MIPT/TH-13/25
FIAN/TH-20/25
IITP/TH-14/25
ITEP/TH-16/25

环形箭图的五维 AGT 猜想

A. Mironov[b, c, d, e], A. Morozov[a, c, d, e], Sh. Shakirov[d]

[a] *MIPT, Dolgoprudny, 141701, Russia* [b] *Lebedev Physics Institute, Moscow 119991, Russia* [c] *NRC "Kurchatov Institute", 123182, Moscow, Russia*
[d] *Institute for Information Transmission Problems, Moscow 127994, Russia*
[e] *Institute for Theoretical and Experimental Physics, 117218, Moscow, Russia*

arXiv:2512.23878v1 [hep-th] 29 Dec 2025

摘要

表示一般共形块的最佳方式是自由场形式主义，在这种形式主义下，共形块可写成筛选算符的多个类似多岑科-法捷耶夫积分。退化共形块可以用相同的积分描述，只需对参数作特殊选择。积分满足各种递推关系；在参数取特殊值时，这些关系可化为封闭方程。这一框架广泛用于解释 AGT 关系，因为 Nekrasov 函数也存在类似的积分表示。我们将这一方法推广到椭圆曲面上的 q-Virasoro 共形块，包括一般情形和退化情形。对于一般情形，我们验证了其与五维环形夸克规范理论的瞬子配分函数等价。对于退化情形，我们验证了其与同一理论中一个缺陷的配分函数等价，该函数也称为 Shiraishi 函数。在这两种情形下，我们都发现了吻合。这为重新推导 Shiraishi 函数的复杂方程开辟了道路：将其视为相应积分所满足的方程。这看似直接了当，但在技术上仍颇为复杂，因此留待未来研究。

1 引言

著名的 AGT 猜想 [1] 将四维 $\mathcal{N} = 2$超对称杨-米尔斯规范理论中的瞬子配分函数与二维 Liouville 共形场论的共形块联系起来。这种关系的具体实现各不相同，因为存在几种等价的描述：瞬子配分函数可以表示为 LMNS 多重围道积分 [2–4]，也可以表示为对分拆（杨图）求和的 Nekrasov 和 [5]。同样，二维共形块既可以借助算符乘积展开 [6, 7] 来表示，也可以借助自由场形式主义表示为 Dotsenko-Fateev 积分（矩阵模型）[8, 9]。这些不同的描述适用于不同的情境，并突显了问题中互为补充的性质。

在众多描述方式中，Dotsenko-Fateev（DF）积分形式主义具有显著优势 [9]。例如，它对积分围道的明确选择，使人们能够在所有参数取有限值时描述共形块。它还直接联系到发展成熟的矩阵模型理论，包括 Dijkgraaf-Vafa 相 [10] 以及关联函数的精确塞尔伯格-卡德尔公式 [11, 12]。最后但同样重要的是，它清晰地揭示了 AGT 猜想可视为矩阵模型的一种 Hubbard-Stratonovich 对偶 [13, 14]，其对应于对被积函数的两种不同展开。

自发现以来，人们便清楚地认识到，AGT 猜想有许多推广形式：有些显而易见，有些则更令人费解。以下是几个重要的推广方向：

- **q-变形**。在杨-米尔斯理论这一侧，这是从四维规范理论提升到五维规范理论 [15, 16]。在共形场论这一侧，这对应于 q-变形，即用三角函数替代共形场论中的基本有理函数。有时还存在更进一步的

六维推广，对应于用椭圆函数替代三角函数。

• **高亏格**。这意味着将定义共形场论的球面替换为环面或高亏格曲面。在规范理论一侧，这对应于更复杂的规范群箭图。特别地，环面上的共形块对应于如图 1 所示的环形箭图。注意，以这种方式，椭圆函数自然地出现在问题中；然而，这种椭圆化不同于与六维推广相关的椭圆化，而二者之间的相互作用仍是活跃研究的主题 [17–19]。

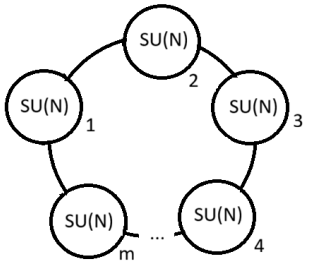

图 1： m类型 $SU(N)$规范群的环形箭图。

• **高秩**。这涉及高秩规范群，例如 $SU(N)$，而不是秩一群$SU(2)$。在共形场论一侧，这对应于将 Liouville共形场论推广为Toda理论，其中 Virasoro对称性增强为 $\mathcal{W}_N$ 代数 [20, 21]。

• **纳入缺陷**。这涉及规范理论中存在表面缺陷时的瞬子配分函数。在共形场论一侧，这对应于在共形块中纳入退化场 [22]。这类共形块受到特别关注，因为它们满足自然的微分方程 [23]。这可以简单地理解为退化顶点算符的零向量条件的推论。

同时开启上述列表中的多种推广时，会出现有趣的现象。例如，同时考虑 q形变并引入缺陷，会引出构造 q 共形块的非平稳差分方程这一问题，近期已有若干情形取得了一定进展 [24–28]。再举一例，关于同时考虑q形变与高亏格曲面的方向，目前所知甚少；当前论文是在亏格1（环面）这一方向上迈出的一小步。我们以两张表格的形式总结普通情形和 q变形情形的已知结果：一张列出相关结论和参考文献，另一张总结共形块的积分表示。

曲面	顶点算符	共形块	q–变形	瞬子配分函数
球面 $g=0$	4 一般	[9]	[16]	$SU(2)$ 与 $N_f=4$
	4 个一般，1 个退化	[22]	[25]	$SU(2)^2$ 与 $N_f=4$ 和希格斯化
	m 一般	[9]	[25]	$SU(2)^{m-3}$ 与 $N_f=4$
环面 $g=1$	1 一般	[31]	当前论文	$SU(2)$ 与伴随物质
	1 个一般和 1 个退化	[22]	当前论文	$SU(2) \rightleftarrows SU(2)$ 经希格斯化，或带伴随物质的轨形 $SU(2)$
	m 一般	[33]	当前论文	$SU(2)^m$ 的环形箭图
高亏格 $g\geq 2$	m 一般	[34]	未知	箭图 $SU(2)^{m+3g-3}$ 预期

曲面	共形块	q–变形
球面	$\left(\prod_i \int dz_i\right) \prod_{i\neq j} (z_i-z_j)^\beta \prod_i z_i^a \prod_{a=1}^m (x_a-z_i)^{\alpha_a}$	$\left(\prod_i \int d_q z_i\right) \prod_{i\neq j} \prod_{m=0}^{\beta-1} (1-q^m z_i/z_j) \prod_i z_i^a \prod_{a=1}^m \prod_{m=0}^{\alpha_a-1} (1-q^m z_i/x_a)$
环面	$\left(\prod_i \int dz_i\right) \prod_{i\neq j} \theta_p(z_i/z_j)^\beta \prod_i z_i^a \prod_{a=1}^m \theta_p(z_i/x_a)^{\alpha_a}$	$\left(\prod_i \int dz_i\right) \prod_{i\neq j} \prod_{m=0}^{\beta-1} \theta_p(q^m z_i/z_j) \prod_i z_i^a \prod_{a=1}^m \prod_{m=0}^{\alpha_a-1} \theta_p(q^m z_i/x_a)$
高亏格	应当可以按照 [34] 进行构造	未知

我们的研究结果之一是，在 q 和椭圆变形之后，含有退化场的共形块变成了 [29] Shiraishi 函数，并满足一个看似复杂的方程。如今，我们得到了该函数本身的简单积分表示，即一个类 DF 积分；而这个方程应当可以解释为零向量条件。待这一问题得到详细阐明后，我们希望能够从概念和技术层面澄清这一极其重要的课题 [30]。

本文结构如下。第 2 节回顾球面上多点共形块的 Dotsenko-Fateev 积分表示的构造，包括 AGT 猜想。随后在第 3 节和第 4 节中，我们分别考察球面上的 q-共形块以及环面共形块的推广。最后，在主要章节第 5 节中，我们将 q-变形与环面推广结合起来，给出环面情形下的q-变形 Dotsenko-Fateev 积分，并验证相应的 AGT 关系。第 6 节考察第 5 节构造的退化情形，并验证其与 Shiraishi 函数相符。结论部分第 7 节简要总结全文，并展望未来研究方向。

2 起点：球面上共形块的 AGT

正如 [8] 中最初阐述的那样，近期在 AGT 猜想的背景下， [9], 带有 $m+2$ 个穿孔的球面上的共形块可以表示为如下形式的多重围道积分

$$\mathcal{B}^{(g=0)} = \left(\int_0^{x_1} dz_1 \dots dz_{N_1}\right)\left(\int_0^{x_2} dz_{N_1+1}\dots dz_{N_1+N_2}\right)\dots\left(\int_0^{x_m} dz_{N_1+\dots+N_{m-1}+1}\dots dz_N\right)$$
$$\prod_{1\le i\ne j\le N}(z_i-z_j)^{\beta}\prod_{1\le i\le N} z_i^a (x_1-z_i)^{\alpha_1}\dots(x_m-z_i)^{\alpha_m} \tag{1}$$

其中，第一组 N_1 个变量在区间 $[0,x_1]$ 上积分，接下来的一组 N_2 个变量在区间 $[0,x_2]$ 上积分，依此类推，直到最后一组 N_m 个变量在区间 $[0,x_m]$ 上积分。积分变量总数为 $N=N_1+\dots+N_m$。不失一般性，我们可以令 $x_1=1$，那么共形块就是关于 x_2、……、x_m 的函数。

这个定义中一个重要的注意事项是积分路径的选择。显然，对于一般的复参数β、a、α_1、……、α_m，在简单区间 $[0,x_a]$ 上积分并不可行，因此应当将其替换为更复杂的积分路径，以适应被积函数的分支结构。欧拉贝塔函数的积分路径选择就是这一现象的著名例子：对于某些情形，区间 $[0,1]$ 已经足够，但通常需要将其替换为 Pochhammer 轮廓。为避免与积分路径选择相关的复杂性，我们在 [9] 中建议对 $\mathcal{B}^{(g=0)}$ 使用最简单的解析延拓变体：将所有参数 β、a、α_1、……、α_m 规定为正整数，并将所有积分路径都取为简单区间。这足以满足许多用途：事实上，若将 $\mathcal{B}^{(g=0)}$ 表示为关于 x_2、……、x_m 的幂级数，那么该级数的每一项都是关于 β、a、α_1、……、α_m、N_1、……、N_m 的有理函数，并且完全由正整数点集上的取值确定。

举个例子 ，对于 $m=2$，这给出了四点球面共形块的积分表示，

$$\mathcal{B}^{(g=0,m=2)}(x) = \int_0^1 dz_1\dots dz_{N_1}\int_0^x dz_{N_1+1}\dots dz_{N_1+N_2}\prod_{i\ne j}(z_i-z_j)^{\beta}\prod_i z_1^a(1-z_i)^{\alpha}(x-z_i)^{\alpha_2} \tag{2}$$

很容易通过级数验证

$$\mathcal{B}^{(g=0,m=2)}(x) = \text{const}\cdot x^d(1-x)^{\frac{-\alpha\alpha_2}{2\beta}}\left(1+B_1x+B_2x^2+\dots\right) \tag{3}$$

其中 $d=N_2+\alpha_2N_2+aN_2+\beta N_2(N_2-1)$ 和

$$B_1 = \frac{(\Delta+\Delta_2-\Delta_1)(\Delta+\Delta_3-\Delta_4)}{2\Delta} \tag{4}$$

$$B_2 = \frac{(\Delta+\Delta_2-\Delta_1)(\Delta+\Delta_2-\Delta_1+1)(\Delta+\Delta_3-\Delta_4)(\Delta+\Delta_3-\Delta_4+1)}{4\Delta(2\Delta+1)} + \frac{((\Delta_1+\Delta_2)(2\Delta+1)+\Delta(\Delta-1)-3(\Delta_1-\Delta_2)^2)((\Delta_3+\Delta_4)(2\Delta+1)+\Delta(\Delta-1)-3(\Delta_3-\Delta_4)^2)}{2(2\Delta+1)(2\Delta(8\Delta-5)+(2\Delta+1)c)} \tag{5}$$

with

$$\Delta_1 = \frac{a(a+2-2\beta)}{4\beta}, \quad \Delta_2 = \frac{\alpha_2(\alpha_2+2-2\beta)}{4\beta}, \quad \Delta_3 = \frac{\alpha(\alpha+2-2\beta)}{4\beta}, \tag{6}$$

$$\Delta_4 = \frac{(a+\alpha+\alpha_2+2\beta(N_1+N_2))(a+\alpha+\alpha_2+2\beta(N_1+N_2)+2-2\beta)}{4\beta}, \tag{7}$$

$$\Delta = \frac{(a+\alpha_2+2\beta N_2)(a+\alpha_2+2\beta N_2+2-2\beta)}{4\beta}, \tag{8}$$

$$c = 1-6(\beta-2+1/\beta) \tag{9}$$

可以看出，级数中的特定项，例如 $B_1, B_2, \ldots$，确实是我们之前讨论过的有理函数。级数展开 $B_1, B_2, \ldots$ 中的系数与通过 OPE 方法 [6] 得到的球面四点共形块的著名公式完全一致。

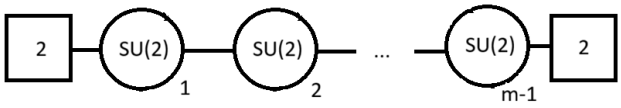

图 2：由 $m-1$ 个 $SU(2)$ 型规范群组成的线性箭图。该理论包含 4 个基本物质多重态，以矩形框表示。

在规范理论一侧，这一系列已知[6]对应于四维 $SU(2)$ 理论的瞬子配分函数，该理论含有 4 个基本物质多重态。更一般地，对于 $m \geq 2$，共形块已知 [7]对应于四维 $SU(2)^{m-1}$ 理论的瞬子配分函数，该理论具有线性夸克结构和 4 个基本表示，如图 2 所示。这概述了球面情形下的 AGT 关系，也是我们进行推广的出发点。

球面上的 3 q-变形

我们考虑的第一个推广是 q-变形。在这里，Virasoro 代数的 q-变形 [35] 自然导出球面共形块的 q-变形 [16] （近期综述见 [25] ）。

$$\mathcal{B}_q^{(g=0)} = \left(\int_0^{x_1} d_q z_1 \ldots d_q z_{N_1}\right)\left(\int_0^{x_2} d_q z_{N_1+1}\ldots d_q z_{N_1+N_2}\right)\ldots\left(\int_0^{x_m} d_q z_{N_1+\ldots+N_{m-1}+1}\ldots d_q z_N\right)$$
$$\prod_{1\leq i\neq j\leq N}\prod_{k=0}^{\beta-1}(1-q^k z_i/z_j)\prod_{1\leq i\leq N} z_i^a \prod_{k=0}^{\alpha_1-1}(1-q^k z_i/x_1)\ldots\prod_{k=0}^{\alpha_m-1}(1-q^k z_i/x_m) \tag{10}$$

简单来说，这种变形有两个重要影响：首先，在二点函数层面，差值的幂[1] 会直接被其 q移位后的对应项取代，

$$(1-x)^\alpha \quad \to \quad (1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{\alpha-1}x) \tag{11}$$

其次，围道积分会被离散化的 q积分取代，因此

[1]此时，为了简化表述，我们用（$1-x/y$）$^\alpha$ 替换（$y-x$）$^\alpha$，代价是参数之间的关系变得简单。

$$\int_0^x dz\ z^n = \frac{x^{n+1}}{n+1} \quad \to \quad \int_0^x d_q z\ z^n = \frac{(1-q)x^{n+1}}{1-q^{n+1}} \tag{12}$$

同样，我们假设 $\beta, a, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 都是正整数。于是， $\mathcal{B}_q^{(g=0)}$可以表示为关于$x_2, \ldots, x_m$ 的幂级数，其中每一项都是关于 $q^\beta, q^a, q^{\alpha_1}, \ldots, q^{\alpha_m}, q^{\beta N_1}, \ldots, q^{\beta N_m}$的有理函数。因此，正整数点集和上述简单的积分路径选择（q积分）足以完整描述这个级数。在规范理论一侧，已知当 $m = 2$ [16] 时，该级数与具有 4 个基本物质多重态的五维 $SU(2)$ 理论的瞬子配分函数相符。对于 $m > 2$，预计它与具有线性夸克和 4 个基本表示的五维 $SU(2)^{m-1}$ 理论的瞬子配分函数相符。

4 环面上共形块的 AGT

我们接下来考虑的推广是环面上的共形块。此处，如 [33] 中所解释并在 [31], 中进一步发展的，为了构造环面共形块的围道积分表示，只需在二点函数的层面将

$$(1-x)^\alpha \quad \to \quad \theta_p(x)^\alpha, \quad \theta_p(x) := \prod_{n=0}^{\infty}(1-p^n x)(1-p^{n+1}/x) \tag{13}$$

并且不要丢弃重要因子 $\prod_i z_i^a$。在球面上，这一因子曾用于表示插入点位于 0 处的二点函数；但在环面上，它具有完全不同的含义，即全纯微分的积分的指数化结果。这就得到环面上 m点共形块的如下积分，

$$\mathcal{B}^{(g=1)} = \left(\int_0^{x_1} d_q z_1 \ldots d_q z_{N_1}\right)\left(\int_0^{x_2} d_q z_{N_1+1} \ldots d_q z_{N_1+N_2}\right) \ldots \left(\int_0^{x_m} d_q z_{N_1+\ldots+N_{m-1}+1} \ldots d_q z_N\right)$$
$$\prod_{1\le i\ne j\le N} \theta_p(z_i/z_j)^\beta \prod_{1\le i\le N} z_i^a \theta_p(z_i/x_1)^{\alpha_1} \ldots \theta_p(z_i/x_m)^{\alpha_m} \tag{14}$$

其中，为满足荷守恒，应施加一个条件 $\alpha_1 + \ldots + \alpha_m + 2\beta N = 0$。采用与之前相同的方法，我们假设 β, a, $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ 为正整数，在不失一般性的情况下特化 $x_1 = 1$，并将 $\mathcal{B}^{(g=1)}$ 在 $p, x_2, \ldots, x_m$中展开为幂级数。于是，级数展开中的每一项都是参数的有理函数，并且可以由正整数点集完全确定。在规范理论一侧，对于 $m = 1$ [32] ，已知该级数与带有伴随物质的四维 $SU(2)$ 理论的瞬子配分函数相匹配。更一般地，对于 $m > 1$, 与带有环形箭图的四维 $SU(2)^m$ 理论之间的对应关系已在 [33]中建立。

环面上的 5 q 变形

有趣的是，可以看到 q 变形如何影响推广到环面的问题。仅仅是对二点函数进行变形这一问题就已经颇为复杂。我们提出以下方案

$$\begin{array}{ccccc} & & (1-x)(1-qx)\ldots(1-q^{\alpha-1}x) & & \\ & \nearrow & & \searrow & \\ (1-x)^\alpha & & & & \theta_p(x)\theta_p(qx)\ldots\theta_p(q^{\alpha-1}x) \\ & \searrow & & \nearrow & \\ & & \theta_p(x)^\alpha & & \end{array} \tag{15}$$

并通过下面的几项检验来论证其有效性。当然，理想情况下，我们希望将这种二点函数的选取与 q-Virasoro 代数的表示论联系起来。采用这种选取，我们得到环面上 m 点共形块的如下 q 变形，

$$\mathcal{B}_q^{(g=1)} = \left(\int_0^{x_1} d_q z_1 \dots d_q z_{N_1}\right)\left(\int_0^{x_2} d_q z_{N_1+1} \dots d_q z_{N_1+N_2}\right)\dots\left(\int_0^{x_m} d_q z_{N_1+\dots+N_{m-1}+1} \dots d_q z_N\right)$$
$$\prod_{1\le i\ne j\le N}\prod_{k=0}^{\beta-1}\theta_p(q^k z_i/z_j)\prod_{1\le i\le N} z_i^a \prod_{k=0}^{\alpha_1-1}\theta_p(q^k z_i/x_1)\dots\prod_{k=0}^{\alpha_m-1}\theta_p(q^k z_i/x_m) \tag{16}$$

与之前一样，我们施加 $\alpha_1+\ldots+\alpha_m+2\beta N=0$ 的荷守恒条件。我们可以再次采用之前的方法：假设 β，a，α_1，…，α_m 为正整数，将 $x_1=1$ 特化，并将 $\mathcal{B}_q^{(g=1)}$ 展开为关于 p，x_2，…，x_m 的幂级数。于是，级数展开中的每一项都是 q^β，q^a，q^{α_1}，…，q^{α_m}，$q^{\beta N_1}$，…，$q^{\beta N_m}$ 的有理函数，并且可以完全由这些正整数确定。

在规范理论一侧，我们预期 $\mathcal{B}_q^{(g=1)}$与带有环形箭图的五维$SU(2)^m$ 理论的瞬子配分函数相匹配。该配分函数可表示为对 $2m$ 分拆（杨图）$Y_{a,i}$ 求和，其中 $a=1,\dots,m$ 且 $i=1,2$：

$$Z=\sum_{\substack{\{Y_{a,i}\}\\1\le a\le m\\1\le i\le 2}}\prod_{i,j=1}^{2}\frac{\mathcal{N}_{Y_{1,i},Y_{2,j}}\left(f_1Q_{1,i}/Q_{2,j}\right)\mathcal{N}_{Y_{2,i},Y_{3,j}}\left(f_2Q_{2,i}/Q_{3,j}\right)\dots\mathcal{N}_{Y_{m,i},Y_{1,j}}\left(f_mQ_{m,i}/Q_{1,j}\right)}{\mathcal{N}_{Y_{1,i},Y_{1,j}}\left(Q_{1,i}/Q_{1,j}\right)\dots\mathcal{N}_{Y_{m,i},Y_{m,j}}\left(Q_{m,i}/Q_{m,j}\right)}\prod_{a=1}^{m}\Lambda_a^{|Y_{a,1}|+|Y_{a,2}|} \tag{17}$$

提醒一下，分拆是形如 $\lambda=(\lambda_1\ge\lambda_2\ge\ldots\ge\lambda_{\ell(\lambda)}\ge 0)$ 的序列。被加项是五维 Nekrasov 因子的乘积，它们定义于一对分拆 A,B 上，如下所示

$$\mathcal{N}_{A,B}(Q)=\prod_{(i,j)\in A}(1-Qq^{A_i-j}t^{B_j^T-i+1})\prod_{(i,j)\in B}(1-Qq^{-B_i+j-1}t^{-A_j^T+i}) \tag{18}$$

其中 $(i,j)\in A$ 是 $i=1,\dots,\ell(A)$ 和 $j=1,\dots,A_i$ 的简写。A（分拆中部分的个数）的长度记作 $\ell(A)$，大小（所有部分之和）记作 $|A|$。配分函数依赖于 m 参数 $f_1,\dots,f_m$（双基本场的指数化质量）以及 $2m$ 参数 $Q_{a,i}$，其中$a=1,\dots,m$ 且 $i=1,2$（指数化库仑参数），并且是变量 m $\Lambda_1,\dots,\Lambda_m$（瞬子计数参数）的级数。

我们将针对 $m=2$ 的最小非平凡值，对 $\mathcal{B}_q^{(g=1)}$ 和 Z 进行比较。在这种情况下，q 变形的共形块可以写成

$$\mathcal{B}_q^{(g=1,m=2)}(p,x)=\int_0^1 d_q z_1\dots d_q z_{N_1}\int_0^x d_q z_{N_1+1}\dots d_q z_{N_1+N_2}$$
$$\prod_{1\le i\ne j\le N}\prod_{k=0}^{\beta-1}\theta_p(q^k z_i/z_j)\prod_{1\le i\le N} z_i^a\prod_{k=0}^{\alpha_1-1}\theta_p(q^k z_i)\prod_{k=0}^{\alpha_2-1}\theta_p(q^k z_i/x) \tag{19}$$

其中假设了 $N=N_1+N_2$ 和荷守恒 $\alpha_1=-2\beta N-\alpha_2$。不难通过级数验证

$$\mathcal{B}_q^{(g=1,m=2)}(p,x)=\text{const}\cdot x^{-\alpha_2N_1+\beta N_2(N_2-1)}\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathcal{B}_{i,j}x^i(p/x)^j \tag{20}$$

直接计算可得前几个系数：$\mathcal{B}_{0,\,0}=1$ 以及

$$\mathcal{B}_{1,0}=\frac{q}{XX_2^2X_1^2(q-1)(\tau-1)(AXX_2^2q-\tau^2)(AXX_2^2-q)}\cdot\Big(A^2X^2X_1^2X_2^6\tau-A^2X^2X_1^2X_2^5\tau-AX^2X_1^2X_2^5\tau^2+AX^2X_1^2X_2^4q\tau+AX^2X_1^2X_2^4\tau^2-A^2X^2X_1X_2^4q-AX^2X_1X_2^4q\tau-AXX_1^2X_2^4q\tau+AXX_1^2X_2^4\tau^2+A^2X^2X_2^4q-A^2XX_1X_2^4\tau-AXX_1^2X_2^3\tau^2-AXX_1X_2^4\tau^2-XX_1^2X_2^3\tau^3+A^2XX_1X_2^3q+A^2XX_1X_2^3\tau+2AXX_1X_2^3q\tau+2AXX_1X_2^3\tau^2+XX_1X_2^3q\tau^2+XX_1X_2^3\tau^3-A^2XX_2^3q-AXX_1X_2^2q\tau-AXX_2^3q\tau-XX_1X_2^2q\tau^2+X_1^2X_2^2\tau^3+AXX_2^2q\tau-AXX_2^2\tau^2-AX_1X_2^2\tau^2-X_1X_2^2\tau^3+AX_2^2q\tau+AX_2^2\tau^2-AX_2q\tau-X_2q\tau^2+q\tau^2\Big)$$

$$\mathcal{B}_{0,1}=\frac{q}{X_2(q-1)(\tau-1)(-q+A)(Aq-\tau^2)}\cdot\Big(A^2X^2X_1^2X_2^4\tau+AX^2X_1^2X_2^4\tau^2-A^2X^2X_1X_2^4q-A^2X^2X_1X_2^4\tau-AX^2X_1^2X_2^3q\tau-AX^2X_1^2X_2^3\tau^2+A^2X^2X_1X_2^3q-A^2XX_1^2X_2^3\tau+AX^2X_1X_2^3q\tau+AXX_1^2X_2^3q\tau-AXX_1^2X_2^3\tau^2-XX_1^2X_2^3\tau^3+A^2XX_1X_2^3\tau+AXX_1^2X_2^2\tau^2+AXX_1X_2^3\tau^2+XX_1^2X_2^2\tau^3-2AXX_1X_2^2q\tau-2AXX_1X_2^2\tau^2+A^2XX_2^2q+AXX_1X_2q\tau+AXX_2^2q\tau+XX_1X_2q\tau^2-A^2XX_2q-AXX_2q\tau+AXX_2\tau^2+AX_1X_2\tau^2-XX_2q\tau^2+X_1X_2\tau^3-AX_2q\tau-AX_2\tau^2-X_1q\tau^2-X_1\tau^3+Aq\tau+q\tau^2\Big)$$

其中我们记 $\tau=q^\beta,\quad A=q^{a+1},\quad X_1=q^{\beta N_1},\quad X_2=q^{\beta N_2},\quad X=q^{\alpha_2}$。

同时， $m=2$ 的瞬子配分函数具有如下形式

$$Z^{(m=2)}=\sum_{Y_{1,1},Y_{1,2},Y_{2,1},Y_{2,2}}\prod_{i,j=1}^{2}\frac{\mathcal{N}_{Y_{1,i},Y_{2,j}}(f_1g_i/h_j)\mathcal{N}_{Y_{2,i},Y_{1,j}}(f_2h_i/g_j)}{\mathcal{N}_{Y_{1,i},Y_{1,j}}(g_i/g_j)\mathcal{N}_{Y_{2,i},Y_{2,j}}(h_i/h_j)}\,\Lambda_1^{|Y_{1,1}|+|Y_{1,2}|}\Lambda_2^{|Y_{2,1}|+|Y_{2,2}|}\tag{21}$$

其中我们记 $Q_{1,i}=g_i$,$Q_{2,i}=h_i$。容易通过级数验证

$$Z^{(m=2)}=\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_{i,j}\Lambda_1^i\Lambda_2^j\tag{22}$$

直接计算得到前几个系数：$\mathcal{Z}_{0,0}=1$ 以及

$$\mathcal{Z}_{1,0}=\frac{(1-\frac{f_1g_2}{h_1})(1-\frac{f_1g_2}{h_2})(1-\frac{f_2h_1t}{g_2q})(1-\frac{f_2h_2t}{g_2q})}{(1-\frac{g_1t}{g_2q})(1-\frac{g_2}{g_1})(1-t)(1-q^{-1})}+\frac{(1-\frac{f_1g_1}{h_1})(1-\frac{f_1g_1}{h_2})(1-\frac{f_2h_1t}{g_1q})(1-\frac{f_2h_2t}{g_1q})}{(1-t)(1-q^{-1})(1-\frac{g_1}{g_2})(1-\frac{g_2t}{g_1q})}$$

$$\mathcal{Z}_{0,1}=\frac{(1-\frac{f_1g_1t}{h_2q})(1-\frac{f_1g_2t}{h_2q})(1-\frac{f_2h_2}{g_1})(1-\frac{f_2h_2}{g_2})}{(1-\frac{h_1t}{h_2q})(1-\frac{h_2}{h_1})(1-t)(1-q^{-1})}+\frac{(1-\frac{f_1g_1t}{h_1q})(1-\frac{f_1g_2t}{h_1q})(1-\frac{f_2h_1}{g_1})(1-\frac{f_2h_1}{g_2})}{(1-t)(1-q^{-1})(1-\frac{h_1}{h_2})(1-\frac{h_2t}{h_1q})}$$

这只是一个例子。实际上，我们计算了系数 $\mathcal{B}_{i,j}$ 以及 $\mathcal{Z}_{i,j}$ ，直到 4 级（即 $0\le i+j\le 4$）。基于这些信息，我们提出五维瞬子分区函数与 q-变形共形块之间的以下精确关系：

$$\boxed{\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathcal{Z}_{i,j}\Lambda_1^i\Lambda_2^j=\sigma(p,x)\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathcal{B}_{i,j}x^i(p/x)^j}\tag{23}$$

在参数对应关系

$$\boxed{\begin{array}{c}\Lambda_1=q^{\beta-1}x,\quad \Lambda_2=q^{\beta-1+2\alpha_2+4\beta N}p/x,\quad t=q^\beta\\ h_1/h_2=q^{a+1-\beta},\quad g_1/g_2=q^{a+\alpha_2+2\beta N_2+1-\beta}\\ f_1f_2=q^{1-\beta+\alpha_2+\beta N},\quad f_2h_2/g_2=q^{1-\beta-\beta N_1}\end{array}}\tag{24}$$

其中修正因子 $\sigma(p,x)$ 为

$$\boxed{\begin{aligned}\sigma(p,x)=\ &\mathrm{pexp}\left(\frac{p}{x}\,\frac{q^{\alpha_2-1}(t-q)(t^{2N+2}-q^2)}{(1-q)(1-t)(1-p)}\right)\times\\ &\mathrm{pexp}\left(-p\,\frac{N(q+t)(1-t)^2+q^{\alpha_2}t^{2N+1}+q^{-\alpha_2+1}t^{-2N}+tq^{-\alpha_2}+q^{\alpha_2+1}+2(1+tq)}{(1-q)(1-t)(1-p)}\right)\end{aligned}}\tag{25}$$

我们提醒，任意有理函数 $f(q,\ t,\ p,\ x)$ 的 plethystic 指数定义为

$$\mathrm{pexp}\left(f(q,t,p,x)\right)=\exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{f(q^k,t^k,p^k,x^k)}{k}\right) \tag{26}$$

值得注意的是，修正因子 $\sigma(p,x)$ 完全不依赖于 a，而只取决于 N_1+N_2，并非分别取决于 N_1 和 N_2。因此，我们验证了截至 4 级的 q-变形环面共形块
与环形箭图的五维瞬子分区函数相匹配，至多相差
一个相对简单且与 a 无关的前因子。这是对 q 变形理论中 AGT 猜想的一项有趣检验，并将其推广到了球面之外。一般而言，对于 $m\geq 2$，我们预期分块 (16) 与配分函数 (17) 相匹配，至多相差一个与 a 无关的前因子。

这里简要说明一点：前因子对 x 的依赖完全由一个简单的 plethystic 指数捕获

$$\mathrm{pexp}\left(\frac{p}{x}\ \frac{q^{\alpha_2-1}(t-q)(t^{2N+2}-q^2)}{(1-q)(1-t)(1-p)}\right)$$

我们注意到，这个简单因子令人联想到拓扑弦环面几何中与无限条平行竖直线相关联的非紧致 BPS 态所作的贡献；该几何实现了具有环形箭图 $SU(2)^2$, 的规范理论，如图 3 所示。这或许能帮助我们理解函数 $\sigma(p,\ x)$ 的性质。$\sigma(p,\ x)$ 中的第二个因子不依赖于 x，只是一个依赖于 p 的常数。

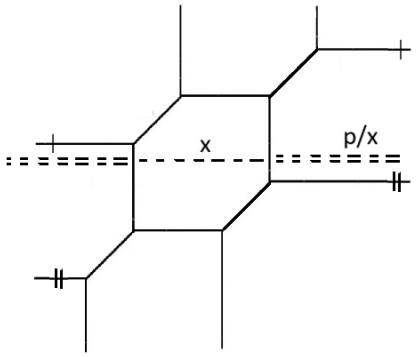

图 3：实现具有环形箭图 $SU(2)^2$ 的规范理论的拓扑弦几何。

6 环形箭图的缺陷：Shiraishi 函数

在考察了环形箭图的五维 AGT 对应的一般情形后，让我们转而关注如何引入缺陷。正如我们在引言中提到的，在共形场论一侧，这对应于退化场或顶点算符。在 AGT 对应的规范理论一侧，我们预期会看到带有缺陷的环形箭图配分函数，也称为 Shiraishi 函数 [24]。

众所周知，要使共形块退化，需要引入两个约束条件：例如参见 [22]，或较新的文献 [25]。在 Dotsenko-Fateev 形式中，这些约束条件作用于与退化插入点 z_a 相关的参数 α_a 和 N_a。我们不再从共形场论的基本原理出发，详细推导这一事实，而是直接通过计算，在当前记号下确定这些约束条件。再次考察球面上最简单的四点共形块，是很有启发性的：

$$\mathcal{B}^{(g=0,m=2)}(x)=\int_0^1 dz_1\dots dz_{N_1}\int_0^x dz_{N_1+1}\dots dz_{N_1+N_2}\ \prod_{i\neq j}(z_i-z_j)^{\beta}\prod_i z_1^a(1-z_i)^{\alpha}(x-z_i)^{\alpha_2} \tag{27}$$

并寻找使函数 $\mathcal{B}^{(g=0,m=2)}(x)$ 满足超几何二阶微分方程的 $(\alpha_2,\ N_2)$ 的取值。通过级数 (3) 直接计算可知，有 4 个可能的解 $(\alpha_2,\ N_2)$:

$$\mathrm{A})N_2=0,\quad \alpha_2=+1 \tag{28}$$
$$\mathrm{B})N_2=1,\quad \alpha_2=-\beta \tag{29}$$
$$\mathrm{C})N_2=0,\quad \alpha_2=-\beta \tag{30}$$
$$\mathrm{D})N_2=-\beta^{-1},\quad \alpha_2=+1 \tag{31}$$

请注意，A) 是 [22] 的首选，而 B) 是 [25] 的首选。相应的 DF积分为：

$$\mathcal{B}^{(A)}(x) = \int_0^1 dz_1 \dots dz_{N_1} \prod_{i\neq j}(z_i - z_j)^\beta \prod_i z_1^a (1-z_i)^\alpha (x - z_i) \tag{32}$$

$$\mathcal{B}^{(B)}(x) = \int_0^1 dz_1 \dots dz_{N_1} \int_0^w dz_{N_1+1} \prod_{i\neq j}(z_i - z_j)^\beta \prod_i z_1^a (1-z_i)^\alpha (x - z_i)^{-\beta} \tag{33}$$

$$\mathcal{B}^{(C)}(x) = \int_0^1 dz_1 \dots dz_{N_1} \prod_{i\neq j}(z_i - z_j)^\beta \prod_i z_1^a (1-z_i)^\alpha (x - z_i)^{-\beta} \tag{34}$$

$$\mathcal{B}^{(D)}(x) = \text{analytical continuation of } \mathcal{B}^{(g=0,m=2)}(x) \text{ to } N_2 = -1/\beta \text{ with } \alpha_2 = +1 \tag{35}$$

直接级数求值得到

$$\mathcal{B}^{(A)}(x) \;=\; \text{const} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} \frac{N_1\beta+a+\alpha+2-\beta}{\beta} & -N_1 \\ \frac{1+a}{\beta} & \end{matrix} \,\middle|\, x \right) \tag{36}$$

$$\mathcal{B}^{(B)}(x) \;=\; \text{const} \cdot x^{a-\beta+1} {}_2F_1\left(\begin{matrix} N\beta-\beta+1+a & \beta-N\beta-\alpha \\ a+2-\beta & \end{matrix} \,\middle|\, x \right) \tag{37}$$

$$\mathcal{B}^{(C)}(x) \;=\; \text{const} \cdot {}_2F_1\left(\begin{matrix} -a-\alpha-\beta N_1+2\beta-1 & \beta N_1 \\ \beta-a & \end{matrix} \,\middle|\, x \right) \tag{38}$$

$$\mathcal{B}^{(D)}(x) \;=\; \text{const} \cdot x^{1-\frac{1+a}{\beta}} {}_2F_1\left(\begin{matrix} N_1+\frac{\alpha}{\beta} & 1-N_1-\frac{a}{\beta} \\ 2-\frac{1+a}{\beta} & \end{matrix} \,\middle|\, x \right) \tag{39}$$

此时，我们可以讨论二阶超几何微分方程第二个解的存在性。事实上，众所周知，一对超几何函数

$${}_2F_1\left(\begin{matrix} a & b \\ c & \end{matrix} \,\middle|\, x \right), \quad x^{1-c} {}_2F_1\left(\begin{matrix} 1+a-c & 1+b-c \\ 2-c & \end{matrix} \,\middle|\, x \right)$$

给出同一个超几何方程的两个解。观察上面的公式，我们得出，$\mathcal{B}^{(B)}(x)$ $\mathcal{B}^{(C)}(x)$是一组这样的解，而 $\mathcal{B}^{(A)}(x)$ $\mathcal{B}^{(D)}(x)$是另一组。

因此，同一微分方程的两个互补解，总是对应于矩阵模型中同一个零矢量和同一个势（参数 α_2）的两种不同积分路径选择。不过，积分路径的选择颇为复杂：对于 $\mathcal{B}^{(B)}(x)$ $\mathcal{B}^{(C)}(x)$这一对，情况很简单：绕 $[0,1]$ 积分一次，或绕 $[0,x]$积分一次；而对于另一对 $\mathcal{B}^{(A)}(x)$ $\mathcal{B}^{(D)}(x)$，我们需要绕 $[0,1]$ 积分一次，或绕 $[0,x]$积分 $-1/\beta$次。这或许就是分支D）在 [22]中被忽略的原因。

确定了考虑退化共形块所需的一对约束条件后，现在让我们将其应用于我们感兴趣的情形：环面上的 q 形变共形块。如上所述，我们只需将超几何情形 A)–D) 进行推广。为简洁起见，我们将只考虑四种选项中的 A)。所得结果是一个 q 形变积分

$$\mathcal{B}_q^{(A)}(p,x) = \int_0^1 d_q z_1 \dots d_q z_N \prod_{1\le i\neq j\le N} \prod_{k=0}^{\beta-1} \theta_p(q^k z_i/z_j) \prod_{1\le i\le N} z_i^a \theta_p(q^k z_i/x) \prod_{k=0}^{\alpha_1-1} \theta_p(q^k z_i) \tag{40}$$

其中，条件 $\alpha_1 = -1 - 2\beta N$需要在求值后施加。函数 $\mathcal{B}_q^{(A)}(p,\ x)$ 将是我们匹配 Shiraishi 函数的首要候选。通过级数展开很容易验证，

$$\mathcal{B}_q^{(A)}(p,x) = \text{const} \cdot x^{-N_1} \sum_{i,j=0}^{\infty} \mathcal{B}_{i,j}^{(A)} x^i (p/x)^j \tag{41}$$

直接计算可得前几个系数：$\mathcal{B}_0^{(A)}{}_{,\,0} = 1$ 以及

$$\mathcal{B}_{1,0}^{(A)} = \frac{-q^{\beta-1-\beta N}(1-q^{\beta N})(1-q^{a-\beta N+1-\beta})}{(1-q^{\beta})(1-q^{a+1})}, \tag{42}$$

$$\mathcal{B}_{0,1}^{(A)} = \frac{-q(1-q^{\beta N})(1-q^{a+\beta N+2-\beta})}{(1-q^{\beta})(1-q^{a+2-2\beta})} \tag{43}$$

与此同时，秩 1 的 Shiraishi 函数定义为对两个分拆求和，

$$Z^{(\text{defect})}(x_1,x_2,p|y_1,y_2,s) = \sum_{\lambda^{(1)},\lambda^{(2)}} \prod_{i,j=1}^{2} \frac{\mathcal{N}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}^{(j-i)}(\widetilde{q}/\widetilde{t}\; y_j/y_i|\widetilde{q},s)}{\mathcal{N}_{\lambda^{(i)},\lambda^{(j)}}^{(j-i)}(y_j/y_i|\widetilde{q},s)} \prod_{b=1}^{2}\prod_{a\geq 1}\left(\frac{p\widetilde{t}x_{a+b}}{\widetilde{q}x_{a+b-1}}\right)^{\lambda_a^{(b)}} \tag{44}$$

其中求和项是轨形 Nekrasov 因子的乘积

$$\mathcal{N}_{\lambda,\mu}^{(k)}(u|\widetilde{q},s) = \prod_{1\leq a\leq b\leq \ell(\lambda)} \prod_{m=0}^{\lambda_b-\lambda_{b+1}-1} \left(1-u\widetilde{q}^m\widetilde{q}^{-\mu_a+\lambda_{b+1}}s^{-a+b}\right)^{\delta_{b-a-k|N}} \tag{45}$$

$$\prod_{1\leq a\leq b\leq \ell(\mu)} \prod_{m=0}^{\mu_b-\mu_{b+1}-1} \left(1-u\widetilde{q}^m\widetilde{q}^{\lambda_a-\mu_b}s^{a-b-1}\right)^{\delta_{b-a+k+1|N}} \tag{46}$$

其中 $\delta_{n|N}=1$ 若 n 模 $N=0$，而 $\delta_{n|N}=0$ 则为其他情况。这里 $x_{n+2}=x_n$。为方便起见，我们还定义 e

$$\psi(X,Y|\widetilde{q},\widetilde{t}|p,s) = Z^{(\text{defect})}\left(X^{1/2}p^{-1/2},X^{-1/2},p^{1/2}\middle|Y^{1/2}s^{-1/2},Y^{-1/2},s^{1/2}\right) \tag{47}$$

通过级数展开很容易验证

$$\psi(X,Y|\widetilde{q},\widetilde{t}|p,s) = \sum_{i,j=0}^{\infty} \psi_{i,j} X^i (p/X)^j \tag{48}$$

直接计算可得前几个系数：$\psi_{0,0}=1$ 以及

$$\psi_{1,0} = \frac{\widetilde{t}(1-\frac{1}{\widetilde{t}})(1-\frac{y}{\widetilde{t}s})}{\widetilde{q}(1-\frac{1}{\widetilde{q}})(1-\frac{y}{s\widetilde{q}})}, \tag{49}$$

$$\psi_{0,1} = \frac{\widetilde{t}(1-\frac{1}{\widetilde{t}})(1-\frac{1}{\widetilde{t}y})}{\widetilde{q}(1-\frac{1}{\widetilde{q}})(1-\frac{1}{y\widetilde{q}})} \tag{50}$$

我们实际上计算了 $\mathcal{B}_i^{(A)}{}_{,\,j}$ 和 $\psi_{i,\,j}$，直至 4 级。基于这些信息，我们提出了缺陷配分函数与 q 变形共形块之间的关系：

$$\boxed{\sum_{i,j=0}^{\infty}\psi_{i,j}X^i(p/X)^j=\rho(p)\sum_{i,j=0}^{\infty}\mathcal{B}^{(A)}_{i,j}x^i(p/x)^j} \tag{51}$$

在参数对应关系下

$$\boxed{\begin{array}{c}X=q^{-\beta N-1}x,\quad Y=q^{\beta-2+a}\\ \widetilde{t}=q^{-\beta N},\quad \widetilde{q}=q^{\beta},\quad s=q^{-1}\end{array}} \tag{52}$$

修正函数 $\rho(p)$ 与 a 和 x 无关。因此，我们验证到 4 级：环形箭图的缺陷配分函数（Shiraishi 函数）与退化环面 q-共形块相符，差别仅在于一个与 a 和 x 无关的前因子。与 $\sigma(p,\ x)$ 不同，我们没有关于 $\rho(p)$ 的简单猜想。

7 结论

新字典 (23) 和 (51) 本身就很有意思。这是对五维 AGT 猜想的一项非平凡检验，超越了最简单的线性夸克情形。作为副产品，我们确认了有趣的修正因子 $\sigma(p,\ x)$ 和 $\rho(p)$ 的存在。然而，这些新公式的潜在应用和实用价值远不止于此。我们列出以下一些简短的问题，新公式或许能在其中发挥作用：

• **Shiraishi 函数满足的方程**。众所周知，退化共形块满足简单的微分方程 [23]。特别是，当该共形块为五点球面块或两点环面块时，这些方程可以解释为非平稳微分方程 [22]。在 q-变形情形下，这些微分方程推广为非定常差分方程 [25]。人们相信，所有这些方程都可以通过 Virasoro 代数或 q-Virasoro 代数的退化 Verma 模的零向量条件得到简单解释或找到其起源。我们希望能为 Shiraishi 函数 [24] 满足的类似方程提供这样的阐释。我们提出的积分公式 (51) 有望将 Shiraishi 函数与零向量条件直接联系起来。

• **势与新的基底及级数展开**。 正如 [13], 所解释的，Dotsenko-Fateev 积分的被积函数可以在对称函数的各种基底中展开，从而可将 AGT 猜想推导为 Hubbard-Stratonovich 对偶。在（23）和（51）的背景下，这为将被积函数展开到某个特别优美的基底中，并由此获得 Shiraishi 函数的新级数展开提供了可能。这一问题值得研究，将留待其他地方讨论。

• **椭圆 SL（2，$\mathbb{Z}$）恒等式**。 在正在进行的项目中， [36], Shiraishi 函数被用于构造矩阵S 和 T，使其满足 SL（2，$\mathbb{Z}$）恒等式。这些矩阵通过引入与椭圆变形相关的两个参数 p，s，推广了精细化Chern-Simons理论的模矩阵 [37] 。需要注意的是， [36] 的作者依赖于特化 $\widetilde{t}^2\widetilde{q}^K=1$ 以及 Chern-Simons 能级 $K=2$ 来证明其结果。与此同时，公式（51）对于更一般的特化（24）同样成立，即 $\widetilde{t}^2\widetilde{q}^{2N}=1$ 满足 $N=1$，2，3，.....。因此可以推测，积分公式（51）或许有助于构造更高 Chern-Simons 能级 $K>2$下的椭圆 SL（2，$\mathbb{Z}$）恒等式。

经过 16 年的发展，AGT 关系仍是备受关注的重要课题，连接了多个研究领域，包括共形场论、超对称规范理论、拓扑弦、矩阵模型和可积系统。AGT 的高亏格推广仍有许多问题有待研究。当前论文在亏格1方向上迈出了谨慎的一步。探索将q-变形推广到亏格2及更高亏格的可能性，将会非常有趣。

致谢

我们的工作部分由俄罗斯科学院信息传输问题研究所的国家拨款资助。

参考文献

[1]L. Alday, D. Gaiotto 和 Y. Tachikawa, 《四维规范理论中的 Liouville 关联函数》, Lett.Math.Phys.91:167-197,2010, https://doi.org/10.1007/s11005-010-0369-5, https://arxiv.org/abs/0906.3219[2] G.Moore, N.Nekrasov, S.Shatashvili, 《对 Higgs 分支积分》, Comm.Math.Phys. 209 (2000) 97- 121, arxiv.org/abs/hep-th/9712241[3] A. Losev, N.Nekrasov, S.Shatashvili, 《拓扑规范理论中的问题》, Nucl.Phys.B534:549-611,1998, arxiv.org/abs/hep-th/9711108[4] A.Losev, N.Nekrasov, S.Shatashvili, 《检验 Seiberg-Witten 解》, arxiv.org/abs/hep-th/9801061[5] N.Nekrasov, 《通过瞬子计数得到 Seiberg-Witten 预势》, Adv.Theor.Math.Phys.7:831-864,2004, arxiv.org/abs/hep-th/0206161[6]A.Marshakov, A.Mironov, A. Morozov, 《共形块的组合展开》, Theor.Math.Phys.164:831-852,2010; Teor.Mat.Fiz.164:3-27,2010, arxiv.org/abs/0907.3946[7]V.Alba, And.Morozov, 《球面上共形块的 AGT 关系检验》, Nucl.Phys.B840:441- 468,2010, arxiv.org/abs/0912.2535[8] Vl.Dotsenko 和 V.Fateev, 《二维统计模型中的共形代数与多点关联函数》, Nucl.Phys. B240 (1984) 312-348[9]A.Mironov, A.Morozov, Sh.Shakirov, 《作为 Dotsenko-Fateev 积分判别式的共形块》, Int.J.Mod.Phys.A25:3173-3207,2010, arxiv.org/abs/1001.0563[10] R. Dijkgraaf, C. Vafa, 《矩阵模型、拓扑弦与超对称规范理论》, Nucl.Phys. B644 (2002) 3-20, arxiv.org/abs/hep-th/0206255[11] A. Selberg, 《关于一个多重积分的评注》(1944), Norsk Mat. Tidsskr. 26: 71–78[12] K. W. J. Kadell, 《Selberg–Jack 对称函数》, Adv. Math. 130 (1997) 33–102[13] A.Mironov, A.Morozov, Sh.Shakirov, 《β 下 AGT 猜想的直接证明 $= 1$》, JHEP 1102:067,2011, arxiv.org/abs/1012.3137[14] A. Mironov 和 A. Morozov, 《超可积性作为 Nekrasov 计算的隐秘起源》, Phys. Rev. D 106 (2022) no.12, 126004, arXiv.org/abs/2207.08242[15] H. Awata, Y. Yamada, 《五维 AGT 猜想与变形 Virasoro 代数》, JHEP 1001:125,2010, arxiv.org/abs/0910.4431[16] A.Mironov, A.Morozov, Sh.Shakirov, A.Smirnov, 《将 AGT 猜想证明为 HS 对偶：推广到五维》, Nucl.Phys. B855 (2012) 128-151, arxiv.org/abs/1105.0948[17]P. Koroteev, Sh. Shakirov, 《量子 DELL 系统》, Lett. Math. Phys. 110 (2020)969-999, arxiv.org/abs/1906.10354[18] A. Mironov, A. Morozov 和 Y. Zenkevich, 《椭圆 Ruijsenaars 系统与椭圆对称函数中的对偶性》, Eur. Phys. J. C 81 (2021) no.5, 461, arxiv.org/abs/2103.02508[19]A. Mironov 和 A. Morozov, 《DELL 系统的现状》, Nucl. Phys. B 999 (2024), 116448, arxiv.org/abs/2309.06403[20] N. Wyllard, 《 A_{N-1} 共形 Toda 场论中来自共形 $\mathcal{N} = 2SU(N)$箭图规范理论的关联函数》, JHEP 0911:002,2009, arxiv.org/abs/0907.2189[21] A. Mironov 和 A. Morozov, 《U(3) 情形下的 AGT 关系》, Nucl. Phys. B 825 (2010), 1-37, arxiv.org/abs/0908.2569[22] A.Marshakov, A.Mironov, A.Morozov, 《插入曲面算符时的 AGT 关系与 β 系综的定态极限》, J.Geom.Phys.61:1203-1222,2011, arxiv.org/abs/1011.4491

[23] A. Belavin、A. Polyakov 和 A.B. Zamolodchikov，二维量子场论中的无限共形对称性（1984），《核物理B》241 (2)：333–380[24]J. Shiraishi，仿射筛选算子、仿射拉蒙空间及关于非定常 *Ruijsenaars* 函数的猜想，arxiv.org/abs/1903.07495[25]Sh.Shakirov，*q-Virasoro* 共形块的非定常差分方程，《数学物理快报》114 (2024) 115，arxiv.org/abs/2111.07939[26] H.Awata、K.Hasegawa、H.Kanno、R.Ohkawa、Sh.Shakirov、J.Shiraishi、Y.Yamada，非定常差分方程与仿射拉蒙空间：离散 *Painlevé´*方程的量子化，SIGMA 19 (2023)，089，arxiv.org/abs/2211.16772[27] H.Awata、K.Hasegawa、H.Kanno、R.Ohkawa、Sh.Shakirov、J.Shiraishi、Y.Yamada，非定常差分方程与仿射拉蒙空间 *II*：量子 *Knizhnik-Zamolodchikov*方程，SIGMA 20 (2024)，077，arxiv.org/abs/2309.15364[28] H.Awata、K.Hasegawa、H.Kanno、R.Ohkawa、Sh.Shakirov、J.Shiraishi、Y.Yamada，非定常差分$\widehat{}$方程与仿射拉蒙空间 *III*：推广至 $\mathfrak{gl}_N$，arxiv.org/abs/2510.27142[29] H. Awata、H. Kanno、A. Mironov 和 A. Morozov，*Shiraishi* 函数作为非定常双椭圆函数的椭圆提升，《高能物理杂志》**08** （2020），150，arXiv.org/abs/2005.10563[30] A. Mironov、A. Morozov、A. Popolitov 和 Z. Zakirova，三元组之菱形，《实验与理论物理快报》**121** （2025）第9期，788-795，arXiv.org/abs/2503.07592[31] A.Mironov、A.Morozov、Sh.Shakirov，关于环面共形块的*"Dotsenko-Fateev"*表示，J.Phys.A44:085401,2011，arxiv.org/abs/1010.1734[32] V.Alba、And.Morozov，由一点环面共形块得到的 *AGT* 关系的非共形极限，JETP Lett.90:708-712,2009，arxiv.org/abs/0911.0363[33]K.Maruyoshi、F.Yagi，通过广义矩阵模型得到 *Seiberg-Witten* 曲线，JHEP 1101:042,2011，arxiv.org/abs/1009.5553[34] G.Bonelli、K.Maruyoshi、A.Tanzini、F.Yagi，各阶数下的广义矩阵模型与 *AGT*对应，JHEP 1107:055,2011，arxiv.org/abs/1011.5417[35] J.Shiraishi、H.Kubo、H.Awata、S.Odake，*Virasoro* 代数的量子变形与 *Macdonald* 对称函数，《数学物理快报》38 (1996) 33，doi.org/10.1007/BF00398297，arxiv.org/abs/q-alg/9507034[36]S.Arthamonov、Sh.Shakirov，球面 *DAHA* 的椭圆推广 A_1 在 $K = 2$，IMRN 19(2024)13046–13084，arxiv.org/abs/2306.00215[37] M.Aganagic、Sh.Shakirov，精细化 *Chern-Simons*理论中的纽结同调，《数学物理通讯》333 (2015) 1，187-228，arxiv.org/abs/1105.5117