arXiv:2512.23698v1 [math.QA] 29 Dec 2025

非紧致三维拓扑量子场论与非半单性

THEODOROS LAGIOTIS

Abstract. 我们根据一个（可能是）非半单模张量范畴的数据，定义了一种一次扩展的非紧致三维拓扑量子场论。 $\mathcal{Z}$该理论采用 [Bar+15]的生成元与关系框架，但不允许源为空的生成 2-态射。此外，我们证明，该拓扑量子场论所导出的映射类群射影表示，与 [Lyu95b]和 [De +23]中的表示互为对偶。我们提出一种将闭三维流形分解为 2-态射生成元的方法，并用它计算 $\mathcal{Z}$ 在三维流形上的取值，说明它为何应当恢复 Lyubashenko 三维流形不变量 [Lyu95b]。最后，我们说明，非紧致拓扑量子场论在实心环面上的取值恢复了修正迹[GPT09]的数据。

Contents

1. 引言 1
1.1 前人文献综述 2
1.2 直观理解与结果概述 4
1.3 未来方向 6
1.4 约定与符号 6
1.5 致谢 7
2. 预备知识 8
2.1 非紧致三维配边2-范畴 8
2.2 非紧致三维配边2-范畴的表示 9
2.3 有限带辫范畴与射影对象 13
2.4 余端 14
2.5 积分与模张量范畴 17
2.6 目标双范畴 19
3. 拓扑量子场论的构造 20
3.1 对生成元的赋值 20
3.2 验证关系 24
4. 映射类群表示 36
4.1 由非紧致拓扑量子场论得到的映射类群表示 36
4.2 与 Lyubashenko 射影表示的关系 41
5. 从 Lincat 到 Bimod 42

Date: 2025。

6. 三维流形不变量 486.1 以生成元表示三维流形 486.2 计算不变量 517. 修正迹 557.1 双范畴中的1-对偶可化性 567.2 典范同构 587.3 复合态射是修正迹 66参考文献 69

1. Introduction

在本文中，我们从一个（可能是）非半单模张量范畴 $\mathcal{C}$ 的数据出发，定义了一种一次扩展的非紧三维拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$，使得 $\mathcal{Z}(S^1) = \mathcal{C}$。这一构造采用了类似于 [Bar+15] 的生成元与关系框架。在第 2.2 节中，我们定义了用于构造该拓扑量子场论的配边双范畴的（猜想中的）表示。这与 Lurie 在 [Lur09, Def 4.2.10]，中采用的方法一致：其中，具有与源不相交的连通分支的 2-态射会被舍弃，因此称为“非紧致”。这项工作与 Kerler-Lyubashenko [KL01] 以及 De Renzi 等人 [De +22; De 21] 的构造密切相关。大致而言，可以将其理解为把上述内容转译到无装饰的 2-范畴框架中。这是非半单情形下的对应物，正如 [Bar+15] 之于半单情形中的 Reshetikhin-Turaev 拓扑量子场论 [Tur20] 。
在第3 节中，我们证明以下结论：

定理 1.1 (3.3)**.** 赋值 $\mathcal{Z}$，定义于第3.1节，是一个良定义的对称幺半 2-函子。

假设猜想 2.1成立，则有：

推论 1.2. $\mathcal{Z}$ 是一个非紧致三维拓扑量子场论。

我们相信，一旦验证了完整三维配边双范畴的表示 [Bar+15] ，猜想2.1 的证明将会很直接。关于目前的进展，请参见 [Syt] ：其中证明了三维配边双范畴的表示，但其 2-态射被限制为可逆态射。定理1.1 也可以看作是为猜想 2.1提供了独立的证据。

我们这种方法的优点如下。首先，协边范畴被提升为一个 2-范畴，因此无需装饰，也不必采用更复杂的定义。这又与一个事实相关：讨论拓扑量子场论的“分类”更为容易。这一点并非本文要探讨的内容，但我们打算在未来的工作中加以研究。

此外，我们还处理了与以下对象相关的不变量问题 $\mathcal{Z}$，为猜想 2.1提供了进一步的证据。我们计算了旨在对应映射类群（MCG）生成元的 2-态射的值。由此，我们将通过这一构造得到的（可能是）映射类群射影表示与以下对象的表示联系起来 [Lyu95b] 和 [De +23]。更具体地说，如果将它们的（等价）表示记为 $\bar{\rho}_X$，则有如下结果：

定理 1.3 (4.3)。 如果 $\bar{\rho}_{nc}$ 是由拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$得到的映射类群射影表示，那么 $\bar{\rho}_{nc} \cong \bar{\rho}_X^*$。

对于闭合定向三维流形 M ，我们可以计算 $\mathcal{Z}$ 在 M^* 上的值：$=\big(M \setminus (D^3 \sqcup D^3)\big)$。如果 $\mathcal{L}(M)$ 是 M [Lyu95b], 中使用以下分解得到的 Lyubashenko 不变量 M ，其中将其表示为 2-态射生成元的形式，我们证明：

定理 1.4 (6.6)**.** $\mathcal{Z}(M^*) = (1/\mathscr{D}) \cdot \mathcal{L}(M) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}'(S^2)}$.

当 $\mathcal{C}$是半单的， $\mathcal{Z}(M^*) = \mathcal{RT}(M) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}'(S^2)}$，Reshetikhin-Turaev 不变量 M [RT91]。

最后，继续沿用 [Lur09], 的思路，实心环面应当给出一个迹映射，作为 $\mathcal{Z}(S^1)$ 上“卡拉比-丘”结构的一部分。

定理 1.5 (7.7，7.20)。 记 $\mathcal{P} := \mathrm{Proj}(\mathcal{C})$，为 $\mathcal{C}$ 中由射影对象构成的全子范畴，

- 存在一个典范同构
$$c_t \colon \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P) \xrightarrow{\sim} \mathcal{Z}(T^2)$$
- 映射 $t' := \mathcal{Z}(S^1 \times D^2) \circ c_t$ 是一个修正迹。

1.1. **前人文献综述**。 如果量子场论的作用泛函不依赖于时空度量，就称其为拓扑的 [Wit88]。量子场论的数学形式化是一个公认的难题。然而，拓扑量子场论这一类理论足够简单，因此可以对其进行数学定义。Atiyah 在 [Ati88], 沿袭 Segal 的工作 [Til04], 提出了拓扑量子场论的定义：从一个“几何”协边范畴到一个由向量空间构成的“代数”范畴的对称幺半函子。自首次提出以来，这一定义经历了数次推广。基于上述内容，一个有趣的问题自然浮现：是否存在能够纳入数学形式体系的物理拓扑量子场论实例?

这一连接两种概念的做法，最早且最重要的例子之一，出现在量子拓扑领域的奠基工作中。在其开创性著作中[Wit89], Witten 通过陈-西蒙斯理论恢复了链环的琼斯多项式。三维陈-西蒙斯拓扑量子场论的输入数据是一个连通紧李群 G，以及一个层级（对于单对象 G而言，层级是整数）。不久之后，Reshetikhin 和 Turaev 得以严格地构造相应的三维流形不变量 [RT90；RT91], 并以此定义了一个数学上的拓扑量子场论[Tur20]。重要的是，他们的构造使用了相同的输入数据 G 和一个层级。具体而言，这些数据表现为相应量子群在一个由层级确定的单位根 $\mathcal{C}(G,\ q)$处的表示范畴 q。事实上，Reshetikhin-Turaev（RT）构造所需的代数输入数据是一个半单模张量范畴。这个范畴的对象和态射可用于装饰 RT 构造中使用的协边范畴。

自这一构造问世以来，将其推广以纳入非半单模张量范畴一直是一个备受关注的问题。从数学角度看，这有助于推广已有结果；从物理角度看，这同样很有意义。有理顶点算子代数（VOA）并非共形场论（CFT）中出现的唯一类型的 VOA。另一类值得关注的是对数型顶点算子代数，其表示范畴并非半单。关于对数共形场论相关联系的一些参考文献包括 [FS11；FSS13；FS16；FS17；Cre+24]。当然，物理学中还有更多类型的非半单理论，因此可以说，从物理角度看，非半单性相当「自然」。

推广 RT 构造的最初尝试始于 Hennings 的工作[Hen96], ，他率先利用有限维因子化辫带 Hopf 代数定义了三维流形不变量。由于不要求半单性，这构成了首个基于非半单数据的构造。Lyubashenko 通过定义非半单模张量范畴对这一构造进行了推广。他还利用该范畴定义了映射类群射影表示 [Lyu95b]。随后，Kerler-Lyubashenko 在 [KL01], 中定义了扩展拓扑量子场论的一个部分版本。他们的函子

定义在配边的双范畴上，其中对象仅限于连通曲面，幺半乘积则由连通和给出。

关于能否从非半单模张量范畴构造三维拓扑量子场论的问题，几年后由 [Bar+15] 给出了答案。他们证明，一次扩展的三维拓扑量子场论由半单模张量范畴分类。在这一扩展框架下，他们没有采用带标记的配边范畴，而是考虑了一个对象为一维闭流形的无标记2-范畴。通过考察三维配边2-范畴的“生成元与关系”表示，得到了这一分类结果。重要的是，这表明如果将完整配边2-范畴作为拓扑量子场论的源，那么半单性就是不可避免的。

[De +22] 的工作利用（可能非半单的）模张量范畴的数据构造了一种 RT 型拓扑量子场论。所考虑的带标记配边范畴满足可容许条件。这反映了上文关于能否在所有余边界上定义非半单拓扑量子场论的评论。在 [De +23] 中，他们进一步通过计算由此得到的映射类群射影表示来研究这些拓扑量子场论，并证明这些表示与 Lyubashenko 的表示等价。
事实上，De Renzi 在 [De 21], 中以一次扩展拓扑量子场论的形式，利用所谓的“扩展普适构造”，定义了上述内容的一个2-范畴扩展。重要的是，我们注意到，这仍然处于带标记的配边范畴框架内。事实上，在这一构造中，入边界为空且没有装饰的二维配边是不允许的。尽管框架不同，但在某些方面，我们的工作回答了 De Renzi 在 [De21], 中提出的问题：曲面的可容许条件能否被解除？这是考虑拓扑量子场论的适当目标范畴后得出的结果。我们对目标范畴的选择与 De Renzi 的选择有所不同，因此很难直接比较这两种构造。不过，对于一些生成的1-态射与2-态射，我们仍可在一定程度上比较它们的赋值；尽管对圆的赋值不同，但二者相似：$\mathcal{C}$ 与 $\mathcal{P}$。考虑到这一差异，我们发现，对裤子曲面的赋值是相同的：即张量积函子以及（不可避免的）其双伴随，其中涉及 Lyubashenko余端 $\mathcal{F}$ (2.30)。我们还看到，De Renzi 对3维球的赋值涉及修正迹；我们的构造中也有这种情况——如果考虑对 $\nu^{\dagger}$ 的适当赋值，5.5中包含修正迹的数据（见注释5.5）。基于这些观察，我们认为，以 Bimod 为目标范畴的 De Renzi 式构造，在限制到无标记的1-态射时，应当能够恢复我们的构造。

近期出现了一些基于非半单数据构造的 1-范畴的“非紧”拓扑量子场论。这意味着，对所考虑的余边（1-）范畴中的态射施加了非紧条件。此类构造最早见于 [Cos+23 b], ，其中利用非半单球形范畴的数据构造了非紧三维拓扑量子场论，从而将 Turaev-Viro 拓扑量子场论推广到非半单情形 [TV92; BW99] 随后，出现了一个四维拓扑量子场论的构造 [Cos+23a] ，该构造利用非半单带状范畴的数据，将 Crane-Yetter 拓扑量子场论推广到了非半单情形 [CY93] 。

1.2. **结果的直觉与概述**。回顾迄今为止的相关文献，特别是当我们关注分类结果时，自然会提出一个问题：在一次扩展的三维情形中，如何允许非半单性？这正是本文的主要动机，也是我们最终要实现的目标。

然而，要做到这一点，有一个关键观察需要指出。
从一次扩展的三维拓扑量子场论开始 Z，可以沿圆对其作紧化$Z(S^1 \times -)$，从而得到一个完全扩张的二维拓扑量子场论。这意味着 $Z(S^1)$ 将是 2-可对偶的。然而，对于文献 [Bar+15附录 A], 中考察的所有可作为此类三维扩展拓扑量子场论目标的“2-向量空间”候选者，其 2-可对偶对象都是半单的。
为了克服这个问题，我们能调整的方面有限：所考虑拓扑量子场论的源和目标2-范畴。

为了恰当地调整源，我们转而采用 Lurie 在 [Lur09]中提出的非紧拓扑量子场论思想。在这一框架下，我们排除某些三维余边界（2-态射），这些余边界为 $\mathrm{ev}_{Z(S^1)}$ 和 $\mathrm{coev}_{Z(S^1)}$的伴随提供见证，因此降低了对 $Z(S^1$的 2-可对偶性这一强要求。去掉 2-可对偶性要求后，我们还需要选择一个合适的目标2-范畴，其中 1-可对偶对象并非半单对象。这就是我们在第 2.6 节定义的双范畴 Lincat。
带标记的配边范畴所需的可容许性条件，正如 [De +22; De 21] 中所述，可以看作是上述事实的体现。可容许条件归结为要求投射线股存在。非紧性条件与此相吻合，因为它对应于不允许出现 0-手柄；在带标记的情形下，这意味着不允许包含空骨架。

基于这一点，并给定一个符合定义2.10意义的模张量范畴 $\mathcal{C}$，我们可以定义第3.1节中的赋值 $\mathcal{Z}$。 $\mathcal{Z}$ 的源是 $\mathrm{Bord}^{sig}_{3\,2\,1^{nc}}$，，，，即 2-范畴 $\mathrm{Bord}^{sig}_{3\,2\,1^{nc}}$，，，的（猜想中的）呈示；后者是非紧三维配边的 2-范畴的签名扩张。将其与 [Bar+15] 比较，我们不允许唯一一个具有空入边界的 2-态射生成元，也不允许任何涉及它的关系。下文给出表（1），以描述用于定义 $\mathcal{Z}$ 的代数数据。请注意，此处我们只提及 $\mathrm{Bord}^{sig}_{3\,2\,1^{nc}}$，，，的不可逆 2-态射，因为可逆 2-态射（2.4、2.5、2.6）的赋值相当直接。

其中一些关键要素包括：

- 特选对象 $\mathcal{F} \in \mathcal{C}$，定义见 2.30。它在 $\mathcal{C}$ 中具有霍普夫代数的结构。
- 霍普夫代数 $\mathcal{F}$ 还具有额外结构，即积分$\Lambda\colon\ \mathbb{1} \to \mathcal{F}$以及余积分 $\Lambda^{co}\colon \mathcal{F} \to \mathbb{1}$（定义见 2.13）。这些态射对我们的构造至关重要。
- 单位对象的投射覆盖（$P_{\mathbb{1}}$， $\varepsilon_{\mathbb{1}}$）在 $\mathcal{C}$ 中，以及唯一确定的（引理 2.20）态射 $\eta_{\mathbb{1}}\colon\ \mathbb{1} \to P_{\mathbb{1}}$，表明它同时也是内射包络。

接下来我们证明 $\mathcal{Z}$ 保留了2.2中的所有关系。这意味着 $\mathcal{Z}$ 是一个定义良好的对称幺半函子，从由表示2.2 生成的 2-范畴映射到 Lincat。

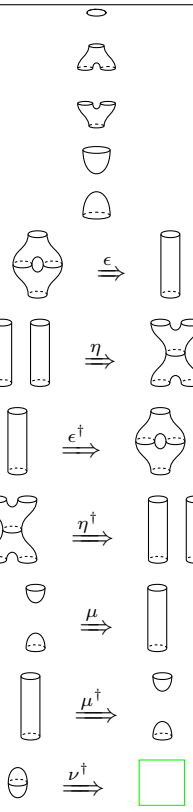
Bord 的生成元$^{sig}_{3,2,1}$	用于定义 $\mathcal{Z}$的数据
	$\mathcal{C}$ $\otimes\colon\ \mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}\to\mathcal{C}$ $\int^{y\in\mathcal{C}} -\otimes y^\vee\boxtimes y\colon\ \mathcal{C}\to\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$ $-\otimes\mathbb{1}\colon\ \mathrm{Vec}_k\to\mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ \mathbb{1})^*\colon\ \mathcal{C}\to\mathrm{Vec}_k$ 涉及求值 涉及余求值 涉及积分 $\Lambda\colon\ \mathbb{1}\to\mathcal{F}$ 涉及余积分 $\Lambda^{co}\colon\ \mathcal{F}\to\mathbb{1}$ 涉及 $\varepsilon_{\mathbb{1}}\colon\ P_{\mathbb{1}}\to\mathbb{1}$ 和 $\eta_{\mathbb{1}}\colon\ \mathbb{1}\to P_{\mathbb{1}}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ \mathbb{1})^*\dashv -\otimes\mathbb{1}$ 的单位 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ \mathbb{1})^*\dashv -\otimes\mathbb{1}$ 的余单位

表1。 赋予代数数据 $\mathcal{Z}$ 给 Bord 的生成元$^{sig}_{3,2,1}$。

我们将重点介绍构造中的几个要点：

- 曲面的态空间由 $\mathcal{Z}(\Sigma_g)=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}^{\otimes g},\ 1)^*$给出。我们已经可以看出，这些态空间与 [De +22] 的态空间互为对偶。
- Crane 和 Yetter 的一个经典结果 [CY99] 指出，一次打孔环面是一个霍普夫代数对象。因此，将其映到余端 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{Z}$ 唯理所当然的。
- 在 $\mathcal{Z}$ 下，使之平凡化的 2-同构会引出中  子的一个平凡化（注 7.6）。

构造出 2-函子 $\mathcal{Z}\colon \mathrm{Bord}^{sig}_{3,2,1}\to$ Lincat 后，我们得到了曲面映射类群的一个中心扩张的表示。等价地，我们得到了映射类群的射影表示。我们计算映射类群生成元的作用，发现所得表示与[Lyu95b；De +23]中的表示对偶。为此，我们将相应的 Dehn 扭转描述为 2.2 中生成元的复合态射。

论文的结构安排如下：

(1) 在第2章的第一部分，我们回顾扩展非紧余边范畴的定义，并给出 Bord^{sig}, $_{3\,2\,1}^{nc}$, , 的表示。随后，我们介绍模张量范畴所需的代数背景。(2) 在第3章的第一部分，我们明确给出表1中概述的赋值$\mathcal{Z}$ 。本章第二部分致力于证明 $\mathcal{Z}$ 保持表示 2.2 中的关系。这便构成了定理 1.1 的证明。(3) 在第4章的第一部分，我们研究与生成映射类群的 Dehn 扭转相对应的复合态射的作用。随后，我们将相应的射影表示与 Lyubashenko 以及 De Renzi 等人的表示对应起来。(4) 存在一个 2-函子 Lincat $\to$Bimod。在第5章中，我们利用它计算 $\mathcal{Z}$ 在 Bimod 中的取值，从而得到一种以图表表示 2-态射作用的方法。这样做是为了便于后续章节中的计算。(5) 在第6章中，我们说明如何从非紧拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$中提取一个数，其中给定一个三维流形 M。我们验证这个数与 M的 Lyubashenko 不变量“相符”。在半单情形下，由此可推得， M 在 [Bar+15] 的拓扑量子场论下的取值就是 M的 Reshetikhin-Turaev 不变量。(6) 第7章旨在说明$\mathcal{Z}(S^1 \times D^2)$的取值为何以及在何种意义上是一个修正迹。这需要解释为何存在典范同构 $\mathcal{Z}(T^2) \cong \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P)$。我们通过与双范畴中的 1-对偶化理论相关的论证来说明这一点。

1.3. **未来方向**。 如前所述，本研究的一个重要动机是对三维非紧致拓扑量子场论进行完整分类。在确立定理 1.1之后，这就意味着要考虑其逆向问题：“从一个目标范畴为 Lincat/Bimod 的非紧致三维拓扑量子场论 Z 出发，在 $Z(S^1)$ 上诱导出的结构是什么？”

由于定理 1.1 的证明非常明确，许多诱导结构已经一目了然。我们预计 $Z(S^1)$ 最终会成为某种形式的“广义”模张量范畴。这是因为刚性只会施加于投射对象上。

1.4. **约定与记号**。 固定 k 为一个完美域，以确保 [KL01] 的结果成立。请注意，这一假设比其他研究中的代数闭性假设更弱。所有向量空间、代数和范畴均视为定义在 k 上。用 Vec_k 表示由有限维向量空间及其线性映射构成的范畴。在幺半范畴 $\mathcal{C}$ 中，将对象 X 的左对偶记为 $X^\vee$，因此将左求值和余求值分别记为 ev_X: $X^\vee \otimes X \to \mathbb{1}$ 和 coev_X: $\mathbb{1} \to X \otimes X^\vee$。右对偶化数据只在第 7 章出现。由于我们研究的范畴是枢轴范畴（piv: $X \xrightarrow{\sim} (X^\vee)^\vee$），我们将其定义为:

$$\mathrm{ev}_X^R := \mathrm{ev}_{X^\vee} \circ (\mathrm{piv} \otimes \mathrm{id}_{X^\vee}) \quad \text{and} \quad \mathrm{coev}_X^R := (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes \mathrm{piv}^{-1}) \circ \mathrm{coev}_{X^\vee}.$$

作为例外，我们将 V 的对偶向量空间记为 V^*。

余边和图表的阅读惯例是从下往上。第5 章和第6 章中遇到的内部弦图则从上往下阅读。

1.5. **致谢**。 我谨感谢导师 Pavel Safronov 在整个项目过程中给予我的指导。感谢 Benjamin Ha¨ıoun 和 Iordanis Romaidis 提供的宝贵讨论。我还要感谢 [Bar +15] 的作者公开了他们的 TikZ 代码。本研究是我在爱丁堡大学攻读博士学位期间博士论文的一部分。

2. Setup

2.1. **非紧3维协边2-范畴**。 我们将简要介绍非紧3维定向协边的双范畴 $\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{or\;nc}{}_{,,,\circ}$。关于定向协边完整双范畴的详细定义，请参阅 [Sch14]。

- 一个对象是一个闭定向1维流形，即有限个（可能为零个）圆的不交并。

(2.1)

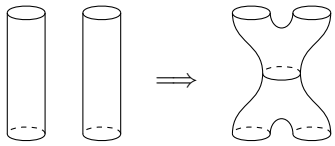
- 一个1-态射是一个紧定向2维协边，连接这些对象。例如，下图所示的余边是一个 1-态射 $S^{\mathbb{1}} \to S^1 \sqcup S^1$。

(2.2) 

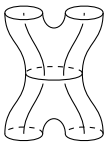
复合通过沿共同边界粘合流形来实现。

- 一个 2-态射 $\Sigma \to \Sigma'$ 是一个三维流形 M，可能带有角，它是 Σ 与 Σ'之间的一个余边，并且具有如下性质：每个连通 M 的分支与 Σ有非空交集。

  例如，实现该2-态射的三维流形

(2.3) 

可以想象为从作为该2-态射目标的实心「X」形状中，适当地「钻出」两个实心圆柱体。可将其描绘如下：



其中，我们移除了上图所示两条线的管状邻域。

为了直观说明非紧性条件，3维球D^3： $S^2 \to$是该范畴中的一个2-态射，但 D^3: $\emptyset \to S^2$ 不是。

- 对称幺半结构由不交并给出。

如引言中所述，我们构造所需的输入数据是一个模张量范畴。当比值 $p_+/p_- \neq 1$ (如定义 2.17 中所定义）满足该情况时，所得的拓扑量子场论是反常的。因此，我们将采用一种表述，它应等价于 $\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{or\;nc}{}_{,,,}$ 的「中心扩张」。这是由带符号数的余边界构成的 2-范畴，$\mathbf{Bord}^{sig}{}_{,3\,2\,1}^{\quad nc}{}_{,,\circ}$。其定义与 $\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{or\;nc}{}_{,,,}$ 相同，不同之处在于 1-态射和 2-态射都带有一些额外数据：

- 对象是闭的一维流形 Γ，并配有一个以其为边界的2-流形 Γ，我们选择该流形为若干个圆盘的不交并。
- 1-态射（Σ，Σ）：（Γ，Γ）$\to$（Γ'，Γ'）仍然是二维配边，并配备一个有界定 $\Gamma \cup_{\Gamma} \Sigma \cup_{\Gamma'} \Gamma'$的三维流形 Σ 作为选定对象。
- 2-态射（M，W）：（Σ，Σ）$\to$（Σ'，Σ'）是三维配边M：$\Sigma \to \Sigma'$ 带角，且满足 M 的每个连通分支都与 Σ有非空交集，并配备一个四维流形 W，其符号数为 $\partial W = \Sigma \cup_{\Sigma} M \cup_{\Sigma'} \Sigma'$。

请注意，我们也可以定义 $\mathbf{Bord}^{sig,\ nc}_{3,2,1}$，类似于 [De 21]，为 1-态射的第一上同调配备一个拉格朗日子空间，并为 2-态射配备一个整数（相应有界四维流形的符号数）。

2.2. **非紧三维配边2-范畴的表示**。本节将通过生成元与关系，对拓扑量子场论的源2-范畴进行描述。更准确地说，这是非紧三维配边2-范畴与我们将在本节后文给出的表示之间的一个猜想等价。

更具体地说，对称幺半2-范畴的一个表示由以下有限集合的数据组成：

- 生成对象；
- 生成 1-态射，其源和目标是生成对象的复合态射；
- 生成 2-态射，其源和目标是生成 1-态射的复合态射；
- 关系，即生成 2-态射的复合态射之间的方程。

对于这样的表示，我们可以关联一个由其生成的（完全弱）对称幺半2-范畴，其含义见 [Sch14，第 161] 页。
从这个生成的对称幺半2-范畴出发的严格对称幺半函子，由生成对象、1-态射和2-态射的像唯一确定，并且这些像满足该表示的关系。

猜想 2.1。非紧3维协边2-范畴 $\mathbf{Bord}^{sig,\ nc}_{3,2,1}$，其定义已在第 2.1节中略作说明，与下文所述表示得到的2-范畴等价。

下面的表示与 [Bar+15] 中的签名表示完全相同，唯一的区别是我们从生成元集合中移除了“ν”，以及所有涉及它的关系。请注意，如果我们舍弃生成元 ξ（即 $\xi = \mathrm{id}$），那么我们预期相应的表示与 $\mathbf{Bord}^{or\ nc}_{3,2,1}$ 等价。

定义 2.2. 我们如下定义**非紧**符号表示$\mathbf{Bord}^{sig,\ nc}_{3,2,1}$：

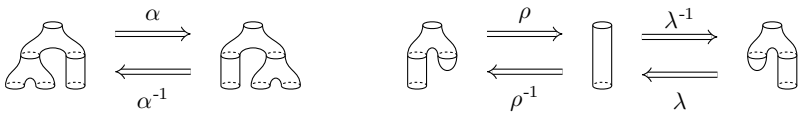
- 生成对象：

- 生成 1-态射：



- 可逆生成 2-态射：

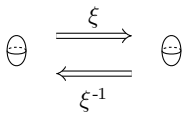
(2.4)



(2.5)



(2.6)

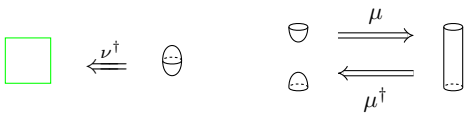


- 不可逆生成 2-态射：

(2.7)



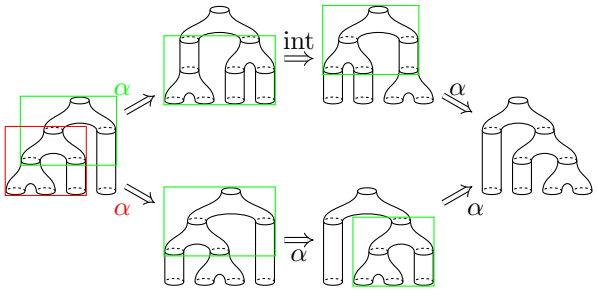
(2.8)



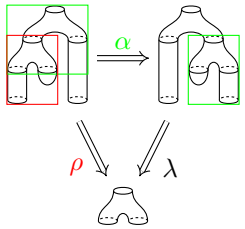
关系如下：

- （逆）每个可逆生成 2-态射 ω 都满足 $\omega \circ \omega^{-1} = \mathrm{id}$ 和 $\omega^{-1} \circ \omega = \mathrm{id}$。
- （幺半）2.4中的生成 2-态射满足五边形方程和单位方程：

(2.9)



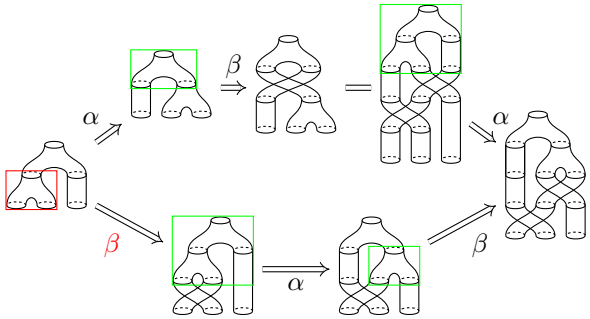
(2.10)



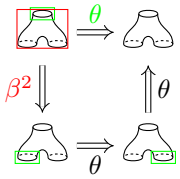
式（2.9）中的 2-态射 int 是一个交换子，是任意幺半2-范畴中一族规范 2-态射的一部分，它将两个张量积1-态射的 1-态射复合顺序互换： [Bar14]。

- （平衡性）数据（2.4）和（2.5）构成一个带有相容扭结的编织幺半对象：

(2.11)



(2.12)

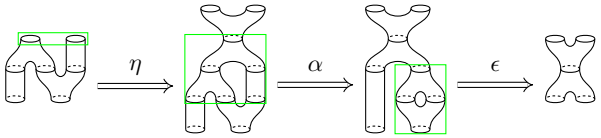


(2.13)



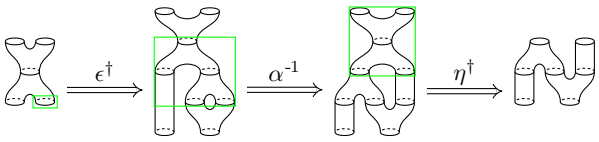
- （刚性）记 ϕ_l 为以下复合态射：

(2.14) $\phi_l :=$

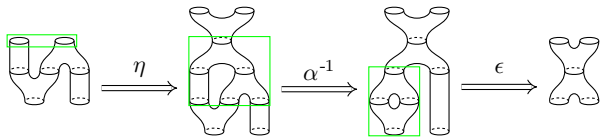


左刚性关系表明， ϕ_l 是可逆的，其显式逆元如下：

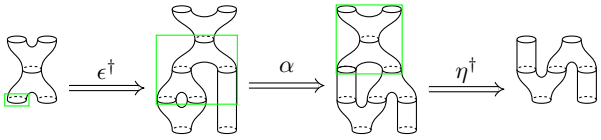
(2.15) $\phi_l^{-1} =$



同样，记 ϕ_r 为 ϕ_l 绕 z 轴旋转后的结果（含义见 [Bar+14，附录 B]）：

(2.16) $\phi_r \quad :=$ 

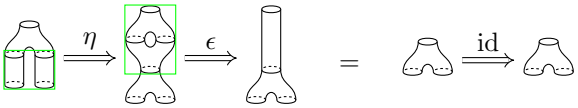
右刚性关系表明，ϕ_r 是可逆的，其显式逆元如下：

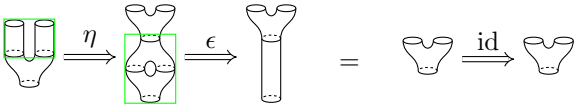
(2.17) $\phi_r^{-1} \quad =$ 

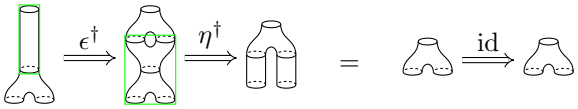
- (带状结构) 扭结满足以下等式：

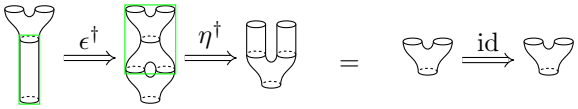
(2.18) 

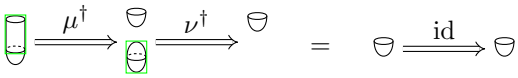
- （伴随）数据（2.7）表示为 的双伴随，而（部分）数据（2.8）表示为 的左伴随。也就是说，以下等式成立：

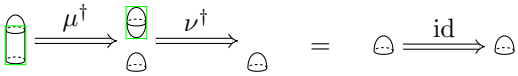
(2.19) 

(2.20) 

(2.21) 

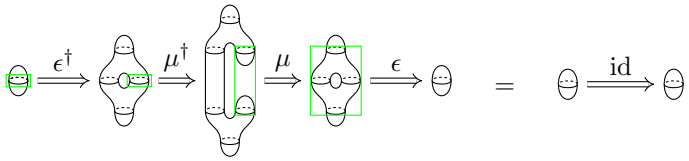
(2.22) 

(2.23) 

(2.24) 

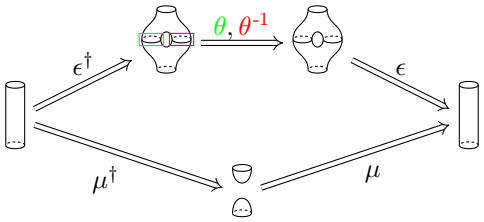
- （枢轴性）以下等式成立，并且绕 z-轴（2.25）^{z}:

(2.25)



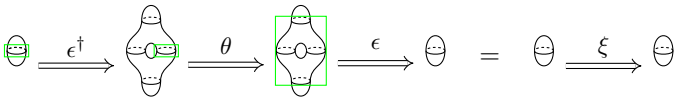
- （模性）下列方程成立，并且绕 z轴旋转后也成立（2.26）^{z}:

(2.26)



- （反常）下列方程成立:

(2.27)



注 2.3。 如果我们要求反常关系对 ξ^3 而非 ξ成立，并且施加另一条关系（[Bar+15，关系（40）]，，那么所得表示应当等价于配备了p_1 结构的非紧三维配边的2-范畴，$\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{p_1\,nc}$ . . . 。我们不定义 $\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{p_1\,nc}$ . . . ，但在此注明这一点，因为我们本可以将非紧致拓扑量子场论定义为一个从 p_1 表示 $\mathbf{Bord}_{3\,2\,1}^{p_1\,nc}$ . . . 出发的函子。唯一的区别在于，我们必须考虑模张量范畴 $\sqrt[6]{p_+/p_-}$的反常的六次方根，而不是 $\sqrt{p_+/p_-}$ （参见注3.9）。

2.3. **有限带辫范畴与射影对象**。 继 [埃蒂+15] 我们有如下定义:

定义 2.4。 线性范畴 $\mathcal{C}$ 若为阿贝尔范畴且满足以下条件，则称为**有限**范畴:

- 它只有有限个简单对象的同构类,
- 它有足够多的射影对象,
- 其对象具有有限长度,
- 其态射空间具有有限维数。

目前，我们用 $\mathcal{C}$ 表示一个有限范畴。
令 I 为简单对象的同构类集合。对于 $j \in I$，令 L_j 为第 j 个简单对象同构类的一个代表元。那么 $P_j \twoheadrightarrow L_j$ 是 L_j的投射覆盖。若 $\mathcal{C}$是幺半的，且$\mathbb{1}$ 是单对象，我们将其投射覆盖记为（$P_{\mathbb{1}}, \varepsilon_{\mathbb{1}}$），其中$\varepsilon_{\mathbb{1}}$: $P_{\mathbb{1}} \to \mathbb{1}$ 是典范满射。

我们用 Proj($\mathcal{C}$) 表示 $\mathcal{C}$中投射对象构成的全子范畴。若进一步假设 $\mathcal{C}$ 是刚性幺半的，则该子范畴将成为一个张量理想。
对于这样的 a $\mathcal{C}$，我们有以下结果：

- 其中的不可分解投射对象 $\mathcal{C}$ 恰好是简单对象的投射覆盖；对于 j，j' 简单对象，$P_j \cong P_{j'}$ 当且仅当 $L_j \cong L_{j'}$。
- 对于有限线性范畴 $\mathcal{C}$，Proj($\mathcal{C}$) 在直和运算下由简单对象 P_j 的投射覆盖生成。
- 设 L_j，$L_{j'} \in \mathcal{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的简单对象，且 P_j 是 L_j的投射覆盖，则

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_j, L_{j'}) \cong \begin{cases} k & \text{if} \quad j = j' \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

- 设 $P \in$Proj($\mathcal{C}$)，则由上述内容可得：

$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, \mathbb{1}) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\oplus_j P_j^{\oplus n_j}, \mathbb{1}) \cong \oplus_{n_j} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_j, \mathbb{1}) \cong \oplus_{n_1} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}}, \mathbb{1})$。

参见 [Lei15] 以获取参考资料。
现在设 V 是一个有限维向量空间，且 X，$Y \in \mathcal{C}$。由于 $\mathcal{C}$ 是线性的，我们可以通过以下泛性质定义 $V \otimes Y$：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(V \otimes Y, X) \cong \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vec}_k}(V, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X)). \tag{2.28}$$

由此等价关系，我们得到以下自然的（余单位）映射：

$$\mathrm{EV}_Y : \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X) \otimes Y \to X. \tag{2.29}$$

2.4. **余端**。现在我们假设 $\mathcal{C}$ 是意义下的有限张量范畴：[Eti+15]。提醒一下，这一定义包含刚性。
我们回顾余端的定义，以及之后会用到的一些结果。

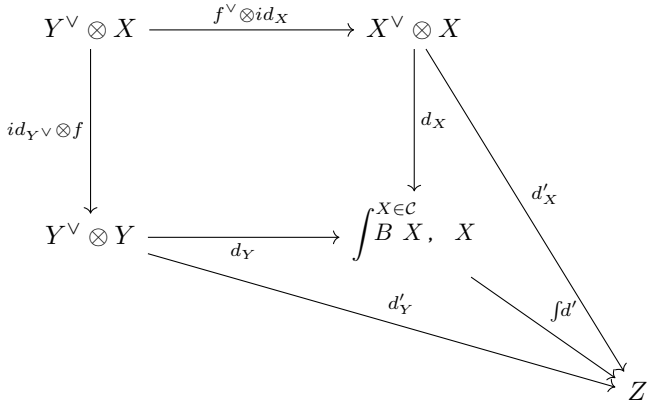
定义 2.5. 设 $\mathcal{D}$ 是一个有限线性范畴，$B : \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$ 是一个双函子。从 B 到一个常值双函子的二**自然变换** 由一个对象 $Z \in \mathcal{D}$（常值双函子的像）以及一族 $\{d_X : B(X, X) \to Z\}_{X \in \mathcal{C}}$ 的 $\mathcal{C}$ 态射构成，并满足：

$$d_X \circ (f^\vee \otimes id_X) = d_Y \circ (id_{Y^\vee} \otimes f)$$

对 $\mathcal{C}$中的每个态射 $f : X \to Y$。
为简便起见，我们将其称为源为 B 的二自然变换。
定义 2.6。 B 的**余端**是一个源为B的泛二自然变换，即一个对象 $\int^{X \in \mathcal{C}} B(X, X) \in \mathcal{D}$，它带有二自然族的结构态射$d_X : B(X, X) \to \int^{X \in \mathcal{C}} B(X, X)$，满足以下条件：对于任意一个源为 B的二自然变换(Z, d')，都存在唯一一个态射

$$\int d' : \int^{X \in \mathcal{C}} B(X, X) \to Z$$

使得图表:



对于每个态射 $f:\ X \to Y$ in $\mathcal{C}$，均成立交换性。
在实际应用中，我们有时将 $\int d'$ 记作 d'。

正如 [KL01] 中所述， EV 其是自然的，并且根据 [KL01，命题 5.15]:
命题 2.7。自然态射 $\int \mathrm{EV}_Y:\ \int^{Y} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,\ X) \otimes Y \to X$ 是同构。这对 $Y \in \mathcal{C}$ 以及 Proj($\mathcal{C}$) 都成立，这是因为 $\mathcal{C}$具有足够多的射影对象。

注 2.8. 这是所谓的余 Yoneda 引理（或忍者 Yoneda 引理）的一个实例，在 [Lor21第 2] 章中。

现在，利用对象 $G = \oplus_j P_j$ 是一个投射生成元这一事实， [KL01命题 5.17] 给出了以下结果:
命题 2.9. 对于一个双函子 $B:\ \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathcal{D}$，若其对每个变量都正合，则以下余端等价:

$$\int^{X\in\mathcal{C}} B(X,X) \cong \int^{P\in \mathrm{Proj}(\mathcal{C})} B(P,P) \cong \int^{\{P_j\}_{j=simple}} B(P_j,P_j).$$

利用上述结果，我们可以将某些余端化简为在射影对象上取值，甚至化简为在不可分解射影对象上取值。稍后我们将用到这一事实。
从现在起，我们假设 $\mathcal{C}$ 还具有带状结构，且幺半单位$\mathbb{1}$是单对象。

对于有限带范畴 $\mathcal{C}$，Majid [Maj91] 和 Lyubashenko[Lyu95a], [Lyu99], 证明了余端

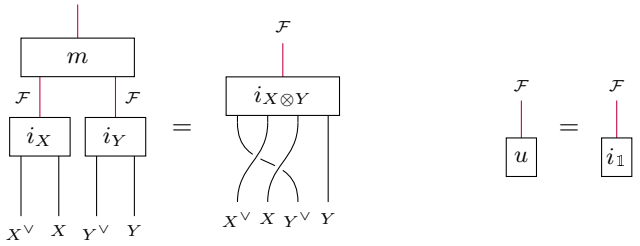
$$\mathcal{F} := \int^{X\in\mathcal{C}} X^\vee \otimes X \tag{2.30}$$

存在。我们用 i_X 表示其结构态射族: $X^\vee \otimes X \to \mathcal{F}$。此外，他们证明余端 $\mathcal{F}$ 是 $\mathcal{C}$ 中的 Hopf 代数对象。Hopf 代数结构的结构态射记作:

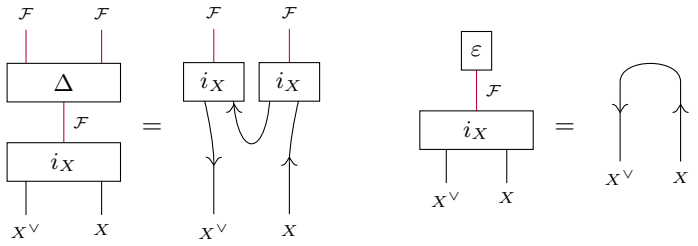
$$\begin{aligned} \text{Product} \quad & m\colon \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\to\mathcal{F} & \qquad \text{Unit} \quad & u\colon \mathbb{1}\to\mathcal{F} \\ \text{Coproduct} \quad & \Delta\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}\otimes\mathcal{F} & \qquad \text{Counit} \quad & \varepsilon\colon \mathcal{F}\to\mathbb{1} \\ \text{Antipode} \quad & S\colon \mathcal{F}\to\mathcal{F}. \end{aligned}$$

其定义如下：

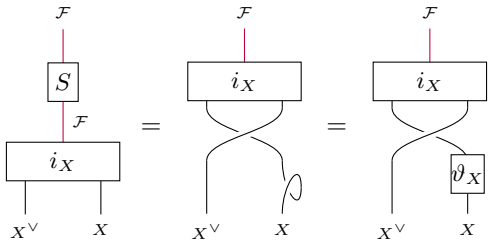
(2.31)



(2.32)

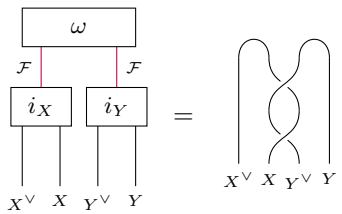


(2.33)



此外，余端 $\mathcal{F}$ 具有霍普夫配对 $\omega\colon\ \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\to\mathbb{1}$。它按以下方式唯一确定：

(2.34)



定义2.10. 编织有限张量范畴 $\mathcal{C}$ 是**非退化**的，当且仅当霍普夫配对 ω 是非退化的。

对于对象 $Y \in \mathcal{C}$，我们可以通过以下复合态射定义 ϱ_Y：

$$\varrho_Y : Y \xrightarrow{\mathrm{coev}_Y \otimes \mathrm{id}_Y} Y \otimes Y^\vee \otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}_Y \otimes i_Y} Y \otimes \mathcal{F}. \tag{2.35}$$

根据余乘法的定义 Δ 属于 $\mathcal{F}$，很容易看出 (Y, ϱ_Y) 是一个 $\mathcal{F}$-余模。态射 ϱ_Y 也称为典范余作用。特别地，自由余模 $X \otimes \mathcal{F}$ 的余作用由 Δ 的余乘法给出 $\mathcal{F}$。我们将在计算中隐式地使用这一事实。其证明见推论 3.6。用 $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ 表示 $\mathcal{C}$中右 $\mathcal{F}$ 余模构成的范畴。

我们将在第 3 节的构造中用到一个重要事实，如下：

引理 2.11。对于编织有限张量范畴 $\mathcal{C}$，函子

$$\mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{F}}, \quad X \boxtimes Y \mapsto (X \otimes Y, \mathrm{id}_V \otimes \varrho_Y)$$

是一个等价。

这是 Lyubashenko 的一个更一般结果的特殊情形，该结果使用了平方余代数的概念 [Lyu99，第 2 节。7]。

2.5. **积分与模张量范畴**。

定义 2.12。**模张量范畴**是非退化的有限带范畴。

注意，该定义不假设半单性。参见 [Shi19]，以了解关于 ω 的非退化性的其他等价条件。
现在我们将陈述模张量范畴的一些性质，这些性质将对我们的构造有所帮助。

定义 2.13。若态射 Λ: $\mathbb{1} \to \mathcal{F}$ 满足以下条件，则称其为 $\mathcal{F}$ 的（双侧）**积分**：

$$m \circ (\Lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \Lambda \circ \varepsilon = m \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Lambda).$$

对偶概念是（双侧）**余积分**，它是满足以下条件的态射 Λ^{co}: $\mathcal{F} \to \mathbb{1}$：

$$(\Lambda^{co} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ \Delta = \eta \circ \Lambda^{co} = (id_{\mathcal{F}} \otimes \Lambda^{co}) \circ \Delta.$$

命题 2.14. 若 $\mathcal{C}$ 是模的，则积分和余积分存在，且在相差一个标量的意义下唯一。

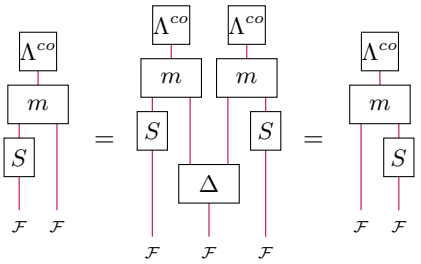
注 2.15. 命题 2.14 在 $\mathcal{C}$ 是幺模的情况下成立。但正如[KL01，引理 5.2.8], 模性蕴含幺模性。

引理 2.16. 设 Λ 和 Λ^{co} 分别是 $\mathcal{F}$的非零积分和非零余积分。则以下结论成立：

(1) $\Lambda^{co} \circ \Lambda \neq 0$(2) $S \circ \Lambda = \Lambda$(3) $\Lambda^{co} \circ m \circ$
$(S \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \Lambda^{co} \circ m \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes S)$

证明。 第 (1) 部分的证明见 [KL01，定理 4.2。5] 而 (2) 可由 [DR13中的方程 (a) 推出，引理 3。13], 在左侧与 $\mathrm{id}_{\mathcal{F}} \otimes \Lambda^{co}$ 以及右侧的 Λ 复合之后即可得到。

现在我们将证明第 (3) 部分：



在第一个等式中，我们使用了 [KL01，图 4.3(c)], 与反粒子预复合 S；在第二个等式中，我们使用了 [KL01，图 4.3(d)], 再次与 S预复合。请注意，要使上述结论成立，我们用到了以下事实： $\mathcal{C}$ 是模的，因此出现在 [KL01] 中的积分对象实际上是张量单位。

□

定义 2.17。 态射 $\mathcal{T}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ 是唯一满足以下恒等式的态射：对所有 $X \in \mathcal{C}$ ，

$$\mathcal{T} \circ i_X = i_X \circ (id_{X^\vee} \otimes \vartheta_X).$$

对于带有积分 Λ 的模张量范畴 $\mathcal{C}$ ，存在非零常数$p_\pm$，使得：

$$\varepsilon \circ \mathcal{T}^{\pm} \circ \Lambda = p_\pm \, \mathrm{id}_{\mathbb{1}} \, .$$

此引理证明见 [Ker96，定理 5]:

引理 2.18。 设 $\mathcal{C}$ 为模的，且 Λ 和 Λ^{co} 分别是 $\mathcal{F}$ 的积分和余积分，并满足 $\Lambda^{co} \circ \Lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$。那么，存在一个非零系数 $\zeta \in k^\times$满足方程

$$\omega \circ (\Lambda \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) = \zeta \Lambda^{co}.$$

我们称 ζ 为 Λ的 **模性参数**。

以下引理证明见 [De +22，推论 4。6]:

引理 2.19。 若 $\mathcal{C}$ 是模范畴，则 $\zeta = p_- \cdot p_+$。

以下结果证明见 [GR20，推论 6。4]。

引理 2.20. 若 $\mathcal{C}$ 是模范畴，则存在唯一的态射$\eta_{\mathbb{1}}\colon \mathbb{1} \to P_{\mathbb{1}}$ ，使得对于每个简单对象 $j \in \mathcal{C}$，方程成立

$$\Lambda^{co} \circ i_{P_j} = \delta_{P_j, \mathbb{1}} \eta_{\mathbb{1}}^\vee \otimes \varepsilon_{\mathbb{1}}.$$

2.6. **目标双范畴**。

定义 2.21 (Lincat)**.** 对称幺半双范畴 Lincat 定义如下：

- 其对象是有限阿贝尔线性范畴
- 其 1-态射是右正合函子，即保持有限余极限的函子。我们用 $\mathrm{Fun}^{Lincat}(-,-) \subset \mathrm{Fun}(-,-)$ 表示右正合线性函子的全子范畴。
- 其 2-态射是自然变换。

Lincat 上存在由 Kelly 定义的自然张量积 [Kel82] （它推广了有限阿贝尔范畴的 Deligne 张量积），其特征由如下泛性质唯一确定：保持有限余极限的函子 $\mathcal{C} \otimes \mathcal{D} \to \mathcal{E}$ 等价于一个函子 $\mathcal{C} \times \mathcal{D} \to \mathcal{E}$，它分别在 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{D}$中保持有限余极限。该张量积的单位是范畴 Vec_k，即有限维 k-向量空间范畴。

注 2.22. Lincat 中的 1-态射是右正合函子，而我们将要研究的模张量范畴有足够多的射影对象。在这种情况下，右正合函子由其在射影对象上的取值唯一确定。这意味着$Fun^{Lincat}(\mathcal{C}, \mathrm{Vec}_k) \cong Fun(\mathrm{Proj}(\mathcal{C}), \mathrm{Vec}_k)$。定义拓扑场论时，这使我们只需在投射对象上指定某些 1-态射生成元。更好的是，只需讨论不可分解射影对象，因为射影对象的直和项仍是射影对象。

此外，我们将默认把函子 $F\colon \mathrm{Vec}_k \to \mathcal{C}$ 与其取值 $F(k)$ 视为同一对象；后者是 $\mathcal{C}$ 的一个对象。

3. Construction of the TQFT

根据对称幺半2-范畴的表示的定义（第 2.2 节）和猜想 2.1，要定义非紧致三维拓扑量子场论，我们需要指定生成元在目标双范畴 Lincat 中的像，并验证第 2.2 节给出的非紧致表示中的所有相关关系均成立。

3.1. **赋值给生成元**。 固定 $\mathcal{C}$ 为一个（不一定是半单的）模张量范畴，并且 $\mathcal{P} := \mathrm{Proj}(\mathcal{C})$。因此， $\mathcal{C} \in \mathrm{Lincat}$。此外，令$\mathscr{D} \in k^\times$ 为一个其值将在稍后由某些关系确定的常数，并固定一个积分 Λ，其存在性由命题 2.14 保证。这唯一确定了一个余积分 Λ^{co}，满足 $\Lambda^{co} \circ \Lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$，以及一个模性参数$\zeta \in k^\times$，根据引理 2.18。

为方便读者，在详细介绍完整赋值之前，我们重复列出引言中的表格1 。

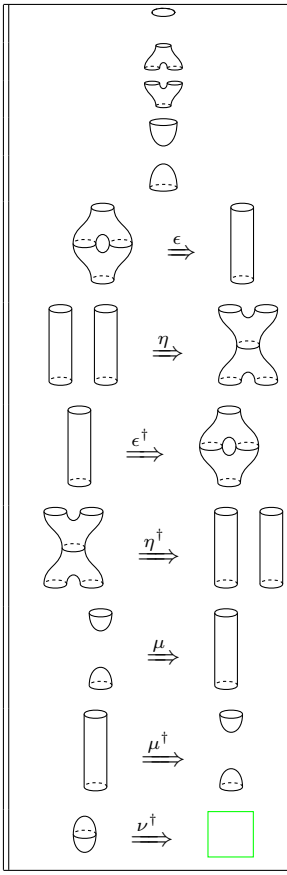
Bord 的生成元^{sig}	Lincat 中的值
	$\mathcal{C}$ 遗忘：$\mathcal{C}^{\mathcal{F}} \to \mathcal{C}$ 余自由：$\mathcal{C} \to \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ $- \otimes \mathbb{1}$: $\mathrm{Vec}_k \to \mathcal{C}$ $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, \mathbb{1})^*$: $\mathcal{C} \to \mathrm{Vec}_k$ $\mathrm{id}_X \otimes \varepsilon$: $X \otimes \mathcal{F} \to X$ 余作用 δ_X $\mathrm{id}_X \otimes \mathscr{D}^{-1}\Lambda$: $X \to X \otimes \mathcal{F}$ $(\mathrm{id}_X \otimes (\mathscr{D}\Lambda^{co} \circ m \circ (S \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}))) \circ (\delta_X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}})$ $\mathscr{D}(\mathrm{ev}_{\varepsilon_1} \otimes \eta_{\mathbb{1}})$ $(\mathrm{id} \otimes EV_P) \circ (\mathrm{coev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})})$ 向量空间的求值

表2. 对 Bord 的生成元 $\mathcal{Z}$ 的指派^{sig}

请注意，在介绍了必要的代数预备知识后，我们对赋值作出了更精确的描述。特别是，我们利用了等价关系 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}\xrightarrow{\sim}\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$（引理 2.11）。

现在，我们更详细地将赋值 $\mathcal{Z}:\mathbf{Bord}^{sig,\ 3\,2}_{,,1}{}^{nc}\to\mathbf{Lincat}$ 定义如下：

$$\mathcal{Z}(S^1)=\mathcal{C}$$

Call

- $T:=\mathcal{Z}($
- $T^R:=\mathcal{Z}($
- $U:=\mathcal{Z}($
- $U^L:=\mathcal{Z}($

并定义：

- T 由幺半乘积给出：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}&\xrightarrow{T}\mathcal{C}\\ X\boxtimes Y&\mapsto X\otimes Y\end{aligned}$$

- T^R 为：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}&\xrightarrow{T^R}\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}\\ X&\mapsto\int^{Z\in\mathcal{C}}X\otimes Z^\vee\boxtimes Z\end{aligned}$$

  我们将这个映射 T^R 称为，因为稍后检验关系（2.19）、（2.20）时，这将表明它是 T 的右伴随。
- U: $\mathbf{Vec}_k\to\mathcal{C}$

$$\begin{aligned}\mathrm{Vec}_k&\xrightarrow{U}\mathcal{C}\\ V&\mapsto V\otimes\mathbb{1}\end{aligned}$$

- U^L 是（正如我们将看到的） U的左伴随。我们将其定义为：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}&\xrightarrow{U^L}\mathrm{Vec}_k\\ X&\mapsto\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,\mathbb{1})^*\end{aligned}$$

如第 2.6 节所述，使用 $\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ 而不是 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}$会更有益。因此，在等价 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}\cong\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$ 下，函子为：

- T 对应于遗忘函子：

$$\begin{aligned}\mathcal{C}^{\mathcal{F}}&\xrightarrow{T}\mathcal{C}\\ (x,\delta_X)&\mapsto X\end{aligned}$$

- T^R 对应于:

$$\begin{aligned} \mathcal{C} &\xrightarrow{T^R} \mathcal{C}^{\mathcal{F}} \\ X &\mapsto (X \otimes \mathcal{F}, \Delta) \end{aligned}$$

现在我们将定义 2-态射的像。
生成 2-态射 α, λ, ρ, β, θ 的赋值很直接。它们依次由模张量范畴 $\mathcal{C}$ 的结合子、左/右单位子、编织（$c_{X,\,Y}$）和扭结态射给出。

映射 $\mathcal{Z}(\epsilon)$ $\mathcal{Z}(\eta)$ 由下式给出（并将证明它们分别是 $T \dashv T^R$ 的伴随的余单位和单位）：

- $\mathcal{Z}(\epsilon)$ 是一个自然变换: $T \circ T^R \Rightarrow \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$。对于 $X \in \mathcal{C}$，我们将其定义为:

$$\mathcal{Z}(\epsilon)\colon X \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \varepsilon} X$$

- $\mathcal{Z}(\eta)$ 是一个自然变换: $\mathrm{id}_{\mathcal{C}^{\mathcal{F}}} \Rightarrow T^R \circ T$。对于 $(X,\ \delta_X) \in \mathcal{C}^{\mathcal{F}}$，我们将其定义为:

$$\mathcal{Z}(\eta)\colon (X, \delta_X) \xrightarrow{\delta_X} (X \otimes \mathcal{F}, \Delta),$$

其中 ε 是 $\mathcal{F}$的余单位，而 $\delta_X\colon X \to X \otimes \mathcal{F}$是 $\mathcal{F}$-余模（$X,\ \delta_X$）的余作用。

为了定义映射 $\mathcal{Z}(\epsilon^\dagger)$ $\mathcal{Z}(\eta^\dagger)$，我们将使用先前定义的积分 $\Lambda\colon \mathbb{1} \to \mathcal{F}$和余积分 Λ^{co}: $\mathcal{F} \to \mathbb{1}$：

- $\mathcal{Z}(\epsilon^\dagger)$: $\mathrm{id}_{\mathcal{C}} \Rightarrow T^R \circ T$，也就是说，一个分支为: $X \to X \otimes \mathcal{F}$的自然变换。我们将其定义为:

$$X \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathscr{D}^{-1}\Lambda} X \otimes \mathcal{F}.$$

如前所述，常数 $\mathscr{D} \in k^\times$ 将由部分公理在之后确定。

- $\mathcal{Z}(\eta^\dagger)$: 我们需要一个分支为（$X \otimes \mathcal{F},\ \Delta$）$\to$（$X,\ \delta_X$）的自然变换

$$\begin{aligned} (X \otimes \mathcal{F}, \Delta) \xrightarrow{\delta_X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}} (X \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \Delta) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes S \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}} (X \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}, \Delta) \\ \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes m} (X \otimes \mathcal{F}, \Delta) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \mathscr{D}\Lambda^{co}} (X, \delta_X) \end{aligned}$$

注 3.1. 对 $\mathcal{Z}(\epsilon^\dagger)$ $\mathcal{Z}(\eta^\dagger)$ 定义的直观理解与以下内容有关：配对 $\Lambda^{co} \circ m$ 是非退化的（其余配对涉及积分 Λ）([KL01], 推论 4.2.13)，因此引入了一个同构 $\mathcal{F} \cong \mathcal{F}^\vee$。现在，由于 $T^L(X) = (X \otimes \mathcal{F}^\vee, (\mathrm{id}_X \otimes \Delta^\vee \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^\vee} \otimes \mathrm{coev}_{\mathcal{F}^\vee}))$ 且 $T^R(X) = (X \otimes \mathcal{F}, \mathrm{id}_X \otimes \Delta)$，利用上述同构，我们得到一个同构 $T^L \cong T^R$。这正是为何 $\mathcal{Z}(\epsilon^\dagger)$ $\mathcal{Z}(\eta^\dagger)$ 将成为伴随 $T^R \dashv T$ 的余单位和单位，因此满足所需的公理。

现在，我们在射影对象上定义自然变换 $\mathcal{Z}(\mu^\dagger)$、 $\mathcal{Z}(\nu^\dagger)$ 如下：

- $\mathcal{Z}(\mu^\dagger)$: id $\Rightarrow U\circ U^L$，也就是说，对于 $P\in\mathcal{P}$，我们有一个分支为：的自然变换

$$P \xrightarrow{\mathcal{Z}(\mu^\dagger)_P} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}$$

  由以下复合态射给出：

$$P \xrightarrow{\mathrm{coev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})}\otimes \mathrm{id}_P} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})\otimes P \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes EV_P} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}$$

  其中在第一步中，我们对向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})$ 使用了余评价。
- $\mathcal{Z}(\nu^\dagger)$: $U^L\circ U\Rightarrow$id，换言之，一个自然变换

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},\mathbb{1})^* \xrightarrow{\mathcal{Z}(\nu^\dagger)} k$$

  由对 $\mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ 求值给出。

至于 $\mathcal{Z}(\mu)$，它并不是一个显然的映射。

- $\mathcal{Z}(\mu)$: $U\circ U^L\Rightarrow$id，即一个自然变换，其分支为：

$$\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}\xrightarrow{\mu_P} P \tag{3.1}$$

要定义它，只需定义 $\mu_{P_{\mathbb{1}}}:\mathrm{Hom}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}\to P_{\mathbb{1}}$。
这个态射定义如下：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}\xrightarrow{\mathscr{D}(\mathrm{ev}_{\varepsilon_{\mathbb{1}}}\otimes\eta_{\mathbb{1}})} P_{\mathbb{1}}$$

其中，$\mathrm{ev}_{\varepsilon_{\mathbb{1}}}$ 表示通过将 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^*\to k$ 中的元素 $f\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^*$ 作用于典范元素 $\varepsilon_{\mathbb{1}}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})$而得到的映射。
不过，以下述方式理解映射 $\mathrm{ev}_{\varepsilon_{\mathbb{1}}}$ 会很有用：我们有典范元素 $\varepsilon_{\mathbb{1}}\in\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})$，它导出一个线性映射$\bar{\varepsilon}_{\mathbb{1}}$：$k\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})$，因此我们可以将映射 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^* \xrightarrow{ev_{\varepsilon_{\mathbb{1}}}} k$定义为：

$$k\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^* \xrightarrow{\bar{\varepsilon}_{\mathbb{1}}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})^* \xrightarrow{ev_{vect}} k$$

对 ev 的这一描述的用处$_{\varepsilon_{\mathbb{1}}}$ 体现在下面引理的证明中；在验证关系时（2.25）和（2.26），这个引理将会派上用场。

注 3.2. 函子 $U^L:\mathcal{C}\to\mathrm{Vec}_k$ 有两种等价描述。由于函子 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\mathbb{1})^*:\mathcal{C}\to\mathrm{Vec}_k$ 是右正合的，只需在射影对象上定义它：$U^L(P)\cong\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*$。利用命题 2.7，这为我们提供了另一种描述它的方式。
这样，$U^L(-)\cong\int^{P\in\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,-)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,1)^*$，而 $\mathcal{Z}(\nu^\dagger)$ 相应地由向量空间的求值 $\int^{P\in\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,1)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,1)^* \xrightarrow{\mathcal{Z}(\nu^\dagger)} k$ 给出。事实上，当目标范畴为 Bimod 时，这与 $\nu^\dagger$ 的作用相一致；第 6 章和第 7 章将讨论这一点。

3.2. **检验关系**。本论文的主要结果之一是证明以下结论：

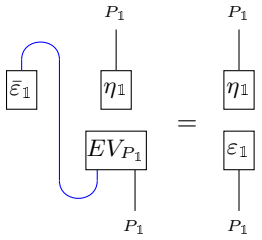
定理 3.3。第 $\mathcal{Z}$ 节中的赋值 3.1 定义了一个从双范畴 $\mathrm{Bord}^{sig}_{3,2}{}^{nc}_{,,1}$ → Lincat 出发的对称幺半函子。

为了证明定理 3.3，只需检查关系式（2.9）-（2.27）在应用赋值 $\mathcal{Z}$后是否仍成立。我们将不再提及赋值 $\mathcal{Z}$，而简称为“检查关系式”。这相当于检查自然变换之间的等式。因此，我们将在分支上进行运算，并用 X，Y，Z 表示范畴 $\mathcal{C}$，P，$Q \in \mathcal{P}$中的对象。

在开始证明定理 3.3之前，我们先证明一些有用的引理：

引理 3.4。$(\mathcal{Z}(\mu) \circ \mathcal{Z}(\mu^{\dagger}))(P_j) = \begin{cases} \mathbb{1} & \eta_{\mathbb{1}} \circ \varepsilon_{\mathbb{1}} \quad P_j \cong P_{\mathbb{1}} \\ 0 & P_j \ncong P_{\mathbb{1}} \end{cases}$。

证明。首先，如果 $P_j \ncong P_{\mathbb{1}}$，那么该复合态射是零态射（第 2.3 节）。现在，对于 $P_j \cong P_{\mathbb{1}}$ 的情况，复合态射 $\mu_{P_{\mathbb{1}}} \circ \mu^{\dagger}_{P_{\mathbb{1}}}$ 在弦图记法中如下所示：



其中蓝色的弦表示向量空间 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P_{\mathbb{1}}, \mathbb{1})$，等式成立是由于对偶关系以及 [KL01，引理 5.1。3]。

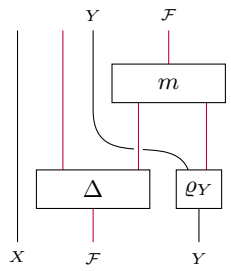
□

引理 3.5。出现在 $\mathcal{Z}(\phi_r)$ 和 $\mathcal{Z}(\phi_r^{-1})$ 中的余作用 $\delta_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}$ 给出如下：

$$X\otimes\mathcal{F}\otimes Y \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\Delta\otimes\varrho_Y} X\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\otimes Y\otimes\mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{F}}\otimes c_{\mathcal{F},Y}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{F}}} X\otimes\mathcal{F}\otimes Y\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$$

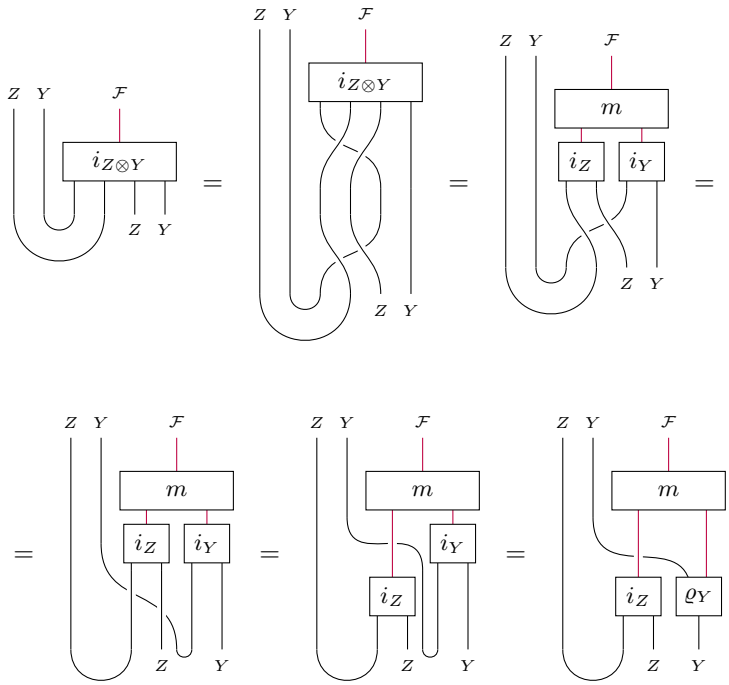
$$\xrightarrow{\mathrm{id}_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}\otimes m} X\otimes\mathcal{F}\otimes Y\otimes\mathcal{F}.$$

作为图表，这表示为：

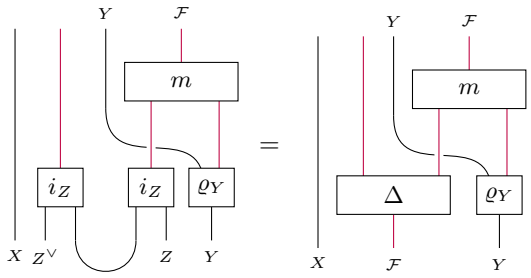


证明。余作用 $\delta_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}$ 由 ϱ给出，并作用于适当的对象。要理解该对象是什么，我们需要考察 η （分别是$\eta^\dagger$）作用于（2.16）（分别是（2.17））的层级。 η 作用于两个圆柱（分别是$\eta^\dagger$ 作用于 $\circ$ ）。在这两种情况下，该 1-态射源端的对象是 $\int_{Z\in\mathcal{C}} X\otimes Z^\vee\boxtimes Z\otimes Y$。 η 由该对象的余作用给出，而复合态射的第一部分就是该对象的余作用。因此，我们要计算由等价 $X\otimes\mathcal{F}\otimes Y$ 在 $\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}\cong\mathcal{C}^{\mathcal{F}}$上诱导的余作用，换言之，就是由 $\varrho_{Z\otimes Y}$给出的余作用。

回顾（$Z\otimes Y$）$^\vee\cong Y^\vee\otimes Z^\vee$。因此，我们有如下结论：



因此，作用 $\delta_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}$：$X\otimes\mathcal{F}\otimes Y\to X\otimes\mathcal{F}\otimes Y\otimes\mathcal{F}$由以下态射给出，该态射由 $\mathcal{F}$ 的泛性质唯一确定：



□

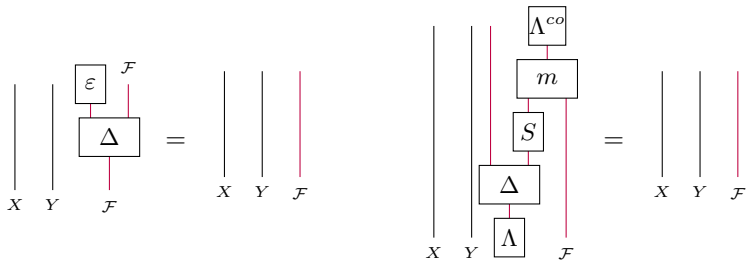
推论 3.6. 当 $Y = \mathbb{1}$ 时，得到自由 $\mathcal{F}$余模 $X \otimes \mathcal{F}$ 的余作用由余乘法 Δ给出。

现在我们可以证明定理 3.3：

证明。• 关系（2.9）、（2.10）、（2.11）、（2.12）、（2.13）显然成立，因为它们分别对应于模范畴的五边形、三角形、六边形和平衡关系 $\mathcal{C}$。

• 我们需要验证的第一组关系，是（2.14）-（2.15）和（2.16）-（2.17）在 $\mathcal{Z}$ 下的像，即 $\mathcal{Z}(\phi_l)^{-1} = \mathcal{Z}(\phi_l^{-1})$ 和 $\mathcal{Z}(\phi_r)^{-1} = \mathcal{Z}(\phi_r^{-1})$。我们先观察到，$\mathcal{Z}(\phi_l)$ 和 $\mathcal{Z}(\phi_l^{-1})$ 都是恒等自然变换，因此所需关系显然成立：

(3.2)



第一个等式成立是因为余单位-余乘法关系，而第二个等式成立是因为 $\Delta \circ \Lambda$ 是一个非退化配对；更准确地说，是因为 [KL01，引理 4.2。12]。

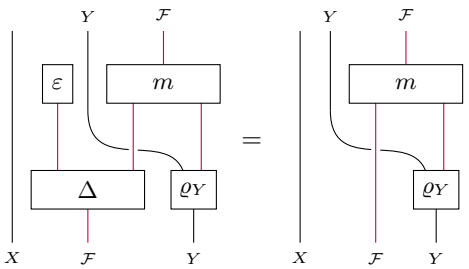
• 现在，对于（2.16）-（2.17），需要进行更多一些计算：
首先，我们想要化简 $\mathcal{Z}(\phi_r)$ 和 $\mathcal{Z}(\phi_r^{-1})$。前者由以下复合态射给出：

$$X \otimes \mathcal{F} \otimes Y \xrightarrow{\delta_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}} X \otimes \mathcal{F} \otimes Y \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_{Y\otimes\mathcal{F}}} X \otimes Y \otimes \mathcal{F},$$

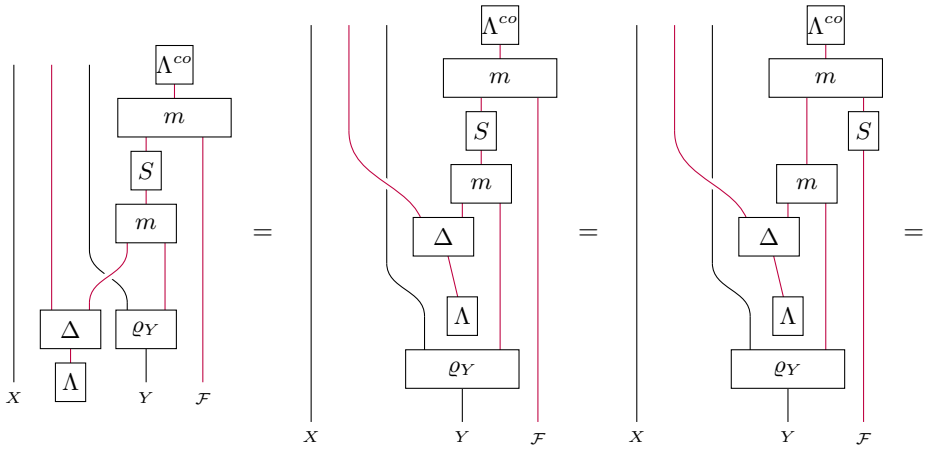
而后者涉及以下复合态射：

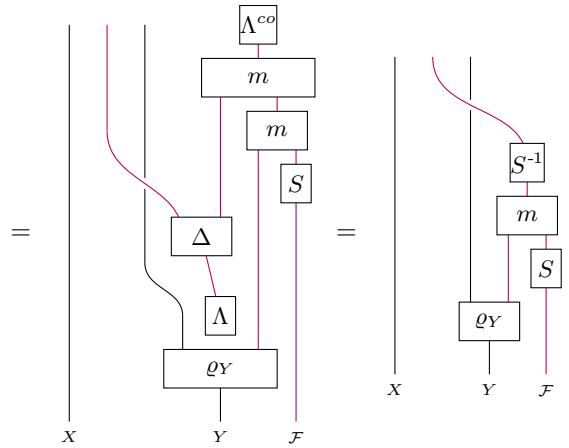
$$X \otimes Y \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \Lambda \otimes \mathrm{id}_{Y\otimes\mathcal{F}}} X \otimes \mathcal{F} \otimes Y \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\delta_{X\otimes\mathcal{F}\otimes Y}\otimes\mathrm{id}_{\mathcal{F}}} X \otimes \mathcal{F} \otimes Y \otimes \mathcal{F} \otimes \mathcal{F}.$$

Now using Lemma 3.5, $\mathcal{Z}(\phi_r)$ becomes:



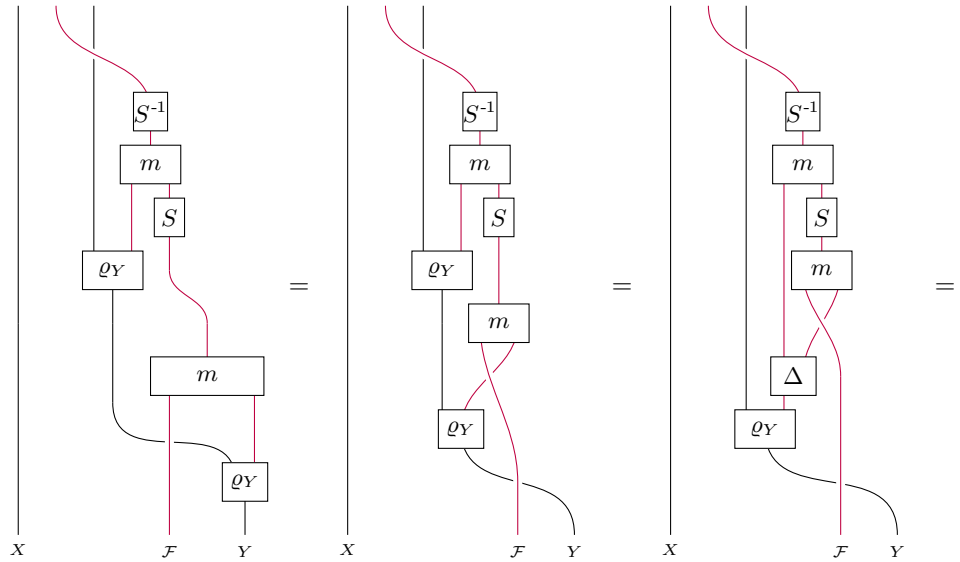
以及 $\mathcal{Z}(\phi_r^{-1})$：

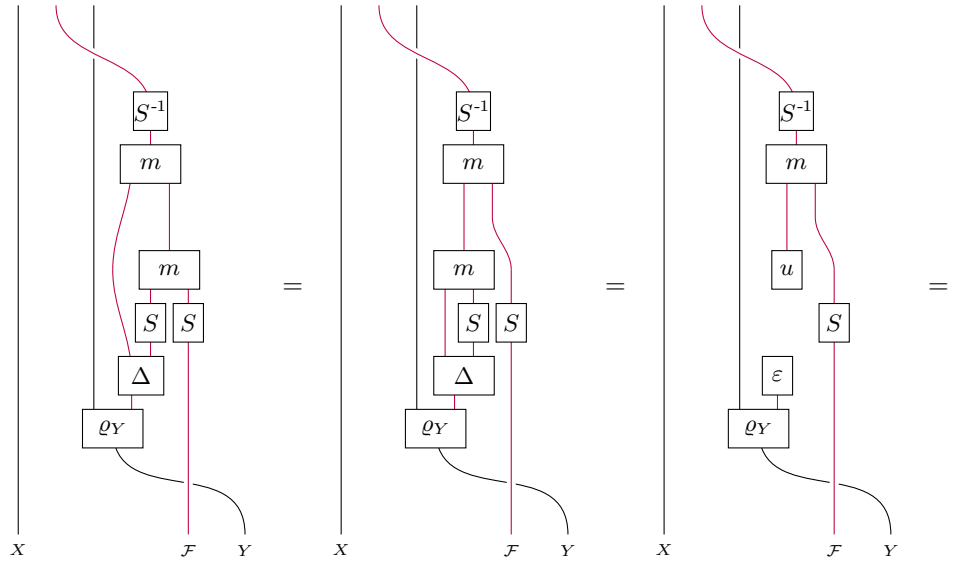


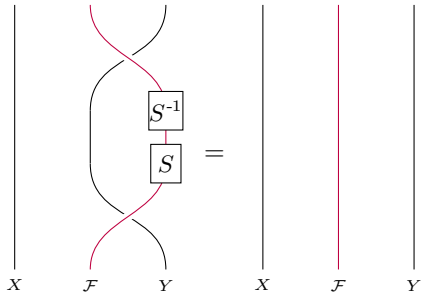


其中，第二个等式用到了引理 2.16 (iii)，第三个等式用到了乘法 m 的结合律。最后一个等式则源于 [KL01，图 4 中的关系 (c)。3]。

现在利用上述结果，我们检查复合态射 $\mathcal{Z}(\phi_r^{-1}) \circ \mathcal{Z}(\phi_r)$：

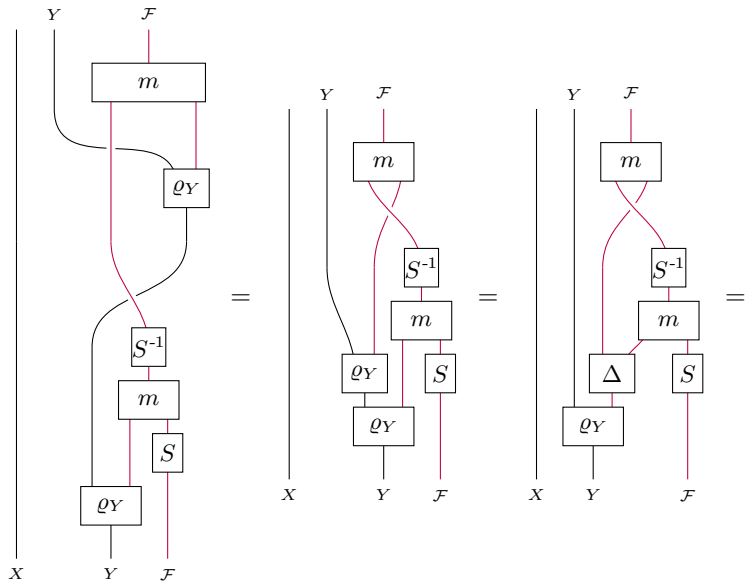

S^{-1}
m
S
ϱ_Y
Δ
X
$\mathcal{F}$
Y
=

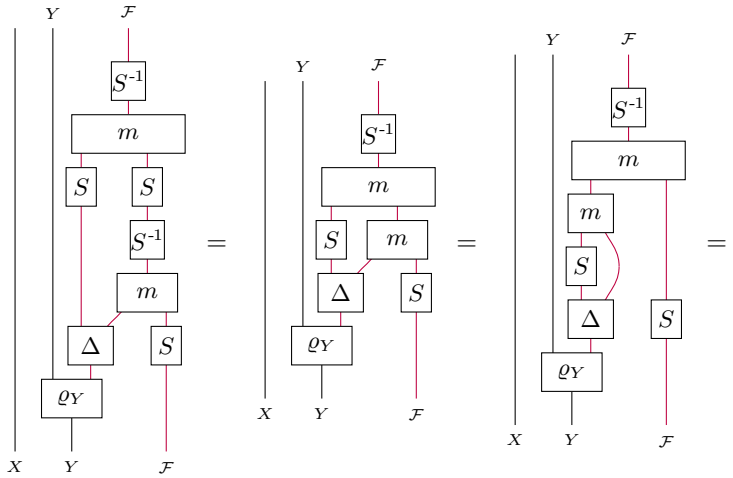

S^{-1}
m
S
ϱ_Y
Δ
u
ε
X
$\mathcal{F}$
Y
=

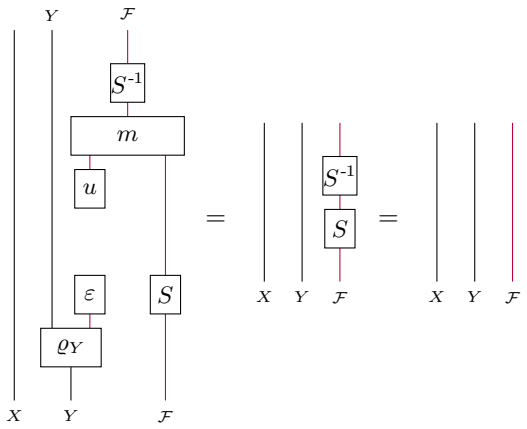

S^{-1}
S
X
$\mathcal{F}$
Y
=

在第二个等式中，我们使用了余作用ϱ_Y与余乘法 Δ 之间的相容性 $\mathcal{F}$；在第三个等式中，使用了所谓的“反乘性” [TV17，第 6.2 页。1] 这是霍普夫代数的反粒子的性质；在第四个等式中，使用了霍普夫代数 $\mathcal{F}$的反粒子的基本关系；最后，在倒数第二个等式中，使用了 $\mathcal{F}$的单位与余单位公理。

对于复合态射 $\mathcal{Z}(\phi_r^{-1}) \circ \mathcal{Z}(\phi_r)$:







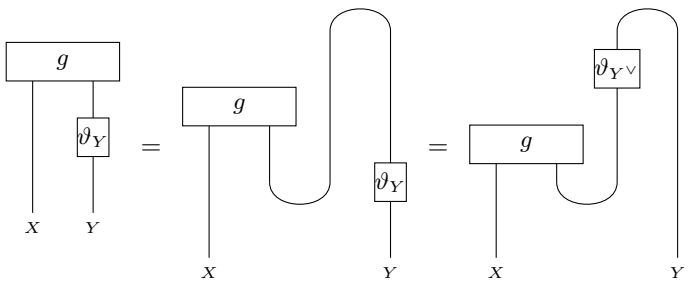
第二个等式源于余作用与余乘法 Δ 的相容性。第三个等式同样源于反粒子 S 的“反乘法性”，但这里我们先将其与逆编织复合，再与 S^{-1} 复合。第四个等式由 m 的结合律给出，第五个等式由反粒子 S 的定义关系给出，倒数第二个等式则源于单位乘法与余单位余作用之间的关系。

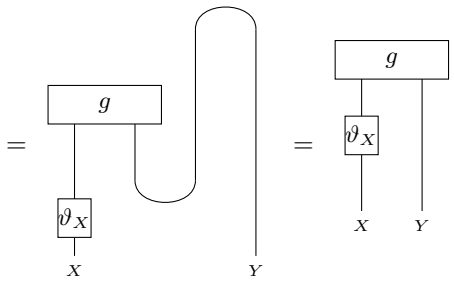
• 固定 $X \boxtimes Y \in \mathcal{C} \boxtimes \mathcal{C}$，关系 (2.18) 要求对于所有 $\phi \in \mathrm{Hom}(X \otimes Y, \mathbb{1})^*$，都有 $\phi(-\circ \vartheta_X \otimes \mathrm{id}_Y) = \phi(-\circ \mathrm{id}_X \otimes \vartheta_Y)$。由于这必须对所有 ϕ成立，这意味着 ϕ 的参数必须相等。

换言之，我们将证明以下 2-态射相等：

$$\mathrm{Hom}(X\otimes Y, \mathbb{1}) \xrightarrow{-\circ(\vartheta_X \otimes \mathrm{id}_Y)} \mathrm{Hom}(X\otimes Y, \mathbb{1}) = \mathrm{Hom}(X\otimes Y, \mathbb{1}) \xrightarrow{-\circ(\mathrm{id}_X \otimes \vartheta_Y)} \mathrm{Hom}(X\otimes Y, \mathbb{1}).$$

为此，设 $g \in \mathrm{Hom}(X \otimes Y, \mathbb{1})$。于是我们有如下结论：





其中，在第二个等式中，我们使用了扭结 ϑ 的对偶性质；在第三个等式中，我们使用了 ϑ 关于该态射的自然性

$$(g \otimes \mathrm{id}_{Y^\vee}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}_Y) \colon X \to Y^\vee.$$

- 接下来，我们继续验证关系（2.19）。这意味着我们需要：

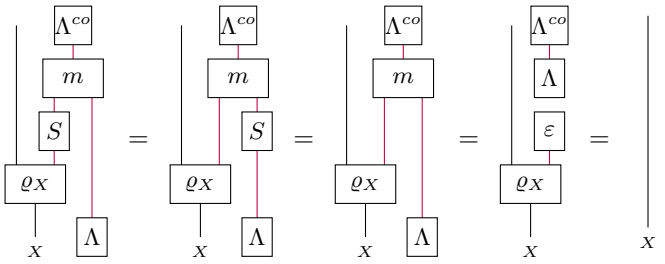
$$X \xrightarrow{\delta_X} X \otimes \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} X = \mathrm{id}_X$$

这由余作用 δ_X 与余单位 ε之间的关系可知成立。

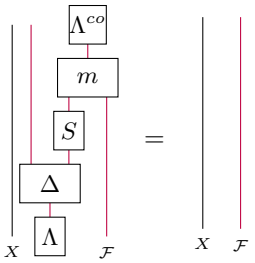
- 关系（2.20）的验证方式完全相同，从某种意义上说，它是（2.19）的一个特例：

$$(X \otimes \mathcal{F}, \Delta) \xrightarrow{\Delta} ((X \otimes \mathcal{F}) \otimes \mathcal{F}, \Delta) \xrightarrow{\mathrm{id}_X \otimes \varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}} (X \otimes \mathcal{F}, \Delta)$$

- 现在，分别验证关系（2.21）和（2.22）：



其中，在第一个和第二个等式中，我们分别使用了引理 2.16 (iii)、(ii)；而在第三个等式中，我们使用了积分的定义 Λ。



根据 [KL01，引理 4.2。12]。

- 现在我们转向关系（2.23）和（2.24）。注意，这些关系体现为 U^L 的左伴随 U。

为验证关系（2.23），我们将 $\mathbb{1}$表示为射影对象的余极限。根据命题2.7，我们可以做到这一点：

$$\mathbb{1} \cong \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes P.$$

该同构由 $\int EV$ 给出，因此我们有一个映射

$$\mathbb{1} \xrightarrow{(\int EV)^{-1}} \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes P.$$

因此，要使关系（2.23）成立，以下图表需要交换：

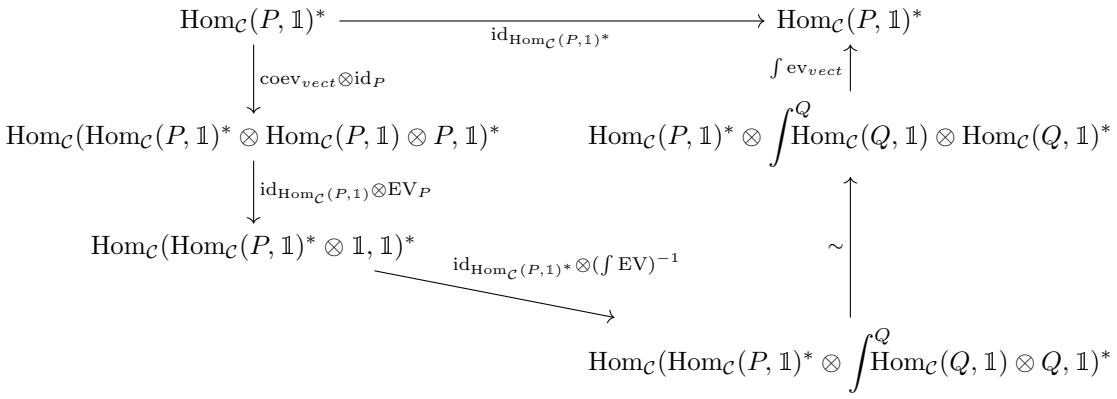
$$\begin{array}{ccc}
\int^P \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes P & \xleftarrow{(\int EV)^{-1}} & \mathbb{1} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \int(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})} \otimes \mathrm{coev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})} \otimes \mathrm{id}_P)} & & \\
\int^P \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes P & & \Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}_{\mathbb{1}}} \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \int(\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})} \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^* \otimes EV_P)} & & \\
\int^P \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^* \otimes \mathbb{1} & \xrightarrow[\int(ev_{\mathrm{vect}}) \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{1}}]{} & \mathbb{1}
\end{array}$$

事实上，该图表是交换的，因为向量空间的求值和余求值满足蛇形关系，因此 $\int EV$ 与 $(\int EV)^{-1}$ 相消。

- 至于关系（2.24），我们希望以下图表交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^* & \xrightarrow{\mathrm{id}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^*}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^* \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{Z}(\mu^\dagger)} & \nearrow{\scriptstyle \mathcal{Z}(\nu^\dagger)} & \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^* \otimes \int^{Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\ \mathbb{1}) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\ \mathbb{1})^* & &
\end{array}$$

注意，$\mathcal{Z}(\mu^\dagger)$作用于 P，即 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^*$的自变量。为简便起见，我们将映射记为作用于 P，而不是 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ \mathbb{1})^*$。于是，上述图表如下所示：



其中，我们用 $\sim$ 表示由以下内容诱导的余端同构

$$\mathrm{Hom}(V\otimes X,Y)^*\cong V\otimes\mathrm{Hom}(X,Y)^*,$$

对于 $V=\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\mathbb{1})$， $X=Q$ 和 $Y=\mathbb{1}$。

这个图表确实是交换的，下面我们解释原因。

首先，考察复合态射 $(\int \mathrm{EV})^{-1}\circ\mathrm{EV}_P$，它等于 d^1_P，其中 d^1 是余端 $\int^P \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})\otimes P$对应的映射二自然族。接着，将其与 $\sim$（后）复合，得到 d^2_P；其中，我们用 d^2 表示余端 $\int^P\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})^*$对应的映射二自然族。

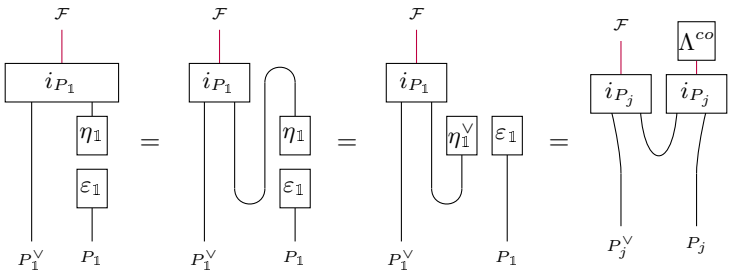
然后，根据 $\int \mathrm{ev}_{vect}$ 的定义，以及 $\mathrm{coev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})}$ 和$\mathrm{ev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})}$ 满足的蛇形关系，我们便得到所需结果。

- 枢轴性关系（2.25）表明，某个 2-态射的复合是 S^2上的恒等2-态射。然而，由于这个复合实际上是圆柱的一个自态射，我们将验证一个更强的结论。具体来说，我们将证明该关系对 $\mathcal{Z}(\,)$ 成立，而不是对 $\mathcal{Z}(\,)$ 成立。

首先，我们需要弄清楚如何将 $\mu\circ\mu^\dagger$ 作用于作为态射的「一条腿」$\mathcal{F}\to\mathcal{F}$。为此，我们从 $P_{\mathbb{1}}^\vee\otimes P_{\mathbb{1}}$开始。关系（2.25）要求我们将 $\mu\circ\mu^\dagger$ 作用于 $P_{\mathbb{1}}$。因此，我们有如下结果：

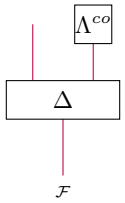
$$P_{\mathbb{1}}^\vee\otimes P_{\mathbb{1}}\xrightarrow{\mathrm{id}_{P_{\mathbb{1}}^\vee}\otimes(\eta_{\mathbb{1}}\circ\varepsilon_{\mathbb{1}})}P_{\mathbb{1}}^\vee\otimes P_{\mathbb{1}}\xrightarrow{i_{P_{\mathbb{1}}}}\mathcal{F}$$

用图表表示，我们有以下等式：



其中在最后一步，我们用到了引理 2.20，以及该态射对于所有 $j \neq 1$ 均为零这一事实。

由此得到以下态射 $\mathcal{F} \to \mathcal{F}$：



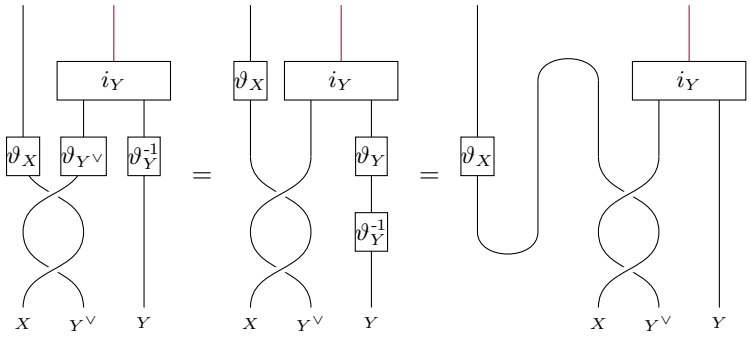
鉴于以上内容，验证关系 (2.25) 成立，归结为证明复合态射 $\mathbb{1} \xrightarrow{\Lambda} \mathcal{F} \xrightarrow{(\mathrm{id} \otimes \Lambda^{co} \circ \Delta)} \mathcal{F} \xrightarrow{\varepsilon} \mathbb{1}$ 等于恒等态射。这是成立的，因为 ε 和 Δ 之间的关系，以及 $\Lambda^{co} \circ \Lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ 这一事实。

请注意，为了满足这一关系，我们还需要让来自 $\mathcal{Z}(\epsilon^{\dagger})$ 的 γ 与来自 $\mathcal{Z}(\mu)$ 的 γ^{-1} 相互抵消。

- 为了理解模性关系 (2.26) 给出的复合态射，我们先来了解应如何应用“ϑ，ϑ^{-1}”。

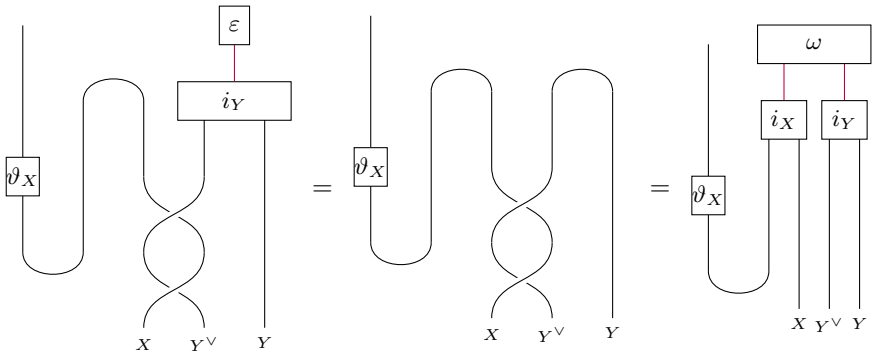
应用 ϑ，ϑ^{-1} 所处层级的对象是 $\int^{Y} X \otimes Y^{\vee} \boxtimes Y$。因此，“$\mathcal{Z}(\theta,\ \theta^{-1})$”是由 $\vartheta_{X \otimes Y^{\vee}} \boxtimes \vartheta_{Y}^{-1}$ 诱导的余端态射。

对 $\vartheta_{X \otimes Y^{\vee}}$ 使用扭结关系后，结果如下：



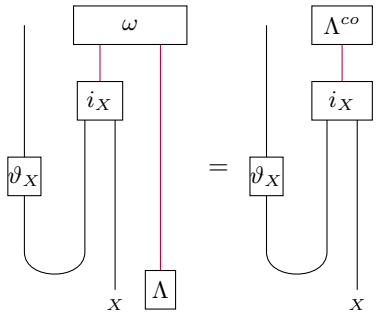
其中，第一个等式使用了余端性质，以及对所有 $X \in \mathcal{C}$ 均有 $\vartheta_{X^{\vee}} = \vartheta_X^{\vee}$ 这一事实。

如果把模性复合态射中的 ε 也包含进来，我们就得到：



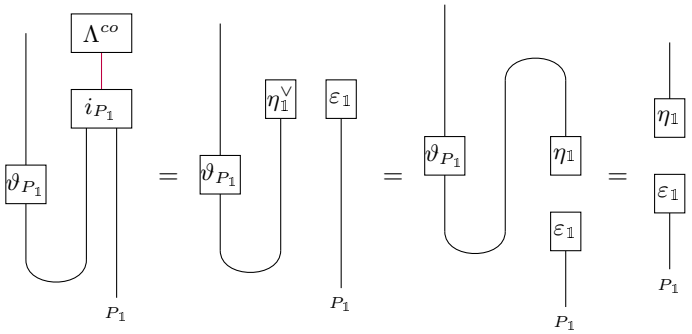
现在，根据余端 $\mathcal{F}$ 的泛性质，上述结果给出了一个态射 $X \otimes \mathcal{F} \to X$。

现在，来看完整复合，我们得到：



其中我们使用了引理 2.18，因为 $\Lambda^{co} \circ \Lambda = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$。

这里提醒一下，只需检查 $X = P_j$（一个单对象 j 的投射覆盖）上的关系。根据引理 2.20，上述所有态射均为零，除了：



根据引理 3.4，这就是所需的复合态射。

注意，我们用到了 ϑ 的自然性，以及 $\vartheta_{\mathbb{1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{1}}$ 这一事实。

至于涉及的常数，它们必须满足的关系为：$\mathscr{D}^{-1} \cdot \zeta = \mathscr{D}$ 由此得到 $\mathscr{D} = \sqrt{\zeta}$，确定常数 $\mathscr{D} \in k^\times$。

注 3.7. 注意，围绕 z轴旋转后的形式（2.25）和（2.26）成立，这是因为余端 $\mathcal{F}$ 的泛性质。

- 为了验证反常关系（2.27），我们将利用以下事实：$\mathcal{Z}(S^2) \cong k$。由于 $\mathcal{Z}(\xi)$: $\mathcal{Z}(S^2) \to \mathcal{Z}(S^2)$，因此 $\mathcal{Z}(\xi)$ 是恒等态射的一个标量倍数。为简化记号，我们写作：$\mathcal{Z}(\xi) = \xi \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}(S^2)}$，其中$\xi \in k$。

现在，我们来计算（2.27）左侧复合态射在 $\mathcal{Z}(\ )$上的值，而非在 $\mathcal{Z}(\ )$上；根据 2.17）中 $\mathcal{C}$ 的扭结非退化性，我们知道其值为：

$$\begin{tikzcd} \mathbb{1} \arrow[r, "\mathscr{D}^{-1}\Lambda"] \arrow[d, "\mathscr{D}^{-1}\cdot p_+\,\mathrm{id}_{\mathbb{1}}"'] & \mathcal{F} \arrow[d, "\mathcal{T}"] \\ \mathbb{1} & \mathcal{F} \arrow[l, "\varepsilon"] \end{tikzcd}$$

因此，为使反常关系（2.27）成立，我们希望固定

$$\xi = \mathscr{D}^{-1} \cdot p_+,$$

它与上面计算的结果（$\mathscr{D}^{-1} = 1/\sqrt{p_+p_-}$）结合后，得到 $\xi = \sqrt{p_+/p_-}$。

至此，我们已经验证所有必要的关系均得到满足。

□

注3.8。当 ξ =id in $\mathrm{Bord}^{sig}{}_{,3\,2\,1}{}^{nc}{}_{,,}$ 时这一特殊情形给出了定向非紧致表示 $\mathrm{Bord}^{or\,nc}_{3\,2\,1}{}_{,,,}$。计算出 $\xi = \sqrt{p_+/p_-}$ 后，我们看到，当且仅当 $p_+/p_- = 1$ 时，才能定义一个定向非紧致拓扑量子场论（即一个从 $\mathrm{Bord}^{or\,nc}_{3\,2\,1}{}_{,,,}$ 出发的函子）。这通常称为“$\mathcal{C}$ 无反常”。

注3.9。如注2.3所述，如果我们将定理3.3 中的源 2-范畴从 $\mathrm{Bord}^{sig}{}_{,3\,2\,1}{}^{nc}{}_{,,}$ 改为 $\mathrm{Bord}^{p_1\,nc}_{3\,2\,1}{}_{,,,}$，那么我们将改为计算 $\xi = \sqrt[6]{p_+/p_-}$。

4. Mapping class group representations

4.1. **来自非紧致拓扑量子场论的映射类群表示**。设 Σ_g 是一个亏格为 $g \geq 0$ 的（光滑、紧致、定向、无边）曲面。我们用 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 表示映射类群，即 Σ_g 的微分同胚同伦类构成的群。这是一个众所周知的事实 [FM11]：$\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 可由所谓的 Dehn 扭转有限生成。我们用 T_γ 表示沿曲线 γ 的（右手）Dehn 扭转。特别地，存在一组特定的生成元，称为 Lickorish 生成元，它们由 Dehn 扭转给出

$\{T_{\alpha_1}, \ldots, T_{\alpha_g}, T_{\beta_1}, \ldots, T_{\beta_{g-1}}, T_{\gamma_1}, \ldots, T_{\gamma_g}\}$，沿着曲线 α_i，β_i，γ_i，如图 1所示。注意，这里对字母 α，β 和 γ 的使用与前几章中的用法不同。

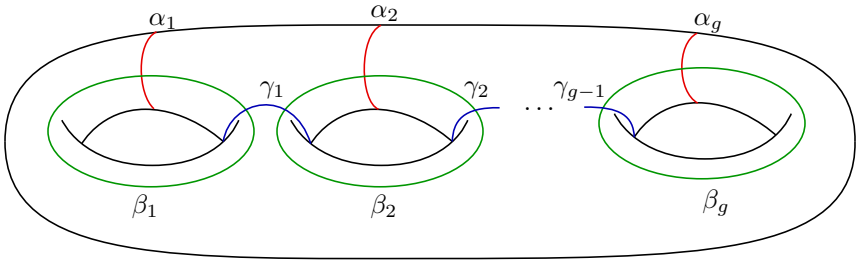
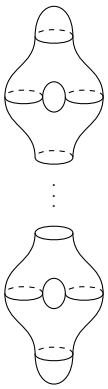


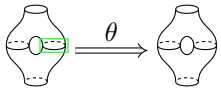
图 1. Mod 的 Lickorish 生成元$_g$。摘自 [RR23]。

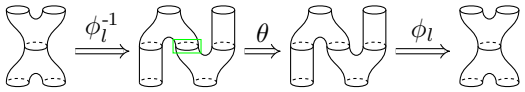
我们将通过用复合态射 $S_i := T_{\alpha_i} \circ T_{\beta_i} \circ T_{\alpha_i}$ 的**逆**替换 T_{β_i}，为 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 使用另一组生成元。在 $\mathbf{Bord}^{sig}_{3\,2\,1}$，，，$\Sigma_g$ 应对应于：

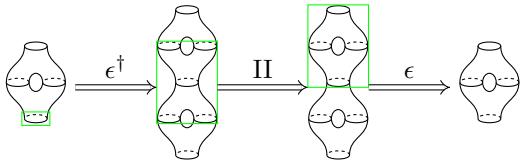


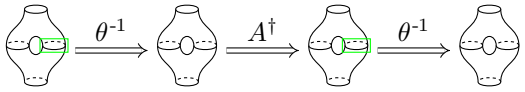
为简便起见，我们也用 Σ_g 表示这个 1-态射。这样，$\mathcal{Z}(\Sigma_g) \cong \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^{\otimes g}, \mathbb{1})^*$。

用 Σ_g^* 表示上述 1-态射，但不包含顶部施加的（对应于带一个穿孔的 g 亏格曲面）。那么 $\mathcal{Z}(\Sigma_g^*) = \mathcal{F}^{\otimes g}$。
现在，我们在$\mathbf{Bord}^{sig}_{3\,2\,1}$中定义以下复合态射：

(4.1) $\mathrm{I} \quad := \quad$ 

(4.2) $\mathrm{II} \quad := \quad$ 

(4.3) $A^\dagger \quad := \quad$ 

(4.4) $\mathrm{III}^{-1} \quad := \quad$ 

用 I_i、II_i、$A_i^\dagger$、III_i^{-1}：$\Sigma_g \to \Sigma_g$ 表示通过在 i第 j个“孔”，或在$j+1$第Σ_g与第 [Bar+14]个“孔”之间应用上述操作所得到的 2-态射。如 [+14]中所解释的，这些复合态射是可逆的，旨在分别对应于映射类群 -$_{\beta_i^1}$ 的生成元的映射圆柱。S_i^{-1}}

$\mathcal{Z}(\mathrm{I}_i)$ $\mathcal{Z}(\mathrm{II}_i)$ $\mathcal{Z}(\mathrm{III}_i^{-1})$ 中任意一个的值：$\mathcal{Z}(\Sigma_g^*) \to \mathcal{Z}(\Sigma_g^*)$，实际上都是某个可逆态射 x: $\mathcal{F}^g \to \mathcal{F}^g$。于是，如果 $f \in \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^g, \mathbb{1})^*$，则态空间 $\mathcal{Z}(\Sigma_g) = \mathrm{Hom}(\mathcal{F}^g, \mathbb{1})^*$ 上的（左）作用由 $f(-\circ x)$ 给出。

现在，我们在 $\mathcal{C}$ 中定义以下唯一态射：

- $\Omega\colon \mathcal{F}\otimes\mathcal{F} \to \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$, satisfying for all $X, Y \in \mathcal{C}$ the identity:
$$\Omega \circ (i_X \otimes i_Y) = (i_X \otimes i_Y) \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes (c_{Y^\vee, X} \circ c_{X, Y^\vee}) \otimes \mathrm{id}_Y).$$
- $\mathcal{S}\colon \mathcal{F} \to \mathcal{F}$ satisfying for all $X \in \mathcal{C}$ the identity:
$$\mathcal{S} \circ i_X = (\varepsilon \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}}) \circ \Omega \circ (\mathrm{id}_X \otimes \Lambda).$$

此外，我们将态射 $\mathcal{F}\otimes\mathcal{F} \to \mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$ 记为 $\mathcal{H}$:
$$\mathcal{H} := \Omega \circ (\mathcal{T} \otimes \mathcal{T}).$$

引理 4.1。计算可得：

$$\mathcal{Z}(\mathrm{I}_i)(f) = f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.5}$$
$$\mathcal{Z}(\mathrm{II}_i)(f) = f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{j-1}} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-j-1}}) \tag{4.6}$$
$$\mathcal{Z}(\mathrm{III}_i^{-1})(f) = 1/\sqrt{p_+ p_-} \cdot f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.7}$$

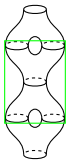
证明。我们计算应用所构造的拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$后，式（4.1）至（4.4）中 2-态射的取值。这就足够了，因为结果与函子 $\mathcal{Z}(\,)$ 的输入对象无关。

- 很容易看出：

$$\mathcal{Z}(\mathrm{I})\colon X\otimes\mathcal{F}\xrightarrow{\mathrm{id}_X\otimes\mathcal{T}}X\otimes\mathcal{F}.$$

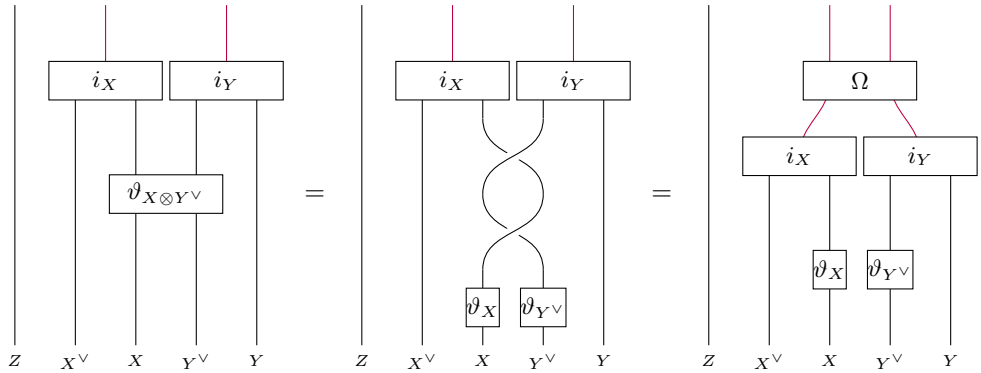
我们在检验方程（2.26）和（2.27）中的关系时，已经用过这一点。

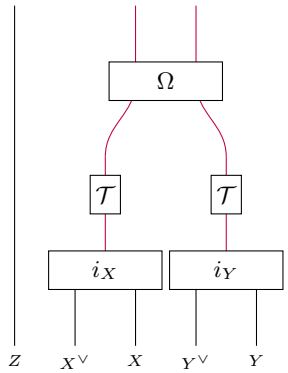
- 我们将在以下对象上计算 $\mathcal{Z}$(II)：



因此，滥用记号， $\mathcal{Z}$(II)： $Z\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}\to Z\otimes\mathcal{F}\otimes\mathcal{F}$。

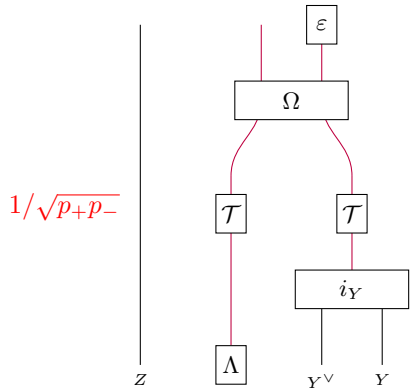
上述内容在 $\mathcal{Z}$ 下的像是一个函子 $\mathcal{C}\to\mathcal{C}$。若输入是某个对象 $Z\in\mathcal{C}$，并且分别用 $X\in\mathcal{C}$ 和 $Y\in\mathcal{C}$ 表示取两个 $\mathcal{Z}(\,)$ 所产生的第一个和第二个余端所涉及的对象，则有：



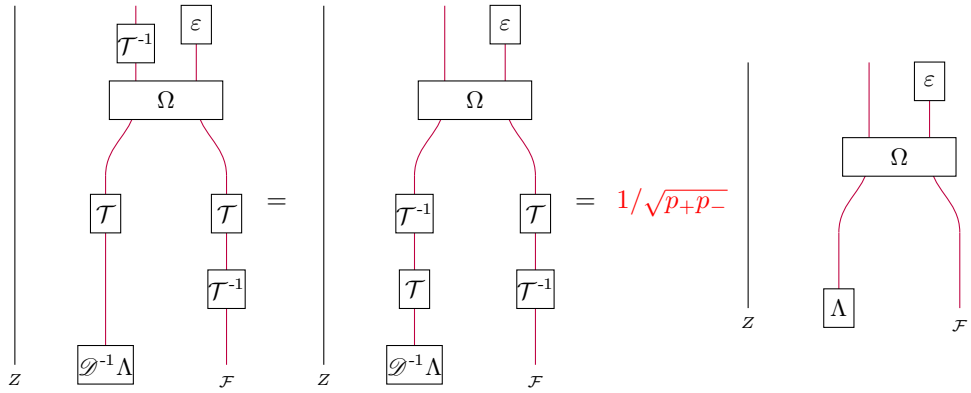


其中在第一步中，我们使用了张量积扭结的性质；在第三步中，我们使用了余端的二自然性以及性质 $\vartheta_{Y^\vee}=\vartheta_Y^\vee$。

- 现在我们来检查 $\mathcal{Z}(A^\dagger)$ 的值： $Z \otimes \mathcal{F} \to Z \otimes \mathcal{F}$。由此得到：



- 利用上述内容以及 $\mathcal{H}$的等价描述，我们可以计算出 $\mathcal{Z}$(III-1)的值：
$Z \otimes \mathcal{F} \to Z \otimes \mathcal{F}$:



第一个等式源于扭结 ϑ 和编织c的自然性。

□

我们可以在此暂停一下，并注意到相同的态射出现在 [De +23] 的射影映射类群作用中（见第 4.2节）。为了将这一观察表述为数学命题，我们必须假设猜想 2.1 成立。然后，借助定理3.3，我们知道非紧致拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$ 给出了映射类群的某个中心扩张的表示 $\tilde{\rho}_{nc}$。等价地，我们得到一个射影表示

$$\bar{\rho}_{nc} \colon \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \to \mathrm{PGL}_k(\mathcal{Z}(\Sigma_g)).$$

利用引理 4.1，我们有：

命题 4.2. 射影映射类群表示

$$\bar{\rho}_{nc} \colon \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \to \mathrm{PGL}_k(\mathcal{Z}(\Sigma_g))$$

满足：

$$\bar{\rho}_{nc}(T_{\alpha_i})(f) = f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{T} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.8}$$

$$\bar{\rho}_{nc}(T_{\gamma_j})(f) = f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{j-1}} \otimes \mathcal{H} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-j-1}}) \tag{4.9}$$

$$\bar{\rho}_{nc}(S_i^{-1})(f) = f(- \circ \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{S} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.10}$$

4.2. **与 Lyubashenko 射影表示的关系**。 映射类群射影表示 $\bar{\rho}_X$ 来自 [De +22] 中构造的非半单三维拓扑量子场论，它们在 [De +23]中得到计算。此外，文中还证明了它们等价于 $\bar{\rho}_L$ Lyubashenko 在 [Lyu95b] 中构造的射影表示族。

我们将简要回顾 $\bar{\rho}_X$ 在无穿孔曲面上的构造，并继续证明第 $\bar{\rho}_{nc}$ 4.1节中的射影表示是ρ_X的对偶表示。

他们所考虑的向量空间为 $X'_g := \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}^g, 1)$。
令 $x' \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F}^g, 1)$，群同态 $\bar{\rho}_X : \mathrm{Mod}(\Sigma_g) \to \mathrm{PGL}_k((X'_g))$ 满足：

$$\rho_X(T_{\alpha_i})(f) = x' \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{T}^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.11}$$

$$\rho_X(T_{\gamma_j})(f) = x' \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{H}^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-j-1}}) \tag{4.12}$$

$$\rho_X(S_i^{-1})(f) = x' \circ (\mathrm{id}_{\mathcal{F}^{i-1}} \otimes \mathcal{S}^{-1} \otimes \mathrm{id}_{\mathcal{F}^{g-i}}) \tag{4.13}$$

这是一个群同态，因为他们考虑的是逆映射圆柱 [De +23，式（17）]。

请注意，之所以会出现逆元，是因为他们选择的 $\mathrm{Mod}(\Sigma_g)$ 的生成元与我们的相反。

因此我们得到：

定理 4.3。 根据定义，我们有 $\bar{\rho}_{nc} = \bar{\rho}^*_X$。

5. From Lincat to Bimod

为了处理有关三维流形不变量（第6节）和修正迹（第7节）的问题，我们将把非紧致拓扑量子场论 3.3 改用不同的目标范畴，即双范畴 Bimod。这是因为，为了计算 $\mathcal{Z}$ 在三维流形上的取值，采用“缠结图理论描述”会很有帮助。在 Bimod 中工作正好提供了这样的框架。

定义 5.1 (Bimod)。 对称幺半双范畴 Bimod 定义如下：

- 其对象是线性范畴；
- 其 1-态射是双模 $F\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$，定义为线性函子$F\colon \mathcal{D}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k$；
- 其 2-态射是相关线性函子之间的自然变换。

双模 $F\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}$ 和 $G\colon \mathcal{D} \nrightarrow \mathcal{E}$ 的复合定义如下：

$$G \circ F(e,c) := \int^{d\in\mathcal{D}} G(e,d) \otimes F(d,c).$$

恒等 1-态射由 Hom函子给出：

$$\mathrm{Hom}(-,-)\colon \mathcal{C}^{op} \times \mathcal{C} \to \mathrm{Vect}_k.$$

对于双模 $F\colon \mathcal{D}_1 \nrightarrow \mathcal{D}_2$，我们将其在 $X \in \mathcal{D}_1$ 和 $Y \in \mathcal{D}_2$ 上的取值记作F_X^Y。

定义 5.2。 给定一个线性函子 $F\colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$，我们可以构造一个关联双模 $F_*\colon \mathcal{C} \nrightarrow \mathcal{D}\colon F_* := \mathrm{Hom}_{\mathcal{D}}(-, F(-))$。
给定线性函子 F，$G\colon \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$之间的一个自然变换 $\omega\colon F \Rightarrow G$，
存在一个由此诱导的关联双模之间的自然变换：
$\omega_*\colon F_* \to G_*$，由与 ω 的后复合给出。

事实上，上述内容组织成了一个从 Lincat 到 Bimod 的 2-函子 $(-)^{fg,\ proj}$ 它将允许有限余极限的小线性范畴映射到其紧投射对象子范畴。一般而言，右正合函子并不保持投射对象，但总能产生一个双模。

对这个 2-函子进行后复合 $\mathcal{Z}$，我们得到 Bimod 中的一个拓扑量子场论。我们将此拓扑量子场论记为 $\mathcal{Z}'$。
Bimod 拓扑量子场论在对象和 1-态射生成元上的取值为：

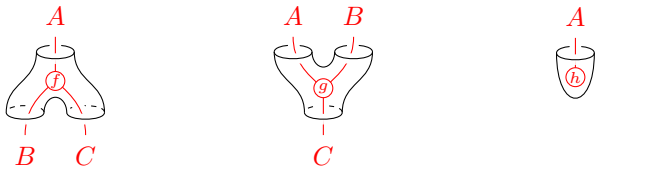
- $\mathcal{Z}'(S^1) = \mathcal{P}$
- $\mathcal{Z}'($$) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, B \otimes C)$
- $\mathcal{Z}'($$) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A \otimes B,\ C)$
- $\mathcal{Z}'($$) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ 1)^*$
- $\mathcal{Z}'($$) = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,\ 1)$

注 5.3. 严格来说，和上的值等价于上面的值。特别是，直接计算关联双模可得：

- $(T^R)_* = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}}(- \boxtimes -, \int^{P\in\mathcal{P}} - \otimes P^\vee \boxtimes P)$
- $(U^L)_* = \mathrm{Hom}_{\mathrm{Vect}}(k, \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-, 1)^*)$

如 [Bar+15] 中所述，双模向量空间与画在嵌入 $\mathbb{R}^3$ 的特定曲面所围成的体积内部的弦图的向量空间相同。这可以看作是该曲面所围三维流形的编织模。我们关注这种描述，因为它便于进行计算。

(5.1)



$f \in \mathcal{Z}'(\quad)^{A}_{B,C}$ $g \in \mathcal{Z}'(\quad)^{A,\ B}_{\ C}$ $h \in \mathcal{Z}'(\quad)^{A}$

注 5.4. 内部的态射绘制方向与余边相反。目前，我们约定红色弦图从上到下、从左到右阅读。

注 5.5. 定义了 $\mathcal{Z}'(\ )_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, 1)$ 之后，似乎我们无法用弦图描述其中的元素。然而，由于 $A \in \mathcal{P}$，我们可以使用自然同构 $\Omega^1\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,1)^* \xrightarrow{\sim} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A, \mathbf{1})$ 在 7.10 中定义，并以此方式处理弦图。

(5.2)



$$j \in \Omega^1\left(\mathcal{Z}'(\quad)_A\right)$$

在后续章节讨论闭曲面时，我们会默认这样做。不过需要注意的是，这并非必要，只是为了简化处理。我们也可以改为使用带有一个边界分支的曲面及其所得的（内部弦）态射 $A \to 1$，它看起来类似于 [De +22] 中出现的“可容许条件”。这不会影响我们在后续章节中的分析，因为我们可以通过余端关系，将此态射“局部化”到帽附近的圆柱中，然后使用 $\mathcal{Z}'(\ )_A = \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(A,1)^*$ 进行计算。



弦图记法在许多情况下能让计算变得更容易。因此，在本节余下部分中，我们将阐述 Bimod 中 2-态射生成元的作用，并在适用时，描述它们如何作用于内部弦图。我们只关注第 6 和 7节中出现的生成元。

我们有两种方式来描述 $\mathcal{Z}'$ 如何将曲面映射到 Bimod 中。

(1) 使用 Lincat 中的值，得到相应的双模；

(2) 将给定的曲面分解为上述生成元的复合，并在 Bimod 中得到一个复合态射。

弦图方法与后者相关。定义$\mathcal{Z}$ 然而，在 Lincat 中，我们会自动得到 2-态射生成元在关联双模上的作用。为了将二者联系起来，我们使用定义 5.2，以及以下事实：这两种描述通过（可能多次）应用余 Yoneda 引理相关联。

首先，对 X， Y， $Z \in \mathcal{C}$定义自然同构

$$(-)^\flat \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X, Z \otimes Y^\vee) \tag{5.3}$$

$$(-)^\sharp \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X \otimes Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X^\vee \otimes Y, Z) \tag{5.4}$$

$$(-)^\natural \colon \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, Z) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Y, X^\vee \otimes Z) \tag{5.5}$$

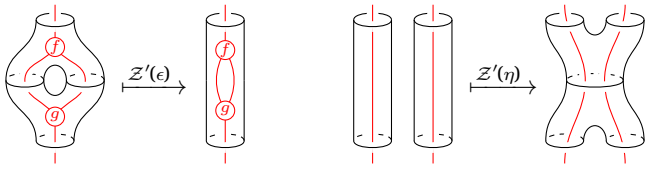
by

$$f^\flat = (f \otimes \mathrm{id}_{Y^\vee}) \circ (\mathrm{id}_X \otimes \mathrm{coev}_Y), \quad g^\sharp = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Z) \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes g), \quad h^\natural = (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes h) \circ (\mathrm{coev}_X^R \otimes \mathrm{id}_Y).$$

在本节中，固定 P， Q， P_1， P_2， Q_1， $Q_2 \in \mathcal{P}$。

命题 5.6。 $\mathcal{Z}'(\epsilon)$ 和 $\mathcal{Z}'(\eta)$ 在内部弦图上的作用如下：

(5.6)



证明。 我们从 $\mathcal{Z}'(\epsilon)$开始：
这对应于双模之间的自然变换

$$\operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P \otimes \mathcal{F}) \xrightarrow{\mathcal{Z}(\epsilon)_*} \operatorname{Hom}(Q, P),$$

由与 ε 的后复合给出。
我们想要理解：

$$\int^{X,Y} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, X \otimes Y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, P) \xrightarrow{\mathcal{Z}'(\epsilon)} \operatorname{Hom}(Q, P)$$

换句话说，我们旨在理解这个同构：

$$\int^{X,Y} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, X \otimes Y) \otimes \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(X \otimes Y, P) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P \otimes \mathcal{F})$$

这是以下内容的复合态射

$$\begin{array}{ccc}\int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y,P) & \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes(-)^\flat} & \int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,P\otimes Y^\vee)\\ f\otimes g & \mapsto & f\otimes((g\otimes\mathrm{id}_{Y^\vee})\circ(\mathrm{id}_P\otimes\mathrm{coev}_Y))\end{array}$$

与余 Yoneda 同构

$$\begin{array}{ccc}\int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,P\otimes Y^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \int^{Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P\otimes Y^\vee\otimes Y)\\ f\otimes h & \mapsto & (g\otimes\mathrm{id}_Y)\circ f\end{array}$$

由于 Hom 的正合性$\mathcal{C}(Q,\ -)$ 且 ε 由 ev_Y 2.32给出，我们得出 $\mathcal{Z}'(\epsilon)$ 按所需方式通过复合来作用。
现在来看 $\mathcal{Z}'(\eta)$:
相应的关联双模自然变换为:

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}}(Q_1\boxtimes Q_2,P_1\boxtimes P_2)\xrightarrow{\mathcal{Z}(\eta)_*}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}}(Q_1\boxtimes Q_2,P_1\otimes P_2\otimes\int^{Y}Y^\vee\boxtimes Y),$$

由 Q_2 上的余求值以及到余端中的嵌入给出，基本上如注记2.35中所述。提醒读者，这是伴随$T\dashv T^R$的单位。

我们想要理解

$$\mathcal{Z}'(\eta)\colon \mathrm{Hom}(Q_1,P_1)\otimes\mathrm{Hom}(Q_2,P_2)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_1\otimes Q_2,P_1\otimes P_2) \tag{5.7}$$

根据定义，$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}}(Q_1\boxtimes Q_2,\ P_1\boxtimes P_2)\cong\mathrm{Hom}(Q_1,\ P_1)\otimes\mathrm{Hom}(Q_2,\ P_2)$成立。令 $f\colon\ Q_1\to P_1$，且 $g\colon\ Q_2\to P_2$。
伴随 $T\dashv T^R$ 的余单位给出:

$$\begin{array}{ccc}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}\boxtimes\mathcal{C}}(Q_1\boxtimes Q_2,P_1\otimes P_2\otimes\int^{Y}Y^\vee\boxtimes Y) & \xrightarrow{\sim} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_1\otimes Q_2,P_1\otimes P_2)\\ f\boxtimes g & \mapsto & (\mathrm{id}_{P_1}\otimes\mathrm{id}_{P_2}\otimes\varepsilon)\circ(f\otimes g)\end{array}$$

由于单位和余单位（余求值和求值）相消，我们发现所需的态射 $\mathcal{Z}'(\eta)$由包含映射给出

$$\mathrm{Hom}(Q_1,P_1)\otimes\mathrm{Hom}(Q_2,P_2)\hookrightarrow\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q_1\otimes Q_2,P_1\otimes P_2).$$

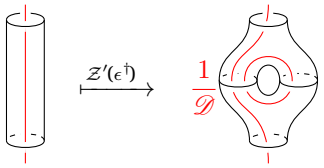
□

令 $f\colon\ Q\to P$。稍微滥用一下记号，我们将 $f\otimes\Lambda$ 在下的像称为

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P\otimes\mathcal{F})\xrightarrow{\sim}\int^{Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P\otimes Y^\vee\otimes Y)$$

再次 $f\otimes\Lambda$。

命题 5.7。 $\mathcal{Z}'(\epsilon^\dagger)$ 在内部弦图上的作用如下：



红色圆圈的约定是：上半部分为 Λ ， 下半部分为 ev。

证明。 我们有 $\mathcal{Z}(\epsilon^\dagger)_*$ ， 其表示为：

$$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) \xrightarrow{\left(\mathscr{D}^{-1}(\mathrm{id}_P\otimes\Lambda)\right)_*} \mathrm{Hom}(Q,P\otimes\mathcal{F}).$$

用弦图来计算 $\mathcal{Z}'(\epsilon^\dagger)$涉及以下同构：

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\int^{Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P\otimes Y^\vee\otimes Y) & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,P\otimes Y^\vee)\\ h & \mapsto & h\otimes(\mathrm{id}_{P\otimes Y^\vee})\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccc}\displaystyle\int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X,P\otimes Y^\vee) & \xrightarrow{\sim} & \displaystyle\int^{X,Y}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,X\otimes Y)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X\otimes Y,P)\\ h\otimes g & \mapsto & h\otimes((\mathrm{id}_P\otimes\mathrm{ev}_Y)\circ(g\otimes\mathrm{id}_Y))\end{array}$$

在完整复合下， f的像： $Q\to P$为：

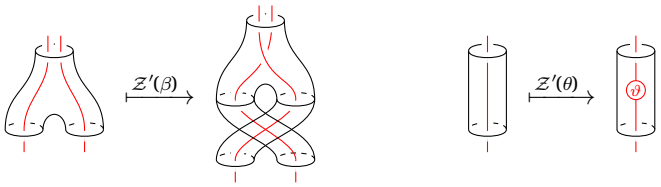
$$f\mapsto\mathscr{D}^{-1}(f\otimes\Lambda)\otimes(\mathrm{id}_P\otimes\mathrm{ev}_Y),$$

这就是所需的态射。 □

注记 5.8. 红色圆圈的记法与 [De +22]一致。

命题 5.9. $\mathcal{Z}'(\beta)$ 和 $\mathcal{Z}'(\theta)$ 对内部弦图的作用如下：

(5.8)



证明。 </style}这直接来自 $\mathcal{Z}(\beta)_*$ 和 $\mathcal{Z}(\theta)_*$ 的作用。 □

命题 5.10。 $\mathcal{Z}'(\mu^\dagger)$: $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^*$ 由下式给出

$$\begin{aligned}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) &\xrightarrow{\mathrm{id}\otimes\mathrm{coev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^{*} \\ &\xrightarrow{\mathrm{compose}\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^{*}\end{aligned} \tag{5.9}$$

并且 $\mathcal{Z}'(\nu^{\dagger})$ 由向量空间的求值给出：

$$\mathcal{Z}'(\nu^{\dagger}):\ \int^{P\in\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})^{*}\xrightarrow{\mathrm{ev}_{\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\mathbb{1})}} k \tag{5.10}$$

证明。 作用 $\mathcal{Z}'(\mu^{\dagger})$ 直接由 EV 2.29 的性质得出。
至于 $\mathcal{Z}'(\nu^{\dagger})$，正如备注 3.2 中所讨论的，这也很直接。 □

6. 3-MANIFOLD INVARIANTS

本节将计算定理 3.3 中定义的非紧致拓扑量子场论所产生的三维流形不变量。我们考虑 $\mathcal{Z}$ 可定向的情形，即 $\mathcal{C}$ 无反常的情形。我们必须稍微宽泛地看待 Bord $^{or\ nc}_{3\ 2\ 1}$,,, 的生成元，并从几何角度理解它们。本章中我们将一直默认采用这一策略。这个过程可以通过一个“几何实现”函子形式化地实现[Bar+14；Bar+15]。

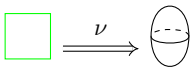
在进行具体计算之前，我们需要说明如何从非紧致拓扑量子场论中提取闭三维流形不变量。尽管非紧致三维拓扑量子场论没有针对闭三维流形的赋值，我们仍然可以通过以下步骤提取与它们相关的不变量：

给定一个闭的连通三维流形 M，移除两个 D^3 副本（一个作为入端，另一个作为出端）后，我们可以对 M 应用非紧致拓扑量子场论进行求值。也就是说：

$$\mathcal{Z}(M \setminus (D^3 \sqcup D^3)) \colon \mathcal{Z}(S^2) \to \mathcal{Z}(S^2).$$

向量空间 $\mathcal{Z}(S^2)$ 是一维的，因此上述线性映射就是 k中的一个元素。我们将证明，这个数乘以一个因子后，就是 Lyubashenko 三维流形不变量 [Lyu95b] 。我们还指出，由于我们研究的是非紧情形，并且 Lyubashenko 不变量在半单情形下特化为 Reshetikhin-Turaev 不变量，我们也证明了由 [Bar+15] 构造的拓扑量子场论可恢复 Reshetikhin-Turaev 不变量。

6.1. 用生成元表示三维流形。为了实现我们的目标，首先需要解决的问题是如何将任意闭合定向三维流形表示为 2-态射生成元的复合态射。因此，我们在完整的配边双范畴 Bord$_{3}^{or}{}_{,2,1}$中工作，并使用生成元



我们给出的分解基于该三维流形的手术表示。

定理 6.1 (Lickorish-Wallace)。任意闭合、定向、连通的三维流形 M都可通过对链环 L 在 S^3中的（积分）德恩手术得到。

假设 M 具有关于带框架结 K的手术表示。德恩手术是将一个实心环面 $S^1 \times D^2$ 粘合到纽结补空间 $S^3 \setminus T(K)$上的过程，并按 φ进行扭结。

然后，根据定理 6.1，我们得到 $M = (S^3 \setminus T(K)) \cup_\varphi (S^1 \times D^2)$，其中 $T(K)$ 是该纽结的管状邻域 K，而 $\varphi\colon \ T^2 \to \partial\left(S^3 \setminus T(K)\right)$ 是由 K的框架确定的微分同胚。

将其视为余边界的复合态射，我们有：

$$M = (S^3 \setminus T(K)) \circ I_\varphi \circ (S^1 \times D^2), \tag{6.1}$$

其中 I_φ 是微分同胚 φ的映射柱。

我们可以将 φ 视为一个复合态射 $\varphi = \varphi' \circ S$。首先，在 S 变换（S_1 按照第4章的记号 $T^2 = \partial$（$S^1 \times D^2$）上施加该变换，然后再应用微分同胚φ'： $T^2 \to \partial \left(S^3 \setminus T\right.$（$K$）$\left.\right)$，其中涉及 Dehn 扭转 T_α，以“匹配”K的框架。

为了用生成元表示纽结补空间 $S^3 \setminus T(K)$，我们将其写成若干三维余边的复合态射。这实质上涉及“穿过”一个亏格为 g 的曲面：

$$S^3 \setminus T(K) = \left((S^3 \setminus H_g^{\circ}) \cup_{\mathrm{id}_{\Sigma_g}} (H_g \setminus T(K)) \right), \tag{6.2}$$

其中， g 取决于纽结 K 的纽结图的选择，而 H_g 是亏格为 g 的把手体。

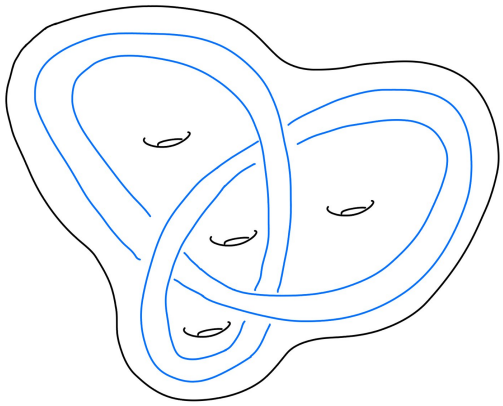


图 2. 从 $\partial(T(K))$ (蓝色) 到 Σ_4 (黑色)，三叶结的情形。

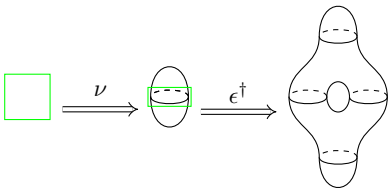
首先来理解 $H_g \setminus T(K)$。固定一个纽结图的表示。
如果将交叉点替换为顶点，那么纽结图的数据与一个连通平面图的数据相同。若该平面图的面数为$g+1$，则其管状邻域与 H_g微分同胚。我们可以得到一个余边 $H_g \setminus T(K)$: $\partial(T(K)) \to \Sigma_g$，它是纽结图在 H_g中的管状邻域的补空间，如三叶结的例子（见图 2 ）所示。把手体（$S^3 \setminus H_g$）通过施加 g个二维把手（填充孔洞）和一个三维把手得到。

$$\Sigma_g \xrightarrow{\text{2-handles}} S^2 \xrightarrow{\text{3-handle}} \emptyset$$

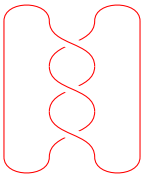
给出了 $S^3 \setminus T(K)$ 的完整分解。
这一过程绝非唯一。不过，我们已经可以看出，它产生了 M 关于生成元的分解。我们有与 2-把手和 3-把手相匹配的显式生成元（ϵ 和 $\nu^\dagger$），而 3-余边 $H_g \setminus T(K)$ 仅在交叉处是非平凡的。换言之，可以通过施加一个一维把手（ η ）以及一个 β 来匹配交叉。这最后一点正是 6.2 分解的优点。

现在我们用某些例子中的 2-态射生成元来表示这一分解6.1 。

注意，边界经 S 扭结的实心环面 $S^1 \times D^2$ 表示为：

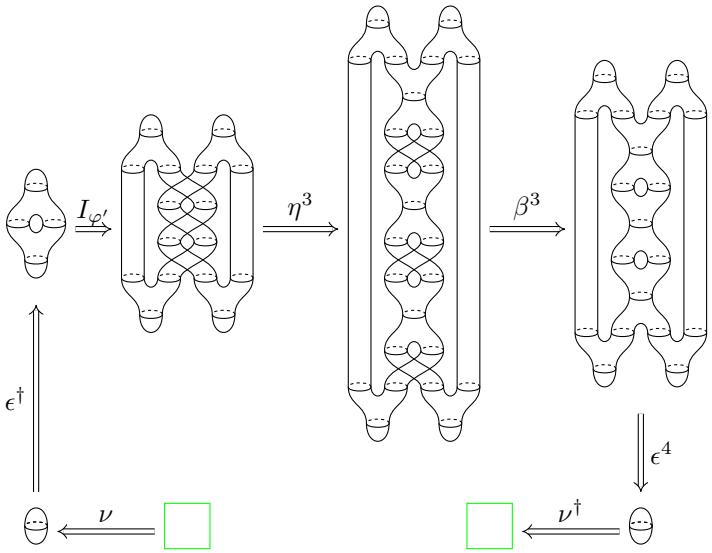


例 6.2. 设 K 为零框架三叶结。它可以表示为如下的辫子闭合：



那么，相应三维流形的分解为：

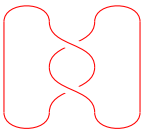
(6.3)



注 6.3. 要应用其中一些 ϵ，我们需要使用 ϕ_l^{-1}和结合子 α 或 α^{-1}。

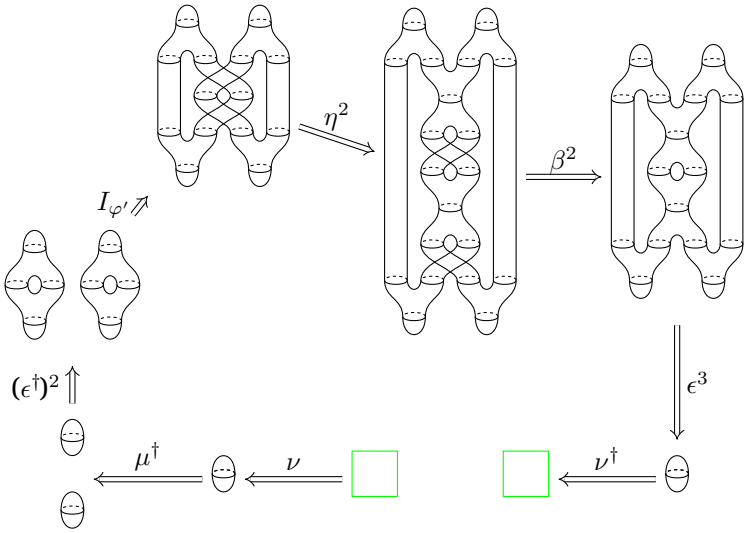
对于通过对链环进行手术得到 M 的情形，处理方式完全类似。设L 为具有 l 个分支的链环。唯一有意义的区别是，使用 $\mu^\dagger l - 1$ 次，随后对所得的 S^2应用 $\epsilon^\dagger$ 共 l 次。

例 6.4. 令 L 为霍普夫链环（两个分支的框架均为 0）：



若 M 是通过对 L 进行手术得到的，则可将其分解如下：

(6.4)

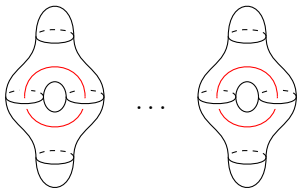


因此，我们可以像上面的例子那样分解任意三维流形 M 。我们用 M^*表示通过从 M的分解中去掉 ν 和 $\nu^\dagger$ 而得到的复合态射 $S^2 \to S^2$ 。

6.2. **计算不变量**。 设 M 是一个定向三维流形，其手术表示由一个带框链环给出 L ，其中有 l 个分支。将 M [Lyu95b]的 Lyubashenko 不变量记为 $\mathcal{L}(M)$，并将半单情形下的 Reshetikhin-Turaev 不变量 $\mathcal{RT}(M)$ 记为 [RT91]。

为了计算与 M 通过 $\mathcal{Z}$相关联的不变量，我们作如下假设。

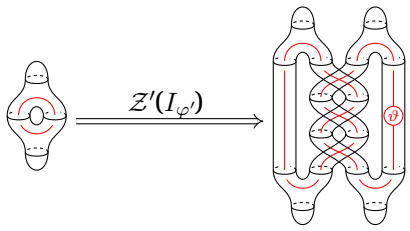
引理 6.5. $I_{\varphi'}$ 作用于



让第 i 个环面的红色股线穿过曲面$\partial\left(S^3 \setminus (T(L_i))\right)$ （包括其内部），并加入适当的扭转 ϑ，使其框架与 L 匹配。

例如，对于 $+1$ 框架的三叶结，我们有：

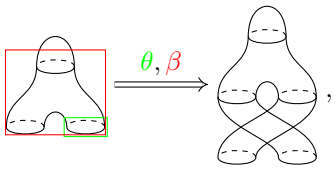
(6.5)



直观地说，这是因为德恩手术将粘到 L 的第 i个分支上的 $S^1 \times D^2$ 的子午线，映射到由 L_i的框架所确定的 $\partial\left(S^3 \setminus T(L_i)\right)$ 上的曲线。

证明。 这一结论基本上源于这样一个事实：$\mathsf{Bord}_{3\,2\,1}^{or\;nc}$,,,是一个对称幺半2-范畴。特别地，每个「链环化」曲面（即作为链环管状邻域边界的1-态射）都同构于若干环面的不交并。要看出这一点，我们可以使用如下初等变换（2-同构）：

(6.6)



尖点 7.4，或涉及对称幺半2-范畴 $\mathsf{Bord}_{3\,2\,1}^{or\;nc}$,,,的对称编织及其与张量单位 $\emptyset$相容性的2-同构。最后，我们使用适当数量的 θ 来匹配框架。最终，这些2-同构的复合等于微分同胚 $I_{\varphi'}$ ，因为它们在环面子午线和经线上的作用相同。□

利用引理 6.5，我们可以证明如下结论：

定理 6.6. 如果 M 是通过对一个纽结进行德恩手术得到的，则有： $\mathcal{Z}'(M^*) = (1/\mathscr{D}) \cdot \mathcal{L}(M) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}'(S^2)}$。
在 $\mathcal{C}$为半单的情况下， $\mathcal{Z}'(M^*) = \mathcal{RT}(M) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}'(S^2)}$。

证明。 我们采用注记 5.5中的约定。这样，我们就可以为帽画出内部弦图 j: $\mathbb{1} \to A$ 。我们从 S^2 开始的弦图，是n个复合态射 $\mathbb{1} \to \mathbb{1}$。如同一注记中所述，应用 $\epsilon^\dagger$后，我们可以利用余端关系，将这个态射局部化到 下方的一个圆柱中。因此我们看到，应用 M^*的分解中的 2-态射时，这个态射不会改变n 这一点，加上命题 5.6、5.7、5.9 和 5.10 中计算出的生成元作用，便得到了所需结果。□

注记 6.7。 我们预期，定理 6.6 适用于由对链环进行德恩手术所得的三维流形。特别是， $\mathcal{Z}'(M^*) = (1/\mathscr{D}^b) \cdot \mathcal{L}(M) \cdot \mathrm{id}_{\mathcal{Z}'(S^2)}$。

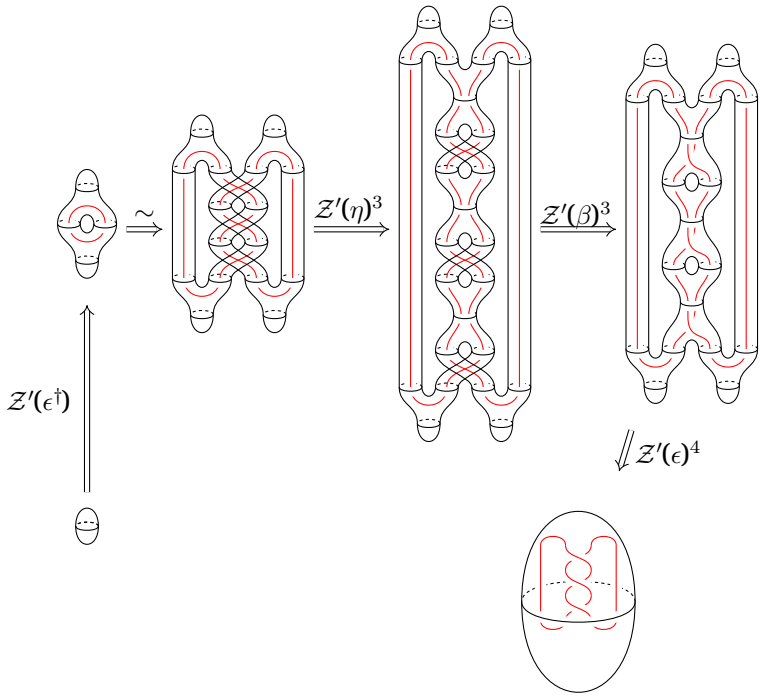
推论 6.8。 在半单情形中，余边界不需要满足非紧性条件。因此，定理 6.6 的证明适用于任意三维流形M，这又意味着三维拓扑量子场论 Z 定义于 [Bar+15] 计算出 Reshetikhin–Turaev不变量： $Z(M) = \mathcal{RT}(M)$。

我们来看一些例子，了解其工作原理。注意，每个 $\epsilon^\dagger$ 都会产生一个$\mathscr{D}^{-1}$因子，我们不把它写出来。我们还采用了这样的约定：不画出起始的 $\mathcal{Z}'(S^2)$中的元素，因为如前所述，它可以局部移到远离应用2-态射的位置。 S^2中的“最终”弦图可以看作位于一个圆柱中，介于和之间。



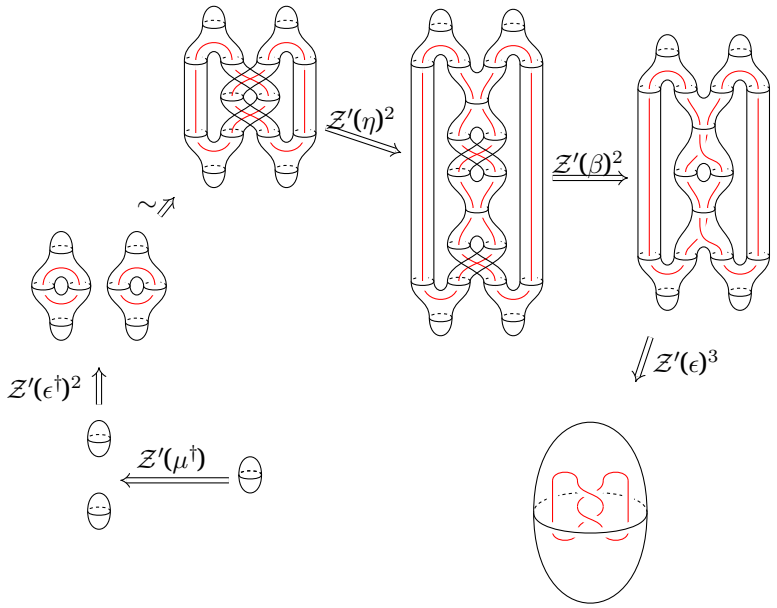
例 6.9。 对于零框架三叶结，我们有：

(6.7)



例 6.10. 对于 0-框架霍普夫链环，我们有：

(6.8)



注 6.11。我们将 M 分解为 2-态射生成元的配方适用于无反常/定向情形。目前尚不清楚如何将其推广到 $\mathbf{Bord}_{3\,2}^{sig}$，,1，因为复合尚未得到充分阐明。不过，我们作出如下观察：当符号数 $\sigma(L) = 0$ 时，我们的配方计算出了正确的不变量。若 $\sigma(L) \neq 0$，我们可以得到一个带有 $\sigma(L') = 0$ 的 L'，通过手术产生与之相同的三维流形 M。这可以通过一系列 Kirby 1-移动（爆破/消去）完成。实质上，这会向 L 中加入 $|\sigma(L)|$ 个带 $\pm$ 框的平凡纽结，且它们与 L 的其余部分不相链。将我们的配方应用于 L'，这些带框纽结对应于反常复合项 2.27。由此可见，$\mathcal{Z}'(M)$ 乘以 $\xi^{\sigma(L)}$，因而再次得到不变量的正确公式。

7. Modified trace

近年来发展起来的修正迹技术 [GPT09; GKP11; GPV12; GKP13; BBG20; GKP22; SS21] 已被用于重新规范化那些被证明存在一定退化性的不变量。在 [De +22]中，修正迹被用于构造非半单拓扑量子场论；这些理论与我们在第 3节中的构造密切相关。本章将考察拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$ 与修正迹之间的关系。我们尤其会说明如何从 $\mathcal{Z}$中提取这样的修正迹。

我们先介绍一些基本定义。

定义 7.1。 对于域 k 上的 $\mathcal{C}$ 有限阿贝尔范畴，在全子范畴 $\mathcal{P} \subset \mathcal{C}$ 上的一个迹是由 k-线性映射 $\{t_P\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P) \to k\}_{P\in\mathcal{P}}$组成的族，满足以下条件：

(1)（循环性）对于所有 $P, Q \in \mathcal{P}$和 $f\colon P \to Q$, $g\colon Q \to P$，以下等式成立：

$$t_P(g \circ f) = t_Q(f \circ g).$$

(2)（非退化性）对于所有 $P \in \mathcal{P}$ 和 $X \in \mathcal{C}$，配对

$$t_P(- \circ -)\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, X) \times \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(X, P) \to k,$$

是非退化的。

注 7.2. 循环性条件等价于族$\{t_P\colon \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P) \to k\}_{P\in\mathcal{P}}$是二自然的。

如果 $\mathcal{C}$ 是刚性幺半、枢轴的，且 $\mathcal{P}$ =属于 Proj($\mathcal{C}$)（射影对象构成的张量理想），我们就可以定义一个修正 迹。

首先，对于 $X, Y \in \mathcal{C}$ 和 $f \in \mathrm{End}(X \otimes Y)$，我们将 f 的左偏迹和右偏迹定义如下：

$$\mathrm{tr}_L(f) = (\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_Y) \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes f) \circ (\mathrm{coev}_X^R \otimes \mathrm{id}_Y),$$

$$\mathrm{tr}_R(f) = (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{ev}_X^R) \circ (f \otimes \mathrm{id}_{X^\vee}) \circ (\mathrm{id}_Y \otimes \mathrm{coev}_X)$$

定义 7.3。 现在，如果迹 t_P 还满足以下条件，则称其为修正迹：

(1)（右偏迹）对于所有 $P \in \mathcal{P}$、 $X \in \mathcal{C}$ 和 $f \in \mathrm{End}(P \otimes X)$,

$$t_{P\otimes X}(f) = t_X(\mathrm{tr}_R(f));$$

(2)（左偏迹）对于所有 $P \in \mathcal{P}$、 $X \in \mathcal{C}$ 和 $f \in \mathrm{End}(X \otimes P)$,

$$t_{X\otimes P}(f) = t_X(\mathrm{tr}_L(f)).$$

注意，当 $\mathcal{C}$ 具有带状结构时，上述条件 (1) 和 (2) 等价 [GKP11]。

注 7.4。 在非枢轴情形下也可以定义修正迹 [SS23]。

为了了解修正迹如何通过 $\mathcal{Z}$ 出现，考虑这一族映射 t_P 作为一个 k-线性映射会很有帮助

$$\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P, P) \to k,$$

在我们的设定中，空间 $\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P)$ 与 $\mathcal{Z}(T^2)$ 有典范同构。此外，将非紧致拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$ 作用于实心环面，可得到一个映射

$$\mathcal{Z}(\nu^\dagger \circ \epsilon)\colon \mathcal{Z}(T^2) \to k.$$

从紧化二维拓扑量子场论 $\mathcal{Z}(S^1 \times -)$ 和 Lurie 的非紧致配边假设 [Lur09]，这个映射是一个迹映射，是 $\mathcal{Z}(S^1)$ 上“卡拉比–丘”结构的一部分。

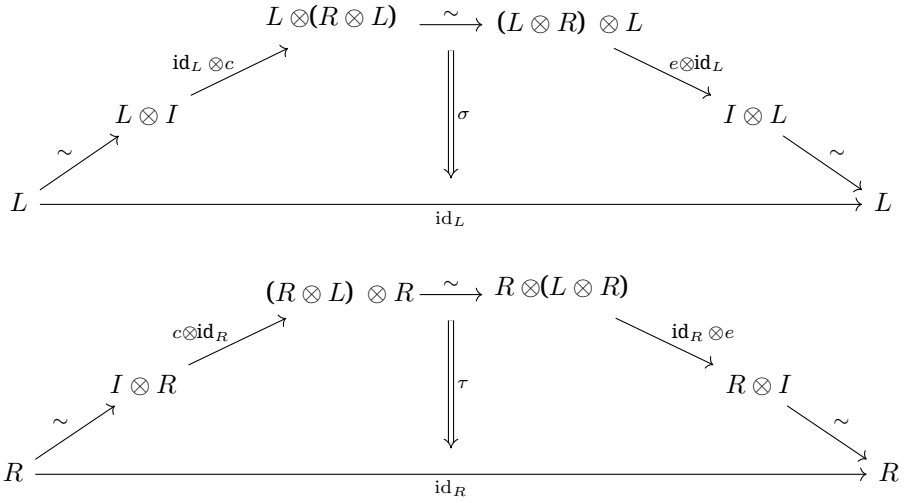
本章要证明的是，我们通过上述内容复合得到的映射 $\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P) \to k$ 是一个修正迹。这一论断的一个核心且非平凡的部分，涉及典范同构的由来

$$\mathcal{Z}(T^2) \cong \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P).$$

7.1. **双范畴中的 1-对偶可化性**。为了说明为何存在典范同构 $\mathcal{Z}(T^2) \cong \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P)$，我们将探讨双范畴中 1-可对偶对象的理论。为此，我们将紧密遵循[Pst22]中的阐述。

设 $\mathcal{M}$ 为一个幺半双范畴，其幺半单位为 I。

定义 7.5. $\mathcal{M}$ 中的一个对偶对 是一个元组 $(L,\ R,\ e,\ c,\ \sigma,\ \tau)$，其中 $L,\ R \in \mathcal{M}$ 是对象，$e\colon L\otimes R \to I$、$c\colon I \to R\otimes L$ 是 1-态射，而 $\sigma,\ \tau$ 是见证“蛇形”恒等式的同构：

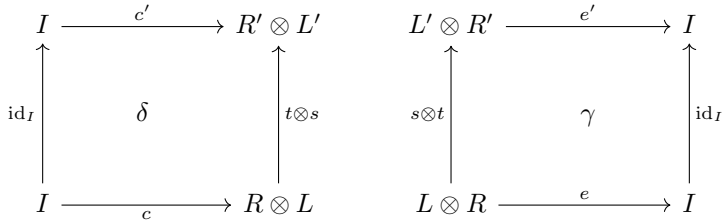


在不引起歧义的情况下，我们将 $\mathcal{M}$ 中的对偶对 (L,R,e,c,σ,τ) 记作 $\langle L,R\rangle$。

对偶对组织成一个双范畴 DualPair($\mathcal{M}$)——参见 [Pst22，定义 3.8、记号 3。9] 其中有完整的说明。我们关注该双范畴中一个 1-态射的数据，下面将对此进行解释。

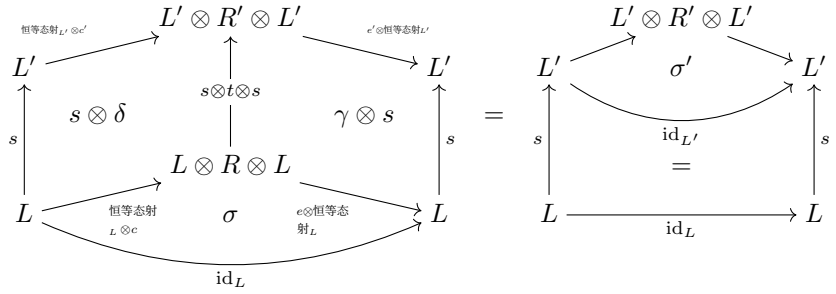
两个对偶对 $(s,\ t,\ \gamma,\ \delta)$ 和 $(L,\ R,\ e,\ c,\ \sigma,\ \tau)$ 与 $(L',\ R',\ e',\ c',\ \sigma',\ \tau')$ 之间的一个态射 $(s,\ t,\ \gamma,\ \delta)$，由以下数据组成：

- $\mathcal{M}$、 s中的两个1-态射： $L \to L'$和 t： $R \to R'$；
- 两个可逆2-态射 γ， δ：

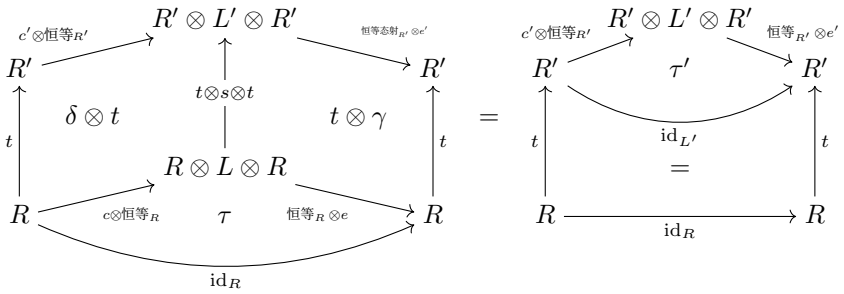


满足以下相干性条件：

(7.1)



(7.2)



显然，一个对象属于某个对偶对，当且仅当它是 1-可对偶化的 [Pst22，命题 3。6] 然而，事实证明，如果我们天真地考虑从对偶对双范畴到 1-可对偶对象 2-群胚的遗忘 2-函子，它未必是等价。为了解决这个问题，我们需要考虑一类满足额外相干方程（即所谓的 吞咽尾 公理[Pst22，定义 3。11]）的对偶对。我们将这类对偶对构成的双范畴称为 相干对偶对双范畴 ，记作 $\mathcal{M}$CohDualPair($\mathcal{M}$)。由于我们只关注相干对偶对，从此处开始，凡提及“对偶对”，均默认指相干对偶对。

我们得到以下结果：

- CohDualPair($\mathcal{M}$) 是一个 2-群胚 [Pst22，命题 310]；
- 数据（L、 R、 e、 c、 σ）可以唯一地补全为一个对偶对 [Pst22，定理 3。14]；

- 若 $\left(\mathcal{M}_{\mathrm{d}}\right)^{\sim}$ 是 $\mathcal{M}$中可对偶对象构成的 2-群胚，则遗忘 2-函子

$$F\colon \mathrm{CohDualPair}(\mathcal{M}) \to \left(\mathcal{M}^{\mathrm{d}}\right)^{\sim} \tag{7.3}$$

是一个等价 [Pst22，定理 3。16]。

我们将 CohDualPair($\mathcal{M}$) 的一个对象记作 $(L,\ R,\ e,\ c,\ \sigma)$，这得益于上述第二个结果。

7.2. 典范同构。 为了说明如何得到同构 $\mathcal{Z}(T^2) \cong \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ P)$，我们将定义 CohDualPair($\mathrm{Bimod}_k$) 的两个对象。这两个对象之间的一个 1-态射可导出这样的同构。通过进一步分析，我们将看到，适当定义的这类 1-态射空间是可缩的，因此这类选择在唯一的 2-同构意义下是唯一的。

我们首先定义所讨论的 CohDualPair(Bimod_k)) 的两个对象。它们都与完全扩张的非紧致二维拓扑量子场论 $\mathcal{Z}_0$ 和 $\mathcal{Z}(-\times S^1)$ 相关，因此我们用这些记号表示它们。我们强调，我们并未对 $\mathcal{Z}_0$ 证明这一主张，而只是将它们作为 CohDualPair(Bimod_k) 的对象呈现。

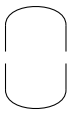
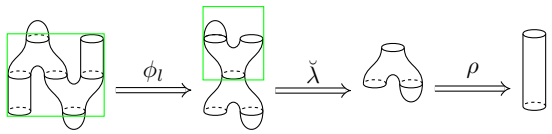
$\mathrm{Bord}^{nc}_{2,1,0}$	$\mathcal{Z}_0\colon\ \mathrm{Bord}^{nc}_{2,1,0} \to \mathrm{Bimod}_k$	$\mathcal{Z}'(-\times S^1)\colon\ \mathrm{Bord}^{nc}_{2,1,0} \to \mathrm{Bimod}_k$
pt_+	$\mathcal{P}$	$\mathcal{P}$
pt_-	$\mathcal{P}^{op}$	$\mathcal{P}$
	$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)\colon\ \mathcal{P}\boxtimes\mathcal{P}^{op} \to$ 向量空间$_k$	$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-\otimes-,\ \mathbb{1})^*\colon\ \mathcal{P}\boxtimes\mathcal{P} \to \mathrm{Vec}_k$
	$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,\ -)\colon\ \mathcal{P}^{op}\boxtimes\mathcal{P} \to \mathrm{Vec}_k$	$\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-\otimes-,\ \mathbb{1})\colon\ \mathcal{P}^{op}\boxtimes\mathcal{P}^{op} \to \mathrm{Vec}_k$
	余 Yoneda	α_1

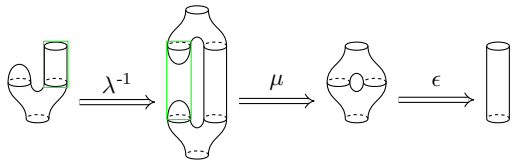
表3。 $\mathcal{Z}_0(pt)$ 和 $\mathcal{Z}'(pt\times S^1)$ 的可对偶性数据。

同构 α_1 是由尖点同构在非紧拓扑量子场论 $\mathcal{Z}$ 下的像给出的。

在 $\mathrm{Bord}^{sig}_{,3\,2\,1}{}^{nc}_{,,}$ 中，尖点同构由以下 2-态射的复合态射给出：

$$\text{cusp} \quad := \tag{7.4}$$


˘如 [Bar+14]所述，左余单位元 λ 的公式可通过“伴随计算”，由以下生成元的复合态射给出：

(7.5) $\breve{\lambda} :=$ 

注7.6。 在 Lincat 中， $\mathcal{Z}(\,)(\bigcirc) = \int^{X\in\mathcal{C}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-\otimes X^{\vee},1)^{*}\otimes X$，它与中山函子 $\mathcal{N}$ [FSS20]同构。已知中山函子的平凡化与修正迹一一对应 [SW23；SS23]。由于尖点同构提供了这样一种平凡化，因此它与修正迹的定义相关，这并不令人意外。不过，我们强调，我们获得修正迹的方法独立于上述文献中的方法。

将上一节的讨论专门化，两个这样的对偶对之间的一个态射由以下数据组成：

- 一个函子 $\mathcal{P}\xrightarrow{s_0}\mathcal{P}$；
- 一个函子 $\mathcal{P}^{op}\xrightarrow{t_0}\mathcal{P}$；
- 一个自然同构，其分支为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,P)\xrightarrow{\gamma_0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^{\vee},\mathbb{1})^{*}$；
- 一个自然同构，其分支为 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,Y)\xrightarrow{\delta_0}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^{\vee}\otimes Q,\mathbb{1})$.

得到同构 c_t: $\int^{P\in\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ P)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\ 1)^{*}\ (=\mathcal{Z}(T^2))$所需的要素如下：

- 典范同构 $\mathcal{Z}_0(S^1)\ \cong\ \int^{P\in\mathcal{P}}\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,\ P)$，它由 $\mathcal{Z}_0$ (余 Yoneda) 下的尖点同构给出；
- 一个同构 $\mathcal{Z}_0(S^1)\ \cong\ \mathcal{Z}'(S^1\times S^1)$，它来自 CohDualPair($\mathrm{Bimod}_k$) 中的一个 1-态射 $\langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}^{op}\rangle\to\langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}\rangle$；
- 如第 $\mathcal{Z}(T^2)\ \cong\ \mathcal{Z}'(T^2$ 节所述，两者可识别5。

严格来说， γ_0 和 δ_0 无法给出同构 $\mathcal{Z}_0(S^1)\ \cong\ \mathcal{Z}'(S^1\times S^1)$，因为它们是关于 $\mathcal{P}$ 的右对偶化数据之间一个态射的一部分，因此我们无法直接复合这两个双模来得到 $\mathcal{Z}(S^1\times S^1)$。不过，由于 Bimod_k是对称幺半的，我们可以从右对偶化数据得到 $\mathcal{P}$ 的左对偶可对偶数据。因此，更准确地说，要得到所讨论的同构，我们还需要 1-态射 $\langle\mathcal{P}^{op},\ \mathcal{P}\rangle\to\langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}\rangle$ 的部分数据。具体而言，需要一个自然同构

(7.6) $$\gamma_1\colon\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,P)\to\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^{\vee}\otimes P,\mathbb{1})^{*}$$

（注意目标范畴中的条目与 γ_0相比是倒置的）。
总而言之，该同构 c_t 由以下复合态射给出：

$$\begin{array}{ccc} \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P) & \xrightarrow{\quad\sim\quad} & \int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) \\ \Big\downarrow{\scriptstyle c_t} & & \Big\downarrow{\scriptstyle \gamma_1\otimes\delta_0} \\ \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},1)^* & \xleftarrow{\quad\sim\quad} & \int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1})^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1}) \end{array}$$

此时， c_t 似乎取决于 γ_1 和 δ_0的选择。本节余下部分将围绕以下问题展开：

定理 7.7. 同构 c_t 存在且是典范的。

为此，我们将证明存在这样一个对偶对的 1-态射 $\langle\mathcal{P},\mathcal{P}^{op}\rangle\to\langle\mathcal{P},\mathcal{P}\rangle$，并且它在可缩选择意义下唯一。
我们先证明前者。
定义一个关于 $P\in\mathcal{P}$ 二自然的非退化配对

$$t_P\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{1},P)\otimes\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})\to k. \tag{7.7}$$

根据第 2.3 章中讨论的结果，要定义 t_P，只需指定 $t_{P_{\mathbb{1}}}$，其定义如下：

$$\begin{array}{rcl} t_{P_{\mathbb{1}}}\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{1},P_{\mathbb{1}})\otimes\mathrm{Hom}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1}) & \to & k \\ (\eta_{\mathbb{1}},\varepsilon_{\mathbb{1}}) & \mapsto & \mathscr{D}^{-1} \end{array}$$

相应的余配对

$$\Omega_P\colon k\to\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}(\mathbb{1},P), \tag{7.8}$$

由下式确定：

$$\begin{array}{rcl} \Omega_{P_{\mathbb{1}}}\colon k & \to & \mathrm{Hom}(P_{\mathbb{1}},\mathbb{1})\otimes\mathrm{Hom}(\mathbb{1},P_{\mathbb{1}}) \\ 1 & \mapsto & \mathscr{D}\,(\varepsilon_{\mathbb{1}},\eta_{\mathbb{1}}) \end{array}$$

注 7.8。 二自然非退化配对的数据由范畴上的非退化迹（定义 7.1）的数据导出。二重自然性由循环性条件推出。

t_P 的数据等价于以下自然同构的数据：

$$t_P^1\colon \mathrm{Hom}(\mathbb{1},P)\xrightarrow{\sim}\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})^* \tag{7.9}$$

利用 Ω，我们可以得到 $\Omega^1:=(t^1)^{-1}$ 的逆的公式，由下面的复合态射给出：

(7.10)
$$\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})^* \xrightarrow{\Omega_P\otimes\mathrm{id}} \mathrm{Hom}(\mathbb{1},P)\,\mathrm{Hom}(P,\mathbb{1}) \otimes \mathrm{Hom}(P,\mathbb{1})^* \xrightarrow{\mathrm{id}\otimes \mathrm{ev}_{vect}} \mathrm{Hom}(\mathbb{1},P)$$

我们稍后会用到一个有用的事实:

引理 7.9。 $\mathcal{Z}(\mu) = EV_{\mathbb{1}} \circ(\Omega^1 \otimes \mathrm{id}_{\mathbb{1}})$

证明。 提醒一下， EV 定义于2.29 ，而 $\mathcal{Z}(\mu$定义于3.1。展开定义即可轻易得出这一结论。□

注 7.10。 事实上，自然同构 t^1 (因此也包括t)的数据等价于一个同构 $\mathbb{1} \xrightarrow{\sim} \mathcal{N}(\mathbb{1})$, 其中 $\mathcal{N}$ 是中山函子。如 [SS23], 所述，这些同构等价于 $\mathcal{N}$的平凡化。

我们将两个对偶对之间的态射定义为

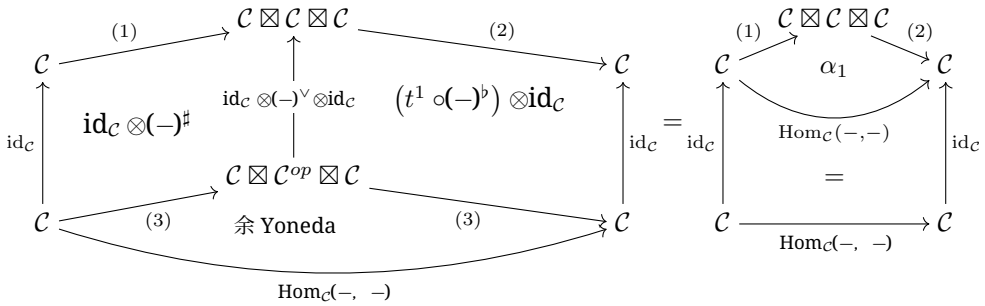
(7.11)
$$(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, (-)^{\vee}, t^1 \circ (-)^{\flat}, (-)^{\sharp}).$$

更明确地说,

- $\mathcal{P} \xrightarrow{\mathrm{id}^{\mathcal{P}}} \mathcal{P}$;
- $\mathcal{P}^{op} \xrightarrow{(-)^{\vee}} \mathcal{P}$);
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \xrightarrow{t^1\circ -^{\flat}} ()\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes -, \mathbb{1})^*$;
- $\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \xrightarrow{(-)^{\sharp}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes -, \mathbb{1})$。

命题 7.11。 数据 $(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}, (-)^{\vee}, t^1 \circ (-)^{\flat}, (-)^{\sharp})$ 构成一个定义良好的对偶对态射。

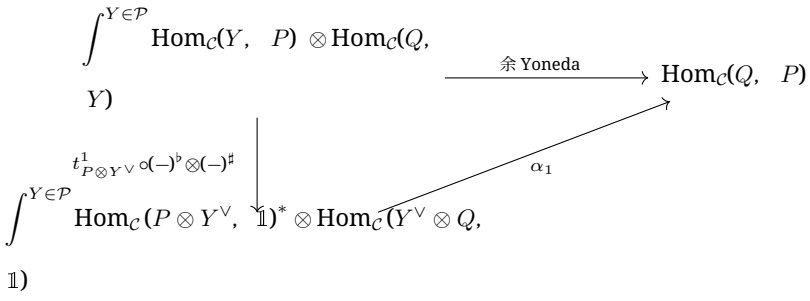
证明。 为证明这一点，我们检查相容性要求7.1。提醒一下，我们不需要检查 7.2，因为满足该要求的 τ 只有唯一的选择。
相干性7.1在此情形下变为:



其中箭头 (1)、(2)、(3) 表示以下双模:

(1) $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes -, \mathbb{1})$,
(2) $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(- \otimes -, \mathbb{1})^* \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$,
(3) $= \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(-,-)$。

换句话说，在分支 $P,\ Q \in \mathcal{P}(\mathcal{Z}_0(\ )^Q_P$ 和 $\mathcal{Z}'(\ )^Q_P)$ 中进行计算时，我们要检查以下图表的交换性：



我们首先计算 $\alpha_{1\circ}$ 注意，根据 2.28 可知：

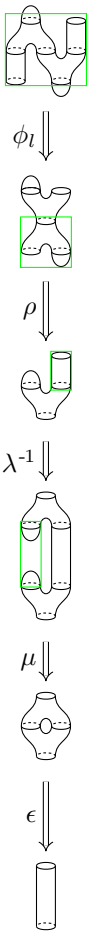
$$\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,Y) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes Y) \tag{7.12}$$

结合对 $(-)^\flat$ 的应用，可将 $\mathcal{Z}'(\ )$ 与 $(\mathcal{Z}(\ ))_*$ 对应起来：

$$\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1}\right)^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}\left(Y^\vee\otimes Q,\mathbb{1}\right) \cong \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes Y).$$

因此，我们有：

(7.13)



$$
\begin{array}{c}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^{\vee}, \mathbb{1})^{*}\otimes Y) \\
\Big\Downarrow \mathcal{Z}(\phi_l)_{*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^{\vee}, \mathbb{1})^{*}\otimes Y) \\
\Big\Downarrow \mathcal{Z}(\rho)_{*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^{\vee}, \mathbb{1})^{*}\otimes Y) \\
\Big\Downarrow \mathcal{Z}(\lambda^{-1})_{*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^{\vee}, \mathbb{1})^{*}\otimes \mathbb{1}\otimes Y) \\
\Big\Downarrow \mathcal{Z}(\mu)_{*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, \int^{Y\in\mathcal{P}} P\otimes Y^{\vee}\otimes Y) \\
\Big\Downarrow \mathcal{Z}(\epsilon)_{*} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q, P)
\end{array}
$$

但我们知道， $\mathcal{Z}(\phi_l) = \mathrm{id}$；由于我们一直省略单位（$P\otimes\mathbb{1}\cong P$），右单位约束 $\mathcal{Z}(\rho)$ 也就是恒等态射。因此，我们要验证其交换性的图表变为：

$$
\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y,P)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,Y) & \xrightarrow{\text{co-Yoneda}} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) \\
\Big\downarrow{\scriptstyle t^1_{P\otimes Y^\vee}\circ(-)^\flat\otimes(-)^\sharp} & & \\
\displaystyle\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Y^\vee\otimes Q,\mathbb{1}) & & \Big\| \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes(7.12\circ(-)^\flat)} & & \Big\| \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\displaystyle\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes Y) & & \Big\| \\
\Big\downarrow{\scriptstyle \mathcal{Z}(\lambda^{-1})_*} & & \Big\| \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\displaystyle\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P\otimes Y^\vee,\mathbb{1})^*\otimes\mathbb{1}\otimes Y) & & \Big\| \\
\Big\downarrow{\scriptstyle (EV_1\circ(\Omega^1_{P\otimes Y^\vee}\otimes\mathrm{id}_1)\otimes\mathrm{id}_Y)_*} & & \Big\| \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\displaystyle\int^{Y\in\mathcal{P}} P\otimes Y^\vee\otimes Y) & \xrightarrow[(\mathrm{id}_P\otimes\mathrm{ev}_Y)_*]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P)
\end{array}
$$

这确实是交换的，因为

- $(-)^\sharp$ 与紧接着作用的 $(-)^\flat$ 相消；
- $t^1_{P\otimes Y^\vee}$与 $\Omega^1_{P\otimes Y^\vee}$相消；
- 同构 7.12 后接 EV_1 等同于：

$$
\int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},P\otimes Y^\vee)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,\mathbb{1}\otimes Y) \xrightarrow{\text{composition}} \int^{Y\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P\otimes Y^\vee\otimes Y);
$$

- $(-)^\flat$ 与 ev_Y相消；
- 余 Yoneda 同构由复合给出。

□

如上所述，$\gamma_1 = t^1\circ(-)^\sharp$ 是另一个对偶可性数据态射的一部分，$\langle\mathcal{P}^{op},\ \mathcal{P}\rangle\to\langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}\rangle$。这个 1-态射的定义（以及这一事实的证明）与上文完全类似，这里略去。

由此，我们证明了 c_t的存在。接下来，我们将说明上述对 1-态射的选择为何以及在何种意义上是规范的。
设 $\mathfrak{G}_1 := \mathrm{Hom}(\langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}^{op}\rangle,\ \langle\mathcal{P},\ \mathcal{P}\rangle)$ 属于 $\mathrm{CohDualPair}(\mathrm{Bimod}_k)$，且 $\mathfrak{G}_2 := \mathrm{Hom}(\mathcal{P},\ \mathcal{P})$ 属于 $\left(\mathrm{Bimod}_k^d\right)^\sim$。
那么，等价 7.3 给出了 1-群胚的一个等价 $F\colon\ \mathfrak{G}_1\to\mathfrak{G}_2$。
我们并不关心整个态射范畴 $\mathfrak{G}_1$，而是关注位于 $\mathrm{id}_{\mathcal{P}}$ 上方的 1-态射。因此，应该考察的正确概念是同伦纤维$ho F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$。

定义 7.12。设 $\Phi\colon\ \mathcal{G}_1\to\mathcal{G}_2$ 是群胚的一个映射，$x\in\mathcal{G}_2$ 是一个对象。同伦纤维 $ho\Phi^{-1}(x)$ 是满足以下条件的群胚：

- 对象是对象 $z \in \mathcal{G}_1$ 与同构 g: $\Phi(z) \xrightarrow{\sim} x$ 组成的二元组（z, g）；
- 态射（z_1, g_1）$\to$（z_2, g_2）由态射 h: $z_1 \to z_2$ 在 $\mathcal{G}_1$ 中给出，使得 $g_2 \circ \Phi(h) = g_1$。

我们也关注严格纤维 $st F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$。

定义 7.13。设 Φ: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ 是群胚的一个映射，且 $x \in \mathcal{G}_2$ 是一个对象。严格纤维 $st\Phi^{-1}(x)$ 是满足以下条件的群胚:

- 对象是满足 $\Phi(z) = x$ 的对象 $z \in \mathcal{G}_1$；
- 态射 $z_1 \to z_2$ 由 $\mathcal{G}_1$ 中满足$\Phi(h) = \mathrm{id}_x$ 的态射 h: $z_1 \to z_2$ 给出。

存在一个典范包含函子:

$$\begin{array}{ccc} \iota\colon st\Phi^{-1}(x) & \hookrightarrow & ho\Phi^{-1}(x) \\ z & \mapsto & (z, \mathrm{id}_x) \end{array}$$

引理 7.14. 设 Φ: $\mathcal{G}_1 \to \mathcal{G}_2$ 是一个群胚等价，且 $x \in \mathcal{G}_1$ 是一个对象。那么，同伦纤维 $ho\Phi^{-1}(x)$ 是可缩的。

证明. 设 (z_1, g_1),$(z_2, g_2) \in ho\Phi^{-1}(x)$。那么，我们有如下结果:

$$\begin{array}{ccccccc} \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_2}(x,x) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_2}(\Phi(z_1), \Phi(z_2)) & \cong & \mathrm{Hom}_{\mathcal{G}_1}(z_1, z_2) \\ \mathrm{id}_x & \longmapsto & g_2^{-1} \circ g_1 & \longmapsto & h \end{array}$$

换句话说，存在唯一的 $h \in \mathrm{Hom}_{ho\Phi^{-1}(x)}(z_1, z_2)$。 □

注记 7.15. 引理 7.14 的证明同样适用于将 $ho\Phi^{-1}(x)$ 替换为$st\Phi^{-1}(x)$，前提是后者非空。对于 $st F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$，这得益于 1-态射的存在：7.11。

推论 7.16. 由于 F: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$是一个等价，同伦纤维 $ho F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$ 是可缩的。

我们还将证明 F: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ 是一个等纤维化。

定义 7.17. 设 C, D 是范畴。若函子 Ψ: $C \to D$满足：对于任意对象 $y \in D$以及任意同构 g: $\Psi(y) \xrightarrow{\sim} x$，都存在一个同构 h: $y \xrightarrow{\sim} y'$，使得 $\Psi(h) = g$，则称其为一个等纤维化 。

引理 7.18. F: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ 是一个等纤维化。

证明。如前所述， $st F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$非空。固定一个对象 $z_0 \in st F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$。由于 $ho F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$是可缩的，对于每个对象 $(z, g) \in ho F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$，都存在唯一一个态射 h_0: $(z, g) \to \iota(z_0)$。换言之， F 是一个等纤维化。□

以下结果说明了为什么 F 是等纤维化很重要。

命题 7.19. 如果 F: $\mathfrak{G}_1 \to \mathfrak{G}_2$ 是等纤维化，那么典范包含ι: $st F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}}) \hookrightarrow ho F^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})$ 是一个等价。

证明。• F 是等纤维化，因此是本质满射。

- ι是全忠实的这一事实，即 $\mathrm{Hom}_{stF^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})}(z_1,\ z_2) \cong \mathrm{Hom}_{hoF^{-1}(\mathrm{id}_{\mathcal{P}})}((z_1,\ \mathrm{id}),\ (z_2,\ \mathrm{id}))$，根据定义成立。

□

换言之，对偶可性数据的 1-态射是规范的，也就是说，它在唯一的 2-同构意义下是唯一的。由此，c_t 的选择也是规范的。

7.3. 复合态射是一个修正迹。 在本节中，我们证明本章的主要结果。

定理 7.20. 映射

$$t' \colon \int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P) \to k, \tag{7.14}$$

由 $t' := \mathcal{Z}(\nu^\dagger \circ \epsilon) \circ c_t$ 给出，是一个修正迹。

在证明这一点之前，我们先明确地理解 t'。它等于以下复合态射：

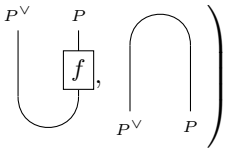
$$\begin{array}{ccc}
\displaystyle\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P) & \xrightarrow{\ \sim\ } & \displaystyle\int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,Q)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle (-)^\sharp\otimes(-)^\sharp} \\
 & & \displaystyle\int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1},P^\vee\otimes Q)\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1}) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle t^1_{P^\vee\otimes Q}\otimes\mathrm{id}} \\
 & & \displaystyle\int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1})^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1}) \\
t' \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \mathrm{id}\otimes(-)^\flat} \\
 & & \displaystyle\int^{P,Q\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes Q,\mathbb{1})^*\otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(Q,P) \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
 & & \displaystyle\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee\otimes P,\mathbb{1})^* \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \sim} \\
k & \xleftarrow[\mathrm{ev}_{vect}(\varepsilon)]{} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathcal{F},\mathbb{1})^*
\end{array}$$

构成该复合态射的映射都是规范的。第一个映射是 $\mathcal{Z}_0$ 的尖点同构。随后是上一节所述可对偶性数据的态射中的映射。最后，应用（实心环面）映射$\mathcal{Z}(\nu^\dagger \circ \epsilon)$。注意，同构 $\mathcal{Z}(T^2) \cong \mathcal{Z}'(T^2)$ 已包含在

复合态射中。我们本可以直接考虑 $\mathcal{Z}'(\epsilon)$ 和 $\mathcal{Z}'(\nu^\dagger)$ 的作用来定义该复合态射，正如第 6 节所计算的那样。
设 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P)$。由于 $(-)^\sharp$ 与 $(-)^\flat$相消，且余 Yoneda 同构与其逆相消，我们计算得

$$t'(f) = t_{P^\vee \otimes P}\left((\mathrm{id}_{P^\vee} \otimes f) \circ \mathrm{coev}_P^R, \mathrm{ev}_P\right). \tag{7.15}$$

图示如下，

$$t'(f) = t_{P^\vee \otimes P}\left(\right.$$


$$\left. \right)$$

现在我们可以证明定理 7.20：

证明。 我们检验 t' 满足必要条件：

- 循环性条件自动成立，因为 t' 是从余端 $\int^{P\in\mathcal{P}} \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P,P)$ 出发的映射。

- 令 $P \in \mathcal{P}$, $X \in \mathcal{C}$和 $g_1 \colon P \to X$, $g_2 \colon X \to P$，其因 t的非退化性而非退化。$t'(g_2 \circ g_1) = t_{P^\vee \otimes P}\left((\mathrm{id}_{P^\vee} \otimes (g_2 \circ g_1)) \circ \mathrm{coev}_P^R, \mathrm{ev}_P\right)$

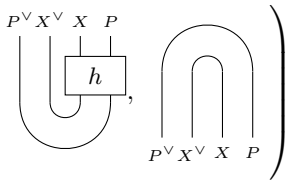
- 由于 $\mathcal{C}$ 具有带状结构，只需验证左偏迹性质。换言之，我们要证明，对于 $h \in \mathrm{End}_{\mathcal{C}}(X \otimes P)$：

$$t'_{X\otimes P}(h) = t'_P\left((\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_P) \circ (\mathrm{id}_{X^\vee} \otimes h) \circ (\mathrm{coev}_X^R \otimes \mathrm{id}_P)\right).$$

我们再次提醒，$(X \otimes P)^\vee \cong P^\vee \otimes X^\vee$，其可对偶化态射如下：

$\mathrm{ev}_{X\otimes P} = \mathrm{ev}_P \circ (\mathrm{id}_{P^\vee} \otimes \mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}_P)$，$\mathrm{coev}_{X\otimes P} = (\mathrm{id}_P \otimes \mathrm{coev}_X \otimes \mathrm{id}_{P^\vee}) \circ \mathrm{coev}_P$

Computing, we get:
$t'_{X\otimes P}(h) = t_{P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P}\left((\mathrm{id}_{P^\vee} \otimes \mathrm{id}_{X^\vee} \otimes h) \circ (\mathrm{coev}_{X\otimes P}^R), \mathrm{ev}_{X\otimes P}\right)$
Graphically,

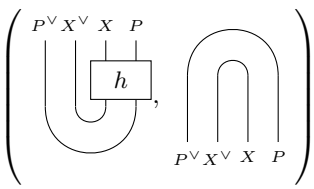
$$t'_{X\otimes P}(h) = t_{P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P}\left(\right.$$


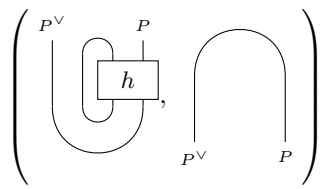
$$\left. \right)$$

利用态射 $P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P \xrightarrow{\mathrm{id}_{P^\vee} \otimes \mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{id}} P^\vee \otimes P$，由 t 的二自然性可知，下列方形图交换：

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee \otimes P, \mathbb{1}) & \xrightarrow{\mathrm{ev}_X \otimes \mathrm{idid} \otimes} & \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(\mathbb{1}, P^\vee \otimes P) \otimes \mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee \otimes P, \mathbb{1}) \\
\downarrow \mathrm{ev}_X & & \downarrow t_{P^\vee \otimes P} \\
\mathrm{Hom}_{\mathcal{C}}(P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P, \mathbb{1}) & \xrightarrow{t_{P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P}} & k
\end{array}$$

换言之,

$t_{P^\vee \otimes X^\vee \otimes X \otimes P}$ 

$= t_{P^\vee \otimes P}$ 

,

这就是所需的性质。

□

References

[Ati88] M. Atiyah。《拓扑量子场论》。英文。载于：《IH ´ES数学出版物》68.1（1988年1月），第175–186页。ISSN：0073-8301，1618-1913。URL：http://link.springer.com/10.1007/BF02698547。[Bar+14] B. Bartlett、C. L. Douglas、C. J. Schommer-Pries 和 J. Vicary。《作为模对象理论的扩展三维配边》。arXiv:1411.0945[math]。2014年11月。URL：http://arxiv.org/abs/1411.0945。[Bar+15] B. Bartlett、C. L. Douglas、C. J. Schommer-Pries 和 J. Vicary。《作为三维配边二范畴表示的模范畴》。arXiv:1509.06811 [math]。2015年9月。URL：http://arxiv.org/abs/1509.06811。[Bar14] B. Bartlett。《通过线图构造拟严格对称幺半二范畴》。载于：（2014年9月）。arXiv:1409.2148 [math]。URL：http:// arxiv.org/abs/1409.2148。[BBG20] A. Beliakova、C. Blanchet 和 A. M. Gainutdinov。修正迹是对称化积分。arXiv:1801.00321 [math]。2020年10月。URL：http://arxiv.org/abs/1801.00321。[BW99] J. W. Barrett 和 B. W. Westbury。《球形范畴》。载于：《数学进展》143.2（1999年5月），第357–375页。ISSN：0001-8708。URL：https : / / www . sciencedirect . com / science / article / pii / S000187089891800X。[Cos+23a] F. Costantino、N. Geer、B. Haïoun 和 B. Patureau-Mirand。来自非半单带状范畴的 Skein (*3+1*)-拓扑量子场论。arXiv:2306.03225[math]。2023年6月。URL：http://arxiv.org/abs/2306.03225。[Cos+23b] F. Costantino、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 A. Virelizier。来自非半单球形范畴的非紧致 (*2+1*)-拓扑量子场论。arXiv:2302.04509[math]。2023年6月。URL：http://arxiv.org/abs/2302.04509。[Cre+24] T. Creutzig、T. Dimofte、N. Garner 和 N. Geer。《非半单拓扑量子场论的量子场论》。英文。载于：《理论与数学物理进展》28.1（2024年8月）。出版商：波士顿国际出版社，第161–405页。ISSN：1095-0753。URL：https://link.intlpress.com/ JDetail/1833468021823725578。[CY93] L. Crane 和 D. Yetter。《四维拓扑量子场论的范畴构造》。载于：《量子拓扑》。第3卷。《结与万物丛书》第3卷。WORLD SCIENTIFIC，1993年9月，第120–130页。ISBN：978-981-02-1544-6。URL：https://www. worldscientific.com/doi/abs/10.1142/9789812796387_0005。[CY99] L. Crane 和 D. Yetter。《拓扑量子场论中隐含的代数结构》。英文。载于：《结理论及其应用杂志》08.02（1999年3月），第125–163页。ISSN：0218-2165，1793-6527。URL：https: / / www . worldscientific . com/doi/abs/10.1142/S0218216599000109。[De +22] M. De Renzi、A. M. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 I. Runkel。《来自非半单模范畴的三维拓扑量子场论》。载于：《数学精选》28.2（2022年4月）。arXiv:1912.02063[hep-th], ，第42页。ISSN：1022-1824，1420-9020。URL：http://arxiv.org/ abs/1912.02063。

[De +23] M. De Renzi、A. M. Gainutdinov、N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 I. Runkel。“非半单拓扑量子场论中的映射类群表示”。载于：《当代数学通讯》25.01（2023年2月）。arXiv:2010.14852 [hep-th], p. 2150091。 ISSN：0219-1997, 1793-6683。 URL：http://arxiv.org/abs/2010.14852。[De 21] M. De Renzi。“源自非半单模范畴的扩展拓扑量子场论”。载于：《印第安纳大学数学杂志》70.5（2021年）。arXiv:2103.04724 [math], pp. 1769–1811。 ISSN：0022-2518。 URL：http://arxiv.org/abs/2103.04724。[DR13] A. Davydov 和 I. Runkel。“由基范畴扩张霍普夫代数模范畴”。载于：《数学进展》247（2013年11月），第192–265页。 ISSN：0001-8708。 URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870813002338。[Eti+15] P. Etingof、S. Gelaki、D. Nikshych 和 V. Ostrik。《张量范畴》。英文。第205卷。数学调查与专著。ISSN：0076-5376, 2331-7159。美国数学会，2015年7月。 ISBN：978-1-4704-2024-6 978-1-4704-2349-0 978-1-4704-2350-6。 URL：https://www.ams.org/surv/205。[FM11] B. Farb 和 D. Margalit。《映射类群入门》。英文。普林斯顿大学出版社，2011年9月。 ISBN：978-1-4008-3904-9。 URL：https://www.degruyter.com/document/doi/10.1515/9781400839049/html。[FS11] J. Fuchs 和 C. Schweigert。共形场论中的霍普夫代数与有限张量范畴。arXiv:1004.3405。2011年1月。 URL：http://arxiv.org/abs/1004.3405。[FS16] J. Fuchs 和 C. Schweigert。共形场论中的余端。arXiv:1604.01670[hep-th]。2016年4月。 URL：http://arxiv.org/abs/1604.01670。[FS17] J. Fuchs 和 C. Schweigert。“非半单共形场论中一致的关联函数系统”。载于：《数学进展》307（2017年2月），第598–639页。 ISSN：0001-8708。 URL：https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S000187081630425X。[FSS13] J. Fuchs、C. Schweigert 和 C. Stigner。“从非半单霍普夫代数到对数共形场论的关联函数”。英文。载于：《物理学杂志A：数学与理论》46.49（2013年11月）。出版商：IOP出版社，第494008页。 ISSN：1751-8121。 URL：https://dx.doi.org/10.1088/1751-8113/46/49/494008。[FSS20] J. Fuchs、G. Schaumann 和 C. Schweigert。“有限范畴的Eilenberg-Watts演算及双模Radford $ S^4$定理”。英文。载于：《美国数学会汇刊》373.1（2020年1月），第1–40页。 ISSN：0002-9947, 1088-6850。 URL：https://www.ams.org/tran/2020-373-01/S0002-9947-2019-07838-8/。[GKP11] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。“辫带范畴中的广义迹与修正维数函数”。英文。载于：《数学精选》17.2（2011年6月），第453–504页。 ISSN：1420-9020。 URL：https://doi.org/10.1007/s00029-010-0046-7。[GKP13] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。“非半单范畴中的双侧对象与迹函数”。英文。载于：《美国数学会会刊》141.9（2013年9月），第2963–2978页。

ISSN：0002-9939, 1088-6826。URL：https://www.ams.org/proc/2013-141-09/S0002-9939-2013-11563-7/。[GKP22] N. Geer、J. Kujawa 和 B. Patureau-Mirand。“（非幺模）枢轴范畴中的M-迹”。英文。载于：《代数与表示论》25.3（2022年6月），第759–776页。ISSN：1572-9079。URL：https://doi.org/10.1007/s10468-021-10044-y。[GPT09] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 V. Turaev。“修正量子维数与重新归一化链环不变量”。英文。载于：Compositio Mathematica 145.1（2009年1月），第196–212页。ISSN：1570-5846, 0010-437X。URL：
h
t
t
p
s://
w
w
w.
c
a
mbridge.org/core/journals/compositio-mathematica/article/modified-quantum-dimensions-and-renormalized-link-invariants/0622CA9B877F6282023962D89A937C90。[GPV12] N. Geer、B. Patureau-Mirand 和 A. Virelizier。“枢轴范畴中理想上的迹”。英文。载于：《量子拓扑》4.1（2012年11月），第91–124页。ISSN：1663-487X。URL：https://ems.press/journals/qt/articles/4482。[GR20] A. M. Gainutdinov 和 I. Runkel。“可因子化有限张量范畴中的投射对象与修正迹”。载于：Compositio Mathematica 156.4（2020年4月）。arXiv:1703.00150 [hep-th]，pp. 770–821。ISSN：0010-437X, 1570-5846。URL：http://arxiv.org/abs/1703.00150。[Hen96] M. Hennings。“由霍普夫代数构造的链环与三维流形不变量”。英文。载于：伦敦数学学会杂志54.3（1996年）。电子版：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/pdf/10.1112/jlms/54.3.594，第594–624页。ISSN：1469-7750。URL：https://onlinelibrary.wiley.com/doi/abs/10.1112/jlms/54.3.594。[Kel82] G. M. Kelly。《富集范畴论基本概念》。英文。Google图书ID：MPE6AAAAIAAJ。CUP Archive，1982年2月。ISBN：978-0-521-28702-9。[Ker96] T. Kerler。三维流形非微扰量子不变量的谱系：手术族。arXiv:q-alg/9601021。1996年3月。URL：http://arxiv.org/abs/q-alg/9601021。[KL01] T. Kerler 和 V. Lyubashenko。《带角三维流形的非半单拓扑量子场论》。英文。第1765卷。《数学讲义》。柏林、海德堡：Springer，2001年。ISBN：978-3-540-42416-1。URL：http://link.springer.com/10.1007/b82618。[Lei15] T. Leinster。“投射不可分解模与简单模之间的双射”。载于：《比利时数学会公报——Simon Stevin》22.5（2015年12月）。出版商：比利时数学会，第725–735页。ISSN：1370-1444。URL：
h
t
t
p
s://
p
r
o
j
e
c
t
e
u
c
l
i
d.
o
r
g/
j
o
u
r
n
a
l
s/
b
u
l
l
e
t
i
n-
o
f-
t
h
e-
belgian-
mathematical-society-simon-stevin/volume-22/issue-5/The-bijection-between-projective-indecomposable-and-simple-modules/10.36045/bbms/1450389244.full。[Lor21] F. Loregian。《（余）端演算》。伦敦数学学会讲义丛书。剑桥：剑桥大学出版社，2021年。ISBN：978-1-108-74612-0。URL：https://www.cambridge.org/core/books/coend-calculus/C662E90767358B336F17B606D19D8C43。

[Lur09] J. Lurie.《拓扑场论的分类》。arXiv:0905.04[math]. 2009年5月。 URL: 65
http://arxiv.org/abs/0905.0465.[Lyu95a] V. Lyubashenko. “张量范畴的模变换”。英文。载于：《纯粹与应用代数杂志》98.3（1995年2月），第279–327页。ISSN: 0022-4049。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/002240499400045K.[Lyu95b] V. Lyubashenko. “通过单位根处的量子群得到的三维流形不变量与映射类群的射影表示”。载于：《数学物理通讯》172.3（1995年9月）。arXiv:hep- th/9405167，第467–516页。 ISSN: 0010-3616, 1432-0916。 URL: http:// arxiv.org/abs/hep-th/9405167.[Lyu99] V. V. Lyubashenko.《平方霍普夫代数》。英文。Google 图书 ID：TM TCQAAQBAJ。美国数学会，1999年。 ISBN: 978- 0-8218-1361-4.[Maj91] S. Majid. “重构定理与有理共形场论”。载于：《现代物理学国际杂志 A》06.24（1991年10月）。出版方：World Scientific Publishing Co.，第4359–4374页。 ISSN: 0217- 751X。 URL: https://www.worldscientific.com/doi/abs/10.1142/ S0217751X91002100.[Pst22] P. Pstr\c agowski. “幺半双范畴中的可对偶对象”。载于：《范畴论及其应用》38.9（2022年2月），第257–310页。URL: http://www.tac.mta.ca/tac/volumes/38/9/38-09abs.html.[RR23] I. Romaidis 和 I. Runkel. “映射类群表示与代数的 Morita 类”。英文。载于：《量子拓扑》14.3（2023年10月），第429–465页。 ISSN: 1663-487X。 URL: https://ems.press/journals/ qt/articles/12879480.[RT90] N. Y. Reshetikhin 和 V. G. Turaev. “由量子群导出的带状图及其不变量”。英文。载于：《数学物理通讯》127.1（1990年1月），第1–26页。 ISSN: 1432-0916。 URL: https://doi.org/10.1007/BF02096491.[RT91] N. Reshetikhin 和 V. G. Turaev. “通过链多项式与量子群得到的三维流形不变量”。英文。载于：《数学发明》103.1（1991年12月），第547–597页。 ISSN: 1432-1297。 URL: https://doi.org/10.1007/BF01239527.[Sch14] C. J. Schommer-Pries.《二维扩展拓扑场论的分类》。arXiv:1112.1000 [math] 版本：2。2014年8月。URL: http://arxiv.org/abs/1112.1000.[Shi19] K. Shimizu. “辫化有限张量范畴的非退化条件”。英文。载于：《数学进展》355（2019年10月），第106778页。ISSN: 0001-8708。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0001870819303962.[SS21] T. Shibata 和 K. Shimizu. 修正迹与中山函子。arXiv:2103.13702。2021年10月。 URL: http :/ /arxiv .org / abs/ 2103.13702.[SS23] T. Shibata 和 K. Shimizu. “修正迹与中山函子”。载于：《代数与表示论》26.2（2023年4月），第513–551页。 ISSN: 1386-923X。 URL: http://www.scopus.com/inward/record. url?scp=85119279603&partnerID=8YFLogxK.

[SW23] C. Schweigert 和 L. Woike. “有限张量范畴的迹场论”。英文。载于：《代数与表示论》26.5（2023年10月）。出版方：Springer Science and Business Media LLC，第1931–1949页。ISSN: 1386-923X, 1572-9079。 URL: https://link.springer.com/10.1007/s10468-022-10147-0.[Syt] F. Sytilidis.《配边双范畴的手术表示》。博士论文。希腊文。 URL: https://sites.google.com/view/fsytilidis/phd- thesis.[Til04] “共形场论的定义”。载于：《拓扑、几何与量子场论：纪念 Graeme Segal 60岁生日的2002年牛津研讨会论文集》。U. Tillmann 编。伦敦数学学会讲义系列。剑桥：剑桥大学出版社，2004年，第432–575页。 ISBN: 978-0-521-54049-0。 URL: https://www. cambridge . org / core / books /topology - geometry - and - quantum-field-theory/definition-of-cft/675AF695B2670994C329E37DCEF029B0.[Tur20] V. G. Turaev.《纽结与三维流形的量子不变量》。英文。De Gruyter，2020年3月。 ISBN: 978-3-11-088327-5。 URL: https : / / www . degruyter.com/document/doi/10.1515/9783110883275/html.[TV17] V. Turaev 和 A. Virelizier.《幺半范畴与拓扑场论》。第322卷。数学进展。沙姆：Springer International Publishing，2017年。 ISBN: 978-3-319-49833-1 978-3-319-49834-8。 URL: http://link.springer.com/10.1007/978-3-319-49834-8.[TV92] V. G. Turaev 和 O. Y. Viro. “三维流形的状态和不变量与量子 6j 符号”。载于：《Topology》31.4（1992年10月），第865–902页。ISSN: 0040-9383。 URL: https://www.sciencedirect.com/science/ article/pii/004093839290015A.[Wit88] E. Witten. “拓扑量子场论”。英文。载于：《数学物理通讯》117.3（1988年9月），第353–386页。 ISSN: 1432- 0916。 URL: https://doi.org/10.1007/BF01223371.[Wit89] E. Witten. “量子场论与琼斯多项式”。英文。载于：《数学物理通讯》121.3（1989年9月），第351–399页。 ISSN: 1432-0916。 URL: https://doi.org/10.1007/BF01217730.