arXiv:2512.23544v1 [math.GN] 29 Dec 2025

可数离散度空间都可以很小

ALAN DOW 和 ISTVÁN JUHÁSZ

摘要。本文的主要结果是证明，在弱紧基数的条件下，$2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ 与点对 $\mathfrak{c}$ 的以下性质 (*) 可以同时相容：

(*) 对任意着色（或划分） $k : [\mathfrak{c}]^2 \to 2$，要么存在一个大小为 $\mathfrak{c}$ 、颜色为 0 的齐次集，要么存在一个集合 $S \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$，使得对每个可数的 $A \subset S$，都存在 $\beta \in \mathfrak{c}$，满足 $A \subset \beta$ 且$k(\{\alpha, \beta\}) = 1$ 对所有 $\alpha \in A$ 均成立。

(*) 与 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ 一起蕴含：对每个可数离散度的拓扑空间 X（即不含任何不可数离散子集），若它是豪斯多夫空间，则 $|X| \leq \mathfrak{c}$；若它还是无限且正则的，则 $o(X) = \mathfrak{c}$。这里 $o(X)$ 表示 X 的所有开子集的数目。

1. 引言

回顾一下，拓扑空间 X 的离散度 $s(X)$ 是其所有离散子空间的基数的上确界。Hajnal 和 Juhász 在 [3] 证明了 $|X| \leq 2^{2^{s(X)}}$ 对任意豪斯多夫空间 X。特别地， X 具有可数离散度时，$|X| \leq 2^{\mathfrak{c}}$。我们还知道，任何具有可数离散度的正则空间 X 都有一个大小为 $\leq \mathfrak{c}$ 的网络，而这显然意味着

$$w(X) \leq o(X) \leq 2^{\mathfrak{c}}.$$

在 [6] Juhász 和 Shelah 证明，与 $\mathfrak{c}$ 和 $2^{\mathfrak{c}}$ 均可任意大且彼此独立这一条件相容的是，存在基数（分别为权）为 $2^{\mathfrak{c}}$ 的零维豪斯多夫空间，因此也是正则遗传可分（分别为遗传林德勒夫）空间（另见本文最后一节）。这表明，至少在相容性意义下，上述不等式是紧的。

日期：2025年12月30日。2010 年 数学主题分类。54A25, 54A35,54D10,03E04。关键词和短语。可数离散度、遗传 Lindelöf、权、分割关系。

反过来，Todorčević 在 [11] 证明，与 $|X| \leq \mathfrak{c}$ 相容：对任意可数离散度的豪斯多夫空间 X 都成立。但据我们所知，第二个不等式的类似结果尚未为人所知。特别是，尚不清楚以下情形是否相容：对任意正则遗传林德勒夫空间 X，都有 $w(X) \leq \mathfrak{c}$。（注意，若 X 是遗传林德勒夫的，那么 $w(X) \leq \mathfrak{c}$ 显然蕴含 $o(X) \leq \mathfrak{c}$。）事实上，这个问题正是我们开展当前研究的最初动机。

我们的主要结果表明，至少在弱紧基数存在这一假设下，我们确实可以得到以下一致性结论：$o(X) = \mathfrak{c}$ 对于任意可数离散度的无限正则空间 X，以及 $|X| \leq \mathfrak{c}$ 对于任意可数离散度的豪斯多夫空间 X。这与 [6]中的结果形成了鲜明对照，也印证了本文的标题。

我们的记号和术语沿用 [4]中的用法。下文中，空间一词始终指无限豪斯多夫空间。

2. 蕴含可数离散度空间很小的分划关系

我们先引入一个将用于实现目标、且其一致性将在后文得到证明的分划关系。

定义 2.1. (i) 若 A 和 B 是互不相交的序数集，则

$$(A;B) = \big\{\{\alpha,\beta\} : \alpha \in A,\, \beta \in B \text{ and } \alpha < \beta\big\}.$$

(ii) 一个（ω_1；ω_1）型半图是由形如（A；B）的序对组成的集合，其中 A 和 B 是互不相交的、序型为 ω_1 的序数集，且 $\sup A = \sup B$。

(iii) $\kappa \to$（ω_1，（ω_1；ω_1））表示如下命题：对于任意着色（或划分）$k : [\kappa]^2 \to 2$，要么存在一个 κ 的、大小为 ω_1 的齐次子集，且其颜色为 0；要么存在一个颜色为 1 的（ω_1；ω_1）型齐次半图。

众所周知，空间 X 是遗传可分的（分别地，遗传林德勒夫的）当且仅当 X 的每个左分离（分别地，右分离）子空间都是可数的。我们将需要这些概念的一种变体，不过对于正则空间而言，它们与原有概念相同。

定义 2.2。空间 X 是强左分离的（分别地，是强右分离的），如果它具有一个良序 $\prec$，使得每个点 $x \in X$都有一个闭邻域 W_x，并且当 $y \prec x$ 时有 $y \notin W_x$（分别地，$x \prec y$）。

如果 X 是强分离的，即它是强左分离或强右分离的。

显然，每个强分离空间都是豪斯多夫空间。

命题 2.3。 原理 $\kappa \to (\omega_1,(\omega_1;\omega_1))$ 蕴含每个基数为 κ 的强分离空间都含有一个不可数离散子空间。

证明。(i) 假设我们在 κ 上有一个强左分离拓扑。我们可以假设强左分离良序就是 κ 的标准序。对于每个 $\xi \in \kappa$，选取 ξ 的一个闭邻域 W_ξ，使其包含于 $\kappa \setminus \xi$ 中。根据 $k(\{\xi,\eta\}) = 1$ 给出的 $\eta \in W_\xi \setminus \{\xi\}$，定义着色 $k\colon [\kappa]^2 \to 2$。

显然，如果 $I \subset \kappa$ 是颜色 0 的齐次集，那么 I 是离散的。

因此，假设按递增顺序编排的 $A = \{\alpha_\xi\colon \xi < \omega_1\}$ 和 $B = \{\beta_\xi\colon \xi < \omega_1\}$ 是 κ 的子集，并且 $(A;B) \subset k^{-1}(1)$ 构成一个 $(\omega_1;\omega_1)$ 型半图。必要时对 B 进行抽稀，我们可以假设对于每个 $\xi \le \eta \in \omega_1$，都有 $\{\alpha_\xi,\beta_\eta\} \in k^{-1}(1)$。我们来验证，此时 $\{\beta_\xi : \xi \in \omega_1\}$ 是 X 中的一个自由序列。

任取 $\delta \in \omega_1$，并令 $\gamma_\delta = \sup\{\beta_\xi\colon \xi < \delta\}$。由于 X 是左分离的，$\{\beta_\xi$ 的闭包：$\xi < \delta\}$是 γ_δ的子集。$\{\beta_\xi$ 的闭包：$\delta \le \xi\}$ 是闭集 W_{α_δ} 的子集，而该闭集包含于$[\alpha_\delta,\kappa)$中。由于 $\gamma_\delta \le \alpha_\delta$，序列 $\{\beta_\xi\colon \xi < \omega_1\}$ 是一个自由序列。

（ii）现在假设我们在κ上有一个强右分离拓扑。对每个 $\eta \in \kappa$，固定一个闭邻域 $W_\eta \subset [0,\eta]$。再令$k\colon [\kappa]^2 \to 2$ 由下式定义：$k(\{\xi,\eta\}) = 1$ 当且仅当 $\xi < \eta$ 且 $\xi \in W_\eta$。

若 $I \subset \kappa$ 是不可数的且满足 $[I]^2 \subset k^{-1}(0)$，则 I 仍是离散的。否则，我们可以假设存在 $A = \{\alpha_\xi\colon \xi < \omega_1\}$ 和$B = \{\beta_\xi\colon \xi < \omega_1\}$，它们是 κ 的子集，并满足：对每个 $\xi \le \eta \in \omega_1$，都有 $\{\alpha_\xi,\beta_\eta\} \in k^{-1}(1)$。

现在我们来验证 $\{\alpha_\xi : \xi \in \omega_1\}$ 是 X 中的一个自由序列。任取$\delta \in \omega_1$，并令 γ_δ =sup$\{\alpha_\xi : \xi < \delta\}$。由于 X 是右分离的，$\{\alpha_\xi$ 的闭包是 $[\alpha_\delta,\kappa$ 的子集）。$\{\alpha_\xi$ 的闭包是 W_{β_δ} 的子集，而后者包含于 $[0,\beta_\delta]$。由于 $\beta_\delta < \alpha_\delta$，这就证明了序列 $\{\alpha_\xi : \xi < \omega_1\}$ 确实是一个自由序列。□

命题 2.4。 假设空间X 有一个开覆盖 $\mathcal{U}$，使得对于每个满足 $|\mathcal{V}| < \kappa$ 的 $\mathcal{V} \subset \mathcal{U}$，都有 $\bigcup\{V\colon V \in \mathcal{V}\} \ne X$。那么 X 包含一个基数为 κ 的强右分离子空间。

证明。 通过直接的超限递归，我们可以选取点$x_\alpha \in X$ 和 $\mathcal{U}$ 的成员 U_α，其中 $\alpha < \kappa$，使得 $x_\alpha \in U_\alpha$，并且当 $\alpha < \beta$ 时有 $x_\beta \notin U_\alpha$。显然，$\{x_\alpha : \alpha < \kappa\}$ 是强右分离的。□

定理 2.5。 假设我们有 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$，此外，每个基数为 $\mathfrak{c}$ 的强分离空间都有一个不可数离散子空间。那么

(1) 每个可数离散度的豪斯多夫空间的基数为 $\leq \mathfrak{c}$；*(2)* 对于每个可数离散度的无限正则空间 X，我们有$o(X) = \mathfrak{c}$。

证明。(1) 设 X 是任意一个具有可数离散度的豪斯多夫空间。我们首先证明，每个点 $x \in X$ 的伪特征为 $\psi(x, X) < \mathfrak{c}$。为此，我们为每个点 $y \in X \setminus \{x\}$ 选取一个开邻域U_y，使得 $x \notin U_y$。这是可能的，因为 X 是豪斯多夫空间。现在我们可以对空间 $X \setminus \{x\}$ 的开覆盖 $\{U_y : y \in X \setminus \{x\}\}$ 应用命题 2.4，从而找到一个子集 $Y \subset X \setminus \{x\}$，使得 $|Y| < \mathfrak{c}$ 且 $X \setminus \{x\} = \bigcup\{U_y : y \in Y\}$。这显然意味着 $\psi(x, X) \leq |Y| < \mathfrak{c}$。

现在，对每个无限基数 $\lambda < \mathfrak{c}$，令

$$X_\lambda = \{x \in X : \psi(x, X) \leq \lambda\}.$$

由于 $|Z| \leq 2^{s(Z)\cdot\psi(Z)}$ 对任意 T_1-空间 Z都成立，参见例如 [3] 或 [4]，，利用 $2^\lambda = \mathfrak{c}$ 可得 $|X_\lambda| \leq \mathfrak{c}$。但根据上述内容，我们有 $X = \bigcup\{X_\lambda : \omega \leq \lambda < \mathfrak{c}\}$，因此 $|X| \leq \mathfrak{c}$ 也成立。

(2) 现在，设 X 是任意一个具有可数离散度的无限正则空间 X。由 (1) 可知 $|X| \leq \mathfrak{c}$。众所周知，每个拓扑空间 Y 都有一个大小为 $d(Y)$ 的左分离子空间，其中 Y 的稠密度。由于 X 是正则的，它的左分离子空间实际上都是强左分离的，因此根据我们的假设，X 的任意子空间的稠密度都是 $< \mathfrak{c}$。特别地，X 的每个闭子集 F 都具有形式 $F = A$，其中 $A \in [X]^{<\mathfrak{c}}$。但是，$|X| \leq \mathfrak{c}$ 和 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ 推出 $|[X]^{<\mathfrak{c}}| = \mathfrak{c}$，因此 X 的所有闭子集的数量，即 $o(X)$，至多为 $\mathfrak{c}$。然而，对于任意无限豪斯多夫空间 X，显然有 $o(X) \geq \mathfrak{c}$，因此 $o(X) = \mathfrak{c}$。□

推论 2.6。在定理 *2.5* 的假设下，每个具有可数离散度的正则空间的权和基数至多为 $\mathfrak{c}$。特别地，每个正则遗传林德勒夫空间的权为 $\leq \mathfrak{c}$。

根据命题 2.3，只要同时满足 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ and $\mathfrak{c} \to (\omega_1,(\omega_1;\omega_1))$，定理 2.5 的假设便成立。接下来的两节将证明，即使是 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$ and $\mathfrak{c} \to (\mathfrak{c},(\omega_1;\omega_1))$ 的相容性，也可以在弱紧基数存在的前提下得到确立。

接下来我们指出，定理 2.5 蕴含每个正则 Δ-空间的基数为 $< \mathfrak{c}$。这一事实可直接由 [5], 的推论 4.2 得出，并由此为 [5] 的问题 4.4 在正则情形下提供了一个相容的肯定答案。

我们以提出若干我们认为值得进一步研究的问题来结束本节。

问题 2.7。 定理 *2.5* 的第（*2*）部分的一致性是否需要大基数？所有权为 $\leq \mathfrak{c}$ 的遗传林德洛夫正则空间这一命题的一致性是否需要大基数？

问题 2.8. 定理 *2.5* 的 *(1)* 或 *(2)* 是否与连续统假设相容？

我们在此指出， $\omega_1 \to (\omega_1, (\omega_1; \omega_1))$ 将意味着不存在 L-空间，因此它在 ZFC 中可证为假，参见 [9]。

问题 2.9. 将定理 *2.5* 的 *(2)* 从正则空间推广到豪斯多夫空间，这是否相容？

问题 2.10. </style}对于每个正则（甚至豪斯多夫）空间，是否都可以有？对于每个正则空间，是否都可以有 $(X) \leq 2^{hL(X)}$?

3. 关于力迫

设 κ 是一个基数。我们将使用以下偏序集构造一个模型。该偏序集由 [2] 引入，并在那里被称为 κ 份科恩力迫的伪积。

定义 3.1。偏序集 $P_\kappa = \Pi^*_{\alpha\in\kappa} 2^{<\omega}$ 由从 κ 到 $2^{<\omega}$ 的可数部分函数组成。

对于 $p, q \in P_\kappa$，我们定义 $p < q$，使得 (1) $\mathrm{dom}(p) \supset \mathrm{dom}(q)$，(2) 对所有 $\alpha \in \mathrm{dom}(q)$，$q(\alpha) \subset p(\alpha)$，(3) $\{\beta \in \mathrm{dom}(q) : p(\beta) \neq q(\beta)\}$ 是有限的。

P_κ 的以下性质取自 [2, 推论 2.4(a)、定理 2.6]。

引理 3.2。偏序集 P_κ 是正常的，其基数为 $\kappa^{\aleph_0}$，并满足 $\mathfrak{c}^+$-*cc*。

通过对良名称进行标准计数的论证，下一条结果可由引理 3.2 得出。

命题 3.3. 若 κ是强不可达基数，则 $2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c} = \kappa$ 在由 P_κ得到的强迫扩张中成立。

这个偏序集的以下性质显而易见，但对我们的强迫结果至关重要。这个性质比仅仅要求条件具有可数支撑更强。

命题 3.4。 如果 $\{p_n : n \in \omega\} \subset P_\kappa$ 具有互不相交的定义域，那么 $\bigcup_n p_n$ 就是 P_κ 中每个 p_n 的公共扩展。

4. 关于 $\mathfrak{c} \to (\omega_1,\ (\omega_1;\omega_1))$ 的相容性

在本节中，设 κ是一个弱紧基数。我们证明以下定理：

定理 4.1。 若 κ 是弱紧基数，且若 G 是一个 P_κ-泛型滤子，则 $\kappa \to (\kappa,\ (\omega_1;\omega_1))$ 加上 $2^{<\kappa} = \kappa = \mathfrak{c}$ 在 $V[G]$ 中成立。

当然，这立刻引出了一个问题：要得到类似的结果，是否必须要求 κ 是弱紧致的（或是一个大基数）？ 为此，我们指出，我们得到了一个更强的结果。

定义 4.2。 我们定义如下命题 (*)：
(*) 对任意着色 $k:\ [\mathfrak{c}]^2 \to 2$，要么存在一个大小为 $\mathfrak{c}$、颜色为 0 的齐次集，要么存在一个集合 $S \in [\mathfrak{c}]^{\mathfrak{c}}$，使得对于每个可数的 $A \subset S$，都存在 $\beta \in \mathfrak{c}$，满足 $A \subset \beta$ 和 $k(\{\alpha,\beta\}) = 1$ 对所有 $\alpha \in A$ 都成立。

命题 4.3。 命题（*）意味着 $\mathfrak{c} \to (\mathfrak{c},(\omega_1;\omega_1))$。

证明。 设 k 是 $[\mathfrak{c}]^2$ 的一个二染色，并假设不存在大小为 $\mathfrak{c}$ 的 0-齐次集。于是，按照命题（*），取 $\mathfrak{c}$ 的一个子集 S，其基数为 $\mathfrak{c}$。利用 $cf(\mathfrak{c}) > \omega$，我们便可轻易地通过递归选取集合 $A = \{\alpha_\xi :\ \xi < \omega_1\} \subset S$ 和 $B = \{\beta_\xi :\ \xi < \omega_1\} \subset \mathfrak{c}$，使得 $\sup A = \sup B$，并满足 $(A;\ B) \subset k^{-1}(1)$. □

注 1。 命题“$2^{<\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}$& (∗)”确实具有某种大基数强度。为说明这一点，我们注意到，如果存在一棵在 $\mathfrak{c}$ 上以 $\prec$ 为序的 $\mathfrak{c}$-Souslin 树，那么命题（*）就不成立。为此，设 k 是从 $[\mathfrak{c}]^2$ 到 $\{0,1\}$ 的函数，满足 $k(s,t) = 1$ 当且仅当 $s \prec t$。显然，0-齐次集是反链；如果集合 S 的基数为 $\mathfrak{c}$，且满足（*）中的 1-齐次条件，那么 S 就是一条链。文献 [1], 中已证明，如果 $\mathfrak{c} = \kappa = \lambda^+ = 2^\lambda$ 且 $\square_\lambda$ 成立，那么存在一棵 κ-Souslin 树 T。

我们将需要弱紧基数的下一个性质，见[8, 引理 6.8]。

命题 4.4. 若 f 是一个从 $[\kappa]^3$ 到基数小于 κ的集合 S 的任意函数，则存在一个大小为 κ的集合 $U \subset \kappa$，它对f是齐次的。

本节余下部分将用于证明下一个定理。

定理 4.5. 若 κ 是一个弱紧基数，且若 G 是一个 P_κ-泛型滤子，则 ***(*)*** 在 $V[G]$ 中成立。

证明。 设 $\dot{E}$ 是 $[\kappa]^2$的一个子集的 P_κ-名称。由于 P_κ 是齐次的，只需证明 1 不会强制 E，也就是说，特征

$\dot{E}$ 在 $[\kappa]^2$中的函数是 (*) 的一个反例。令 H 表示所有满足以下条件的 $\{\xi,\eta\}_< \in [\kappa]^2$ 组成的集合：存在一个条件 $p(\xi,\ \eta)$，使得强制 $\{\xi,\eta\} \in E$。不失一般性，我们假设$\{\xi,\eta\} \subset \mathrm{dom}(p(\xi,\ \eta))$。对于任意满足 $\{\xi,\eta\} \notin H$的 $\xi < \eta$，令 $p(\xi,\ \eta)$ 为集合 $\{\xi,\eta\}$ （即任意不属于 P_κ 的对象）。

对于 $\{\xi,\eta\}_< \in H$，令 $I(\xi,\eta)$ 为 $p(\xi,\eta)$ 的定义域。令 $\delta(\xi,\eta)$ 表示 $I(\xi,\eta)$ 的序型，并令 $h_{\xi,\eta}$ 为从 $\delta(\xi,\eta)$ 到 $I(\xi,\eta)$ 的保序函数。对于任意 $\{\xi,\eta\}_< \in [\kappa]^2 \setminus H$，令 $I(\xi,\eta)$ 和 $h_{\xi,\eta}$ 为空集。

我们定义一个函数 f在 $[\kappa]^3$上，其中 $f(\{\xi,\eta,\zeta\}_<)$ 被映射到..... 的同构类型。

$$\langle p(\xi,\eta), p(\xi,\zeta), p(\eta,\zeta), \delta_{\xi,\eta}, \delta_{\xi,\zeta}, \delta_{\eta,\zeta}, h_{\xi,\eta}, h_{\xi,\zeta}, h_{\eta,\zeta}\rangle\ .$$

固定任意一个对 f 齐次且大小为 κ 的 $U \subset \kappa$。

情况 1：存在 $\xi < \eta < \zeta < \kappa$ in U，使得 $\{\eta,\zeta\} \notin H$。

在这种情况下，显然 1 强制：若 $\xi = \min(U)$，则 $[U \setminus \{\bar{\xi}\}]^2 \cap H$ 为空，因此 1 强制 $[U \setminus \{\bar{\xi}\}]^2 \cap \dot{E}$ 为空。因此，在情形 1 中，U 是一个基数为 $\mathfrak{c}$ 的 0-齐次集。

情形 2：$[U]^2 \subset H$。

显然，存在一个 $\delta < \omega_1$，使得对所有 $\xi < \eta \in U$, $\delta_{\xi,\ \eta} = \delta$。令 $\xi = \min(U)$。

我们关注将每个 $I(\xi,\ \zeta)$（对 $\xi < \eta < \zeta \in U$）划分为三部分：由 $I(\xi,\ \zeta) \cap \xi$ 组成的部分，以及宽泛地说，$I(\xi,\ \zeta) \setminus \xi$ 中接近 ξ 的部分和接近 ζ 的部分。

为此，任取一个 $\xi < \eta < \zeta$，其中 all 属于 U，并令 $\beta_1 < \delta$ 表示满足 $\xi = h_{\bar{\xi},\ \zeta}(\beta_1)$ 的元素。类似地，令 $\beta_2 < \delta$ 为满足 $\eta \le h_{\bar{\xi},\ \zeta}(\beta_2)$ 的最小元素。最后，令 $L = \{\beta \in \delta \setminus \beta_2 : h_{\bar{\xi},\ \zeta}(\beta) = h_{\eta,\ \zeta}(\beta)\}$。

断言 4.5.1。对于所有 $\xi < \eta < \zeta$ 属于 U，以下陈述均成立：

(1) $I(\xi,\eta) \subset h_{\xi,\zeta}(\beta_2) \le \zeta$, *(2)* 对所有 $\beta < \beta_1$, $h_{\xi,\ \eta}(\beta) = h_{\eta,\zeta}(\beta)$, *(3)* 对所有 $\beta_1 \le \beta < \beta_2$, $h_{\xi,\eta}(\beta) = h_{\xi,\zeta}(\beta)$, *(4)* 对所有 $\beta \in L$, $h_{\xi,\zeta}(\beta) = h_{\eta,\zeta}(\beta)$, *(5)* 对所有 $\beta \in \delta \setminus (\beta_2 \cup L)$, $h_{\xi,\zeta}(\beta) \notin I(\eta,\zeta)$.

证明。由于 κ 是弱紧致的，存在一个正则基数 $\mu \in \kappa$，使得 $U \cap \mu$ 的序型等于 μ，并且对于所有属于 $U \cap \mu$的 $\xi < \eta$，都有 $I(\xi, \eta) \subset \mu$。令 $\gamma = \min(U \setminus \mu)$。

考虑任意同时属于 $\xi < \eta$ 和 $U \cap \mu$ 的对象。选取 $\zeta \in U \cap \mu$，使得$I(\xi, \eta) \subset \zeta$。由于 U 对 f 是齐次的，只需证明三元组 (ξ, η, ζ) 的每一项。下面证明各项:

(1) 将 β_2 的定义应用于三元组 (ξ, ζ, γ)，可得 $\zeta \leq h_{\xi,\gamma}(\beta_2)$。转到 (ξ, η, γ)，可得 $I(\xi, \eta) \subset h_{\xi,\gamma}(\beta_2)$。因此，由齐次性可得 $I(\xi, \eta) \subset h_{\xi,\zeta}(\beta_2)$。(2) 固定任意 $\beta < \beta_1$。显然，由齐次性可知，序列 $\{h_{\xi,\eta'}(\beta) : \xi < \eta' \in U\}$ 单调递增。由于对所有 $\eta' \in U$，$h_{\xi,\eta'}(\beta) < \xi$，故该序列为常数。(3) 同样，对于任意 $\beta_1 \leq \beta < \beta_2$，序列 $\{h_{\xi,\eta'}(\beta) : \xi < \eta' \in U \cap \mu\}$ 单调递增。另一方面，β_2 是满足$h_{\xi,\gamma}(\beta_2)$ 大于 η 的最小对象，而序列$\{h_{\xi,\eta'}(\beta) : \xi < \eta' \in U \cap \mu\}$ 被 h_ξ 所界；$\gamma(\beta) < \eta$，因此它不可能是基数为 μ的严格递增序列。(4) 对所有 $\beta \in L$，$h_{\xi,\zeta}(\beta) = h_{\eta,\zeta}(\beta)$ 这一事实直接源于齐次性。(5) 假设 $\beta_2 \leq \beta \in \delta$，且 $h_{\xi,\zeta}(\beta) \in I(\eta, \zeta)$。选取$\beta_2 \leq \alpha < \delta$，使得 $h_{\eta,\zeta}(\alpha) = h_{\xi,\zeta}(\beta)$。将齐次性应用于 $\xi < \eta < \gamma$，可得 $h_{\xi,\gamma}(\beta) = h_{\eta,\gamma}(\alpha)$。类似地，可得 $h_{\xi,\gamma}(\beta) = h_{\zeta,\gamma}(\alpha)$。因此，$h_{\eta,\gamma}(\alpha) = h_{\zeta,\gamma}(\alpha)$。由齐次性可得 $\alpha \in L$，从而 $h_{\xi,\zeta}(\alpha) = h_{\eta,\zeta}(\alpha)$。由于 $h_{\xi,\zeta}$ 是一一映射，最终可得 $\beta = \alpha$ 且属于L。

这就证明了该断言。 □

由断言的第 1 项可知，存在一个条件 $p \in P_{\bar{\xi}}$，使得对于所有 $\xi < \eta$，$p \in P_{\bar{\xi}}$都等于 $p(\xi, \eta) \restriction \xi$。由断言的第 3 项可知，对于所有 $\xi \in U$，存在一个条件 $p_\xi \in P_{\kappa\setminus\xi}$，使得对于所有 $\xi < \eta \in U$，$p_\xi \in P_{\kappa\setminus\xi}$ 都等于 $p(\xi, \eta) \restriction \eta \setminus \xi$。最后，对于所有 $\xi < \zeta \in U$，令 $J_\zeta = h_{\bar{\xi},\zeta}[L]$ 和 $q_\zeta = p(\xi, \zeta) \restriction J_\zeta$。根据 L的定义，对于所有 $\xi \in U \cap \zeta$和 $\zeta \in U$，q_ζ都等于 $p(\xi, \zeta) \restriction J_\zeta$。

下一个断言可由前一个断言的第 5 项立即推出。

断言 4.5.2. 对于每个 $\xi < \zeta \in U$，族 $\{I(\eta, \zeta) \setminus (J_\zeta \cup h_{\eta,\zeta}(\beta_2)) : \eta \in U \cap \zeta\}$ 两两不相交。

现在我们可以完成该定理的证明。设 G 是任意一个满足 $p \in G$ 的泛型滤子。设 S 为名称 $\{(\eta, p_\eta) : \eta \in U\}$。由断言 4.5.1 的第 1 项可知，族 $\{p_\eta : \xi < \eta \in U\}$ 的定义域两两不相交，因此 $G \cap \{p_\eta : \xi < \eta \in U\}$ 的基数为 κ。这证明了 $S = \mathrm{val}_G(S)$ 的基数为 κ。此外，设 $E = \mathrm{val}_G(E)$。同样，设 B 为名称 $\{\zeta, q_\zeta) : \zeta \in U\}$，并且 $B = \mathrm{val}_G(B)$。按照与 S 相同的推理，我们还可得出 B 的基数为 κ。

由于 P_κ 是正常的， S 的每个可数子集都包含在来自基模型的 U 的一个可数子集中。令 U 的任意可数子集为 A。我们证明，对于某个 $\beta \in B \setminus \subset \sup(A')$，有 $(A \cap S; \{\beta\}) \subset E$。

对于每个 $\sup(A) < \zeta \in U$，令 $r(A, \zeta)$ 等于条件 $\{p(\eta, \zeta) \restriction (I(\eta, \zeta) \setminus (J_\zeta \cup h_{\eta, \zeta}(\beta_2))) : \eta \in A'\}$ 的并。由于这些定义域两两不相交，每个 $q_\zeta \cup r(A, \zeta)$ 都是 P_κ 的一个元素。

显然， $\{q_\zeta \cup r(A, \zeta) : \sup(A) < \zeta \in U\}$ 中存在一个基数为 κ 的子族，使得这些定义域构成一个两两不相交的族。因此，存在某个 $\sup(A) < \beta \in U$，使得 $q_\beta \cup r(A, \beta)$ 属于 G。这也意味着 $\beta \in B$。

~ ~最后，令 $A = A \cap S$ 属于 $V[G]$。由此可知，对每个 $\eta \in A$， p, p_η 和 $q_\beta \cup r(A, \beta)$ 中的每一个都属于 G。任取 $\eta \in A$，条件 $p \cup p_\eta \cup q_\beta \cup r(A, \beta)$ 是 $p(\eta, \beta)$ 的扩张。这意味着，对于每个 $\eta \in A$，都有 $\{\eta, \beta\} \in E$，如所需。□

5. 如果 $\mathfrak{c}$ 是实值可测的呢?

本节证明，在 Solovay 原始模型中，与 [10,定理 7], 中 $\mathfrak{c}$是实值可测的情形一样，存在一个权大于 $\mathfrak{c}$ 的遗传 Lindelöf 空间。很容易看出，如果用 Cohen 实数代替随机实数，结论同样成立。这个结果似乎有几个方面值得关注。首先，它表明，利用允许可数支集的正常偏序集进行力迫（随机实数情形正是如此），不足以得到 $\mathfrak{c} \to (\omega_1, (\omega_1; \omega_1))$。其次，在这些模型中， $\mathfrak{c}$ 具有树性质（见 [7, 定理 7.12]），因此这也表明，仅有树性质同样不足以达到这一目的。

设 κ 为任意不可数基数，并令 T 表示所有满足 $\omega \subset \mathrm{dom}(t)$ 的 $t \in 2^{<\kappa}$ 的集合。令 $\mathcal{M}_T$ 表示 2^T 上的通常测度代数。令 T^+ 表示 T 的所有 κ-分支；我们使用 T^+ 而不是 2^κ，以更清楚地表明它指的是基模型中的分支。如果 κ 是可测基数，那么在

力迫扩张中，{v15}将是实值可测基数，但该性质对于这个例子的性质而言并非必要。

对于每个 κ-分支 $\rho \in T^+$，我们定义一个简单名称 W_ρ，它表示 $\kappa \setminus \omega$ 的一个子集。对于每个 $\alpha \in \kappa \setminus \omega$， 2^T 中由 $[(\rho \restriction \alpha, 1)]$ 给出的既开又闭集（这是乘积空间基本既开又闭子集的通常记号）等于布尔强迫值 $[[\alpha \in \dot{W}_\rho]]$ （其测度为 $\frac{1}{2}$；我们将用 ν 表示 $\mathcal{M}_T$ 上的测度）。

令 G 为任意一个 $\mathcal{M}_T$-泛型滤子。对于任意 $b \in \mathcal{M}_T$，令 $\mathrm{supp}(b)$ 表示 T 的可数子集，称为 b 的支撑，其含义与通常相同，即 b 投影到 $2^{\mathrm{supp}(b)}$ 后的拉回，其测度与 b 相同。

拓扑 τ 在 $\kappa \setminus \omega$ 上由如下方式生成：对每个 $\rho \in T^+$，将 $\mathrm{val}_G(W_\rho)$ 规定为既开又闭集。

引理 5.1。 拓扑 τ 是豪斯多夫的。

证明。 任取一个 $b \in G$ 和任意两个不同的 $\omega \leq \alpha < \beta < \kappa$。任取一个满足以下条件的 $\rho \in T^+$： $\rho \restriction \omega$ 不属于集合 $\{\psi \restriction \omega : \psi \in \mathrm{supp}(b)\}$。显然可得， $\{\rho \restriction \alpha, \rho \restriction \beta\}$ 与 $\mathrm{supp}(b)$ 不相交。现在取条件 $[(\rho \restriction \alpha, 0)] \cap [(\rho \restriction \beta, 1)]$，（即条件 $[[W_\rho \cap \{\alpha, \beta\} = \{\beta\}]]$）。显然， b 与 $[[W_\rho \cap \{\alpha, \beta\} = \{\beta\}]]$ 的交集是一个正测度集，这证明 b 并不强迫 α 和 β 无法被某个既开又闭集分离。□

定义 5.2。 对于有限集 $F \subset T^+$ 和函数 $\sigma \in 2^F$，我们令 W_σ 表示基本既开又闭集 $\bigcap\{W_\rho : \sigma(\rho) = 1\} \setminus \bigcup\{W_\rho : \sigma(\rho) = 0\}$。令 $\mathrm{Fn}(T, 2)$ 表示所有此类有限函数构成的集合。

引理 5.3。 $\kappa \setminus \omega$ 在拓扑 τ 下不存在不可数左分离子空间。

证明。 设对于 $\xi \in \omega_1$、 $\dot{\sigma}_\xi$ ， $\mathrm{Fn}(T, 2)$ 中某个元素的任意名称为 。只需证明 1 强迫存在某个 $\zeta \in \omega_1$ ，使得 $W_{\dot{\sigma}_\zeta}$ 包含于族 $\{W_{\dot{\sigma}_\xi} : \xi < \delta\}$ 的并集中；下面即证此事。

首先考虑任意一个 $0 < b \in \mathcal{M}_T$。我们证明存在 b' ，它是 b 的一个扩张，以及某个 $\zeta \in \omega_1$ ，使得 b' 强迫 $W_{\dot{\sigma}_\zeta}$ 包含于族 $\{W_{\dot{\sigma}_\xi} : \xi < \delta\}$ 的并集 中。

在强迫扩张中（ b属于泛型），我们可以取一个不可数子集（从而重新编号），使得族 $\{F_\xi : \xi \in \omega_1\}$（其中 $F_\xi = \mathrm{dom}(\sigma_\xi)$）是一个 Δ-系，并且存在一个唯一的 $\sigma \in 2^{<\omega}$

使得每个 F_ξ 的基数等于 $n =\mathrm{dom}(\sigma)$，且从 n 到 F_ξ 的保序函数（采用字典序）将σ 映射到 σ_ξ。

通过扩张 b，我们可以假设 b 决定了 n，σ 的取值以及 Δ-系统 F 的根。对于每个 $\xi \in \omega_1$（同样针对重新编号后的子族），选择 b_ξ 作为 b 的一个扩张，使其强迫对某个 $F_\xi \in [T]^n$ 有 $F_\xi = F_\xi$。注意，由于 $\mathcal{M}_T$ 满足可数链条件，对每个 ξ，都存在一个 $\xi < \eta < \omega_1$，使得 b 强迫 $F_\xi \setminus F$ 与所有 $\eta \le \zeta < \omega_1$ 均不相交。

因此，再次转而考虑一个重新编号的不可数子序列后，我们可以假设 $\{F_\xi : \xi \in \omega_1\}$ 是一个以 F 为根的 Δ-系统。此外，由于 $\mathcal{M}_T$ 满足可数链条件，我们可以假设，对每个 $\eta < \omega_1$，族 $\{b_\xi : \eta < \xi \in \omega_1\}$ 的并等于整个族 $\{b_\xi : \xi \in \omega_1\}$ 的并。

令族 $\{b_\xi, F_\xi : \xi \in \omega_1\}$ 为可数初等子模型 M of $H((2^\kappa)^+)$ 的一个元素。令 $M \cap \omega_1 = \delta$。现在任取 $\beta \in \kappa$ 以及 $b \wedge b_\delta \wedge [[\beta \in W_{\sigma_\delta}]]$ 的扩张 b'。我们证明，由于泛型性，这就足以说明 b' **不迫使** $\beta \notin \bigcup\{W_{\sigma_\xi} : \xi \in \delta\}$。

首先考虑 $\beta \in M$ 的情形。任取满足 $b' \in G$ 的泛型滤子 G。现在，利用 $M[G]$ 是 $H(\theta)[G]$ 的初等子模型这一事实，可以简单地推出存在某个 $\xi \in M \cap \delta$，使得 $\beta \in \mathrm{val}_G(W_{\rho_\xi})$。

否则，令 β 为 $M \cap [0, \kappa] \setminus \beta$ 的最小元素。由此可知，β 具有不可数共尾性，因为 β 是 $M \cap \bar{\beta}$ 在 $\bar{\beta}$ 中不共尾这一事实的见证。对于每个 $\xi \le \delta$，令 $F_\xi = \{\rho_i^\xi : i < n\}$ 按字典序排列。令 $L = \{i : \rho_i^\delta \restriction \bar{\beta} \in M\}$。显然$F \subset \{\rho_i^\delta : i \in L\}$。

我们注意到，对于每个 $i < n$，$b' \le b_\delta \wedge [(\rho_i^\delta \restriction \beta,\ \sigma(i))]$。令 $L_0 =\sigma^{-1}(0)$ 且 $L_1 = \sigma^{-1}(1)$。由于 b' 蕴含 $\beta \in \dot{W}_{\sigma_\delta}$，因此$\{\rho_i^\delta \restriction \beta : i \in L_0\}$ 与 $\{\rho_i^\delta \restriction \beta : i \in L_1\}$不相交。由于 $\beta < \bar{\beta}$，这意味着 $\{\rho_i^\delta \restriction \bar{\beta} : i \in L_0\}$ 与 $\{\rho_i^\delta \restriction \bar{\beta} : i \in L_1\}$不相交。

令 I 为满足以下条件的 $\xi \in \omega_1$ 集合:

(1) $\{\rho_i^\delta \restriction \bar{\beta} : i \in L\} = \{\rho_i^\xi \restriction \bar{\beta} : i \in L\}$ }, and
(2) for each $i, j \in n$, $\rho_i^\xi \restriction \bar{\beta} = \rho_j^\xi \restriction \bar{\beta}$, if and only if $\rho_i^\delta \restriction \bar{\beta} = \rho_j^\delta \restriction \bar{\beta}$.

注意到 $I \in M$ 并且 $\delta \in I$，因此 I 是不可数的。由于$\mathcal{M}_T$ 满足可数链条件，存在一个 $\eta < \omega_1$，使得 $\{b_\xi : \eta < \xi \in I\}$的上确界等于 $\{b_\xi : \zeta < \xi \in I\}$ 的上确界，对所有 $\eta \le \zeta \in \omega_1$都成立。根据初等性，在 M中存在这样一个 η。此外，根据初等性，对于

每个 $\eta<\eta'\in M\cap\delta$，族 $\{b_\xi:\ \eta'<\xi\in I\cap M\}$ 的上确界等于族 $\{b_\xi:\ \eta<\xi\in I\}$的上确界。

显然 $\{\rho_i^\delta\restriction\bar\beta:\ i\in n\setminus L\}$ 与 M 不相交。因此，在 M 中，我们可以选择 $\{\xi_k:\ k\in\omega\}\subset I$，并在 M 中选择，使得对于 $\{\rho_i^{\xi_k}\restriction\bar\beta:\ i\in n\setminus L\}$ 与 $\{\rho_i^{\xi_j}\restriction\bar\beta:\ i<n\}$ 对所有 $j<k$ 都不相交。我们还可以同时确保，$\{b_{\xi_k}:\ k\in\omega\}$ 的每个余有限子集的并的测度都等于族 $\{b_\xi:\ \xi\in I\}$ 的并。类似地，存在一个划分 $\{A_\ell:\ \ell\in\omega\}\subset M$，将 ω 划分为无限集，使得对于每个 ℓ，$\{b_{\xi_k}:\ k\in A_\ell\}$ 的并等于 $\{b_{\xi_k}:\ k\in\omega\}$ 的并。

令 $k\in\omega$, a_k 表示条件 $\{[(\rho_i^{\xi_k}\restriction\beta,\ \sigma(i)]:i\in n\setminus L\}$的交。存在某个 $m\le|n\setminus L|$，使得每个 a_k 的测度均为2^{-m}。另请注意，每个 b_{ξ_k} 的支撑都包含于 M 中，因此与每个 $a_{k'}$的支撑不相交。

断言 5.3.1。对于每个 $c\in M\cap\mathcal{M}_I$ 和有限的 $H\subset\omega$，$\bigvee\{c\wedge a_k:\ k\in H\}$ 的测度等于 $\nu(c)\cdot(1-2^{-m})^{|H|}$。

断言的证明。由于 c 属于 M，对于所有 $k\in H$，其支撑都与 a_k 的支撑不相交。$\{c\wedge a_k:\ k\in H\}$ 的上确界等于 $c\wedge\bigwedge\{1-a_k:\ k\in H\}$。$c\wedge\bigwedge\{1-a_k:\ k\in H\}$ 的测度等于$\nu(c)\cdot\nu(\bigwedge\{1-a_k:\ k\in H\})$。$\bigwedge\{1-a_k:\ k\in H\}$ 的测度等于 $(1-2^{-m})^{|H|}$。□

断言 5.3.2. 条件 $\{b_{\xi_k}\wedge a_k:\ k\in\omega\}$ 的上确界等于 $\{b_{\xi_k}:k\in\omega\}$的上确界。

~断言的证明。设 $b=\bigvee\{b_{\xi_k}:\ k\in\omega\}$。只需证明，对每个$\ell\in\omega$，$\bigvee\{b_{\xi_k}\wedge a_k:\ k\in\omega\}$ 的测度大于 $\nu(\tilde b)\cdot(1-2^{-m})^\ell$。对每个 $i\le\ell$和每个 $j\in A_i$，$c(i,\ j)=b_{\xi_j}\setminus\bigvee\{b_{\xi_{j'}}:\ j'\in A_i\cap j\}$。~因此，族 $\{c(i,\ j):\ j\in A_i\}$ 是 b 的一个由可测集组成的划分。显然，对每个 $i\in\omega$ 和 $j\in A_i$，$c(i,\ j)\wedge a_j\le b_{\xi_j}\wedge a_j$。

~现在，令 $\mathcal{C}$ 为由 $\bigcup\{c(i,j):\ i\le\ell,\ j\in A_i\}$ 生成的布尔代数中所有小于 b 的原子所构成的族。换言之，对于每个 $i\le\ell$，族 $\mathcal{C}$ 都是 $\{c(i,j):\ j\in A_i\}$ 的不交细化。此外，$\bigvee\mathcal{C}=b$。对于每个 $c\in\mathcal{C}$，令 h_c 为一个以 $\ell+1$ 为定义域、以 ω 为陪域的函数，并满足：若 $h_c(i)$，则 $c\le c(i,j)$。

由此可得，对于每个 $c\in\mathcal{C}$，$\bigvee\{c\wedge a_{h_c(i)}:\ i\le\ell\}$ 小于或等于 $\bigvee\{b_{\xi_k}\wedge a_k:\ k\in\omega\}$。

$\bigvee\{c\wedge a_{h_c(i)}$ 的测度：$i\le\ell\}=c\wedge\bigvee_{i\le\ell}a_{h_c(i)}$ 大于$\nu(c)\cdot(1-2^{-m})^\ell$。$\bigvee\mathcal{C}$ 的测度为 $\nu(\tilde b)$，因此$\bigvee\{c\wedge\bigvee_{i\le\ell}a_{h_c(i)}:\ \ c\in\mathcal{C}\}$ 大于 $\nu(\tilde b)\cdot(1-2^{-m})^\ell$。最后，

因为$\bigvee\{c\wedge\bigvee_{i\leq\ell}a_{h_c(i)}:\ c\in\mathcal{C}\}$小于$\bigvee\{b_{\xi_k}\wedge a_k:\ k\in\omega\}$，这就完成了断言的证明。□

为完成定理的证明，我们只需注意到$b_\delta\leq\bigvee\{b_{\xi_k}\wedge a_k:\ k\in\omega\}$，并且$r'\leq b_\delta\wedge\bigwedge\{[(\rho_i^\delta,\ \sigma(i))]:\ i\in L\}$。因此，我们可以选取$k\in\omega$使得$r'\wedge b_{\xi_k}\wedge a_k>0$。这个条件迫使$\sigma_{\xi_k}=\dot{\sigma}_{\xi_k}$且$\beta\in W_{\sigma_{\xi_k}}$。□

参考文献

[1] Ari Meir Brodsky 和 Assaf Rinot，苏斯林树构造的微观方法，第一部分，《纯粹与应用逻辑年刊》**168** (2017)，第 11 期，1949–2007，DOI 10.1016/j.apal.2017.05.003。MR3692231[2] Sakaé Fuchino、Saharon Shelah 和 Lajos Soukup，棍集与闭无界集，《纯粹与应用逻辑年刊》**90** (1997)，第 1–3 期，57–77，DOI 10.1016/S0168-0072(97)00030-4。MR1489304[3] A. Hajnal 和 I. Juhász，拓扑空间的离散子空间，Indag. Math.**29** (1967)，343–356。Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A **70**。MR0229195[4] István Juhász，拓扑中的基数函数——十年之后，第 2 版，《数学中心论丛》，第 123 卷，Mathematisch Centrum，阿姆斯特丹，1980。MR0576927[5] I. Juhász、J. van Mill、Soukup L. 和 Z. Szentmiklóssy，关于Δ-空间的一些新结果，DOI https://arxiv.org/pdf/2510.04242。[6]I. Juhász 和 S. Shelah，遗传可分或遗传林德洛夫空间可以有多大？，《以色列数学杂志》**53** (1986)，第 3 期，355–364，DOI 10.1007/BF02786567。MR0852486[7] Akihiro Kanamori，高阶无穷，数学逻辑展望丛书，Springer-Verlag，柏林，1994。集合论中的大基数：从其起源谈起。MR1321144[8]Kenneth Kunen，组合学，《数学逻辑手册》，Stud. Logic Found. Math.，第 90 卷，North-Holland，阿姆斯特丹，1977，第 371–401 页。MR3727412[9] Justin Tatch Moore，一个L空间问题的解答，J. Amer. Math. Soc.**19** (2006)，第 3 期，717–736，DOI 10.1090/S0894-0347-05-00517-5。MR2220104[10] Robert M. Solovay，实值可测基数，《公理集合论》（纯粹数学专题讨论会论文集，第 XIII 卷，第一部分，加州大学洛杉矶分校，洛杉矶，加利福尼亚州，1967），纯粹数学专题讨论会论文集，第 XIII 卷，第一部分，美国数学会，普罗维登斯，罗得岛州，1971，第 397–428 页。MR0290961[11] Stevo Todorčević，力迫正分割关系，Trans. Amer. Math. Soc.**280**(1983)，第 2 期，703–720，DOI 10.2307/1999642。MR0716846

北卡罗来纳大学夏洛特分校数学与统计系，夏洛特，北卡罗来纳州28223，美国电子邮箱地址：adow@charlotte.edu

HUN-REN Alfréd Rényi数学研究所电子邮箱地址：
juhasz@renyi.hu