨率反卷积

MIRZA KARAMEHMEDOVIĆ、PIERRE MARÉCHAL、MARTIN SÆBYE CARØE 和 LARA BAALBAKI

摘要。我们将 $\mathbb{R}^n$ 中的经典反卷积框架扩展到如下情形：解算子具有类伪微分形式，其符号同时依赖于基变量和余切变量。我们的框架支持空间变化分辨率下的反卷积，同时保持全局稳定性，并且还允许相当一般的分布卷积核。我们给出相容性、收敛性和稳定性结果，以及收敛速率。最后，我们提供数值示例，以支持所得结果并展示这一广义框架的优势。

1. 引言

反卷积问题是应用科学中众多问题的核心，涉及信号与图像处理、统计学等领域。这是一类不适定逆问题，其正则化已成为许多研究的主题。本文关注所谓的平滑化方法，旨在将其推广为可变分辨率版本。在全文中，“分辨率”指通过反演方法恢复的精确频谱内容的多少。我们通常将分辨率视为逆问题解的一种局部性质。

平滑化基本上有三种形式：第一种是在应用理论逆算子之前先对数据进行平滑化（参见 [9] 及其中的参考文献）。第二种由开创性论文 [8], 提出，它利用希尔伯特对偶性将初始问题转化为伴随方程，而伴随方程有时可以得到显式解。此方法随后被称为近似逆方法，并在 [10]中得到进一步发展。第三种平滑化形式称为变分平滑化，因为它主要以优化的形式表述，与蒂霍诺夫正则化相同。据我们所知，这种形式最早见于 [7], 随后在 [1, 2, 4]中得到研究。

需要指出的是，正如 [4], 所述，在处理反卷积问题时，前两种平滑化形式会得到相同的解。我们主要关注变分平滑化，它的灵活性更强，同时还能达到阶最优收敛速率 [4]。

我们考虑方程 $T_\gamma f = g$，其中 $T_\gamma\colon L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n)$ 是由 $\gamma\colon T_\gamma f = \gamma * f$, f 定义的卷积算子， g 是未知函数，而 $n \in$ 是数据。这里，$\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots\}$，卷积核 γ（暂时）取自$L^1(\mathbb{R}^n)$，其中 $\widehat{\gamma}(0) \neq 0$, $\widehat{\gamma}$ 是 γ 的傅里叶变换。在全文中，我们将

采用以下傅里叶变换及其逆变换的约定：

$$Fu(\xi) = \widehat{u}(\xi) = \int_{x\in\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i x\xi} u(x)\,\mathrm{d}x, \quad F^{-1}u(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} u(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

这里， $x\xi$ 表示 x 和 ξ 在 $\mathbb{R}^n$中的欧几里得内积。

对于给定 $g = T_\gamma f = \gamma * f$而求解 f的反卷积问题，我们在此假设标准设置 f, $g \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ [4]。给定线性不适定算子方程 $Tf = g$，若算子族$(R_\alpha)_{\alpha\in(0,1]}$满足以下条件，则称其为伪逆 $T^\dagger$的正则化：对于域 $\mathscr{D}(T^\dagger)$中所有 g，存在一个参数选择规则 $\alpha(\delta, g^{(\delta)})$，使得

$$\text{(i)}\ \sup\left\{\left|\alpha(\delta,g^{(\delta)})\right| \,\middle|\, g^{(\delta)}\in G,\ \left\|g^{(\delta)}-g\right\|\le\delta\right\}\to 0 \text{ as } \delta\searrow 0;$$
$$\text{(ii)}\ \sup\left\{\left\|R_{\alpha(\delta,g^{(\delta)})}g^{(\delta)}-T^\dagger g\right\| \,\middle|\, g^{(\delta)}\in G,\ \left\|g^{(\delta)}-g\right\|\le\delta\right\}\to 0 \ \text{ as } \ \delta\searrow 0.$$

参见 [3], 定义 3.1。回顾一下，若族(R_α)逐点收敛到 $T^\dagger$ 在$\mathscr{D}(T^\dagger)$上的值——我们将这一性质称为相容性——则它是 $T^\dagger$的正则化。另见 [3],命题 3.4。

平滑化旨在重建 $\phi_\beta * f$，其中 $(\phi_\beta)_{\beta\in(0,1]}$是一个磨光函数，现具体定义如下。给定一个可积函数 ϕ ，并且满足$\widehat{\phi}(\xi) = 1$ 当且仅当 $\xi = 0$，我们令

$$\phi_\beta(x) := \frac{1}{\beta^n}\phi\left(\frac{x}{\beta}\right).$$

$\widehat{}$ $\widehat{}$回顾一下， $\widehat{\phi_\beta}(\xi) = \phi(\beta\xi)$，因此 β 在傅里叶域中起到膨胀参数 的作用。我们有时将 ϕ_β 称为反卷积核。其选择主要取决于解的可解释性 ，因此具有一定的灵活性。各向同性、光滑性、支撑集紧致等假设都很常见（但并非必需）。

通过原始平滑化形式和近似逆算子得到的解，在傅里叶域中写作：

$$\frac{\widehat{\phi}_\beta}{\widehat{\gamma}}\widehat{g}, \tag{1}$$

（见 [4, 附录 B]），而平滑化的变分形式给出的解为

$$\widehat{f}_\beta = \frac{\overline{\widehat{\gamma}}\widehat{\phi}_\beta}{|\widehat{\gamma}|^2 + \left|1-\widehat{\phi}_\beta\right|^2}\widehat{g}. \tag{2}$$

后一个函数的傅里叶逆变换确实是泛函的唯一极小化者

$$f \mapsto \|T_\gamma f - C_\beta g\|^2 + \|(I - C_\beta)f\|^2,$$

其中， I 表示恒等算子， C_β 表示由 ϕ_β进行卷积的算子。这里我们注意到，另一种表述

$$f \mapsto \|T_\gamma f - g\|^2 + \|(I - C_\beta)f\|^2$$

$\widehat{}$也被考虑在内 [4], ，在这种情况下，(2) 的分子中没有因子 ϕ_β 。在这两种情况下，正则化参数 β 都可以解释为

分辨率级别的所提出重建公式。 β 越接近零，目标分辨率越高，解也越不稳定。

与 (1) 相比，(2) 的一个明确优势是，在定义其解及保证其适定性时，对磨光函数 ϕ 的假设很少。显然， $\widehat{\gamma}$ 的零点要求在 (1) 的滤波器分子中采用截断函数，并由此限制正则化参数的选择。此外，为了确保适定性，磨光函数的傅里叶变换必须以一定速率衰减，从而保证滤波器有界。由于在构造上分母始终远离零，平滑化的变分形式不需要这些限制。

从形式上看，我们可以将 (2) 中的 滤波器 视为某个伪微分算子的 符号 [1] ，该算子作用于 g ，以重建 f 的平滑化版本；这个版本不依赖于空间变量 x。鉴于卷积算子的 准局部 特性，自然可以考虑对该符号进行扩展，以编码分辨率级别的空间变化。因此，我们考虑如下的一般形式的重建公式:

$$R_{\alpha,\beta}g(x) = \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} \frac{\overline{\widehat{\gamma}(\xi)}\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + \left|1-\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)\right|^2} Fg(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad x\in\mathbb{R}^n. \tag{3}$$

上述重建公式是本文所考虑公式的可变分辨率版本，具体而言

$$R_{\alpha,\beta}g(x) = F^{-1}\left[\frac{\overline{\widehat{\gamma}(\xi)}\widehat{\phi}(\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + \left|1-\widehat{\phi}(\xi)\right|^2}\right] Fg. \tag{4}$$

通过这样做，我们希望提高特别重要区域的分辨率，即使这意味着降低较不重要区域的分辨率，同时又不损失整体稳定性。这种方法背后的直觉基于这样一个观察: 稳定性不仅取决于合成未知对象的傅里叶变换的域大小，也取决于对象支撑集的大小（这是对海森堡主题的一种变体）；因此，在大小有限的关注区域内达到高频应该是可行的。

请注意，正则化参数 β 已被函数 $\beta(x)$（一种无限维对象）所取代。为进行相容性和收敛性分析，我们进一步将 $\beta(x)$ 替换为 $\alpha\beta(x)$，其中 $\alpha\in(0,1]$。现在，我们回到了熟悉的一维参数正则化框架，并将伪逆 $T^\dagger$ 的候选正则化 方法定义为由 $(R_{\alpha,\ \beta})_{\alpha\in(0,1]}$ 给出的族

$$R_{\alpha,\beta} := \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} \frac{\overline{\widehat{\gamma}(\xi)}\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + \left|1-\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)\right|^2} F(\cdot)(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

[1] 严格来说，滤波器 $p(\xi)$ 不必是光滑的；即使它是光滑的，其导数也不必满足形如 $|\partial^\alpha p(\xi)| \le C_\alpha(1+|\xi|)^{|\alpha|}$、 $\xi\in\mathbb{R}^n$、 $\alpha\in\mathbb{N}_0^n$ 的界，因此所得算子不一定是 Hörmander [5] 意义下的经典伪微分算子。

本文其余部分的组织如下：在第2节中，我们证明，在适当假设下，重建公式 (3) 是一种 正则化方法。具体而言，我们证明公式 (3) 在逐点意义下是良定义的（定理 1），由 (3) 得到的重建 $R_{\alpha,\ \beta}g$ 在 $\alpha \searrow 0$ 时逐点收敛于正确的 f（定理 2）；此外，我们还求出了对于充分光滑（但相当一般的） f 以及含噪数据 g，相应的逐点收敛速率和 L^p 收敛速率（定理 3）。随后，我们通过证明重建公式中 L^2-范数稳定性与分辨率之间权衡关系的一个显式联系（定理4），完成理论分析。然后，在第3节中，我们利用数值模拟说明我们的方法，并讨论参数选择规则。最后，我们在第4节中给出结论与展望。

2. 重建公式的基本性质

假设1。 在本节中，我们假设函数 $\beta(x)$ 有上界且严格大于零，即 $c \leq \beta(x) \leq C$ 对于某些正常数 c 和 C，对所有 $x \in \mathbb{R}^n$均成立。我们还假设 $\phi(\xi) = 1$ 当且仅当 $\xi = 0$，且 $\widehat{\gamma}(0) \neq 0$。最后，我们一贯假设目标函数 f和数据函数 g 都属于 $L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$。

根据黎曼-勒贝格引理， f 和 $\widehat{g}$ 有界，因此在 $\mathbb{R}^n$ 中每一点都有定义。此外，我们看到式（3）中滤波器的分母始终严格大于零。事实上， $|\widehat{\gamma}(\xi)|^2$ 只能在ξ 范数严格大于某个正数的点处取零，而在这些点上， $|1 - \widehat{\phi}(\xi)|^2$ 本身也严格大于零。

形式化定义

$$R_{\alpha,\beta}g(x) := \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} \frac{\overline{\widehat{\gamma}}(\xi)\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2} \widehat{g}(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n, \tag{5}$$

第 1 节给出的重建公式，在点态意义下适用于相当 r
一般的卷积核和磨光函数正则性条件。

定理 1 (式 (3))**的点态良定义性**。若

(1) $\gamma \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *and* $\phi \in L^1(\mathbb{R}^n)$, *or if*
(2) $\widehat{\gamma}(\xi)$ *is well-defined a.e. in* $\mathbb{R}^n$ *and* $\phi \in L^2(\mathbb{R}^n)$,

那么 $R_{\alpha,\beta}g(x)$ 在 (5) 中对所有 $\alpha > 0$ 和 $x \in\mathbb{R}^n$均有定义。

证明。若 $\widehat{\gamma}(\xi)$ 和 $\phi(\xi)$ 在 $\mathbb{R}^n$ 上几乎处处有定义，则对每个 $x \in \mathbb{R}^n$，以及对$j = 1,2$，都存在满足下式的正常数 C_j

$$\frac{|\widehat{\gamma}(\xi)|^j}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2} \leq C_j, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

在情形 (1) 中，黎曼-勒贝格引理表明 $\phi \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$，然后根据柯西-施瓦茨不等式，对于每个 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有$|R_{\alpha,\ \beta}g(x)| \leq$

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }C_1\mathrm{k}\phi\mathrm{k}_{L^\infty}(\mathrm{R}^n)\mathrm{k}\widehat{\gamma}\mathrm{k}_{L^2}(\mathrm{R}^n)\mathrm{k}f\mathrm{k}_{L^2}(\mathrm{R}^n)$。在情形 (2) 中，柯西-施瓦茨不等式给出$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }|R_{\alpha,\ \beta}g(x)| \le C_2\mathrm{k}\phi\mathrm{k}_2\mathrm{k}f\mathrm{k}_2$ 对于每个 $x \in \mathrm{R}^n$。□

备注 1. 满足定理 *1* 假设的特殊情形包括 $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ 中的平滑函数，这在实践中很常见；还包括卷积核$\gamma \in E'(\mathbb{R}^n)$ （根据 *Paley-Wiener-Schwartz* 定理 [6, 定理 7.3.1，第181] 可推出 $\widehat{\gamma} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$），以及 $\gamma \in L^p(\mathbb{R}^n)$ 中满足 $p \in [1,2]$ 的函数（根据豪斯多夫-杨定理 [6, 定理 7.1.13，第 165] 可推出 $\widehat{\gamma} \in L^q(\mathbb{R}^n)$ 且满足$1/p + 1/q = 1$）。

事实上，算子 $R_{\alpha,\beta}$ 对 f 提供了逐点重构:

定理 2 (**(3) 的逐点收敛**)。 在定理 *1* 对 γ, ϕ 的假设下，且当 f 逐点有定义时，我们有

$$\lim_{\alpha \searrow 0} R_{\alpha,\beta}g(x) = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

证明。 我们已在定理 1 中证明，被积函数在 (5) 中的模有一个可积函数作为上界。注意到对于每个 $\xi \in \mathrm{R}^n$，定理即可由勒贝格控制收敛定理得出，

$$\lim_{\alpha \searrow 0} \frac{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)\widehat{f}(\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2} = \widehat{f}(\xi),$$

并且

$$|f(x) - R_{\alpha,\beta}g(x)| \le \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \left| \frac{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)\widehat{f}(\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2} - \widehat{f}(\xi) \right| \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad \square$$

以下我们将 $\xi\langle\xi\rangle = 1 + |\xi|$ 记作 $\xi \in \mathrm{R}^n$，并将 $A^s(\mathrm{R}^n)$（其中 $s \in \mathrm{R}$）记作由满足 $|\xi|^s\widehat{u} \in L^1(\mathrm{R}^n)$ 的函数 u 构成的函数空间。

注 2。 回想一下，当 $\sigma < -n$ 时，

$$\begin{aligned}\int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^\sigma \,\mathrm{d}\xi &= \textstyle\int_{\omega \in S^{n-1}} d\omega \int_{r=0}^\infty r^{n-1}(1+r)^\sigma dr \le \mathrm{Area}(S^{n-1}) \int_{r=0}^\infty (1+r)^{\sigma+n-1} dr \\ &= 2\pi^{n/2}/(\Gamma(n/2)|\sigma+n|) < \infty,\end{aligned}$$

其中我们用表达式 [11,式 (A.4)，第 306] 表示 S^{n-1} 的面积。

现在注意，当 $s' > s + n/2$ 时， $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset A^s(\mathbb{R}^n)$，因为此时

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^s |\widehat{f}(\xi)| \,\mathrm{d}\xi &\le \int_{\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{s'} |\widehat{f}(\xi)| \langle\xi\rangle^{s-s'} \,\mathrm{d}\xi \\ &\le \|\langle\xi\rangle^{s'}\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \sqrt{\int_{\langle\xi\rangle \in \mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2(s-s')} \,\mathrm{d}\xi} < \infty.\end{aligned}$$

具体而言，我们有

- $C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^n) \subset H^\infty(\mathbb{R}^n) \subset A^s(\mathbb{R}^n)$ 对所有实数 s,
- $L^2(\mathbb{R}^n) = H^0(\mathbb{R}^n) \subset A^{-n/2-\varepsilon}(\mathbb{R}^n)$ 对所有 $\varepsilon > 0$,
- $H^{s'}(\mathbb{R}^n) \subset A^s(\mathbb{R}^n) \cap C(\mathbb{R}^n)$ 对于 $s' > s + n/2$ 及任意 $s > 0$,
- $A^s(\mathbb{R}^n) \subset L^\infty(\mathbb{R}^n)$ 对任意 $s \ge 0$。

现在我们可以陈述并证明主要的收敛速率结果。这些结果在数据中存在适当的谱有界噪声时同样成立。我们证明收敛速率时使用确定性积分来处理噪声项，也就是说，我们逐个实现地处理噪声。

定理 3（式 **(3)** 的逐点收敛速率及 L^p 收敛速率）。若 γ 和 ϕ 满足定理 **1** 的假设，且常数 $a \geq 1$、b、c、$d > 0$ 满足 $a^{-1}\langle\xi\rangle^{-b} \leq |\widehat{\gamma}(\xi)|$ 和 $|1 - \widehat{\phi}(\xi)| \leq c|\xi|^d$（对 $\xi \in \mathbb{R}^n$），那么对于所有 $f \in A^{2(b+d)}(\mathbb{R}^n)$ 以及所有满足 $|\delta(\xi)| \leq E\langle\xi\rangle^{\sigma}$（对某个 $\sigma < -n - b - d$）的噪声项 $\delta\widehat{\ }$，我们有

(1) $|f(x) - f^{(\delta)}_{\alpha,\beta}(x)| = O((\alpha\beta(x))^d)$ *as* $\alpha \to 0$, *uniformly in* $x \in \mathbb{R}^n$, *and*
(2) $\|f - f^{(\delta)}_{\alpha,\beta}\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)} \lesssim \|(\alpha\beta)^d\|^p_{L^p(\mathbb{R}^n)}$ *for* $\alpha \in (0,1)$ *and* $p \in [1,\infty]$.

证明。 对于所有 $\alpha \in (0,1)$ 和 $x \in \mathbb{R}^n$，我们有

$$\begin{aligned}
|f(x) - f^{(\delta)}_{\alpha,\beta}(x)| &= \left| \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} \widehat{f}(\xi) \left(1 - \frac{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2}\right) \mathrm{d}\xi \right. \\
&+ \left. \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} e^{2\pi i x\xi} \frac{\overline{\widehat{\gamma}}(\xi)\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + |1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|^2} \widehat{\delta}(\xi)\, \mathrm{d}\xi \right| \\
&\leq \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\widehat{f}(\xi)||1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)| \left(1 + \frac{|1 - \widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2}\right) \mathrm{d}\xi \\
&+ \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \frac{|\widehat{\phi}(\alpha\beta(x)\xi)|}{|\widehat{\gamma}(\xi)|} |\widehat{\delta}(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \\
&\leq c(\alpha\beta(x))^d \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} |\xi|^d |\widehat{f}(\xi)| \left(1 + a^2 c(\alpha\beta(x))^d |\xi|^d \langle\xi\rangle^{2b}\right) \mathrm{d}\xi \\
&+ acE(\alpha\beta(x))^d \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{b+d+\sigma}\, \mathrm{d}\xi \\
&\leq (\alpha\beta(x))^d \Big(c\left(1 + a^2 c\|\beta\|^d_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}\right) \int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^{2(b+d)} |\widehat{f}(\xi)|\, \mathrm{d}\xi \\
&+ acE \frac{2\pi^{n/2}}{\Gamma(n/2)|n + b + d + \sigma|} \Big).
\end{aligned}$$

□

接下来，我们在对卷积核 γ 和磨光函数 ϕ作温和假设的前提下，考察所选最高局部分辨率与反卷积问题解的全局 L^2-范数稳定性之间的权衡。因此，$\widehat{\ }$设磨光函数 ϕ 的傅里叶变换为径向函数，$\phi(\xi) = \Phi(|\xi|)$（对$\xi \in \mathbb{R}^n$），并且还满足

$$\Phi(t) \leq c(1 + t)^{-d}, \quad t \geq 0,$$

其中 c 和 d为某些正常数。我们还假设卷积核 γ 的傅里叶变换满足

$$a^{-1}\langle\xi\rangle^{-b} \leq |\widehat{\gamma}(\xi)| \leq a\langle\xi\rangle^{b}, \quad \xi \in \mathbb{R}^n,$$

其中 $a \geq 1$ 和 $b > 0$为某些常数。由式 (3) 可知，映射 $g \mapsto f_{\alpha,\ \beta}$可以写成

$$f_{\alpha,\beta}(x) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i x \xi} p_{\alpha,\beta}(x,\xi) \widehat{g}(\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

具有“符号”

$$p_{\alpha,\beta}(x,\xi) = \frac{\overline{\widehat{\gamma}(\xi)} \Phi(\alpha\beta(x)|\xi|)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2 + (1 - \Phi(\alpha\beta(x)|\xi|))^2}, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ \xi \in \mathbb{R}^n,$$

以及相应的Schwartz核

$$k_{\alpha,\beta}(x,y) = \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} e^{2\pi i \xi (x-y)} p_{\alpha,\beta}(x,\xi)\, \mathrm{d}\xi, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

假设数据 g 支撑于子集 $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$中，并且将解 $f_{\alpha,\beta}$ 限制在 Ω 上；那么映射$g \mapsto f_{\alpha,\beta}$ 的 Schwartz 核 $k_{\alpha,\beta}$ 在 $(x,y) \in \Omega^2$上有定义。记 $f_{\alpha,\beta,j}$ 分别为由数据 g_1 和 g_2 得到的 f 的重建结果。

定理4 (**分辨率与稳定性权衡**)。 存在正常数 C，其精确取决于 a、 b、 c、 d、 n、域 Ω 的大小 $\mu(\Omega) = \int_\Omega \mathrm{d}x$ ， 使得

$$\|f_{\alpha,\beta,1} - f_{\alpha,\beta,2}\|_{L^p(\Omega)} \leq C \left(\alpha \inf_{x \in \Omega} \beta(x) \right)^{-n-b} \|g_1 - g_2\|_{L^p(\Omega)}, \quad p \in [1, \infty],$$

当 $\alpha \inf_{x\in\Omega} \beta(x) \searrow 0$。

证明。 为简洁起见，记为 $B = \alpha \inf_{x\in\Omega} \beta(x)$。我们首先注意到

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mathrm{Area}(S^{n-1})} \int_{\xi \in \mathbb{R}^n} \langle \xi \rangle^b (1 + B|\xi|)^{-d}\, \mathrm{d}\xi = \int_{r=0}^{\infty} r^{n-1} (1+r)^b (1+Br)^{-d} dr \\
&\quad = \frac{\Gamma(d-b-n)\Gamma(n-d)}{\Gamma(-b)} B^{-d}\, {}_2F_1(d, d-b-n; 1-n+d; B^{-1}) \\
&\qquad + \frac{(n-1)!\Gamma(d-n)}{\Gamma(d)} B^{-n}\, {}_2F_1(n, -b; 1+n-d; B^{-1}),
\end{aligned}$$

然后回忆众所周知的事实:

$${}_2F_1(a,b;c;z) \sim \frac{\Gamma(b-a)\Gamma(c)}{\Gamma(b)\Gamma(c-a)} (-z)^{-a} + \frac{\Gamma(a-b)\Gamma(c)}{\Gamma(a)\Gamma(c-b)} (-z)^{-b}$$

如 $z \to \infty$。因此，存在一个常数 C'，它仅取决于 b、d 和 n，并且满足

$$\begin{aligned}
&\int_{\xi\in\mathbb{R}^n} \langle\xi\rangle^b (1+B|\xi|)^{-d}\,\mathrm{d}\xi \\
&\quad\le\quad C'\mathrm{Area}(S^{n-1}) \\
&\quad\times\quad \Big((-1)^{-d}\frac{\Gamma(n-d)\Gamma(-b-n)\Gamma(1-n+d)}{\Gamma(-b)\Gamma(1-n)} \\
&\quad+\quad B^{-n-b}(-1)^{b+n-d}\frac{\Gamma(d-b-n)\Gamma(n-d)\Gamma(b+n)\Gamma(1-n+d)}{\Gamma(-b)\Gamma(d)\Gamma(1+b)} \\
&\quad+\quad (-1)^n\frac{(n-1)!\Gamma(d-n)\Gamma(-b-n)\Gamma(1+n-d)}{\Gamma(-b)\Gamma(d)\Gamma(1-d)} \\
&\quad+\quad B^{-n-b}(-1)^b\frac{\Gamma(d-n)\Gamma(b+n)\Gamma(1+n-d)}{\Gamma(d)\Gamma(1+n-d+b)}\Big) \\
&\quad=\quad O(B^{-n-b}) \text{ as } B\searrow 0.
\end{aligned}$$

接下来，对于所有 $\alpha>0$ 和 $y\in\Omega$，我们有

$$\begin{aligned}
\int_{x\in\Omega}|k_{\alpha,\beta}(x,y)|\,\mathrm{d}x &\le \int_{x\in\Omega}\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\frac{|\widehat{\gamma}(\xi)|\Phi(\alpha\beta(x)|\xi|)}{|\widehat{\gamma}(\xi)|^2+(1-\Phi(\alpha\beta(x)|\xi|))^2}\,\mathrm{d}\xi\,\mathrm{d}x \\
&\le \mu(\Omega)a^3c\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^b(1+B|\xi|)^{-d}\,\mathrm{d}\xi,
\end{aligned}$$

类似地，对于所有 $\alpha>0$ 和 $x\in\Omega$，

$$\int_{y\in\Omega}|k_{\alpha,\beta}(x,y)|dy \le \mu(\Omega)a^3c\int_{\xi\in\mathbb{R}^n}\langle\xi\rangle^b(1+B|\xi|)^{-d}\,\mathrm{d}\xi.$$

因此，根据 [11, 命题 5.1，第 573], 页

$$\|g\mapsto f_{\alpha,\beta}\|_{L^\tau(\Omega)\to L^\tau(\Omega)} \le C'\mu(\Omega)a^3c(\alpha\inf_{z\in\Omega}\beta(z))^{-n-b}$$

对于所有 $\tau\in[1,\infty]$，且当正数 $\alpha\inf_{x\in\Omega}\beta(x)$ 充分小时。 □

3. 数值示例、数值稳定性分析、附加约束

3.1. 参数选择。 逆问题中的一个核心问题是稳定性，即解对数据扰动的敏感程度。在线性情形下，可以通过不同但互为补充的方式评估稳定性。一种经典方法是考察重建算子的范数，它量化了绝对误差从数据传递到解时的放大程度。或者，算子的条件数决定了相对误差的传播。条件数较大意味着数据中的微小相对扰动可能导致解中显著的相对误差。在选择合适的正则化策略时，这些稳定性概念至关重要，尤其是在确定正则化参数时，因为参数需要在稳定性与对观测数据的忠实度之间取得平衡。

在本研究中，我们采用稳定性驱动的正则化方法。我们并非仅依据保真度或分辨率标准来选择正则化参数，而是首先设定不稳定程度的预定上限，并对其进行量化，

具体取决于语境，可通过重建算子的范数或条件数进行量化。在这一约束下，我们进一步寻求与所需稳定性相容的最佳可达平均分辨率。在确立这一全局平衡后，我们探索提升特定感兴趣区域局部分辨率的可能性。其基本思想是：通过允许在不太关键的区域对分辨率进行可控的降低，可以在不违反全局稳定性约束的情况下，改善最重要区域的重构质量。

在接下来的几个小节中，我们将讨论去模糊问题，并借助数值分析中的标准工具来评估重建公式的稳定性。首先，我们考虑整个域上的均匀分辨率，并通过设定稳定性指标的可接受阈值，确定合适的平均分辨率。在此全局分析的基础上，我们再手动确定一个较小的感兴趣区域，并允许 β 在图像中随空间位置变化。通过提高所选区域的分辨率并降低其他区域的分辨率，我们表明，无需超出预先设定的全局稳定性界，也能实现局部增强。

对于给定的重建，从均匀的 β开始，我们应该能够在保持全局稳定性不变的情况下提高局部分辨率。

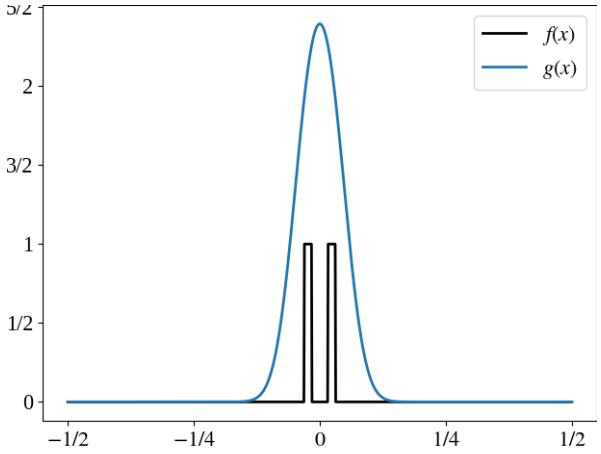


图 1. 真实值 $f(x)$和无噪数据 $g(x) = \gamma * f(x)$。

3.2.**一维反卷积**。 现在给出一维情况下固定分辨率反卷积和变分辨率反卷积的数值示例。图 1 展示了我们选取的目标（真实值）分段常数函数的图像，该函数包含宽度为 1/64、边缘间距为 1/32 的“脉冲”，以及无噪数据 $g(x) = \gamma * f(x)$，$x \in \mathbb{R}$；其中我们使用高斯卷积核$\gamma(x) = 0.1\exp(-x^2/0.05^2)$，$x \in \mathbb{R}$。图 2 展示了将重建公式 (3) 应用于无噪数据和含噪数据 $g(x)$ 后的结果，其中 α 和 $\beta(x)$ 取不同值。

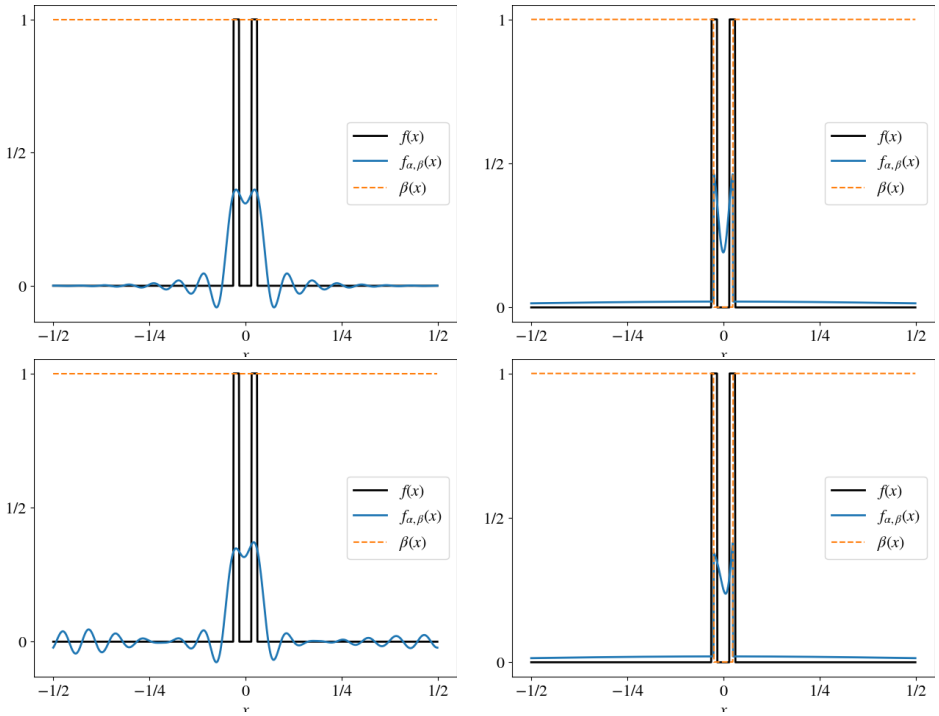


图 2。使用 $\alpha = 10^{-3}$ 和常数值β （左列）进行反卷积，与使用 $\alpha = 0.262$ 和单凹点 β （右列）进行反卷积的对比。所有情况下估计的条件数约为 7.6。数据中的噪声水平为 10^{-4} （上排）和 $5 \cdot 10^{-2}$ （下排）。

我们的变分辨率反卷积比经典反卷积更好地重建了目标函数 f 的局部高频特征，同时保持了全局稳定性。

3.3. 二维反卷积。 图 3 和图 4 展示了对经过模糊处理并添加噪声的 Shepp-Logan 模体进行重建的结果，该模体采用修改后的 601×601 分段常数 β。在两个高强度斑块周围选取了一个 β 值较低的感兴趣区域。该数值示例使用 MATLAB 构建。真实图像经过高斯滤波器模糊处理

$$\gamma(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2\sigma^2}\right)$$

使用 $\sigma = 7$ 并在模糊图像中加入高斯独立同分布噪声。重建通过对公式 (5) 进行离散化来完成。函数 g、 γ 和 ϕ 的傅里叶变换使用快速傅里叶变换（FFT）计算。设 $\boldsymbol{g} \in \mathbb{R}^{601\times601}$ 为函数 g 在像素网格上的取值。设$\hat{\boldsymbol{g}}$ 为 $\boldsymbol{g}$的 FFT。我们以解析方式计算函数 ϕ 和 γ的傅里叶变换。函数 γ 的傅里叶变换可以在与 $\hat{\boldsymbol{g}}$相同的网格上求得

^从而得到 $\widehat{\gamma}$。对于 $\beta(x)$ 的每个取值，我们都可以在同一网格上计算 $\phi(\alpha\beta(x)\xi)$，^从而得到 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}))$。

采用低阶格式对重建公式 (5) 进行离散化

$$(R_{\alpha,\beta}g)(x_1,x_2)=\sum_{j,k=1}^{601}e^{2\pi i(x_1\xi_{1j}+x_2\xi_{2k})}\frac{\overline{\widehat{\gamma}}_{jk}\widehat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}))_{jk}}{|\widehat{\gamma}_{jk}|^2+|1-\widehat{\boldsymbol{\phi}}(\boldsymbol{\alpha\beta}(\boldsymbol{x}))_{jk}|^2}\frac{1}{(\Delta\xi)^2}$$

通过恰当地选择网格，我们可以使用部分逆快速傅里叶变换计算此和。令 β 为分段常数，具有 L 个不同的值，$\beta_1,\ .....,\ \beta_L$，则恰好得到^ L 个数组 $\boldsymbol{\phi}(\boldsymbol{\alpha\beta_l})$，$l=1,\ .....,\ L$。因此，可以通过 L 次不同的部分逆快速傅里叶变换来计算重建。在下图中，我们考虑

$$\beta(x)=\begin{cases}\beta_1, & x\in\Omega_1,\\ \beta_2, & x\in\Omega_2,\end{cases}$$

其中 Ω_1 是感兴趣区域。令 $g_n=g+\varepsilon$，其中 $\varepsilon\sim\mathcal{N}(0,\ \sigma^2)$，且 $\sigma=10^{-2}$；并令 $\delta g=g_n-g$ 表示数据中的（小）扰动。我们计算

$$c_1=\frac{\|\delta g\|}{\|g\|}.$$

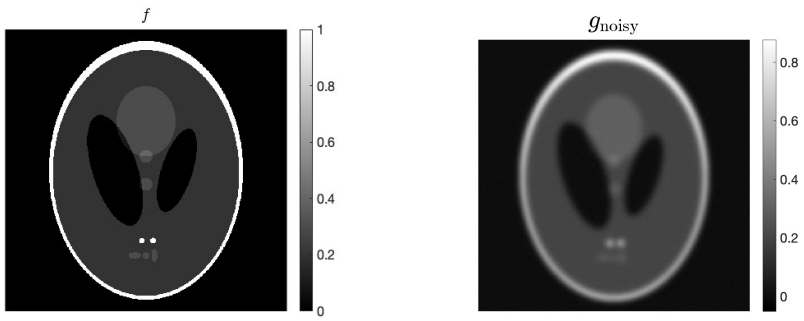
使用我们的重建算子，令 $f_{\mathrm{rec}0}$ 为由 g 得到的重建，f_{rec} 为由 g_n 得到的重建。定义 $\delta f=f_{\mathrm{rec}}-f_{\mathrm{rec}0}$，并计算

$$c_2=\frac{\|\delta f\|}{\|f_{\mathrm{rec}0}\|}.$$

条件数 κ （全局稳定性指标）的近似下界为

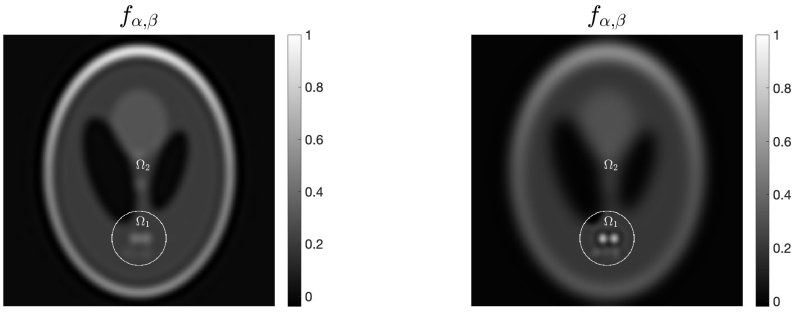
$$\kappa\approx\frac{c_2}{c_1}.$$

我们运行代码两次：一次使用常数 β，得到 $\kappa\approx0.06$；另一次使用变量 β，也得到 $\kappa\approx0.06$。



(a) 真实值 f。　　(b) 含噪模糊数据 $g_{\mathrm{noisy}}=\gamma*f+\varepsilon$。

图3。真实图像及对应的含噪模糊数据。



(A) (B)

图4。（A）重建 $f_{\alpha,\beta}$，其中 $\beta(x) = \beta_1 = 2.5$ 位于 Ω_1，而 $\beta(x) = \beta_2 = 2.5$ 位于 Ω_2,，具有全局稳定性 $\kappa \approx 0.06$。（B）重建 $f_{\alpha,\beta}$，其中 $\beta(x) = \beta_1 = 0.8$ 位于 Ω_1，而 $\beta(x) = \beta_2 = 6.4$ 位于 Ω_2,，具有全局稳定性 $\kappa \approx 0.06$。

图5展示了六个面板，说明在图像域中将圆形感兴趣区域“Ω_1”放置于不同位置时得到的重建结果 $f_{\alpha,\ \beta}$。在 Ω_1 内，我们使用 $\beta(x) = \beta_{\text{low}}$；在其补集 Ω_2 内，我们使用 $\beta(x) = \beta_{\text{high}}$，因此，移动圆形区域会改变较弱/较强正则化的施加位置。每幅图都显示了重建解、Ω_1 当前所在位置（红色圆圈），以及相应的全局稳定性常数 κ；该常数通过重建中的相对扰动与数据中的相对扰动之比计算得出。这使我们能够直观地观察感兴趣区域的空间位置如何影响逆问题的整体稳定性。

很自然会想到，能否不必像图5所示那样使用多分辨率反卷积来“扫描”图像，而只需在移动的小圆盘内对图像进行一系列恒定分辨率重建。我们认为，后一种方法并不可取，因为待重建对象的支撑集尺寸减小时，重建的稳定性通常会降低。因此，若要保持相同的稳定性 κ，小圆盘内重建结果的分辨率就会相对较差，见图6。为简便起见，该图中用等面积矩形代替了小圆盘。

4. 结论与展望

我们提出并分析了一种用于反卷积的变分平滑框架，该框架通过类伪微分重建算子实现空间变化分辨率。我们的框架允许分辨率局部变化，同时保持反卷积问题的全局稳定性不变。在对卷积核 γ 和磨光函数 ϕ作出温和假设的条件下，我们建立了逐点收敛、范数收敛和收敛速率方面的结果，并允许数据中含有噪声。我们还得到了一个明确的稳定性与分辨率之间的权衡关系，将全局 L^2 稳定性与最小局部分辨率级别联系起来。一维和二维数值实验验证了该理论。具体而言，我们

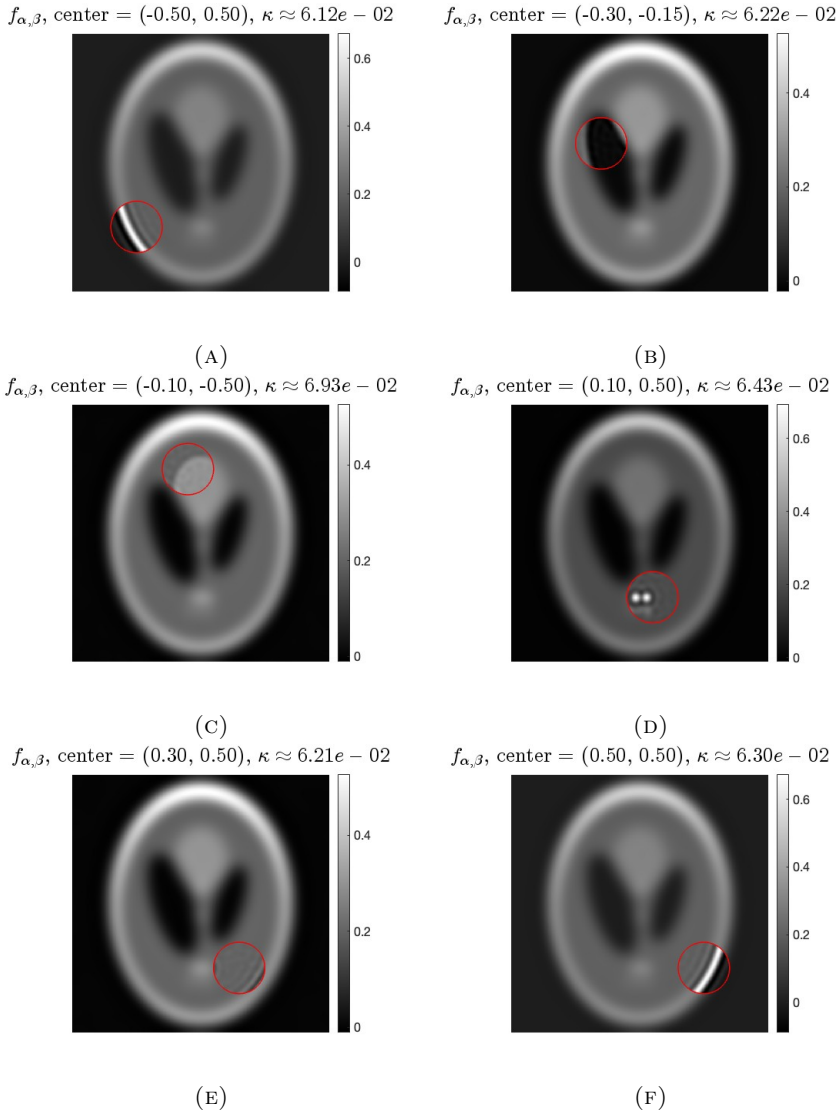


图5. 不同感兴趣区域位置下的重建结果 $f_{\alpha,\ \beta}$ 及相应的全局稳定性估计 κ。

展示了在不降低全局稳定性的情况下实现选择性锐化。未来的工作包括推广卷积核 γ、磨光函数 ϕ和目标函数 f所允许的正则性范围，以及推广噪声统计特性，尤其是纳入空间变异噪声，并利用随机积分处理噪声在重建公式中的贡献。

致谢

本研究由 Villum基金会第 58857 和 25893 号资助项目支持。

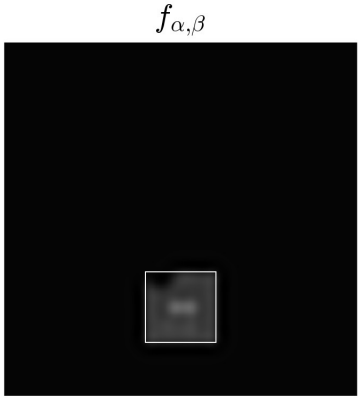


图5。一个保持稳定性估计为$\kappa \approx 0.06$，但只考虑少量数据的重建结果。请将其质量与图5中小圆盘内的重建结果进行比较。

参考文献

[1] *N. Alibaud*、*P. Maréchal* 和 *Y. Saesor*，《截断傅里叶算子求逆的变分方法》，《逆问题》，*25*（*2009*），第 *045002* 页。[2] *X. Bonnefond* 和 *P. Maréchal*，《某些紧算子求逆的变分方法》，《太平洋优化杂志》，*5*（*2009*），第 *97–110* 页。[3] *H. W. Engl*、*M. Hanke* 和 *A. Neubauer*，《逆问题的正则化》，第 *375* 卷，施普林格科学与商业媒体，*1996* 年。[4] *T. Hohage*、*P. Maréchal*、*L. Simar* 和 *A. Vanhems*，《利用磨光函数方法对概率密度进行反卷积》，《计量经济理论》，（*2022*），第 *1–40* 页。[5] *L. Hörmander*，《线性偏微分算子分析 *III*：伪微分算子》，数学科学基础丛书第 *274* 号，施普林格，*1985* 年。[6] *L. Hörmander*，《线性偏微分算子分析 *I*：分布理论与傅里叶分析》，施普林格，*2003* 年。[7] *A. Lannes*、*S. Roques* 和 *M.-J. Casanove*，《信号与图像处理中的稳定化重建：*I.* 有限视场下的部分反卷积与谱外推》，《现代光学杂志》，*34*（*1987*），第 *161–226* 页。[8] *A. K. Louis* 和 *P. Maass*，《第一类线性算子方程的磨光函数法》，《逆问题》，*6*（*1990*），第 *427* 页。[9] *D. A. Murio*，《磨光法与不适定问题的数值解》，约翰·威立父子公司，*2011* 年。[10] *T. Schuster*，《近似逆方法：理论与应用》，第 *1906* 卷，施普林格，*2007* 年。[11] *M. E. Taylor*，《偏微分方程 *I*：基础理论》，应用数学科学丛书第 *115* 卷，施普林格，第二版，*2011* 年。