arXiv:2512.23750v1 [hep-th] 26 Dec 2025

2026年1月1日

张量的机器学习不变量

Athithan Elamaran[a], **Christian Ferko**[b, c], **Sterling Scarlett**[d]

[a] *Foothill High School*，普莱森顿，加利福尼亚州 *94588*，美国

[b] 物理系，东北大学，波士顿，马萨诸塞州 *02115*，美国

[c] 美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用研究所

[d] 波士顿大学物理系，美国马萨诸塞州波士顿 *02215*

athithan.elamaran@gmail.com, c.ferko@northeastern.edu, sjscar@bu.edu

摘要

我们提出一种数据驱动方法，用于识别由具有给定对称结构的张量构造出的函数独立不变量。我们的算法首先枚举表示张量乘积的不等价缩并的图或张量网络，利用随机生成的数据计算这些标量的实例，然后运用数值线性代数寻找不变量之间的线性关系。这些关系导出合冲关系，即不同不变量之间的函数依赖关系。我们通过一项扩展案例研究应用这一方法，考察六维中由反对称三形式$H_{\mu\nu\rho}$构造出的独立不变量，并发现了五个独立不变量。这一结果证实，对于这种三形式，其最一般的拉格朗日量若依赖于 $H_{\mu\nu\rho}$ 但不依赖于它的导数，便是五个变量的任意函数；我们还给出显式公式，将其他不变量表示为该生成集中的五个独立标量。

目录

1 引言 1

2 不变量理论综述 5

3 算法描述 12

4 六维中的三形式 六维中的 m 1 9

4.1 迹变量.194.2 霍奇对偶变量.254.3 旋量变量.29

5 结论 34

A 附加图与关系 36

---

1 引言

数学和物理学中的许多问题都涉及不变量的构造与分类：给定一个或多个在李群作用下变换的对象，可以由这些对象构造出哪些独立量，并且这些量在群作用下是标量？例如，在构造在洛伦兹群下变换的场的拉格朗日量时，就会遇到这个问题。举一个简单的例子，假设我们希望写出 $4d$ 中包含场强 $F_{\mu\nu}$ 但不含其导数的最一般拉格朗日量。与该场强相关的函数独立不变量有两个，我们可以选择用迹来表示，

$$x_1 = F_{\mu\nu}F^{\nu\mu} = \mathrm{tr}\big(F^2\big)\,, \qquad x_2 = F_{\mu\nu}F^{\nu\rho}F_{\rho\sigma}F^{\sigma\mu} = \mathrm{tr}\big(F^4\big)\,, \tag{1.1}$$

或者用霍奇对偶 $\widetilde{F}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}F_{\rho\sigma}$ 表示为

$$S = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}\,, \qquad P = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}\widetilde{F}^{\mu\nu}\,, \tag{1.2}$$

或者，通过使用外尔矩阵 $(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\alpha}$ 和 $(\tilde\sigma^\nu)^{\dot\alpha\alpha}$ 将指标转换为 SL(2, $\mathbb{C}$) 的旋量指标，如 $F_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{4}(\sigma^\mu)_{\alpha\dot\beta}(\tilde\sigma^\nu)^{\dot\beta\beta}F_{\mu\nu}$ 和 $\overline{F}_{\dot\alpha}{}^{\dot\beta} = -\frac{1}{4}(\tilde\sigma^\mu)^{\dot\beta\beta}(\sigma^\nu)_{\beta\dot\alpha}F_{\mu\nu}$，则

$$\varphi = F^{\alpha\beta}F_{\alpha\beta}\,, \qquad \overline{\varphi} = \overline{F}_{\dot\alpha\dot\beta}\overline{F}^{\dot\alpha\dot\beta}\,. \tag{1.3}$$

因此，此类中最一般的理论由一个拉格朗日量描述，它是两个变量的函数， $\mathcal{L}$（x_1， x_2）或 $\mathcal{L}$（S， P）或 $\mathcal{L}$（φ， φ）。在这种情况下，很容易看出不存在其他独立不变量：就分量而言， $F_{\mu\nu}$ 是一个实反对称4×4 矩阵，其四个纯虚特征值成复共轭对，因此只包含两项洛伦兹不变量。为这种场内容的最一般拉格朗日量设定参数，是研究非线性电动力学理论其他性质的一个有用起点；可以对拉格朗日量 $\mathcal{L}$ 施加约束，以确保其具有电磁对偶不变性等其他性质[1——4] 或研究因果性 [5, 6], ，以及研究由能量动量张量等算符驱动的种子理论形变 [7——10], 等等。

对于在群的更复杂表示中变换的对象，或者在考虑这类对象的更大集合时，群作用下单态的分类可能会变得复杂得多。这个一般性问题属于数学学科不变量理论；例如，可参见 [11] 以了解相关介绍。其他一些自然会出现不变量理论问题的情境包括：

(i) 有效作用量中弦论修正的组织方式。例如，假设我们关注 IIA 型或 IIB 型超引力作用量中的纯引力扇区。 α' 展开包含一系列由十维中的黎曼张量 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ 构造而成的洛伦兹标量。由 $R_{\mu\nu\rho\sigma}$可以构造出哪些彼此独立的标量？若已知某个新的不变量在函数上依赖于某个基中的不变量，那么如何用这些独立的不变量来表示它？

(ii) 有限维希尔伯特空间中量子态等价类的分类。假设给定一个态 $|\psi\rangle \in \mathcal{H}_1 \otimes \ldots \otimes \mathcal{H}_n$。考虑局域幺正（LU）变换群对 $|\psi\rangle$的作用，或者更一般的随机局域操作与经典通信（*SLOCC*）群。对于每个 $\mathcal{H}_i$的某个基，如何从 $|\psi\rangle$的展开系数构造出在 LU 或 SLOCC 作用下保持不变的独立数值量？由于局域幺正变换不会影响态 $|\psi\rangle$中的纠缠结构，这个问题在量子信息中十分重要。

(iii) 统计矩阵量子力学 [12,13] 或 $\mathcal{N} = 4$超杨-米尔斯理论 [14]中的多矩阵规范不变算符。例如，在 $\mathcal{N} = 4$中，局域复合算符是在 $U(N)$ 规范变换下保持不变的标量，由一串

矩阵值场构成，例如 $F_1^{j_1}{}_{,i_1}\cdots F_n^{j_n}{}_{,i_n}$。因此，为了枚举独立规范不变算符的数量，必须研究由一组矩阵构造的不变量。这类分析通常依赖于 [15], 的结果。该结果证明，一组 $N \times N$ 矩阵的不变量由各个矩阵乘积的迹生成，而这些迹之间的所有关系都可由凯莱-哈密顿定理的推广得出。然而，在具体情形下，要完整分类独立不变量可能颇具挑战。

尽管显式枚举不变量的问题普遍存在且十分重要，但一般情况下极难求解。在本研究中，我们不从严格的数学视角处理这一问题，而是采用一种更加数据驱动的方法。给定一组按照某个李群G表示变换的对象，假设我们能够用一组数值标签来参数化这些对象。例如，对于按照洛伦兹群表示变换的单个张量，只需选择该张量在任意一组基下的分量作为这些数值标签。随后，我们通过从某个概率分布（例如独立同分布的高斯分布）中随机抽取分量，生成该张量的许多数值实例。我们可以系统地枚举由这些数值实例构造标量的各种方式；一般来说，这需要考虑用与该群相关的一组不变张量来缩并张量指标的所有可能方式，例如在特殊正交群作用的情况下使用克罗内克δ $\delta^{\mu}{}_{\nu}$。最后，我们通过汇集不同随机抽样得到的各个数值标量，并进行数值线性代数运算，来寻找不同缩并之间的关系。具体做法是，列出固定阶数下的所有标量——也就是说，列出涉及相同数量数值张量实例的不变量——并检验这些标量是否存在使其为零的线性组合。例如，这一过程能够检测出凯莱-哈密顿型公式，它们将矩阵幂的迹与低阶迹的乘积联系起来。

这一过程可以反复进行，直到它在某种意义上“稳定”下来：连续几个阶次都找不到任何新的不变量。当然，这并不能构成数学证明，证明该过程生成的标量列表在函数意义上是完备的。尽管如此，它提供了一种实验性方法，可以得出一组猜想的独立不变量，并增强人们对这组不变量完备性的信心。它还提供了一种明确的机制，用于识别不变量之间的函数关系。

本研究有两个主要目标:

（A）我们将 更详细地写出上文简要概述的算法 e

。我们将说明如何利用这一算法，通过实验研究由任意一组带指标对象构造出的独立不变量；这些对象在某个李群的表示下变换。原则上，这也包括我们提到的三个动机示例 (i)、(ii)和 (iii) 。

(B) 我们将此算法应用于扩展案例研究，研究如何从反对称三形式 $H_{\mu\nu\rho}$ 在六维时空中构造不变量。这使我们得以回答上述问题的自然类比问题——也就是说，在 $F_{\mu\nu}$ 四维中，反对称场强 $6d$ 情形下最一般的拉格朗日量是什么。这一研究方向在弦理论中有充分的动机：例如，卡尔布-拉蒙二形式 $B_{\mu\nu}$ 的场强 $H_{\mu\nu\rho}$ 属于弦理论 NS-NS 扇区的场内容；同样，反对称三形式场强描述了 M5 膜世界体上的规范动力学。我们通过三种方式解决这一问题，得到三种不同的参数化，它们类似于1.1）、（1.2）、（1.3）中针对 $4d$ 二形式给出的三种独立标量选取，并给出了其中两组变量之间的关系。在这三种情形下应用我们的算法，都会遇到不同的技术细节；但所有情况下，我们都发现存在五个独立不变量，因此， $H_{\mu\nu\rho}$ 中场 $6d$ 的最一般拉格朗日量是五个变量的函数。

尽管本文只关注案例研究的三种版本 （B），但我们强调，此处提出的算法具有相当的通用性，并希望本文能启发人们采用数据驱动方法，研究数学和物理学中其他感兴趣的张量的不变量。

本文结构如下。第2节回顾不变量理论的一些基本内容，并将我们的方法与研究张量不变量的几种常见技术进行比较。第3 节详细介绍我们提出的算法。第4节中，我们以三种不同方式运用该方法，求解如何枚举由六维空间中的三形式构造出的独立不变量这一问题；这三种方式与从1.1）、（1.2）、（1.3）所述的由 2-形式场强构造标量的方法相对应，见 $4d$。第5 节总结我们的结果，并提出未来研究方向。我们将一些关于表示缩并的图以及不变量之间关系的数据放在附录A中。

补记。本文完成期间，发表了一篇有趣的论文 [16] ，从解析（而非数值）的角度研究张量的不变量。

2 不变量理论概述

为方便不熟悉这一领域的读者，我们先概述不变量理论中的一些基础内容。另请参阅 [17, 18]，其中有更详细的介绍。

不变量的一般理论

举一个启发性的例子，说明为什么人们可能会认为这个问题通常很难，这或许会有所帮助。假设给定一个张量，它有若干个指标和某种对称结构，并在 $SO(n)$ 旋转下变换。我们希望计算该张量所包含的旋转不变数据中有多少个彼此独立的部分。一个自然的猜想是，可以先计算张量的独立分量数，再减去 $SO(n)$ 的旋转生成元数，因为我们可以通过旋转将一定数量的张量分量设为零。例如，一个实对称 $n \times n$ 矩阵

$$M_{ij} = M_{ji} \tag{2.1}$$

有 $\frac{1}{2}n(n+1)$ 个独立元素。我们知道，任何这样的矩阵都可以通过旋转矩阵对角化，因此 n得到的对角元素（特征值）就是所需的旋转无关数据。事实上，从独立分量数中减去 $\frac{1}{2}n(n-1)$ 个 $SO(n)$ 的生成元，得到

$$\frac{1}{2}n(n+1) - \frac{1}{2}n(n-1) = n\,, \tag{2.2}$$

这与可由实对称 $n \times n$ 矩阵构造出的旋转不变量数量相符。

遗憾的是，这种朴素的计数规则在其他情况下可能会失效。例如，现在考虑洛伦兹号差下六个时空维数中的自对偶三形式 $G_{\mu\nu\rho}$。所谓自对偶，是指该张量满足

$$G_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{6}\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau\kappa}G^{\sigma\tau\kappa}\,, \tag{2.3}$$

其中$\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma\tau\kappa}$ 是列维-奇维塔符号，指标通过平直闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$升降。

重复上述论证，我们首先注意到，六维中的一般三形式有 $\binom{6}{3} = 20$ 个独立分量，而对于满足（2.3）的张量，这些分量中的一半

可由其余分量确定，因此剩下 10 个独立分量。然而，六维中的洛伦兹生成元数量为 $\binom{6\cdot5}{2} = 15$，所以直接相减可得 —

$$10 - 15 = -5 \tag{2.4}$$

独立的洛伦兹标量，这显然荒谬。事实上，已知在六维中，自对偶三形式只能构造出一个洛伦兹标量。[1]

这个例子清楚地表明，计算独立不变量的数量这一问题更加微妙——对于某个特定表示，例如 $6d$ 中的自对偶张量，群作用的某些生成元通常会落在稳定子中，因此在尝试用减法论证时必须将它们排除。

为了解决这一微妙之处，让我们退一步，以更一般、更抽象的方式表述所关注的问题。考虑域 K 上的向量空间 V；在我们的情形中，该域总是实数域或复数域，并设 V 带有李群 G 的一个表示。例如， V 可以是一个向量空间，其基元素是张量的抽象分量。令 $K[V]$ 为 V 上多项式函数构成的环。由 G 在 V 上的表示，会自然诱导出 G 在 $K[V]$ 上的作用。为免显得过于咬文嚼字，我们来给出一个具体例子：若将 $K[V]$ 视为形式变量上的多项式集合，这些形式变量表示基底下张量 $T_{i_1\ldots i_k}$ 的分量，而 $R \in G = SO(n)$ 只是对这些分量进行旋转，如

$$T_{i_1\ldots i_k} \to T'_{i_1\ldots i_k} = R^{j_1}{}_{i_1} \ldots R^{j_k}{}_{i_k} T_{j_1\ldots j_k}\,, \tag{2.5}$$

于是，张量分量中的每个单项式 $(T_{i_1\ldots i_k})^n$ 都会通过取旋转后分量的相应次幂 $\left(T'_{i_1\ldots i_k}\right)^n$ 而发生变换，而群作用则通过线性性扩展到任意多项式，并在 K 中对标量作平凡作用。[2] 更一般地，给定 $g \in G$ 和 $f \in K[V]$，令 f^g 表示对多项式 f 施加这种自然群作用后的结果。于是可以考虑不变多项式构成的子环，

$$K[V]^G = \{f \in K[V] \mid f^g = f \text{ for all } g \in G\}\,. \tag{2.6}$$

换言之， $K[V]^G$ 中的每个元素都表示一个单态，它由V 中的元素构成，但在群 G的作用下不发生变换。在上面的具体例子中

[1]这一事实似乎广为人知，但 [19] 的第 4.3 节和附录 B.1 中有一段特别精彩的讨论。[2]严格来说， $K[V]$ 通常是根据 V 的对偶 空间 V^* 中元素的多项式来定义的，但在下文中我们不会特别强调这一区别。

这样一个不变量与以下缩并相对应

$$T_{i_1\ldots i_k}T^{i_1\ldots i_k}\,, \tag{2.7}$$

它在旋转下显然保持不变。

在本文中，我们始终假设场 K 具有零特征——与实数或复数一样——并作出技术性假设： G是一个线性约化群，它在 V上有理地作用。这些条件适用于我们感兴趣的所有情形，例如旋转群和洛伦兹群（更确切地说，是其作为代数群的复化）。在这些假设下，我们可以进一步讨论由（[3] 2.6）定义的不变量环（或代数）。

首先，众所周知，不变量代数是有限生成的，这就是希尔伯特有限生成定理。也就是说，每个不变量都可以写成以有限多个生成元为变量、系数取自 K的多项式。对于张量不变量这一引例，这一点或许并不令人意外，因为在任意一组基下，这类张量都只有有限多个分量，因此人们自然会预期函数独立不变量的数量也是有限的。

然而，不变量代数（2.6）可以由有限个生成元构成，这一事实并不排除生成集中的不变量之间可能存在函数关系。为了限定这类关系可能具有的形式，讨论不变量代数（2.6）中的一些进一步子结构会很有帮助；该子结构涉及将其分解为一组主不变量 θ_1，……， θ_p 以及次不变量η_1，……， η_s。我们先来讨论主不变量，它们有时也称为齐次参数系（HSOP）。根据诺特正规化，始终存在一组多项式不变量 $\theta_i \in K[V]^G$ ，它们在代数上独立（即不存在将 θ_i 彼此联系起来的多项式方程），且它们 θ_i 同时在一个称为零锥的轨迹上取零值。因此，可以考虑由所有这些主不变量构成的多项式函数环，

$$P = K[\theta_1, \ldots, \theta_p]\,. \tag{2.8}$$

尽管 P 中的每个元素显然都是不变量，因此属于 $K[V]^G$，但一般来说， P只会是（2.6）的子环，因此将存在一些无法

[3]将不变量集视为环还是代数，只会影响基域 K 的作用；而我们通常会将其具体化为 $K = \mathbb{R}$ 或 $K = \mathbb{C}$，因此这一区别无关紧要。下文中我们将交替使用这两个术语。

表示为 θ_i 中多项式的不变量。现阶段，只能得出结论：不变量的整个环或代数 $K[V]^G$ 是 P 上的有限生成模。

在假设 $K[V]^G$ 是一个科恩-麦考利环这一另一项技术条件成立时，还可以得出更多结论。[4] 幸运的是，根据 Hochster- Roberts 定理， [23], 我们知道 $K[V]^G$ 总是满足科恩-麦考利条件，只要群 G是线性约化的，而这正是我们已经假设的。因此，就本文而言，每个不变量环都满足科恩-麦考利条件；这尤其意味着它具有一种广中分解[5] ，其形式为

$$K[V]^G = \bigoplus_{k=1}^{s} \eta_k P\,, \tag{2.9}$$

一组附加　　不变量 η_k，即上文提到的次不变量　　.

尽管对于给定的不变量环，主不变量 θ_i 的选取并不唯一，但式（2.9）表明：一旦我们固定了某一组主不变量，每个其他不变量 $x \in K[V]^G$ 都可以唯一地表示为

$$x = \sum_{k=1}^{s} \eta_k f^k\,, \qquad f^k \in P = K[\theta_1, \ldots, \theta_p]\,. \tag{2.10}$$

也就是说，每个不变量都是若干项的唯一线性组合，其中每一项都由一个次不变量乘以主不变量的多项式构成。

我们或许会再次提出关于不变量之间关系的问题。虽然我们已经强调过， θ_i 是代数独立的，但次不变量的每个乘积都满足如下形式的关系

$$\eta_k \eta_m = \sum_{j=1}^{s} \eta_j f_{km}^j\,, \qquad f_{km}^j \in P\,, \tag{2.11}$$

这让人联想到李代数的结构。

总结迄今为止讨论的内容，广中分解从两个方面修正了促使本文展开讨论的朴素计数论证。首先，主不变量的数量——有时称为克鲁尔维数 ——未必与一种直接的计数结果相符；这种计数方法是从自由度数量中减去对称生成元的数量

[4]这一概念受到 Cohen [20] 和 Macaulay [21], 的研究启发，尽管两人都没有提出现代定义； [22] 参见[5]，了解较新的介绍。 [24] 中指出，这种分解由 Hironaka 于 1962 年在未发表的硕士论文中提出；我们未能找到相关文献，但可参见 [11] 中的教科书讨论。

数目　所得的。相反，克鲁尔维数给出了一种修正后的计数　t

$$p = \dim(V) - (\dim(\mathfrak{g}) - \dim(\mathfrak{h})) \,, \tag{2.12}$$

其中，$\mathfrak{g}$ 是 G 的李代数，因此 $\dim(\mathfrak{g})$ 是生成元的数量；$\mathfrak{h}$ 表 V中典型稳定子内的生成元集合，它们对其中的元素作用平凡。对于上文提到的自对偶三形式，结果是 $\dim(\mathfrak{h}) = 6$，因此克鲁尔维数为 $10 - (15 - 6) = 1$。这里有一个主不变量 θ_1，且只有平凡的次不变量 $\eta_1 = 1$，所有不变量都是 θ_1的函数。其次，人们发现，朴素的计数还需要进一步修正：一般而言，$K[V]^G$ 中的元素并非都只是主不变量的多项式，在某些情况下还需要次不变量。[6]

研究不变量的其他方法

正如我们所强调的，本文的理念是采用数据驱动方法对张量的不变量进行分类。在回顾不变量理论的相关一般性知识后，我们现在将讨论物理学文献中用于枚举不变量的其他方法，并将其与我们的方法进行对比。

一种用于计数不变量的分析方法（而非数值方法），涉及某些类似配分函数的生成函数，这些生成函数通过*Molien-Weyl*公式计算。该方法既可采用“精细”形式，同时追踪主不变量和次不变量的数量；也可采用“粗略”形式，只统计每个阶数下不变量的总数。在粗略形式中，通常将所得生成函数称为

$$Z(t) = \sum_n b_n t^n \tag{2.13}$$

希尔伯特级数 或希尔伯特-庞加莱 ′级数。此处 b_n 表示由感兴趣的张量的 n 个副本经缩并所能构造的独立不变量总数。

这种生成函数技术的粗粒化版本（例如见 [28]）和细粒化版本（例如 [29]）都已应用于理论物理文献中。下面简要回顾细粒化版本。在这种情况下，相应的生成函数形式为

$$Z(t) = \frac{\sum_k t^{\deg(\eta_k)}}{\prod_i \left(1 - t^{\deg(\theta_i)}\right)} \,, \tag{2.14}$$

[6]关于将本节回顾的形式体系应用于研究散射过程中粒子动量的洛伦兹不变且置换不变的组合，参见 [25–27]。

其中，分子中的求和遍历所有次不变量 η_k，分母中的乘积遍历所有主不变量 θ_i。这里的 deg 表示给定不变量的次数，例如，在定义相应不变量的缩并中出现了多少个张量副本。如果我们改为将 p_i 定义为阶数 i 下主不变量的数量，并将 s_k 定义为阶数 $k \geq 1$ 下非平凡次不变量的数量，使得在我们之前的记号中$\sum_i p_i = p$ 和 $1 + \sum_{k\geq 1} s_k = s$，并去除平凡次不变量 $\eta_1 = 1$，则该生成函数也可以写成

$$Z(t) = \frac{1 + \sum_{k\geq 1} s_k t^k}{\prod_i (1 - t^i)^{p_i}} \,. \tag{2.15}$$

因此我们可以看到，(2.15) 的结构包含了关于主不变量和次不变量数量的信息。如果我们舍弃 (2.15) 中分子和分母的结构，只将该表达式按 t 展开为幂级数，就会得到粗粒度表达式 (2.13)，它统计给定阶数下的所有不变量。根据我们关注的是主不变量与次不变量的精确分解，还是仅关注所有不变量的总体数量，生成函数的这两种形式可能各有用处。

对于李群，生成函数 $Z(t)$ 可通过积分表达式计算，该表达式由 Molien-Weyl 积分公式给出。该公式在物理学文献 [30–35] 中曾多次应用（尽管有时并未使用这一名称），其形式如下

$$Z(t) = \int \frac{d\mu(g)}{\det\left(1 - tR(g)\right)} \,, \tag{2.16}$$

其中，$d\mu(g)$ 是群 G 上的 Haar 测度，而 R 是所考虑的表示。在某些情况下，可以求出该积分的闭式，例如对极大环面进行积分并加入范德蒙德行列式因子。这为确定给定阶数下出现的不变量数量提供了一种数学上严谨的方法，但它既不能给出这些不变量的显式表达式，也不能揭示如何用独立不变量表示一个新的（非独立）不变量。相比之下，尽管我们已经说过，我们的方法是数值方法，因而并不严谨，但它确实 能给出这类显式表达式和关系。

分析张量不变量的另一种常见方法，是将表示的乘积分解为不可约表示，并在这一分解中寻找单态。可以使用 LiE [36] 或 LieART[37, 38] 等软件通过编程执行这一过程。例如，使用 Mathematica 中的 LieART 包，可以输入以下命令

```
In[1]:=分解乘积[不可约表示[SO6][10]，不可约表示[SO
6][10]]Out[1]:= 20′ + 35 + 45
```

这里，函数 `Irrep[SO6][10]` 标识 SO(6) 的 10 维不可约表示，即自对偶张量。[7] 由于该分解中没有单态，我们可以得出结论：无法由六维中的两个自对偶三形式构造出不变量。然而，取四个副本可得

```
In[2]:=分解乘积[不可约表示[SO6][10]，不可约表示[SO6][10]，不可约表示[S
O6][10],不可约表示[SO6][10]]

Out[2]:= 1 + 3(  15 + 2 20′ + 35 + 3 45 + 3 45 + 6 84 + 3 105 + 165 + 7 175 + 3 189 + 8 256 + )()()()()()()()()()()
         6 280 + 3 315 + 6 360′
()
```

在这种情况下，我们确实在张量积分解中看到了一个单态 **1**，这正确地表明，可以从六维自对偶张量构造出一个四次不变量。不可约表示分解有助于统计固定阶数下可能出现的不变量，但与 Molien-Weyl 方法一样，它在若干方面不同于我们的技术。这种分解同样是一种精确的理论方法，而非数值方法；它只能确定某一给定阶数的不变量是否存在，却无法说明多项式依赖关系或独立性；此外，该策略既不给出构成给定不变量的指标缩并的显式表达式，也不给出将相关不变量与独立生成集中的不变量联系起来的方程。

最后，我们来谈谈研究这个问题的其他几种方法。正如矩阵的特征值是基无关数据的典型示例，关于张量特征值推广形式的研究也相当丰富；例如，可参阅教科书 [39] 及其中的参考文献，或以下部分研究成果 [40–42]。尽管张量特征值技术已应用于理论物理 [43, 44], ，但这类特征值有多种定义，其中一些仅适用于具有额外对称性的张量；可以说，与相应的矩阵技术相比，这一理论的理解还不够深入。虽然将本文中数值识别出的不变量与张量特征值联系起来会很有意思，但本文不打算尝试这样做。

我们算法中的一个步骤将涉及构造一些表示张量缩并的带标号图。许多其他研究也采用了类似的图示方法；例如，参见 [45] 的附录 B，其中讨论了由三阶张量构造的不变量

[7] 严格来说，对于洛伦兹号差下的实自对偶张量，我们应使用 SO(1，5)，但在这里我们不妨暂且忽略这一差别，因为它不会影响本文讨论的结果。

在 Calabi-Yau 三维流形上表示交数，或参见 [46, 47]，该论文也通过枚举特定的图来计数不变量。尽管我们同样采用图示表示，区别在于，我们的方法还会生成许多随机抽取的数值张量实例（以及由此得到的这些图所表示的不变量），旨在发现不变量之间的关系，从而获得一个独立生成集。

3 算法描述

现在我们来介绍本文关注的主要方法。我们将这种方法称为“数据驱动”方法，也称为“机器学习（ML）”技术。这里的 ML 采用较广义的含义，涵盖任何从数据中提取结构化信息的统计方法（而非更狭义的定义；狭义定义可能仅包括神经网络、Transformer 等现代人工智能架构）。我们认为，ML 的广义定义至少应涵盖机器学习库（如 Scikit-learn）中出现的各种无监督学习技术 [48, 49],，例如主成分分析（PCA），其目标是运用线性代数降低数据集的维度。从某种意义上说，我们的算法是不变量理论版本的 PCA，因为它试图将张量分量中的大量多项式缩减到一个较小的子空间，该子空间表示 $K[V]^G$ 中的特定元素，而这些元素在李群 G 的作用量下保持不变。

固定一个向量空间 V，它按照李群 G 的表示 R 变换。通常，我们可以将 V 的元素视为带有若干指标的对象。例如，假设 G 是线性约化的（我们始终如此假设），且 ρ 是忠实有限维表示。那么， G 的每个有限维有理表示 R 都同构于某个子表示 —— 因此，由于 G 是线性约化的，它也是某个有限个如下形式的表示的直和项:

$$\rho^{\otimes n} \otimes (\rho^*)^{\otimes m} \ , \tag{3.1}$$

其元素是带有 n 个上指标和 m 个下指标的 ρ 的张量。一个熟悉的例子是黎曼张量 $R^{\mu}{}_{\nu\rho\sigma}$，它属于一个包含一个上指标和三个下指标的子表示，其中每个指标都按照向量表示或余向量表示变换，并具有黎曼张量通常具备的对称性。更一般地，张量也可以带有旋量指标，而非向量指标。

我们将首先概述数值方法的一般实现方式，然后说明特定情况下会出现的简化。设 T 是所关注表示的一个带指标表

示，其中省略了 T 所带的指标。列出给定表示的其他任意不变张量 I_1、.....、 I_m。我们将顶点和边带标记的多重图称为缩并图或张量网络：每个顶点标记为 T 或不变张量 I_k、$k = 1$、.....、 m之一；每条边带有两个整数标记，指明其连接的两个节点上要进行缩并的指标。在区分不同类型的指标（例如上指标与下指标，或旋量指标与向量指标）时，只允许标记边的一个子集，这些边对应于允许的缩并。对于固定的阶数 N，我们构造所有满足以下性质的可能缩并图。

(I) 恰好有 N 个标记为 T 的节点，以及任意数量代表不变张量的节点 I_k。

(II) 对于图中的每个节点，该节点上的每个指标都恰有一条带标记的边从该节点引出。

(III) 图只有一个连通分量。

简而言之，我们基本上是从构造所有涉及N 张量 T以及若干不变张量的张量网络开始，并要求所有指标都经过缩并。连通性条件(III) 有两个作用：它排除了平凡的“不变张量泡”，这类泡相当于乘以 $\epsilon_{ijk}\epsilon^{ijk}$ 这样的常数，而这些常数与 T的元素无关；此外，它也排除了那些代表可分解为低阶收缩乘积的缩并的图（例如矩阵迹的平方（M^i_i）^{2}），因为我们已经知道这些量依赖于低阶不变量。

我们使用 Python 中的 NetworkX 库表示所有图 [50]。在实际操作中，构造所有满足这些性质的图是我们这一流程中计算量最大的步骤。枚举时应采用的具体算法取决于所研究张量的具体性质；不过，对于下文讨论的具体情况，我们会更详细地介绍图构造方案。

假设已经构造出所有阶数为 N 的此类缩并图，共有 G_N 个。接下来，我们必须检验这些张量网络各自表示的标量之间是否存在线性相关。为此，我们通过使用 numpy 库中的随机数生成例程抽取张量 T 的分量，随机生成数值实例 [51]。张量分量所采用的确切概率分布并不特别重要；例如，可以抽取

独立同分布高斯变量，但在实际操作中，我们会改为从均匀分布中独立抽取所有分量。我们生成 G_N 个这样的张量随机数值实例 T，并针对每个实例，使用 opt einsum 库计算 G_N该阶数下每个缩并图所表示的标量 [52]。我们将这些数据汇总成一个 $G_N \times G_N$ 矩阵，其列对应各个图所表示的缩并，行则对应不同的数值抽样。最后，我们通过奇异值分解（SVD）计算该矩阵的数值秩和零空间，并寻找低于容差的奇异值。零空间中的任何零向量都表示一个使结果为零的列线性组合，也就是说，它给出了 G_N 图所表示的标量之间的线性关系。如果存在此类线性关系，我们就移除一部分线性相关的标量，并保留一组最大的线性无关 G_N 缩并图。[8]

从 $N = 1$ 开始，我们对 $N = 2$、$N = 3$ 等重复上述过程。然而，尽管我们已经移除了那些在固定阶数上与其他新不变量满足多项式关系的候选不变量，但我们尚未识别高阶不变量与低阶不变量的乘积之间的关系。此时，可以根据已知是否只有主不变量和显然的次不变量 $\eta_1 = 1$，或者我们是否希望检验主不变量和非平凡次不变量是否同时存在，采用两种方式之一继续执行我们的算法。

(P) 假设已知只有主不变量 θ_1、……、θ_p。随后，随着程序对递增的 $N \geq 2$ 值逐步执行，我们会在每个阶数 N 识别出潜在不变量；在寻找阶数为 $N + 1$ 的不变量之前，我们首先通过第二次多项式依赖关系检验，剔除阶数为 N 的潜在不变量，检验其是否依赖于低阶不变量。为此，我们枚举迄今识别出的所有独立低阶不变量的乘积，且这些乘积的总度数为 N。我们再次对所考虑的张量进行随机数值抽样，抽样总次数等于新出现的独立阶数为 N 的不变量数量，加上相应的低阶不变量乘积数量。我们将这些数值组装成一个矩阵，并检验其数值秩。零空间中的任何元素都表示新出现的阶数为 N 的不变量与低阶不变量的乘积之间存在多项式关系，因此我们会剔除其中一部分

[8]实际上，我们会重复进行这项实验多次，以确保每次测试都能找到相同的零向量；不过，当张量分量是随机选取时，因数值巧合而找到“假阳性”零向量或“假阴性”地遗漏关系的可能性极低。

阶数为 N 的不变量，直到得到一个最小集合，其中各不变量彼此独立，且不依赖于低阶不变量的乘积。请注意，此程序可能尚未识别出所有可能的关系，因为在更高阶可能还存在其他约束，后文将对此进行讨论。

(S) 或者，假设我们希望识别主不变量以及可能非平凡的次不变量。在这种情况下，我们必须迭代地测试当前已识别不变量的子集，查看它们是否满足形式为 (2.11) 的关系；同样，通过数值抽取张量的取值、构造数值不变量，并寻找表示形式为 $\eta_k\eta_m - \sum_j \eta_j f^j_{km} = 0$ 的关系的零向量。对于给定的不变量子集，如果我们通过数值方法发现，对于所有 k 和 m，都存在此类关系，那么我们就将该不变量子集识别为次不变量。随后，我们重复 (P) 中所述的算法，以剔除任何满足涉及较低阶主不变量的多项式关系的新候选主不变量。

算法 (S) 的计算量更大，因为它需要依次检查不变量的子集，以判断它们是否为次不变量；但我们强调，原则上，数值方法在两种情况下都适用：(P) 或 (S)。

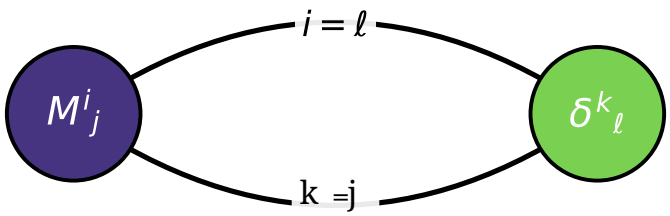
上述步骤描述了我们的算法如何在每个阶次识别新的不变量，并剔除其中依赖的 N。在实践中，我们会对越来越大的 N 持续执行这一过程，直到连续多个阶次都未识别出新的不变量——也就是说，所有假定的新不变量都满足涉及低阶不变量乘积的关系。随后，算法会在某个 N_{final}处终止。最后，在算法终止并生成最终的猜想不变量集合后，我们可以进行额外检查：构造阶次为 $N > N_{\text{final}}$的所有猜想不变量乘积，并再次生成更多数值样本，以寻找集合中不变量之间的高阶多项式关系。这一额外步骤旨在增强我们的信心，确保算法返回的最终不变量集合确实彼此独立，且不满足高阶约束。在这一步额外的高阶剪枝过程中，如果只有主不变量，则再次检验情形（P）中的所有多项式关系；如果可能存在次不变量，则只检验不属于（2.11）形式的关系。

到目前为止，这一算法完全通用，适用于具有任意数量指标的任意张量。推广到多个张量 T_i 也很简单：在这种情况下，只需考虑为每个不同的 T_i使用不同标号的带标号图，然后遍历总阶数 N，该总阶数统计所有张量出现次数的总和。

最后需要指出的是，通常可以利用特殊情形下存在的额外结构来简化这一方法。例如，假设我们感兴趣的是由全反对称张量构造的不变量，并且所考虑的不变张量只有克罗内克δ。在这种情况下，我们可以省去不变张量节点，只使用加权图（而非带标号图），其中仅包含张量节点 T，边的权重表示任意一对张量之间被缩并的公共指标数量。这已经足够，因为对反对称张量的任意一个特定指标进行缩并，所得结果与对其他任一指标进行缩并相同，至多相差一个符号，而这不会影响多项式依赖关系。同样，在这种情况下，我们可以禁止张量 T 自身的自环，因为对反对称张量的任意一对指标进行缩并都会得到零。类似地，如果我们要构造与全对称张量相关的不变量，并且同样只使用克罗内克δ，也可以仅在张量节点之间使用加权图来表示被缩并指标的数量；不过在对称情形下，自环是允许的，而且并非平凡。

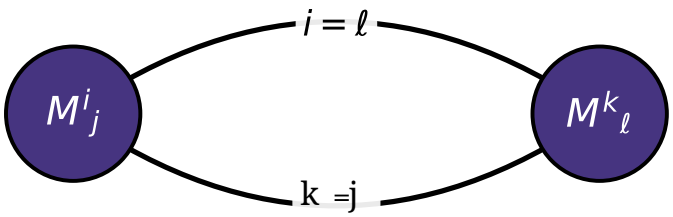
示例

为了说明上述技巧，我们先解释一下它如何应用于一些简单的示例，这些示例中的不变量结构已完全得到理解。首先考虑一个对称 2×2 矩阵 $M_{ij} = M_{ji}$。指标将使用克罗内克δ升降，因此我们不严格区分上指标和下指标，尽管从向量到向量的映射的自然指标排列方式是 $M^i{}_j$。在阶数为 $N = 1$时，我们只能画出一个缩并图，它对应于 M的迹：



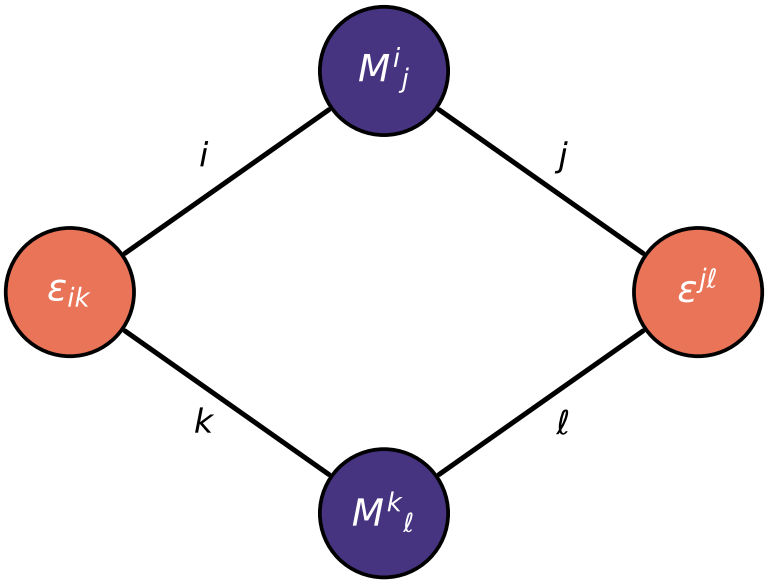
为简单起见，我们也可以将这个缩并图画成只有一个节点 $M^i{}_j$ 和一条标记为 $i = j$ 的自环，以表示迹。

在 $N = 2$ 阶，假设我们可以同时使用不变张量 $\delta^i{}_j$ 和 ϵ_{ij}，则可以绘制出两个图。第一个是矩阵平方的迹，



原则上，我们还可以考虑 M 与其转置之积的迹，但由于 M 对称，这并不会产生独立不变量。

另一个不变量由 ε张量构造而成，等于 M 的行列式的两倍。为简单起见，我们将开始绘制简写的缩并图，其中不同节点上被缩并的指标已设为相等，而相应的边仅标记被缩并的指标，如下所示：



设这三个图的值分别为

$$x^{(1)} = M^i{}_i\,, \qquad x_1^{(2)} = M^i{}_j M^j{}_i\,, \qquad x_2^{(2)} = \epsilon_{ik} M^i{}_j \epsilon^{j\ell} M^k{}_\ell\,, \tag{3.2}$$

其中上标表示 M 的阶数。我们首先从均匀分布中抽取 M 的 3 个独立元素的数值，计算两个不变量 $x_1^{(2)}$ 和 $x_2^{(2)}$，然后再次抽取数值并进行第二次计算。将这些数据组装成一个 2×2 矩阵，我们发现它是满秩的，因此 $x_1^{(2)}$ 和 $x_2^{(2)}$ 之间不存在任何线性关系。这是意料之中的，因为 2×2 对称矩阵的平方的迹与其行列式无关。然而，当我们进行

算法的第二步并寻找涉及低阶不变量的关系时，我们发现了一个对应于如下关系的零向量

$$\left(x^{(1)}\right)^2 - x_1^{(2)} - x_2^{(2)} = 0\,, \tag{3.3}$$

这只是 2×2 矩阵的凯莱-哈密顿定理的一个直接推论，

$$M^2 - (\mathrm{tr}(M))\,M + \det(M)\mathbb{I}_2 = 0\,. \tag{3.4}$$

因此，数值算法正确地重新发现了由（3.4）产生的不变量之间的关系。继续执行算法的最后一步，我们继续处理 $N = 3$及以上的情形，逐一枚举所有可构造的张量网络，绘制随机数值矩阵，并检验新不变量与适当次幂的低阶不变量之间是否存在多项式关系。对于我们测试过的每个更高的 N值，所有新不变量都满足多项式关系，可用这些关系将它们表示为一个最小低阶独立不变量集的函数，例如 $x^{(1)}$ 和 $x_1^{(2)}$ 。同样，这正确地再现了以下事实：由一个 2×2 矩阵构造的每个不变量都是两个变量的函数，例如矩阵的迹及其平方的迹。

我们使用该算法再现的其他简单事实包括以下内容。

(a) 与向量 v_i相关联的独立不变量只有一个，即其长度平方v_iv^i，所有其他不变量都是该标量的函数。(b) 一对向量 v_i， w_i可以构造出三个不变量，即平方长度 v_iv^i 和 w_iw^i ，以及点积 v_iw^i。(c) 对于 $d-1$维空间中的反对称（ d ）形式，也只有一个独立不变量，即所有指标都收缩的二次组合。这一点显而易见，因为一个（$d-1$）形式与一个向量互为霍奇对偶，因此该结果应与情形 (a)相符。(d) 对于 d维空间中的反对称矩阵，存在 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$个独立不变量，其中 $\lfloor\cdot\rfloor$是向下取整函数。(e) 同样，对于 $d-2$维空间中的（ d）形式，也存在 $\lfloor \frac{d}{2} \rfloor$个独立不变量，因为这种形式与一个反对称二形式互为霍奇对偶，因此与情形 (d)相同。

尽管所有这些结果都显而易见，但它们可以用来检验我们的数值实现是否正确。现在我们将注意力转向一个稍微不那么简单的例子。

4 六维中的三形式

现在我们将执行本研究中备受关注的算法的主要应用，即枚举可由一般三形式构造的独立不变量 $H_{\mu\nu\rho}$ ，该三形式定义在六维空间中。最近有人利用生成函数技术证明，这样的独立不变量有五个 [16]。在这种情况下，我们在第¨节中引入的朴素计数规则2 给出了正确答案：一般三形式在 $\binom{6}{3} = 20$ 中有 $d = 6$ 个分量，并且有 $\binom{6\cdot 5}{2} = 15$ 个洛伦兹或旋转生成元，因此减去 $20 - 15 = 5$ 后便得到正确的不变量数量，而且一般稳定子 $\mathfrak{h}$ 是平凡的。此外，已知对于这个问题，只有一个次不变量 $\eta_1 = 1$，因此我们可以采用算法最简单的实现方式（P），它只寻找主不变量。

尽管我们已知这一问题的不变量数量，但据我们所知，文献中尚未给出能构成齐次参数系（即主不变量集合）的指标缩并的显式公式。正如我们在第 1 节回顾的那样，获得此类显式表达式有助于研究一般拉格朗日量的性质，因为参数化（1.1）、（1.2）和（1.3）有助于研究非线性电动力学理论。此外，我们尚未发现任何参考资料给出将其他不变量与某个给定齐次参数系中的不变量联系起来的公式，也未发现有资料给出将一个便于使用的齐次参数系中的元素与另一个齐次参数系中的元素联系起来的公式。因此，我们认为将算法应用于这一情形很有价值，既能进一步展示我们方法的普适性，也能提供一些我们刚才讨论的此类显式公式。

4.1 迹变量

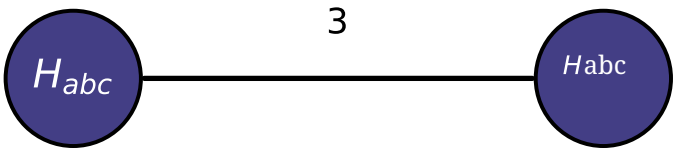
不同阶数下独立不变量的数量，取决于允许使用哪些不变张量来缩并指标。例如，我们看到，对于四维中的二形式，两个不变量在迹变量中分别出现在 2 阶和 4 阶（1.1），但在霍奇对偶变量中，两个不变量都是 2 阶（1.2）。本节将为六维中的三形式构造与迹变量（1.1）相对应的变量，并发现五个独立不变量，其阶数分别为 2、4、4、6、8。[9]

我们采用欧几里得号差，将三形式的分量写作 H_{abc}，并且只允许使用克罗内克δ $\delta^a{}_b$ 进行缩并。如上所述，这使我们能够

[9]如果允许使用所有不变张量，这些不变量的阶数为 2、4、4、4、6，正如 [16] 中所指出的。这与关注的是在 $O(6)$ 还是仅在 $SO(6)$ 下的不变性有关。

简化图构造算法：我们可以使用加权图，其中边权重表示一对张量之间的缩并次数。由于不允许有自环，在阶数为 $N = 1$ 时，不存在可绘制的有效缩并图。

在阶数为 $N = 2$ 时，只有一个允许的图，

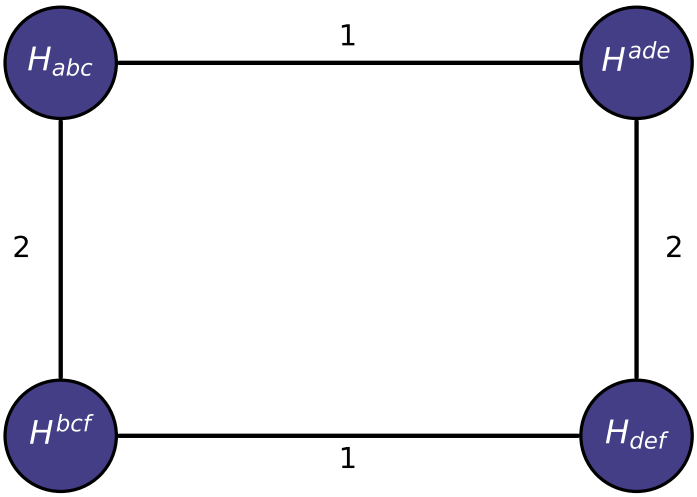


它表示缩并

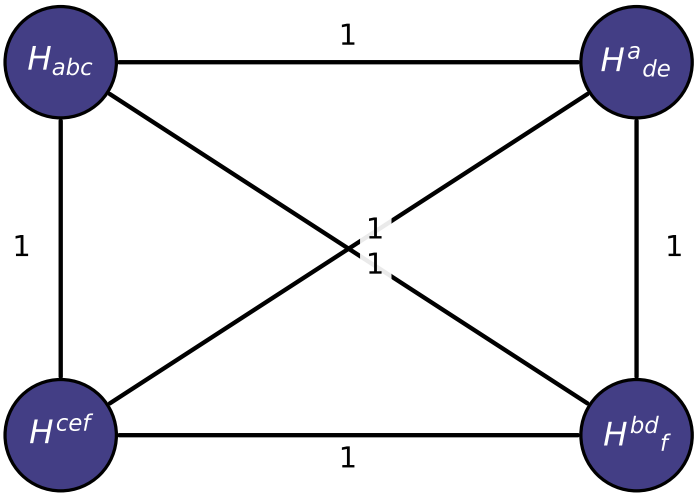
$$x^{(2)} = H_{abc}H^{abc}\,. \tag{4.1}$$

要提升到更高阶，就必须实现一种图论算法，用于生成所有有效的缩并图。我们通过对所有满足每个节点的总度数等于三这一性质的加权无向图进行精确的回溯枚举来实现这一点。具体而言，该算法按顶点逐一处理，首先将图中的每个顶点标记为一个整数 $v \in \mathbb{N}$。在每一步中，算法都会计算给定顶点 v还需要的边数，然后枚举所有非负整数分配，以表示从 v 到后续节点 $j > v$ 的可行边分配，且不超过这些节点的边容量。在递归处理后续节点之前，算法会先检查下游剩余总容量能否提供所需的边数；如果检查未通过，就会剪枝当前分配。对于每个可行分配，算法会原地更新当前边分配，然后递归处理节点 $v+1$，依此类推。找到所有边权重的一种可行分配后，算法会回溯并重复这一过程。由于该算法穷尽检查所有可能的边权重分配，因此保证能够为给定数量的张量节点生成所有有效的缩并图。然而，通常会出现“过度计数”，因为算法会生成一些仅因图同构而彼此相关的张量网络。为解决这一问题，算法在最后一步将每个张量网络转换为 igraph [53–55]对象，使用 igraph 的 VF2 同构算法检验同构性，并保留一个最大的非同构图集合。

在阶数为 $N = 4$ 时执行上述图算法，我们发现了两个不等价的缩并，它们由以下张量网络表示：



and



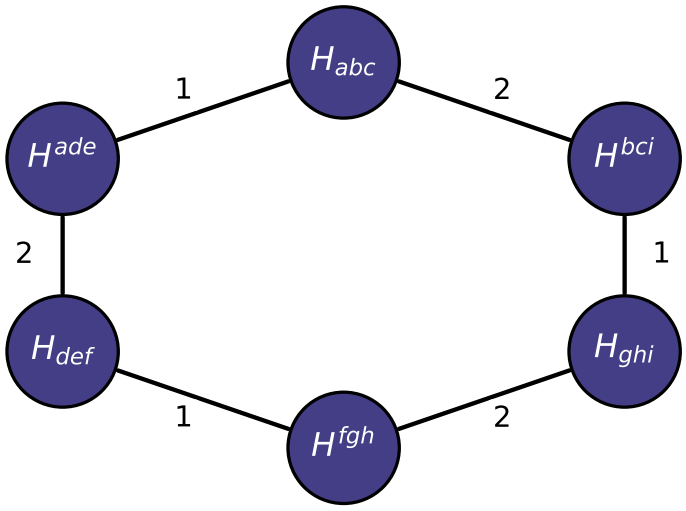
设这些缩并的值为

$$x_1^{(4)} = H_{abc}H^{ade}H_{def}H^{bcf}\,, \qquad x_2^{(4)} = H_{abc}H^{a}{}_{de}H^{cef}H^{bd}{}_{f}\,. \tag{4.2}$$

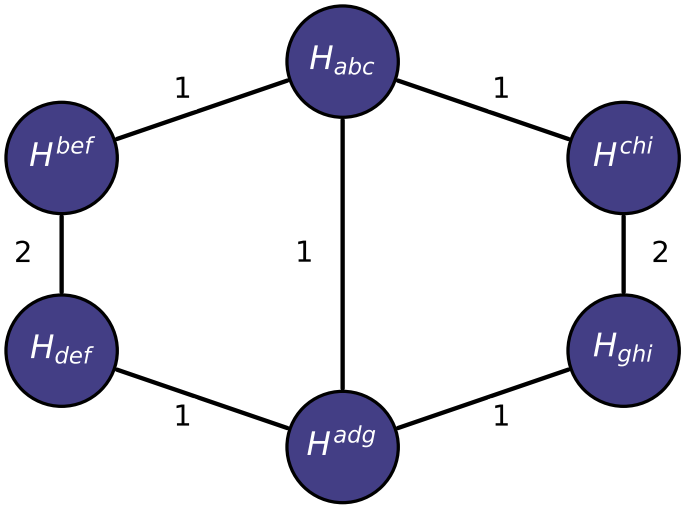
我们按照第 3 节中算法的步骤，先检验 $x_1^{(4)}$ 与 $x_2^{(4)}$ 之间是否存在线性关系，然后检验这两个不变量与平方项 $\left(x^{(2)}\right)^2$

（即二阶不变量）之间是否存在关系。在这两种情况下，我们发现，通过对张量分量进行随机抽样得到的相应数值矩阵均为满秩，因此不存在零向量，也就意味着在这一阶上这些不变量之间不存在关系。

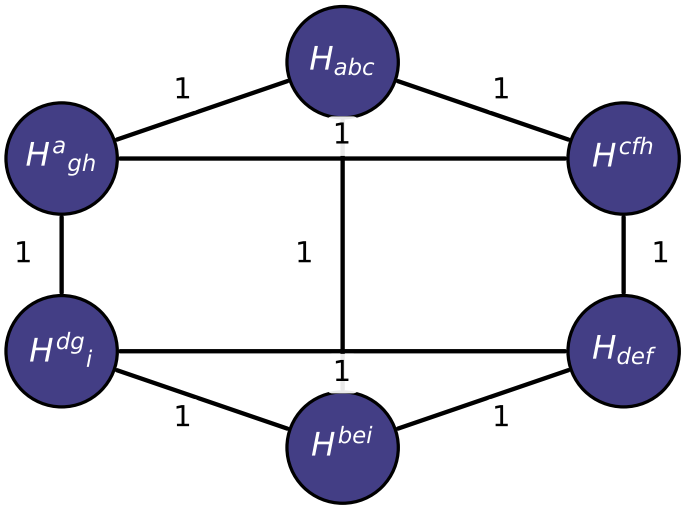
接下来我们考察 $N = 6$ 阶。我们的图论算法在这一阶得出了六个不等价的缩并图。本节余下部分不再逐一明确展示所有图和多项式关系，但附录 A 中提供了一些附加图与关系的示例。我们执行检查 $N = 6$ 阶六个缩并之间是否线性相关的第一步——再次随机抽取六次数值张量 H_{abc}，计算每次抽取对应的六个缩并，并检验所得数值缩并 6×6 矩阵是否存在零向量——结果发现，这些缩并中只有三个线性无关。这三个独立的图是



and



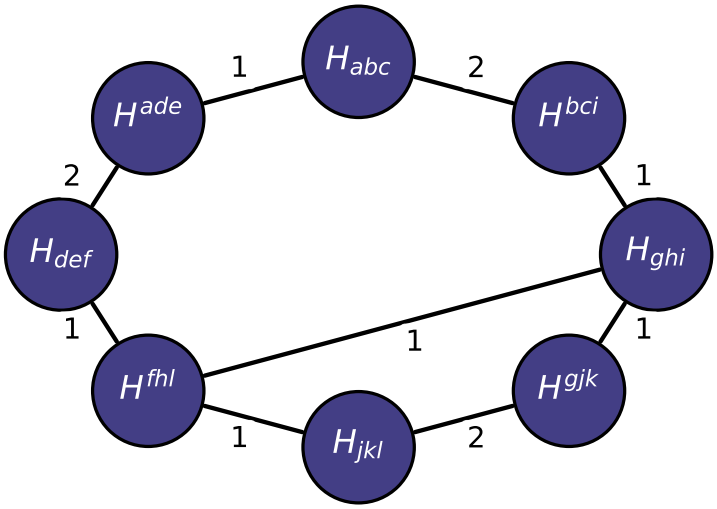
and



然而，在这一阶执行第二步时，我们发现这三个图与低阶缩并的乘积之间存在非平凡关系。事实上，这一阶只引入了一个真正全新的不变量，我们选择上方展示的三个图中的第二个作为该不变量。将这个新不变量记为

$$x^{(6)} = H_{abc}H^{chi}H_{ghi}H^{adg}H_{def}H^{bef}\,. \tag{4.3}$$

接下来考察阶数为 $N = 8$ 的情形，此时找到了 20 个彼此不同构的缩并图。经过线性相关性检验，我们发现这 20 个不变量中，只有 6 个与其余不变量线性无关。随后，我们检验这 6 个不变量与低阶不变量的乘积之间是否存在多项式关系，发现实际上只有一个独立不变量是在 8 阶引入的，我们选取与以下缩并图对应的不变量：



其对应的不变量为

$$x^{(8)} = H_{abc}H^{bci}H_{ghi}H^{gjk}H_{jkl}H^{fhl}H_{def}H^{ade}\,. \tag{4.4}$$

在此阶段，我们发现算法终止了——在 N的任何更高阶数下，例如$N = 10$，所有新生成的不变量都满足彼此之间以及与低阶不变量的乘积之间的多项式关系。这与 [16]的观察相符：由六维中的三形式只能构造出五个独立不变量，而现在我们得到了一个显式的生成集：

$$\left\{x^{(2)}, x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x^{(6)}, x^{(8)}\right\}\,, \tag{4.5}$$

其表达式已在上文给出。

我们算法的最后一步，是进一步确认这五个不变量确实彼此独立，并且不满足任何涉及高阶多项式的关系。我们已经检查到 $N = 18$ 阶，确认这些不变量的乘积在总度数为 N时不满足任何此类关系。这为这五个

变量（4.5）构成一组完备的独立不变量，并因此表明，六维欧几里得时空中的三形式的最一般拉格朗日量 H_{abc} 是一个函数

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}\left(x^{(2)}, x_1^{(4)}, x_2^{(4)}, x^{(6)}, x^{(8)}\right) . \tag{4.6}$$

最后，让我们谈一点数字上的观察。在上述过程中，我们只保留了连通图，以避免构造出可分解为低阶不变量乘积的冗余不变量。如果我们改为构造所有允许的收缩图，就会发现（例如）在阶数为 $N = 4$时有三个张量网络，包括上面展示的两个，以及第三个图——它只是两个互不连通的唯一 $N = 2$ 图的副本。我们还在允许非连通图的情况下重复了上述图构造算法，并统计了 N中每个偶数阶对应的不同图同构类的数量，发现 $N = 2$的、、、、、、、、阶分别对应1、3、9、32、135、709。这个结果与序列[56] 的前几项相符；该序列给出的是阶数为 $N = 2n$的三正则无环多重图的同构类数量，这进一步验证了我们的图枚举算法是正确的。关于枚举此类图并生成该序列的解析方法，请参见 [57] 。

4.2 霍奇对偶变量

作为第二个应用，我们现在将为由六维欧几里得空间中的三形式构造的标量环，找出另一组齐次参数系。我们的构造将与式（1.2）的定义平行；该定义给出了由四维时空中的2-形式场强及其霍奇对偶构造的两个标量。类似地，我们定义

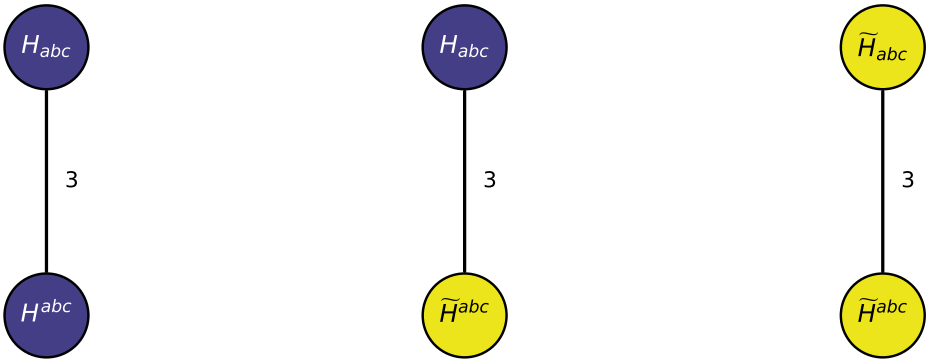
$$\widetilde{H}^{abc} = \frac{1}{3!}\epsilon^{abcdef} H_{def} , \tag{4.7}$$

其中， ϵ^{abcdef} 是六维中的列维-奇维塔符号，在本小节中，我们仍用欧几里得度量 δ_{ab} 升降指标。在这种情况下，我们同样会找到五个独立不变量，其阶数分别为 2、4、4、4、6，这与 [16]一致。

为了使用第 3 节中的算法枚举不变量，我们现在必须考虑带颜色的~图，其中一个节点的两种可能着色分别对应于 H_{abc} 和 H_{abc}。与上一小节一样，随后我们必须针对每个固定的偶数个带颜色节点，枚举所有可能的图，并再次要求每个节点的总度数为 3，以确保所有指标都已缩并。在实际操作中，我们采用蛮力法：首先使用第 4.1 节所述的图论算法生成

所有未着色的 缩并图，然后手动构建 2^N 个节点的所有 N 种着色，最后使用 igraph 中的同构检验程序去重冗余项。

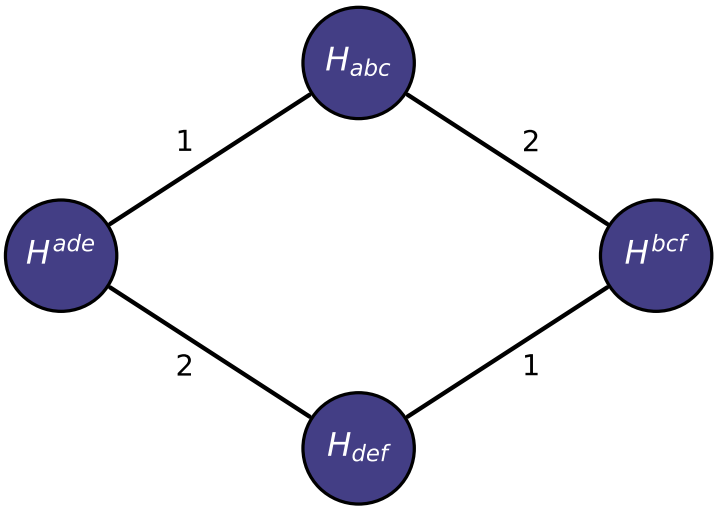
和之前一样，只有当 N 为偶数时才会出现非平凡的缩并图。在 $N = 2$ 处，有三种可能的张量网络，



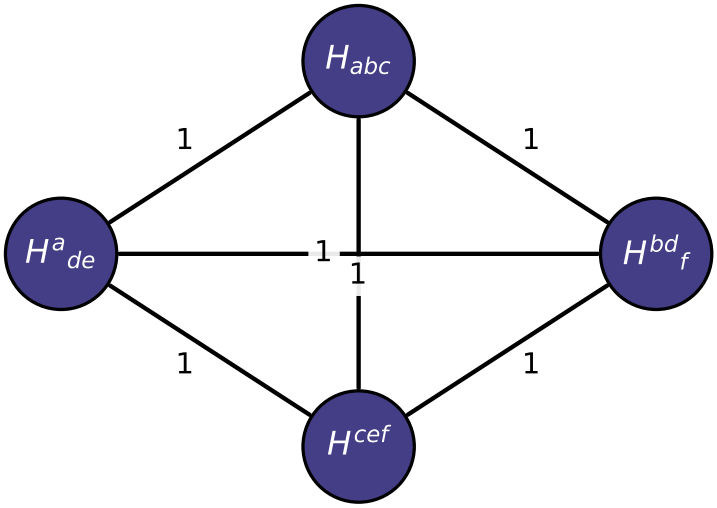
~ ~ ~然而， $H_{abc}H^{abc}$ 恒等于零，而 $H_{abc}H^{abc}$ 与 $H_{abc}H^{abc}$ 成正比，因此这一阶只有一个独立不变量，我们选取

$$y^{(2)} = H_{abc}H^{abc} = x^{(2)}\,. \tag{4.8}$$

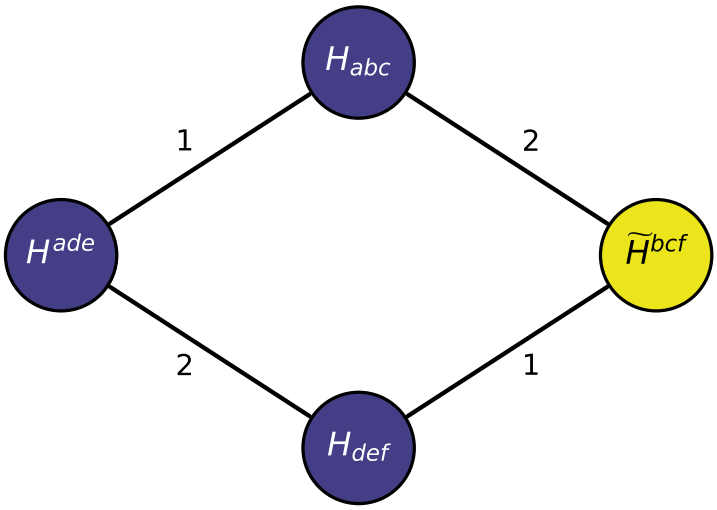
在 $N = 4$ 阶，我们发现了 12 个不同的着色收缩图，其中 4 个彼此线性无关，而只有其中 3 个也与 $\left(y^{(2)}\right)^2$ 线性无关。这一阶的三个新不变量由以下图表示



and



and



这些图对应的不变量为

$$y_1^{(4)} = H_{abc}H^{bcf}H_{def}H^{ade} = x_1^{(4)}\,,$$
$$y_2^{(4)} = H_{abc}H^{bd}{}_{f}H^{cef}H^{a}{}_{de} = x_2^{(4)}\,,$$

$$y_3^{(4)} = H_{abc}\widetilde{H}^{bcf}H_{def}H^{ade}\,. \tag{4.9}$$

我们看到，该阶算法找到的前两个不变量与第4.1节迹变量算法找到的不变量相同，这是一项一致性检验。然而，第三个不变量 $y_3^{(4)}$ 是新的；在上一小节中之所以“漏掉”了它，是因为当时我们禁止算法使用不变张量ϵ^{abcdef}，只允许涉及克罗内克δ的缩并。因此，使用霍奇对偶变量（其中列维-奇维塔符号和克罗内克δ都作为不变张量），我们正确地发现，在 4 阶有三个不变量，这与生成函数方法的预测一致，参见 [16]。

最后，在 $N = 6$ 阶，我们找到了 114 个有效的缩并图，其中只有 5 个彼此线性无关，而这 5 个中只有 1 个独立于低阶不变量的乘积。由此我们得出结论：六阶只有一个新不变量，它同样可以选取得与我们用迹变量找到的六阶不变量一致，

$$y^{(6)} = H_{abc}H^{chi}H_{ghi}H^{adg}H_{def}H^{bef} = x^{(6)}\,. \tag{4.10}$$

此时，算法如预期般终止，而我们考察过的所有阶数为$N \geq 8$ 的缩并图，都与低阶不变量的乘积相关。

因此，我们找到了第二组推测性的独立且完备的不变量，它们可以由 $6d$中的三形式构造而成，与第4.1节中发现的那组不变量相辅相成。既然有两组这样的齐次参数系，自然会想知道如何在它们之间转换。例如，在 $4d$ 欧几里得号差下，可以通过映射[10] 在与 2-形式场强相关的两组变量（1.1）和（1.2）之间进行转换

$$4S - x_1 = 0\,, \qquad 4P^2 + x_2 - \frac{1}{2}x_1^2 = 0\,. \tag{4.11}$$

在当前设定下，大多数 y 变量都与相应的 x变量一致，唯一的例外是使用霍奇对偶构造的单个不变量 $y_3^{(4)}$ 。由于我们猜想迹变量构成一个完备生成集，因此 $y_3^{(4)}$ 应满足某个涉及 x 变量的多项式关系。事实上，我们使用算法确实找到了这样的关系：这些不变量满足

$$0 = \left(y_3^{(4)}\right)^2 - 18x^{(8)} - 8x^{(6)}x^{(2)} - 6x_1^{(4)}x_2^{(4)} + 4\left(x_2^{(4)}\right)^2 + \left(x^{(2)}\right)^2\left(\frac{2}{3}x_2^{(4)} + \frac{7}{6}x_1^{(4)} - \frac{1}{18}\left(x^{(2)}\right)^2\right)\,, \tag{4.12}$$

[10]这个映射只涉及平方 P^2 这一事实表明，迹变量只能捕捉宇称偶组合，而我们在这番讨论中对此一直颇为随意。

精确到数值精度的十位小数。这既为第4.1节中的迹不变量集合是完备的提供了进一步证据，也为我们提供了一个新的恒等式。该恒等式从这些不变量的解析表达式中并不显而易见，但通过数值计算却很容易得到。

4.3 旋量变量

描述与一个三形式相关的五个独立不变量的第三种方法 $6d$ 是使用旋量指标，参照四维中二形式的类似定义（1.3）。具体而言，我们将回顾如何采用洛伦兹号差和同构 $\mathfrak{so}(1,5) \cong \mathfrak{su}^*(4)$。[11] 考虑满足以下关系的 8×8 伽马矩阵 Γ^μ：

$$\{\Gamma_\mu, \Gamma_\nu\} = -2\eta_{\mu\nu}\mathbb{I}\,. \tag{4.13}$$

可以将这些矩阵取为如下形式的分块非对角矩阵

$$\Gamma^\mu = \begin{bmatrix} 0 & (\tilde{\gamma}^\mu)^{\alpha\beta} \\ (\gamma^\mu)_{\alpha\beta} & 0 \end{bmatrix}, \tag{4.14}$$

此处，较小的希腊指标（如 α，β）的取值范围为 1 到 4。对于每个 μ，矩阵 $(\gamma^\mu)_{\alpha\beta}$和 $(\tilde{\gamma}^\mu)^{\alpha\beta}$ 在其旋量指标上是反对称的，并满足

$$(\tilde{\gamma}^\mu)^{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}\,(\gamma^\mu)_{\gamma\delta}\,. \tag{4.15}$$

利用这些对象，我们可以定义这类矩阵的三重乘积：

$$\gamma_{\mu\nu\rho} = \gamma_{[\mu}\tilde{\gamma}_\nu\gamma_{\rho]}\,, \qquad \tilde{\gamma}_{\mu\nu\rho} = \tilde{\gamma}_{[\mu}\gamma_\nu\tilde{\gamma}_{\rho]}\,. \tag{4.16}$$

现在转向三形式。$SO(1,5)$ 的 20 维三形式表示并非不可约，而是分解为自对偶张量和反自对偶张量的两个不可约表示。也就是说，任意三形式 $H_{\mu\nu\rho}$ 都可以写成

$$H_{\mu\nu\rho} = H^+_{\mu\nu\rho} + H^-_{\mu\nu\rho}\,, \tag{4.17}$$

其中

$$\frac{1}{3!}\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma\kappa\lambda}H^\pm_{\sigma\kappa\lambda} = \pm H^{\pm\mu\nu\rho}\,. \tag{4.18}$$

[11] 有关更多细节，请参阅论文 [58–60]；在这三篇论文中，各自的附录 A 都包含一份非常有用的参考资料，介绍了六维旋量约定以及这一同构。

因此，通过缩并时空指标，我们可以从一个一般的三形式 $H_{\mu\nu\rho}$ 构造出两个对称的 4×4 矩阵$M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$：

$$M^{\alpha\beta} = \frac{1}{3!}\,(\tilde{\gamma}^{\mu\nu\rho})^{\alpha\beta}\,H_{\mu\nu\rho}\,,$$
$$N_{\alpha\beta} = \frac{1}{3!}\,(\gamma^{\mu\nu\rho})_{\alpha\beta}\,H_{\mu\nu\rho}\,, \tag{4.19}$$

由此可以分别得到 $H_{\mu\nu\rho}$ 的自对偶部分和反自对偶部分，如下所示:

$$H^{+}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8}\,(\tilde{\gamma}_{\mu\nu\rho})^{\alpha\beta}\,N_{\alpha\beta}\,,$$
$$H^{-}_{\mu\nu\rho} = \frac{1}{8}\,(\gamma_{\mu\nu\rho})_{\alpha\beta}\,M^{\alpha\beta}\,. \tag{4.20}$$

因此，枚举由六维三形式构造的不变量的问题，与枚举一对 4×4 矩阵 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$所构成的不变量的问题一一对应。[12] 需要注意的是，这些对象上的旋量指标不能用度规升降，因此唯一允许的缩并，是矩阵 $M^{\alpha\beta}$ 和$N_{\alpha\beta}$的上下指标之间的缩并，或涉及反对称符号 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 或$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ （4）中的 $\mathfrak{su}^*$的缩并。

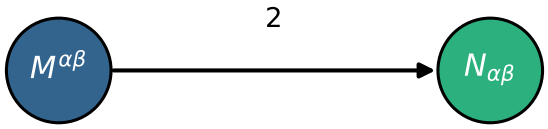
顺便指出，旋量变量清楚地表明，对于六维的手性三形式（自对偶或反自对偶），只能构造出一个独立不变量。对于自对偶（反自对偶）情形，矩阵 $M^{\alpha\beta}$ $(N_{\alpha\beta})$ 为零，因此不变量理论问题便简化为枚举由单个 4×4 矩阵和列维-奇维塔符号构造的不变量。显然，唯一可用的不变量是行列式，它是矩阵的四次不变量。这对应于下文方程（ SO 2.16）下方第2节所呈现的 LieART 输出中，四个自对偶或反自对偶张量表示 $SO(6)$ 的张量积中作为单态出现的唯一四次不变量。这一事实曾用于 [19]，该文介绍了不同维度下自对偶张量拉格朗日量的一种新表述，其中包括 $6d$中的手性三形式；它也可以通过 PST 形式主义来理解 [61–63]。然而，我们目前关注的是非手性三形式，此时矩阵 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$ 均不为零。

现在，我们将使用第 3 节中的主要算法来处理这个等价的双矩阵不变量理论问题。我们再次发现，在矩阵 、、、、、、和 的总阶数分别为 2、4、4、4、6 时，共有五个不变量 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$。这里，图论算法同样需要稍作修改：我们将枚举所有可由节点 $M^{\alpha\beta}$、 $N_{\alpha\beta}$、 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$和$\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$构造的有向加权图。边的方向表示

[12]我们感谢 Ga briele Tartaglino-Mazzucchelli 和 Dmitri Sorokin 就这一点进行了有益的讨论。

源的一个上指标与汇的一个下指标之间的缩并。我们要求每个 $M^{\alpha\beta}$节点的出度恰为 2（且没有指向内的边），每个 $N_{\alpha\beta}$ 节点的入度恰为 2（且没有指向外的边）；同样，对于 $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta}$ 或 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$，列维-奇维塔符号的总出度或总入度分别为 4。我们使用与第 4.1 节所述相同形式的精确回溯枚举，构造所有允许的缩并图。由于 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$ 的指标具有对称性，而列维-奇维塔张量具有反对称性，因此这种方法已足够，因为我们无需追踪具体是哪个指标参与了缩并；对某个指标进行的任何缩并，都可通过对称性关联到对另一个指标的缩并。和之前一样，我们通过检验图同构来去除同构图，只保留每个同构类的一个代表。

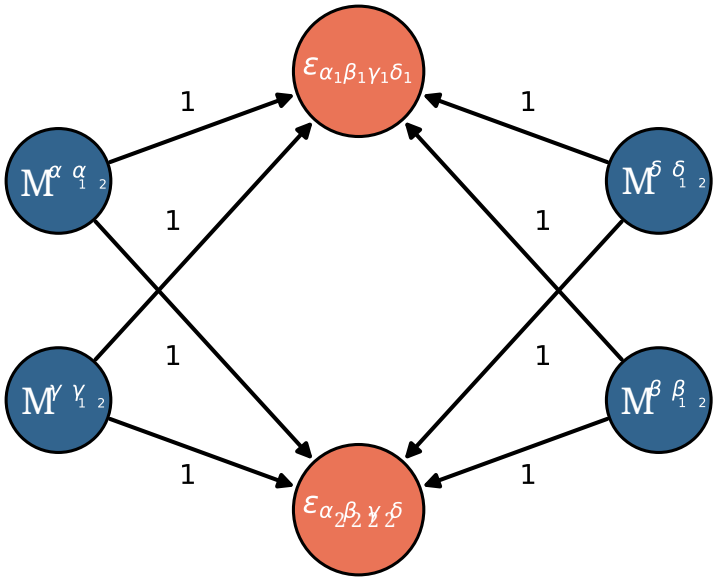
在 $N = 2$ 阶，有一个唯一的缩并图



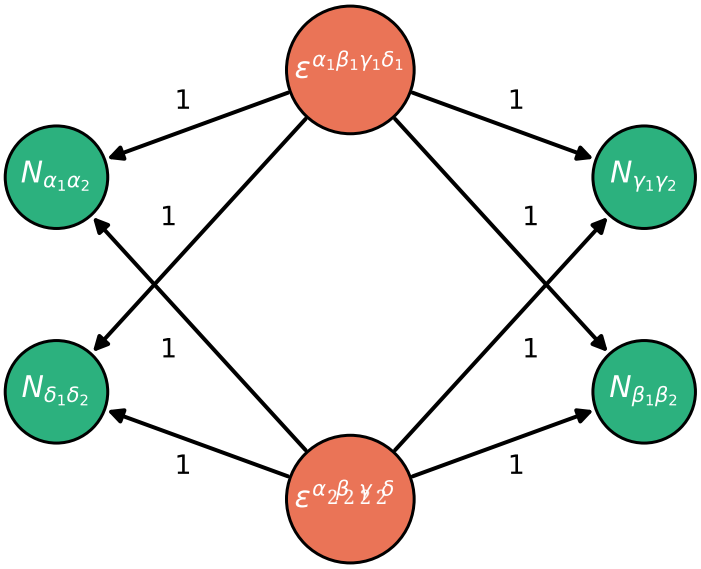
对应于不变量

$$z^{(2)} = M^{\alpha\beta} N_{\alpha\beta} \,. \tag{4.21}$$

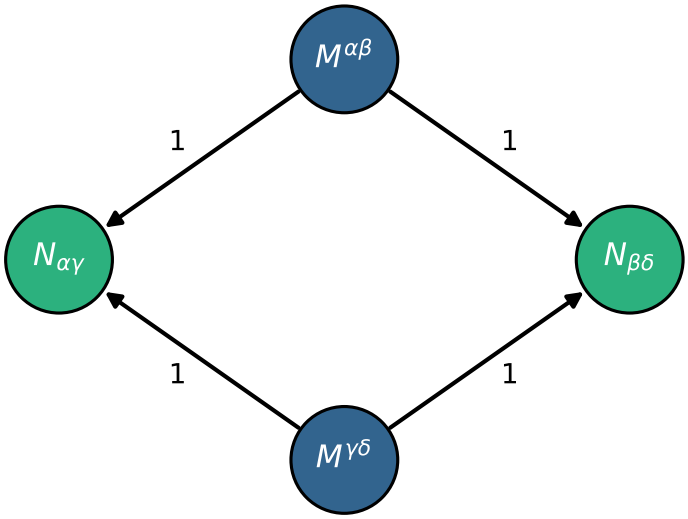
在 $N = 4$ 阶，执行算法步骤后，我们发现了三个独立不变量，它们对应于缩并图



and



and



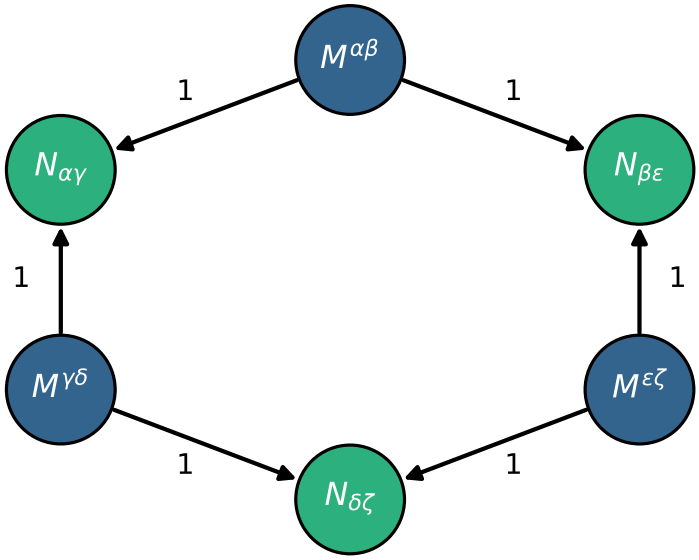
其中两个是 e 与矩阵 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$ 的行列式成正比,

$$z_1^{(4)} = \epsilon_{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}\epsilon_{\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2}M^{\alpha_1\alpha_2}M^{\beta_1\beta_2}M^{\gamma_1\gamma_2}M^{\delta_1\delta_2}\,,$$
$$z_2^{(4)} = \epsilon^{\alpha_1\beta_1\gamma_1\delta_1}\epsilon^{\alpha_2\beta_2\gamma_2\delta_2}N_{\alpha_1\alpha_2}N_{\beta_1\beta_2}N_{\gamma_1\gamma_2}N_{\delta_1\delta_2}\,, \tag{4.22}$$

而第三个不变量对应于缩并

$$z_3^{(4)} = M^{\alpha\beta}M^{\gamma\delta}N_{\alpha\gamma}N_{\beta\delta}\,. \tag{4.23}$$

At 阶数为 $N = 6$ 时，我们发现一个独立不变量，可用以下图表示



并对应于以下缩并

$$z^{(6)} = M^{\alpha\beta} M^{\gamma\delta} M^{\epsilon\zeta} N_{\alpha\gamma} N_{\beta\epsilon} N_{\delta\zeta} \,. \tag{4.24}$$

现在我们的算法再次终止，并且我们发现，与 $N \geq 8$ 的缩并图相关的所有不变量都可以用低阶不变量表示。

让我们再做一个数论式观察。如果我们再次统计 N中每一阶出现的缩并图总数，而不仅仅是那些对应于独立不变量的缩并图，我们会得到以下计数：1、4、11、22、38，分别对应 $N = 2$、4、6、8、10。这些数列的前几项与某些沸石化合物的若干配位序列相吻合，例如 [64]和 [65]。这种形式上的相似性似乎源于这样的事实：这类沸石由硅原子以及氧等其他原子构成，而硅形成四个共价键，氧形成两个共价键。这与我们正在构造的缩并图的结构相呼应，因为例如列维-奇维塔符号需要进行四次指标缩并（类似于硅形成的四个键），而矩阵$M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$ 需要进行两次指标缩并（类似于氧形成的两个键）。

总之，我们给出了一个显式的不变量集合，它们可以由两个 4×4 对称矩阵 $M^{\alpha\beta}$ 和 $N_{\alpha\beta}$构造而成。基于大量数值证据，我们推测这些不变量彼此独立且完备。利用（ $H^{\pm}_{\mu\nu\rho}$ 4.20）将这些对象转换回自对偶部分和反自对偶部分 $H_{\mu\nu\rho}$，再求和以还原 $H_{\mu\nu\rho}$，因此便得到一组相应的不变量，可由六维中的三形式构造而成。我们提醒读者，在进行此转换时，伽马矩阵采用约定（4.13），这适用于洛伦兹号差，因此无法直接给出映射

，将本小节构造的不变量与第4.1 节和第4.2节中的不变量联系起来，因为这两项分析都采用了欧几里得号差。本分析采用洛伦兹号差的优势在于，它通过实验确认了一个自然预期：独立不变量的数量与时空号差无关。此外，利用各种恒等式，例如，可以始终显式地将此处构造的不变量表示为 $H_{\mu\nu\rho}$ 与闵可夫斯基度规 $\eta_{\mu\nu}$ 的缩并

$$(\gamma^{\mu\nu\rho})_{\alpha\beta}\,(\tilde{\gamma}_{\mu\nu\rho})^{\gamma\delta} = 48\delta_{(\alpha}{}^{\gamma}\delta_{\beta)}{}^{\delta}\,, \tag{4.25}$$

这在我们的约定下成立。

5 结论

在这项工作中，我们描述了一种数值方法，用于实验性地研究可由张量构造的独立不变量。我们应用这一技术，使用三种不同的变量集，枚举了六维中可由一个 3-形式张量场构造的标量，并且在每种情况下都一致地得到一组包含五个独立不变量的集合。我们还提供了一个对照表，用于在其中两组变量之间进行转换，并给出了一些其他不变量与独立生成集中的不变量之间关系的示例。这些显式表达式可以作为研究 $6d$ 中 3-形式理论族性质的起点，正如参数化（1.1）、（1.2）和（1.3）可用于研究 $4d$ 中非线性电动力学的一般理论一样。

未来研究仍有几个引人入胜的方向。或许最显而易见的是，利用这种数据驱动方法，研究可由其他张量以及在不同维数中构造的标量。例如，对十维中与手征 5-形式相关的不变量进行数值研究将会很有意义；这些不变量最近在 [16, 66] 中被考虑，并特别用于构造十维中的 ModMax- 型理论 [67] 。人们还可以研究对有效作用量感兴趣的不变量（例如由十维中的黎曼张量构造的不变量）、局部幺正[13] 和 SLOCC 不变量，以及多矩阵模型中所对应的不变量；这对应于我们在第 (i)、(ii)和(iii) 节 1 中提到的三个动机示例。

这种形式体系的另一个优点是，它能够生成必要的迹恒等式，用于简化经典的 TT 类流方程 [71–73],，并为张量场的形变推导相应的主方程。尽管本文的主要结果

[13]近期关于引入基于 [69, 70] 的上同调形式体系构建的新局域酉不变量的研究，请参见 [68] 。

涉及三形式，但我们暂且作更一般的讨论。从 d 维空间中的自由 p 形式场出发，其作用量（忽略归一化因子）为

$$S = \int d^d x \sqrt{-g}\, H_{\mu_1\cdots\mu_p} H^{\mu_1\cdots\mu_p} , \tag{5.1}$$

希尔伯特应力张量通过对 $g_{\mu\nu}$ 取泛函导数来定义，因此

$$\begin{aligned} T_{\mu\nu} &= -2\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial g^{\mu\nu}} + g_{\mu\nu}\mathcal{L} \\ &= -2p H_{\mu\mu_2\cdots\mu_p} H_{\nu}{}^{\mu_2\cdots\mu_p} + g_{\mu\nu} H_{\mu_1\cdots\mu_p} H^{\mu_1\cdots\mu_p} . \end{aligned} \tag{5.2}$$

定义了 $|H|^2 = H_{\mu_1\cdots\mu_p} H^{\mu_1\cdots\mu_p}$ 和 $|H|^2_{\mu\nu} = H_{\mu\mu_2\cdots\mu_p} H_{\nu}{}^{\mu_2\cdots\mu_p}$ 后，应力张量 is

$$T_{\mu\nu} = -2p|H|^2_{\mu\nu} + g_{\mu\nu}|H|^2 . \tag{5.3}$$

现在，假设我们希望通过对能量动量张量的某个积分函数来形变经典作用量，

$$\frac{\partial S}{\partial \lambda} = \int d^d x \sqrt{-g}\, f(T_{\mu\nu}) . \tag{5.4}$$

例如，我们可以允许函数 f 依赖于两个洛伦兹不变量 $T^{\mu}{}_{\mu}$ 和$T_{\mu\nu}T^{\mu\nu}$，对于自由理论，它们由（5.1）给出，从而得到

$$\begin{aligned} T^{\mu}{}_{\mu} &= (d-2p)\,|H|^2 , \\ T_{\mu\nu}T^{\mu\nu} &= 4p^2|H|^2_{\mu\nu}|H|^{2\mu\nu} + (d-4p)|H|^4 . \end{aligned} \tag{5.5}$$

沿着类 TT流继续迭代时，由 H 的缩并构造出的不变量会越来越多，最终必须利用恒等式将新的标量与最小生成集中的标量联系起来。例如，对于六维中的三形式，可以利用本文的结果推导出一个关于六个变量的偏微分方程（与 $H_{\mu\nu\rho}$相关的五个独立不变量，以及流参数λ），它代表经典类TT形变的“主流方程”。[14] 如果能够得到这样的主偏微分方程，并考察某些特定的形变算符是否会产生具有特殊性质的形变理论，将会很有意义；对于 $4d$ [7, 82, 83]中的二形式、 $2d$ [84]中的手征玻色子以及 $6d$ [85]中的手征三形式，已有相关研究。另一个方向是应用本文的技术来枚举由非阿贝尔场强构造的不变量

[14]关于求解经典 TT 类流的其他结果，请参阅不完整的文献选集 [74–79]，；关于 TT 形变的一般信息，请参阅综述文章 [80, 81]。

其分量为 $F_{\mu\nu} = F^A_{\mu\nu} T_A$，其中 T_A 是李代数 $\mathfrak{g}$ 的生成元，且该李代数对应于规范群；并利用这一方法继续研究TT形式的杨-米尔斯理论形变，该研究始于 $d = 4$， [86]。

我们希望在未来的工作中重新探讨其中一些有趣的问题。

致谢

我们非常感谢 Ning Bao、James Halverson、Dmitri Sorokin、Gabriele Tartaglino- Mazzucchelli 和 Linus Wulff，就本研究主题进行的有益讨论。C. F. 获美国国家科学基金会根据合作协议 PHY-2019786（美国国家科学基金会人工智能与基本相互作用人工智能研究所）资助。

A 附加图与关系

在本附录中，我们汇总了一些由于篇幅所限而未在正文中列出的附加缩并图和关系。本练习的主要目的是展示我们的算法如何在一些示例中生成各种不变量之间的额外非平凡关系。

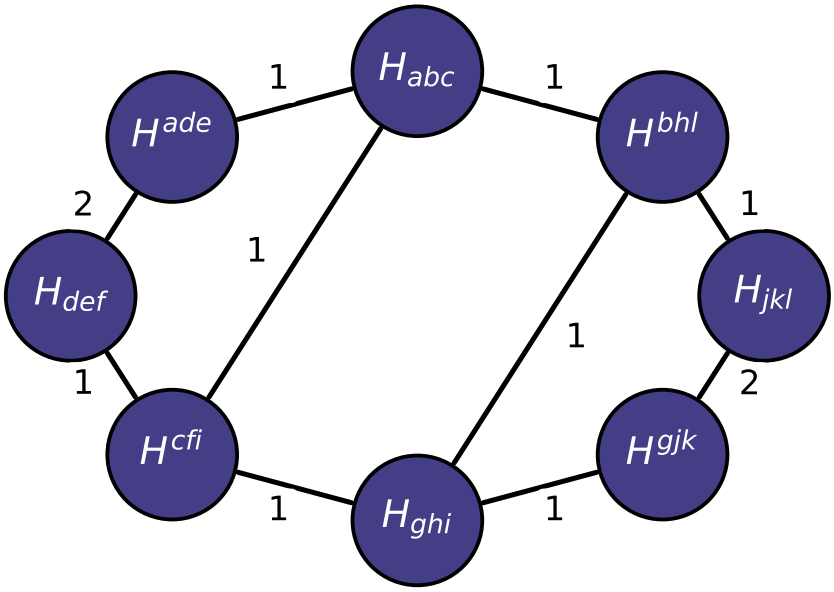
在第 4.1节中，我们指出，在 $N = 6$ 阶仅引入了一个真正的新不变量。现在考虑该节中在这一阶所展示的另外两个图，它们对应于缩并

$$\begin{aligned} X_1^{(6)} &= H_{abc} H^{bci} H_{ghi} H^{fgh} H_{def} H^{ade} , \\ X_2^{(6)} &= H_{abc} H^{cfh} H_{def} H^{bei} H^{dg}{}_i H^a{}_{gh} . \end{aligned} \tag{A.1}$$

我们用大写字母 X 表示这些不变量，以区别于独立生成集中的不变量，例如 $x^{(6)}$。这些不变量应满足多项式关系，使其能够用 x 变量表示；通过数值计算，我们发现

$$\begin{aligned} 0 &= X_1^{(6)} - \frac{1}{2} x^{(2)} x_1^{(4)} + \frac{1}{18} \left(x^{(2)}\right)^3 , \\ 0 &= X_2^{(6)} + \frac{1}{2} x^{(6)} + \frac{1}{12} x^{(2)} x_2^{(4)} - \frac{1}{6} x^{(2)} x_1^{(4)} + \frac{1}{72} \left(x^{(2)}\right)^3 . \end{aligned} \tag{A.2}$$

在 $N = 8$ 阶时，我们曾指出，可以找到 20 个非同构连通收缩图，其中只有 6 个彼此线性无关，但这 6 个中也只有一个与低阶不变量的乘积无关。让我们考察一下这一阶中的几个从属图。其中一个是与以下不变量相关联的张量网络



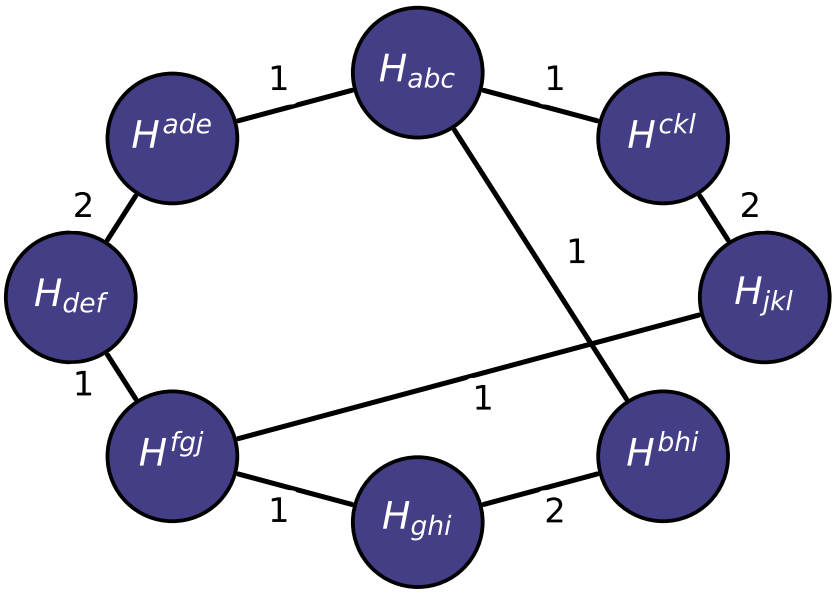
相关联的不变量

$$X_1^{(8)} = H_{abc}H^{bhl}H_{jkl}H^{gjk}H_{ghi}H^{cfi}H_{def}H^{ade}\,. \tag{A.3}$$

再次，这个 量满足一个涉及生成元的多项式关系，即

$$\begin{aligned} 0 = X_1^{(8)} + \frac{5}{2}x^{(8)} + \frac{3}{2}x^{(6)}x^{(2)} + x_1^{(4)}x_2^{(4)} - \frac{2}{3}\left(x_2^{(4)}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(x_1^{(4)}\right)^2 - \frac{1}{9}x_2^{(4)}\left(x^{(2)}\right)^2 \\ - \frac{11}{36}x_1^{(4)}\left(x^{(2)}\right)^2 + \frac{1}{54}\left(x^{(2)}\right)^4\,. \end{aligned} \tag{A.4}$$

另一个八阶从属图是



其对应的不变量是

$$X_2^{(8)} = H_{abc}H^{ckl}H_{jkl}H^{bhi}H_{ghi}H^{fgj}H_{def}H^{ade}\,, \tag{A.5}$$

它满足多项式关系

$$0 = X_2^{(8)} + 3x^{(8)} + \frac{2}{3}x^{(6)}x^{(2)} + x_1^{(4)}x_2^{(4)} - \frac{2}{3}\left(x_2^{(4)}\right)^2 - \frac{1}{9}x_2^{(4)}\left(x^{(2)}\right)^2 - \frac{1}{18}x_1^{(4)}\left(x^{(2)}\right)^2\,. \tag{A.6}$$

显然，可以重复这一过程，将任意相关不变量表示为生成元的多项式。在实际操作中，每种情况下，我们首先通过为张量 H_{abc} 抽取大量随机值，并计算与各个不变量对应的缩并（如第 3 节所述），得到数据矩阵零向量的数值近似。然后，我们使用 Mathematica 中的`Rationalize` 函数，将这些数值近似为有理数。最后，我们通过为张量分量抽取新的随机值，对候选恒等式（A.2）、（A.4）和（A.6）分别进行 1,000 次测试，计算这些等式右侧出现的缩并组合，并验证其和在数值精度范围内为零。

参考文献

[1] I. Bialynicki-Birula，《非线性电动力学：Born 与 Infeld 主题的变奏》，载于：《粒子与场的量子理论：献给 *Jan Lopuszanski* 的生日纪念文集》（编者：*B. Jancewicz* 和 *J. Lukierski*），*World Scientific Publishing Co Pte Ltd*，*1984*年，第 *31–48* 页。

[2] G. W. Gibbons 和 D. A. Rasheed，《非线性电动力学中的电磁对偶旋转》，*Nucl. Phys. B* **454** (1995年) 185–206，hep-th/9506035。[3] M. K. Gaillard 和 B. Zumino，《非线性电磁自对偶性与勒让德变换》，载于对偶与超对称理论。论文集，复活节学校、牛顿研究所欧洲会议，英国剑桥，*1997*年*4*月*7*日至*18*日，第 33–48 页。12，1997年。hep-th/9712103。[4] M. K. Gaillard 和 B. Zumino，《非线性电磁学中的自对偶性》，《物理学讲义》**509** (1998年) 121，hep-th/9705226。

[5] G. O. Schellstede、V. Perlick 和 C. L¨ammerzahl，《论 Pleba´nski 类非线性真空电动力学中的因果性》，《物理年鉴》**528**(2016年)，第 9-10 期，738–749，1604.02545。

[6] J. G. Russo 和 P. K. Townsend，《因果自对偶电动力学》，Phys. Rev. D 109 (2024年)，第 10 期，105023，2401.06707。[7] R. Conti、L. Iannella、S. Negro 和 R. Tateo，《广义 Born-Infeld 模型、Lax 算子与 TT 微扰》，JHEP 11 (2018年) 007，1806.11515。[8] H. Babaei-Aghbolagh、K. B. Velni、D. M. Yekta 和 H. Mohammadzadeh，《由 $T\bar{T}$-类形变导出的非线性电动力学理论》，2202.11156。[9] C. Ferko、L. Smith 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，《应力张量流、非线性电动力学中的双折射与超对称》，SciPost Phys. 15 (2023年)，第 5 期，198，2301.10411。[10] C. Ferko、S. M. Kuzenko、L. Smith 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，《对偶不变非线性电动力学与应力张量流》，Phys. Rev. D 108 (2023年)，第 10 期，106021，2309.04253。[11] H. Derksen 和 G. Kemper，《计算不变理论》。数学科学百科全书。施普林格柏林海德堡，2002年。[12] R. de Mello Koch 和 A. Jevicki，《有限 N 下环空间的结构》，JHEP 06 (2025年) 011，2503.20097。[13] R. de Mello Koch 和 A. Jevicki，《有限 N 多矩阵模型的希尔伯特空间》，JHEP 11 (2025年) 145，2508.11986。[14] R. de Mello Koch、J.-H. Huang、M. Kim 和 H. J. R. Van Zyl，《涌现的杨–米尔斯理论》，JHEP 10 (2020年) 100，2005.02731。[15] C. Procesi，《凯莱-哈密顿定理的一个形式逆》，代数学杂志 107 (1987)，第 1 期，63–74。[16] M. Cederwall、J. Hutomo、S. M. Kuzenko、K. Lechner 和 D. P. Sorokin，《关于不变量的几点评论》，2509.14350。[17] P. J. Olver，《经典不变理论》。伦敦数学学会学生教材

剑桥大学出版社，1999。

[18] R. Goodman 和 N. Wallach，经典群的表示与不变量。《数学及其应用百科全书》。剑桥大学出版社，2000年。[19] Z. Avetisyan、O. Evnin 和 K. Mkrtchyan，“非线性（手征）p形式电动力学”，*JHEP* **08** （2022年）112，2205.02522。[20] I. S. Cohen，“完备局部环的结构与理想理论”，美国数学会会刊**59** （1946），第1期，54–106。[21] F. S. Macaulay，模系统代数理论。剑桥数学与数理物理丛书第19卷。剑桥大学出版社，剑桥，1916年。[22] W. Bruns 和 H. Herzog，科恩–麦考利环。剑桥高等数学研究丛书。剑桥大学出版社，1998年。[23] M. Hochster 和 J. L. Roberts，“约化群作用于正则环所得到的不变量环是科恩-麦考利环”，数学进展 **13**（1974）115–175。[24] M. Nagata，局部环。Interscience纯粹与应用数学丛书。Interscience出版社，1962年。[25] B. Gripaios、W. Haddadin 和 C. G. Lester，“粒子的洛伦兹不变量与置换不变量”，物理学杂志*A*：数学与理论**54**（2021年3月）155201。[26] B. Gripaios、W. Haddadin 和 C. G. Lester，“洛伦兹不变量与置换不变量

of

粒子 II，” 2020.[27] C. G. Lester、W. Haddadin 和 B. Gripaios，“洛伦兹与置换不变量

of

粒子 III：约束宇称破坏的非标准来源，”国际现代物理学杂志*A***37** (2022年，第16 期，2250093，2008.05206。[28] C. A. Cremonini、P. A. Grassi、R. Noris 和 L. Ravera，“超引力理论与膜

s

希尔伯特-庞加莱′级数，*JHEP* **12**(2023) 088, 2211.10454。[29] R. de Mello Koch、M. Kim 和 H. J. R. Van Zyl，《从对称性到结构：多矩阵量子力学中的规范不变算符》，2507.01219。

[30] P. Pouliot, 《对偶性的 Molien 函数》，JHEP 01 (1999) 021， hep-th/9812015。[31] C. Romelsberger, 《在 N = 1、d=4超共形场论中计数手征初级算符》，Nucl. Phys. B 747 (2006) 329–353， hep-th/0510060。[32] A. Hanany, 《计数手征环中的 BPS 算符：多重对称的故事》，AIP Conf. Proc. 939 (2007)，第 1 期，165–175 页。[33] F. A. Dolan, 《计数 N=4 SYM 中的 BPS 算符》，Nucl. Phys. B 790 (2008) 432–464，0704.1038。[34] F. A. Dolan 和 H. Osborn, 《超共形指标在受保护算符和 q-超几何恒等式中的应用：N=1 对偶理论》，Nucl. Phys. B 818 (2009) 137–178, 0801.4947。[35] A. Hanany、N. Mekareeya 和 G. Torri, 《伴随表示 SQCD 的希尔伯特级数》，Nucl. Phys. B 825 (2010) 52–97，0812.2315。[36] M. A. A. van Leeuwen、A. M. Cohen 和 B. Lisser，LiE：李群计算软件包。荷兰计算机代数，阿姆斯特丹，1992。[37] R. Feger 和 T. W. Kephart, 《LieART——用于李代数和表示论的 Mathematica 应用程序》，Comput. Phys. Commun. 192 (2015) 166–195, 1206.6379。[38] R. Feger、T. W. Kephart 和 R. J. Saskowski, 《LieART 2.0——用于李代数和表示论的 Mathematica 应用程序》，Comput. Phys. Commun. 257 (2020) 107490，1912.10969。[39] L. Qi、Y. Chen 和 H. Chen, 《张量特征值及其应用》，2018。[40] L. Qi, 《实对称张量的特征值》，《符号计算杂志》40 (2005)，第 6 期，1302–1324。[41] H. Abo、A. Seigal 和 B. Sturmfels, 《张量特征构型》，arXiv 预印本 arXiv:1505.05729 (2015)。[42] D. Cartwright 和 B. Sturmfels, 《张量特征值的数量》，arXiv 电子印本（2010 年 4 月）arXiv:1004.4953，1004.4953。

[43] N. Sasakura，《复数三阶随机张量的带符号特征值／向量分布》，PTEP 2024 (2024)，第 5 期，053A04，2404.03385。[44] N. Delporte 和 N. Sasakura，《带偏差的随机张量特征值边缘》，JHEP 01 (2025) 071，2405.07731。[45] A. Chandra、A. Constantin、C. S. Fraser-Taliente、T. R. Harvey 和 A. Lukas，《枚举卡拉比-丘流形：为Kreuzer-Skarke 列表中的微分同胚类数量设定界限》，Fortsch. Phys. 72 (2024)，第 5 期，2300264，2310.05909。[46] R. C. Avohou、J. Ben Geloun 和 N. Dub，《关于 $O(N)$ 张量不变量计数》，Adv. Theor. Math. Phys. 24 (2020)，第 4 期，821–878，1907.04668。[47] R. C. Avohou、J. Ben Geloun 和 R. Toriumi，《计数 $U(N)^{\otimes r} \otimes O(N)^{\otimes q}$不变量及张量模型可观测量》，Eur. Phys. J. C 84 (2024)，第 8 期，839，2404.16404。[48] F. Pedregosa、G. Varoquaux、A. Gramfort、V. Michel、B. Thirion、O. Grisel、M. Blondel、P. Prettenhofer、R. Weiss、V. Dubourg、J. Vanderplas、A. Passos、D. Cournapeau、M. Brucher、M. Perrot 和 E. Duchesnay，《Scikit-learn：Python 中的机器学习》，机器学习研究杂志 12 (2011) 2825–2830。[49] L. Buitinck、G. Louppe、M. Blondel、F. Pedregosa、A. Mueller、O. Grisel、V. Niculae、P. Prettenhofer、A. Gramfort、J. Grobler、R. Layton、J. VanderPlas、A. Joly、B. Holt

，

以及 G. Varoquaux，“机器学习软件的 API 设计：来自 scikit-learn 项目的经验”，载于*ECML PKDD* 数据挖掘与机器学习语言研讨会，第 108–122 页。2013 年。[50] A. Hagberg、P. Swart 和 D. S Chult，“使用 NetworkX 探索网络结构、动态和功能”，技术报告，洛斯阿拉莫斯国家实验室 (LANL)，洛斯阿拉莫斯，新墨西哥州（美国），2008 年。[51] C. R. Harris、K. J. Millman、S. J. van der Walt、R. Gommers、P. Virtanen、D. Cournapeau、E. Wieser、J. Taylor、S. Berg、N. J. Smith、R. Kern、M. Picus、S. Hoyer、M. H. van Kerkwijk、M. Brett、A. Haldane、J. F. del R´ıo、M. Wiebe、P. Peterson、P. G´erard-Marchant、K. Sheppard、T. Reddy、W. Weckesser、H. Abbasi、C. Gohlke 和 T. E. Oliphant，“使用 NumPy 进行数组编程”，《自然》**585**（2020 年 9 月）357–362。

[52] D. G. a. Smith 和 J. Gray，“opt einsum——一个用于优化 einsum 类表达式缩并顺序的 Python 软件包”，Journal of Open Source Software 3（2018），第 26 期，753。[53] G. Cs´ardi 和 T. Nepusz，“用于复杂网络研究的 igraph 软件包”，InterJournal Complex Systems（2006）1695。[54] M. Antonov、G. Cs´ardi、S. Horv´at、K. M¨uller、T. Nepusz、D. Noom、M. Salmon、V. Traag、B. F. Welles 和 F. Zanini，“igraph 支持跨编程语言开展快速、稳健的网络分析”，arXiv 预印本 arXiv:2311.10260（2023）。[55] G. Cs´ardi、T. Nepusz、V. Traag、S. Horv´at、F. Zanini、D. Noom、K. M¨uller、D. Schoch 和 M. Salmon，《igraph：R 语言中的网络分析与可视化》，2025年。R 软件包版本 2.2.1。[56] OEIS Foundation Inc.（2019），“在线整数序列百科全书”。https://oeis.org/A129416.[57] L. E. Travis，《图形枚举：一种物种理论方法》。布兰代斯大学，1999。[58] W. D. Linch, III 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，“六维超引力与射影超场”，JHEP 08（2012）075，1204.4195。[59] D. Butter、S. M. Kuzenko、J. Novak 和 S. Theisen，“六维最小共形超引力的不变量”，JHEP 12（2016）072，1606.02921。[60] C. Kennedy 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，“六维 $\mathcal{N} = (2, 0)$ 共形超空间”，JHEP 08（2025）215，2506.01630。[61] P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M. Tonin，“关于对偶对称模型中显式洛伦兹不变性与一般坐标不变性的注记”，Phys. Lett. B 352（1995）59–63，hep-th/9503182.[62] P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M. Tonin，“具有显式时空对称性的对偶对称作用量”，Phys. Rev. D 52（1995）R4277–R4281，hep-th/9506109.[63] P. Pasti、D. P. Sorokin 和 M. Tonin，“关于手征 p-形式的洛伦兹不变作用量”，Phys. Rev. D 55（1997）6292–6298，hep-th/9611100。

[64] OEIS Foundation Inc.（2019），“在线整数数列百科全书”。https://oeis.org/A008005。[65] OEIS Foundation Inc.（2019），“在线整数数列百科全书”。https://oeis.org/A008009。[66] J. Hutomo、K. Lechner 和 D. P. Sorokin，“关于非线性手征四形式理论 i

n

D=10”，2509.14351。[67] I. Bandos、K. Lechner、D. Sorokin 和 P. K. Townsend，“麦克斯韦方程的非线性对偶不变共形扩展”，Phys. Rev. D 102（2020）121703，2007.09092。[68] C. Ferko 和 K. Furuya，“GHZ 和 W态的纠缠上同调”，2512.19889。[69] T. Mainiero，“量子力学的同调工具”，1901.02011。[70] C. Ferko、E. Iyer、K. Mossayebi 和 G. Sanfey，“纠缠上同调的霍奇理论”，Phys. Rev. A 111（2025年），第 3 期，032422，2410.12529。[71] A. B. Zamolodchikov，“二维量子场论中复合场 T anti-T 的期望值”，hep-th/0401146。[72] F. A. Smirnov 和 A. B. Zamolodchikov，“关于可积量子场论的空间”，Nucl. Phys. B915（2017）363–383，1608.05499。[73] A. Cavagli`a、S. Negro、I. M. Sz´ecs´enyi 和 R. Tateo，“TT-形变二维量子场论”，JHEP 10（2016年）112，1608.05534。[74] G. Bonelli、N. Doroud 和 M. Zhu，“闭式形式的TT-形变”，JHEP 06（2018）149，1804.10967。[75] J. Hou，“TT 流作为特征流”，JHEP 03（2023）243，2208.05391。[76] C. Ferko 和 S. Sethi，“由无关算符产生的序贯流”，SciPost Phys. 1（2023），第 5 期，098，2206.04787。[77] C. Ferko、Y. Hu、Z. Huang、K. Koutrolikos 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，“TT-

—

4

— like

流与 $3d$ 非线性超对称，”*SciPost Phys.* **16** （2024年），第1期，038，2302.10410。

[78] C. D. A. Blair、J. Lahnsteiner、N. A. Obers 和 Z. Yan，《矩阵理论再探：通往全息的 BPS 之路》，JHEP 02 (2025年) 024，2410.03591。[79] H. Babaei-Aghbolagh、S. He 和 H. Ouyang，《对偶不变非线性电动力学理论中的广义 $T\bar{T}$ 类形变》，JHEP 09 (2024年) 137，2407.03698。[80] Y. Jiang，《二维量子场论可解无关形变教学综述》，Commun. Theor. Phys. 73 (2021年)，第 5 期，057201，1904.13376。[81] S. He、Y. Li、H. Ouyang 和 Y. Sun，《$T\bar{T}$ 形变：简介与近期若干进展》，2503.09997。[82] C. Ferko，《超对称与无关形变》。博士论文，芝加哥大学，2021年。2112.14647。[83] C. Ferko、L. Smith 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，《关于流平方流与 ModMax 理论》，SciPost Phys. 13 (2022年)，第 2 期，012，2203.01085。[84] S. Ebert、C. Ferko、C. L. Martin 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，《相互作用手征玻色子理论空间中的流》，Phys. Rev. D 110 (2024年)，第 4 期，046005，2403.18242。[85] C. Ferko、S. M. Kuzenko、K. Lechner、D. P. Sorokin 和 G. Tartaglino-Mazzucchelli，《相互作用手征形式场理论与六维及更高维中的 $T\bar{T}$ 类流》，JHEP 05 (2024年) 320，2402.06947。[86] C. Ferko、J. Hou、T. Morone、G. Tartaglino-Mazzucchelli 和 R. Tateo，《杨-米尔斯理论的 TT 类流》，Phys. Rev. Lett. 134 (2025年)，第 10 期，101603，2409.18740。

—