arXiv:2512.23908v1 [hep-th] 30 Dec 2025

非余切型库仑分支：物理学视角

Mykola Dedushenko[1,2] 和 Daniel Resnick[3]

[1]数学与交叉科学中心，复旦大学，中国上海，
200433。

[2]上海数学与交叉科学研究院（SIMIS），中国上海，200433。

[3]C.N. Yang 理论物理研究所，石溪大学，美国纽约州
石溪，NY 11794。

摘要

我们研究具有一般伪实表示$\mathbf{R}$ 中的半超多重态的三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的库仑分支扇区（“非余切”理论）。由此得到库仑分支的（短）量子化，以及由一维拓扑扇区捕获的库仑分支算符的关联函数。为此，我们将半球配分函数方法推广到非余切物质。在这种情况下，首先必须抵消宇称反常，并克服这样一个障碍：半超多重态的（2,2）边界条件通常与规范对称性不相容。通过对规范场施加狄利克雷边界条件，并仔细处理半超多重态的边界数据，我们描述了由此得到的、实现HS^3上单极子插入（包括气泡效应）的移位/差分算子，并将 HS^3 配分函数视为库仑分支算符代数 $\mathcal{A}_C$ 作用其上的自然模。作为应用，我们推导了一般物质的$\mathcal{A}_C$ $SU(2)$理论的生成元与关系（包括半整数自旋表示），分析具有库仑分支 $y^2=z(x^2-1)$的理论，计算带有自旋-$\frac{3}{2}$ 半超多重态的 A_n夸克图的库仑分支，并检验一般单极子-反单极子二点函数的一致性。

目录

1 引言 **2**

2 具有半超多重态的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论（位于 S^3 8 上）

2.1 一般 $\mathcal{N}=4$ 理论及其 $\mathcal{N}=2$ 描述.8 2.2 来自实条件的半超多重态.9 2.3 $\mathbb{Z}_2$ 反常.10 2.4 S^3 上的作用量与超对称.11

3 受保护的扇 区 14

3.1 希格斯扇区.15 3.2 库仑扇区.17

4 超对称粘合公式 19

4.1 为何旧方法需要升级.19 4.2 切割界面.20

5 移位/差分算子 25

5.1 HS^3 配分函数.25 5.2 移位/差分算子.29 5.3 代数一致性，或多项式性与混合.31

6 例子 **37**

6.1 带半超多重态的广义 $SU(2)$.37 6.2 具有 D_2 库仑分支的理论.39 6.2.1 $SU(2)$，带自旋为$\frac{3}{2}$的半超多重态.39 6.2.2 $SU(2)$，带两个基本超多重态.41 6.2.3 $SU(2)$，带完整伴随超多重态.42 6.3 $SU(2)$群的夸克图.43

7 展望 **44**

A 关联函数 **46**

1 引言

具有 $\mathcal{N}=4$超对称的三维理论拥有大量可精确求解的结构，包括真空模空间 [1] （尤其是希格斯分支和库仑分支）、各种对偶，包括三维镜像对称 [2–4] 和辛对偶 [5,6]，以及超对称配分函数和关联函数 [7–11]。库仑分支尤为微妙：与（纯粹经典的）希格斯分支 [12], 不同，它受到强量子效应 [1, 4, 13–15], 的塑造；在拉格朗日描述中，自然可通过无序缺陷——单极算符 [16–19]来探测。相较于普通的局域（有序）算符，在无序算符存在时定义并控制量子场论本质上更为困难，而且往往涉及强耦合现象。

正因如此，对库仑分支的恰当描述直到相对较近的时期才出现。部分受到早期物理学见解（如单极公式 [20], 的启发，数学文献中的相关研究由 [21–23]率先开展。后来，通过阿贝尔化 [24] 以及超对称局域化 [10, 11] （后者最终为阿贝尔化提供了论证），人们发展出了一种更加透明地体现物理观点的方法。然而，这些方法主要处理三维 $\mathcal{N}=4$ 拉格朗日理论中的余切 类型，即其超多重态物质为余切丛 $T^*\mathcal{R}$ 的理论（等价地说，是$\mathcal{R}\oplus\mathcal{R}$中的半超多重态，或是$\mathcal{R}$中的完整超多重态）。相比之下，在非余切 理论中，物质场由取值于一般伪实表示$\mathbf{R}$ 的半超多重态组成，而该表示并非 $T^*\mathcal{R}$的形式。在最近的一项数学工作 [25]之前，它们的库仑分支一直较难处理。本文旨在将 [10,11] 中的基于局域化的技术推广到非余切情形。

当我们允许一般的伪实$\mathbf{R}$时，会出现两个在$\mathbf{R}=\mathcal{R}\oplus\mathcal{R}$时不存在的新问题。第一个是 $\mathbb{Z}_2$反常,┐即三维宇称反常 [26–28]。对于完整超多重态，这种反常会自动消去；但对于一般的$\mathbf{R}$ ，则未必如此。在非超对称三维规范理论中，可以通过添加陈–西蒙斯（CS）反项来消去宇称反常；但在 $\mathcal{N}=4$ 理论中，这类项通常会使 $\mathcal{N}=4$ 降至 $\mathcal{N}=3$ [29, 30]。因此，我们将讨论范围限制在无反常理论中：在这类理论里，$\mathbf{R}$ 中的物质场在低能下无法产生半整数陈–西蒙斯项（见第2.3节）。反常消去条件也可以表述为（见 [25, 附录 B]）映射 $\pi_4 G\to\pi_4\mathrm{Sp}(\mathbf{R})$为零，其中 $G\to\mathrm{Sp}(\mathbf{R})$是给定表示的一种写法，旨在显明八个超荷所要求的四元数结构。这是消去四维 [31]中 Witten $SU(2)$反常的熟知条件：遭受四维$SU(2)$反常的理论形式上降维后，会成为具有宇称反常的三维理论。由于这种联系，半超多重态的宇称反常有时会被非正式地称为

Witten反常，尽管前者是三维效应，而后者本质上是四维效应，并会使理论自相矛盾。（与 Witten反常不同，宇称反常可以通过反项消去；在我们的 $\mathcal{N}=4$ 设定中，这类反项通常会降低超对称性。）

第二个微妙之处在研究 (2，2) 边界条件 [6, 32,33] 时便显现出来。对于（半）超多重态，这类边界条件要求选取一个分解 $\mathbf{R} \cong \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$，其中 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{L}^{\perp}$ 是互补的拉格朗日子空间。对于完整超多重态，$\mathbf{R} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$ 提供了一个与规范对称性相容的自然分解。相比之下，真正的半超多重态的定义性特征恰恰在于，不存在这样的 G-不变拉格朗日分裂。因此，半超多重态不允许 G-不变的 (2，2) 边界条件。这会给规范场的纽曼边界条件带来问题，因为这类边界条件必须保持边界处的规范对称性。[1] 然而，规范场的狄利克雷边界条件与在边界处显式破缺 G 相容（此时它成为整体对称性）。由于 [10, 11] 的方法依赖于 (2，2) 边界条件，但对规范场仅使用狄利克雷边界条件，因此我们仍可继续，不过推导联系 S^3 与 HS^3 配分函数的粘合公式的类似形式时，需要格外谨慎。

技术概述

让我们简要回顾一下 [10, 11] 中发展出的库仑分支研究方法，并说明非余切理论需要做哪些修改。在同上中，通过在半球 HS^3 上施行超对称局域化来研究库仑扇区 $\mathcal{A}_C$，并采用 (2，2) 边界条件。[2] 局域化是相对于超荷 $\mathcal{Q}_C$ 进行的（该超荷与边界条件相容），其平方等于对 HS^3 的 $U(1)_J$ 旋转与一个 $U(1)_H \subset SU(2)_H$R- 对称性变换之和。在整个球面上，$U(1)_J$ 的不动点集是一个圆 $S^1 \subset S^3$；在半球上则是一个区间（半圆）$HS^1 \subset HS^3$（见图1）。$\mathcal{Q}_C$ 的上同调包含沿着该 S^1 或 HS^1 插入的局域库仑分支算符。在一点处$0 \in S^1$，它们构成库仑分支手征环（处于某个复结构中）；然而，沿着 S^1 移动时，它们会发生非平凡的 $SU(2)_C$ 旋转。这类扭曲库仑分支算子构成一个一维拓扑扇区，最初是在 [37, 38] 中为平直时空超共形场论定义的。这些局域算符的代数 $\mathcal{A}_C$ 给出库仑分支的一种短量子化 [39–42]，

[1] 人们可以考虑在规范固定的理论中施加边界条件来解决这一问题，但我们预计，有问题的边界条件会违反 BRST对称性，或以其他方式变得不一致。[2] 众所周知，半球配分函数在二维物理中十分有用 [34–36]，，而如今我们也了解到它们在三维中的用途，例如本文及早期文献所述。

其中 $\frac{1}{r}$（即 S^3 的逆半径）是量子化参数。 $\mathcal{A}_C$ 的交换极限，也就是平直空间极限 $r \to \infty$，恢复了库仑分支的坐标环 $\mathbb{C}[X_C]$ 。

局域化使我们能够计算沿 $HS^1 \subset HS^3$ 插入扭曲库仑分支算子后得到的半球配分函数。通过粘合第二个半球，还可以恢复 SCFT 关联函数，从而得到带有如图 2 所示插入的完整 S^3 ；这在 “ 好 ” 理论或 “ 丑 ” 理论 [15] 中定义良好。不过，我们的半球构造能够独立于理论属于“好／丑／坏”哪一类，给出代数 $\mathcal{A}_C$ 及其在半球上的表示，因此尤其有力。

矢量多重态在 HS^3 上的 (2，2) 边界条件可用 (σ， B) 参数化，其中 $\sigma \in \mathfrak{t}$ 是取值于 Cartan 子代数的实边界质量（即矢量多重态标量的边界值）， $B \in \Lambda^\vee \subset \mathfrak{t}$ 是表示穿过边界的磁通量的余权（回忆一下，非阿贝尔磁通量属于余权格$\Lambda^\vee$，它是 Langlands 对偶群或 GNO 对偶群 [43] 的权格），见式 (4.15)。对于半超多重态，边界条件由拉格朗日分裂$\mathbf{R} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^\perp$ 标记，见式 (4.17)。由此得到的半球配分函数称为半球波函数，它依赖于 (σ， B) 和 $\mathbb{L}$:

$$Z_{HS^3}(\sigma, B; \mathbb{L}) \in Fun(\mathfrak{t} \times \Lambda^\vee, \mathbb{C}), \tag{1.1}$$

其中我们有意不明确指定函数空间。事实上，它对实变量 σ 是光滑的（但对于复数 σ 有极点）。空半球配分函数为:

$$Z_{HS^3}(\sigma, B; \mathbb{L}) = \delta_{B,0} \frac{\prod_{w \in \mathbb{L}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma\left(\frac{1}{2} - iw \cdot \sigma\right)}{\prod_{\alpha \in \Delta} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \Gamma(1 - i\alpha \cdot \sigma)}. \tag{1.2}$$

这里， Δ 是 G 的所有非零根的集合；我们还滥用了记号，用同一符号 $\mathbb{L}$ 表示 $\mathbb{L} \subset \mathbf{R}$ 中权的集合。

在这一形式体系中，磁单极算子插入通过 (σ, B) 上的移位/差分算子作用于 $Z_{HS^3}(\sigma, B; \mathbb{L})$，由此可得到 $\mathcal{A}_C$ 在半球波函数空间上的显式作用。这样，我们生成一个 $\mathcal{A}_C$-模:

$$\mathbb{M} = \mathcal{A}_C \, Z_{HS^3}(\sigma, B; \mathbb{L}). \tag{1.3}$$

我们通过代数 $\mathcal{A}_C$ 在 $\mathbb{M}$上的作用来定义它，因此按定义，这个表示是忠实的，也就是说，模 $\mathbb{M}$ 中满足的关系恰好就是 $\mathcal{A}_C$中的关系。这

是合理的，因为受保护的一维库仑分支扇区中的关联函数可以通过这个表示还原，而量子场论中的算符代数正是由“关联函数下”的关系所定义的。

我们将在 $\mathcal{A}_C$ 中找到两类生成元：作用于 Z_{HS^3} 的标量以对角方式作用，只需将其乘以 $\Phi = \frac{1}{r}\left(\sigma + \frac{i}{2}B\right)$; -以及作为移位算子运行的 BPS 单极子，它们通过单极子的荷对 B 进行移位，并且还根据 σ 的 BPS 条件进行移位。磁单极子的荷由余特征 Hom($U(1)$ G) $/G \cong$Hom($U(1)$ T)$/\mathcal{W}$ 标记，其中 $T \subset G$ 是极大环面， $\mathcal{W}$ 是 G 的韦伊群。因此，一般的非阿贝尔单极子的荷由余权格 Hom($U(1)$ T) 中的韦伊群轨道标记。给定这样一个轨道 $\mathcal{W}b \subset$Hom($U(1)$ T)，其中 b 是一个参考余权（例如占优余权），相应的非阿贝尔单极算符可以写成一组 阿贝尔化单极子 $M^{b'}$ 对 $b' \in \mathcal{W}b$ 求和的形式。在许多情况下，$M^{b'}$ 的行为类似于由极大环面 T 给出的规范群的单极子。这大致就是阿贝尔化的核心思想：相对于极大环面解决所有问题，然后通过对韦伊轨道求和来恢复非阿贝尔答案。不过，这留下了一个微妙之处，即单极子冒泡的可能性，我们马上就会讨论这一点。

阿贝尔化单极算符 M^b 的一般表达式为：

$$M^b = \frac{\text{Polynomial in } \Phi}{\text{Polynomial in } \Phi} e^{-b\cdot\left(\frac{i}{2}\partial_\sigma + \partial_B\right)}, \tag{1.4}$$

其中，分子和分母中的多项式来自半球上的单圈行列式，而 $e^{-b\cdot}$ （$\frac{i}{2}\partial_\sigma + \partial_B$）表示变量的必要平移（$\sigma$， B）。具体表达式见（5.9）（事实上，这些算符有两种表示，分别对应半圆的两个端点 HS^1，如其中所述）。

阿贝尔化单极算符 M^b 的表达式中只有非阿贝尔理论会出现分母，它们体现了 W 玻色子的影响。这些分母还会带来一些麻烦：如果我们直接取韦尔群平均单极算符 $\sum_{b' \in \mathcal{W}b} M^{b'}$（以及修饰单极子和 Φ中的韦尔群不变多项式），它们将无法通过多项式关系闭合成一个代数。涉及 Φ 的分母会出现在关系中，这并不理想： $\mathcal{A}_C$ 应当是全局函数环 $\mathbb{C}[X_C]$ 的量子化，而关系中不应出现任何分母。解决办法来自于处理另一个重要的微妙之处。

非阿贝尔理论中的 BPS 方程 [11, eqn. 2.11] 几乎处处将我们限制在 $T \subset G$ （即强制实现阿贝尔化）。然而，在单极子附近，它们看起来像 Bogomolny方程（四维情形见 [44] ），并允许存在“无穷远处的解”（在场空间中），其中动力学磁单极子会屏蔽外部奇异磁单极子 [45–47],

这种屏蔽发生在单极算符的无穷小邻域中。屏蔽效应是一种非阿贝尔现象，在某种程度上类似于 Nekrasov 瞬子配分函数 [48]（它通过 Kronheimer 对应 [49]与之相关）。然而，当这种现象发生在无穷小邻域中时，它会以任意小的幅度破坏“阿贝尔性”，同时仍与超对称局域化相一致。因此，正确的物理单极子所对应的，可能不仅仅是 M^b 的韦伊平均，还可能是 $M^b + \sum_v Z_{b\to v}(\Phi) M^v$ 的韦伊平均；这里对单极子 b 可以被屏蔽成的所有可能单极子荷 v 求和（按照 [45] 的术语，它们是与 b 相关的 v）。这种屏蔽现象称为单极子冒泡，在文献中颇受关注。对冒泡贡献进行直接分析相当困难 [44, 50–52], ，因此有人采用了受弦理论启发的方法 [53–57], ，并进一步将其用于其他问题（包括库仑分支） [58–60]。对我们而言，重要的是起泡系数 $Z_{b\to v}(\Phi)$ 可能是关于 Φ的有理函数，因此也会有分母。此外，这些分母会恰好以一种精巧的方式相互抵消，使得组合后的算符 $M^b + \sum_v Z_{b\to v}(\Phi) M^v$ 在经过韦伊平均后，构成的代数仅由多项式关系定义。最终答案中不会出现分母，这是必要的。事实上，我们将其表述为一个假设，即多项式性假设，并在此假设下开展工作：

$\mathcal{A}_C$ 由 Weyl 不变多项式 $P(\Phi)$ 和着装泡单极生成，并满足多项式关系。

代数结构环环相扣，仅凭这一假设几乎就能唯一确定冒泡系数。我们认为，这一假设未能确定的冒泡系数自由度，只有将它们平移多项式的可能性。更一般地说，这种自由度就是算符混合，也就是在局域算子空间中选择基的自由度。我们发现了支持以下多项式性猜想 [11] 的经验性证据：

多项式性假设确定了所有冒泡系数，但允许进行多项式平移 $Z_{b\to v}(\Phi) \mapsto Z_{b\to v}(\Phi) + P(\Phi)$。

我们总能消除算符混合，因此也可以将其等价地表述如下：

假设多项式性假设成立，我们可以找到一个生成元基，在该基下，冒泡系数是已知的。

该基可能不同于通过路径积分中的奇点定义的单极算符，但它使我们能够完整计算 $\mathcal{A}_C$。在 [11] 中，多项式性猜想已针对具有完整超多重态以及秩至多为二的单纯规范群（及其乘积）的理论得到明确证明。在当前工作中，我们将把这一结果推广到半超多重态和规范群 $SU(2)$（包括许多份 $SU(2)$ 的乘积）。我们注意到的一个有趣现象是，多项式性假设的保持，即极点的消去，关键取决于 $\mathbb{Z}_2$ 反常的消去。最终，我们在 $\mathcal{A}_C$ 中得到了一组明确的生成元与关系，并且可以通过应用粘合公式来计算关联函数。

我们还想提及几篇近期关于库仑分支的论文： [61]明确提到了极点的抵消； [62] 用 Raviolo 顶点代数描述真空态空间； [63], 和 [64] 重新审视了从物理角度推导 BFN库仑分支的过程。

本文其余部分安排如下。第 2 节回顾含半超多重态的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论的结构。我们分别用 $\mathcal{N}=2$ 语言以及将其视为含完整超多重态理论的实轨迹这两种方式来描述它们，解释 $\mathbb{Z}_2$（宇称）反常的抵消，并给出含半超多重态的理论在 S^3上的作用量和超对称变换。

第 3 节回顾希格斯分支和库仑分支受保护扇区，以及 [9–11]的结果。在希格斯分支方面，我们将讨论扩展到半超多重态（这很直接）；在库仑分支方面，我们则为 [10, 11]的构造补充背景介绍。

在第 4 节中，我们将 [65,66] 的粘合公式扩展到半超多重态的情形，并克服了一些表面上的障碍。在第 5 节中，我们介绍半球配分函数及由此得到的移位/差分算子。我们还讨论单极子冒泡及相关的代数一致性条件。

最后，在第 6 节中，我们通过一系列例子说明这一形式体系。首先，我们推导具有一般物质内容的 $\mathcal{A}_C$ in $SU(2)$ 规范理论的生成元与关系，其中包括至少一个具有半整数 $SU(2)$ 自旋的物质表示。随后，我们分析这样一类 $SU(2)$ 理论：其库仑分支为 $y^2=z(x^2-1)$（即“D_2”几何；该几何在原点处是正则的，并具有两个孤立的 A_1 奇点）。特别地，在一个含有单个自旋-$\frac{3}{2}$ 半超多重态的 $SU(2)$ 理论中，这些 A_1 奇点必须支撑具有三维 $\mathcal{N}=4$ 超共形场论的A_1 库仑分支且没有希格斯分支。作为最后一个应用，我们计算一个 A_n 夸克图的库仑分支：每个节点处为 $SU(2)$，每条边上都有双基本超多重态，并且每个规范节点都连接一个自旋-$\frac{3}{2}$ 半超多重态味，如图 4 所示。之后，我们以一些额外的一般事实和开放问题作结。

2 带有半超多重态的三维 $\mathcal{N}=4$ 理论（位于 S^3 上）

在本节中，我们回顾三维 $\mathcal{N}=4$ 超对称拉格朗日的构造，其中涉及与 S^3 上的矢量多重态耦合的半超多重态。构造这类理论的最简单方法，是从完整超多重态出发，并对超多重态场施加实条件，具体如下文所述。

2.1 一般 $\mathcal{N}=4$ 理论及其 $\mathcal{N}=2$ 描述

一般的三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论由以下数据刻画：紧致规范群 G、G 的一个伪实（也称四元数）厄米表示$\mathbf{R}$，以及一组质量参数和 Fayet–Iliopoulos（FI）参数。伪实表示$\mathbf{R}$ 是指具有伪实结构 ρ 的复表示。后者等价于$\mathbf{R}$ 上存在一个 G-不变的辛结构，该结构确立了$\mathbf{R}$ 与其对偶表示（通过不变厄米结构与复共轭表示相对应）之间的同构，

$$\begin{aligned} &\rho : \mathbf{R} \to \overline{\mathbf{R}}, \\ &\bar{\rho} \circ \rho = -1, \quad \text{(anti-involution)} \end{aligned} \tag{2.1}$$

其中 $\bar{\rho}: \overline{\mathbf{R}} \to \mathbf{R}$ 是共轭映射。性质 $\bar{\rho}\circ\rho=-1$ 使我们无法在$\mathbf{R}$ 上施加实条件（不同于具有实结构的情形）。因此，一般的半超多重态取值于一个辛表示（$\mathbf{R}$ ρ），该表示由同态 $G \to USp(\mathbf{R})$ 定义。

从三维 $\mathcal{N}=2$ 子代数的角度来看这类理论，往往能获得启发。从这一视角看，该理论由以下部分构成：

- 一个规范群为 G 的 $\mathcal{N}=2$ 矢量多重态。
- 一个 $\mathcal{N}=2$ 手征多重态 Φ 在 G 的伴随表示中变换。
- 一组 $\mathcal{N}=2$ 手征超多重态 q 在 G 的伪实表示 $\mathbf{R}$ 中变换。
- 一个用伪实结构写出的超势：

$$W = \frac{1}{2}\rho^{ij} q_j (\Phi q)_i. \tag{2.2}$$

这里的 i，j 是规范指标，而 ρ^{ij} 是$\mathbf{R}$ 上的辛结构（在i，j中反对称）。对于 $\mathcal{N}=4$ 超对称而言，这个超势是必需的。

完整超多重态对应于$\mathbf{R} = \mathcal{R}\oplus\mathcal{R}$，其中 $\mathcal{R}$ 是 G的某个复表示。在这种情况下，

$$\rho = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \tag{2.3}$$

是一个交换 $\mathcal{R}$ 和 $\mathcal{R}$的分块对角矩阵。

$\mathcal{N} = 2$ 矢量多重态与伴随手征场 Φ 共同构成 $\mathcal{N} = 4$ 矢量多重态。我们可以通过开启味对称性背景矢量多重态中的标量真空期望值，引入一组三元质量参数。背景$\mathcal{N} = 2$ 矢量多重态中的标量 σ 的真空期望值称为实质量，而背景 Φ 的真空期望值称为复质量。类似地，只要规范群具有非平凡的中心，我们就可以开启一组三元 FI 参数（与背景扭曲矢量多重态相关联）。

2.2 由实条件得到的半超多重态

也可以从完整超多重态出发并施加辛实条件，构造含有半超多重态的理论。考虑一个规范群为 G 、完整超多重态 $\mathcal{H}$ 按伪实表示 $\mathbf{R}$ 变换的 $\mathcal{N} = 4$ 理论。超多重态的分量为:

$$\mathcal{H} = (q_a, \widetilde{q}^a, \psi_{\alpha\dot{a}}, \widetilde{\psi}_{\alpha\dot{a}}). \tag{2.4}$$

这里，$a = 1,2$ 是 $SU(2)_H$R 对称性指标，$\dot{a} = 1,2$ 是 $SU(2)_C$R 对称性指标，而 $\alpha = 1, 2$ 是旋量指标。标量场 q_a和费米子 $\psi_{\alpha\dot{a}}$取值于表示 $\widetilde{\mathbf{R}}$，而 $\widetilde{q}^a$ 和 $\psi_{\alpha\dot{a}}$ 取值于其复共轭（且同构）表示$\mathbf{R}$。对于完整超多重态，我们只要求 $\widetilde{q}$ 与 q互为共轭:

$$(q_a)^* = \widetilde{q}^a, \tag{2.5}$$

此外，仅在闵可夫斯基号差下，还要求 $\widetilde{\psi}^{\alpha\dot{a}} = (\psi_{\alpha\dot{a}})^*$。在欧几里得号差下，$\widetilde{\psi}$ 和 ψ是独立变量。无需其他实条件。

现在，让我们将 $\mathcal{H}$ 的场内容减半，以构造 $\mathbf{R}$ 中的半超多重态。令 ρ 为定义$\mathbf{R}$上伪实结构的不变反对称形式，满足 $\rho^2 = -1$。虽然不能仅对$\mathbf{R}$ 施加实条件，但 R 对称性

指标 a 使得可以对玻色子施加以下额外的实约束：

$$\widetilde{q}^a = \varepsilon^{ab}\rho q_b, \tag{2.6}$$

其中 ε^{ab} 是满足 $\varepsilon^{12} = 1$ 的反对称张量。根据超对称性，这也会对费米子场施加一个条件：

$$\widetilde{\psi}_{\dot{a}} = \rho\psi_{\dot{a}}. \tag{2.7}$$

这些条件与超对称性和 R 对称性变换相容，并将自由度数量减半，从而得到不可约的半超多重态。

在 $\mathcal{N} = 2$ 语言中，我们取复表示 $\mathbf{R}$ 中的手征多重态 q，并施加如下条件：$\mathbf{R}$ 中的手征多重态与 q 通过 $\widetilde{q} = \rho q$ 相关联，因此，$\mathcal{N} = 4$ 超势为：

$$W = \frac{1}{2}(\rho q)\Phi q. \tag{2.8}$$

加入因子 $1/2$ 是为了确保当 $\mathbf{R} = \mathcal{R} \oplus \mathcal{R}$ 时，能够恢复由手征多重态 $q \in \mathcal{R}$ 和 $\widetilde{q} \in \mathcal{R}$ 构成的完整超多重态的标准超势 $W = \widetilde{q}\Phi q$。

2.3 $\mathbb{Z}_2$ 反常

三维物理的一个重要方面是，在存在半超多重态时会出现宇称反常 [26–28], ，我们也将其称为 $\mathbb{Z}_2$ 反常。$\mathbb{Z}_2$ 反常由与规范场耦合的旋量场引起。由于半超多重态由一个取值于 G 的辛表示 $\mathbf{R}$ 中的手征多重态构成，其费米子动能项 $\frac{-i}{2}(\rho\psi^{\dot{a}})\not{D}\psi_{\dot{a}}$，或经分部积分后得到的 $-i(\rho\psi_{\dot{2}})\not{D}\psi_{\dot{1}}$，就是一个取值于 $\mathbf{R}$ 的狄拉克费米子。将其积分掉可能会产生陈–西蒙斯（CS）项。若赋予 ψ 实质量 M，则会产生一个 CS 能级：

$$k_{eff} = \frac{1}{2}\mathrm{Sign}(M)\eta_{\mathbf{R}}, \quad \text{where the Dynkin index is defined by } \mathrm{Tr}_{\mathbf{R}}(T^aT^b) = \eta_{\mathbf{R}}\delta^{ab}, \tag{2.9}$$

其中我们假设采用这样的归一化：$k_{eff} = 1$ 对应于用于定义 CS 作用量的形式 $\frac{1}{2h^\vee}\mathrm{Tr}^{\mathbf{adj}}$。

若只有极大环面中的规范场 $T \subset G$ 被激活，对于每个权 w 属于 $\mathbf{R}$，相应的分量 $\psi_{\dot{1}}^{(w)}$ 将与规范场 $A^{(w)} \equiv \langle w\text{耦合，}\ A\rangle$ 将其积分掉会产生半整数的 Chern-Simons 项 $\frac{\mathrm{Sign}(M)}{4\pi}\frac{2}{2}\int A^{(w)}\mathrm{d}A^{(w)}$ [26–28]。对 w 的 $\mathbf{R}$ 的所有权求和，得到魏尔不变对称双线性形式 $\sum_w w \otimes w$

在 Cartan 子代数上，其到 $\mathfrak{g}$ 的不变扩张为 $\frac{\mathrm{Sign}(M)}{2}\mathrm{Tr}_{\mathbf{R}}$，从而得到 CS 作用量：

$$\frac{\mathrm{Sign}(M)/2}{4\pi}\int \mathrm{Tr}_{\mathbf{R}}\left(A\mathrm{d}A+\frac{2}{3}A[A,A]\right), \tag{2.10}$$

其确实具有$\frac{1}{2}\mathrm{Sign}(M)\eta_{\mathbf{R}}$的层级，归一化方式如上所述。

$\mathbb{Z}_2$ 反常体现为半整数性，即 k_{eff} 模 1。它不依赖于 Sign(M)，因此，宇称反常消除的条件是 $\eta_{\mathbf{R}}$ 为偶数。对于完整超多重态，这一条件自动满足，因为它们具有$\mathbf{R} = \mathcal{R}\oplus\mathcal{R}$，且 $\eta_{\mathbf{R}} = 2\eta_{\mathcal{R}}$。一般而言， $\mathbb{Z}_2$反常消除要求由 Tr 在 $\mathfrak{g}\to\mathfrak{sp}(\mathbf{R})$ 下的拉回所给出的 B 具有如下形式：

$$B(X,Y)=\mathrm{Tr}_{\mathbf{R}}(XY), \tag{2.11}$$

也就是说，它能被 2 整除。 [25, 命题 4.12] 证明了， $\mathbb{Z}_2$ 反常消除等价于以下同态

$$\pi_4 G\to\pi_4\mathrm{Sp}(\mathbf{R}) \tag{2.12}$$

是平凡的。这也是具有手征物质$\mathbf{R}$ [31]的四维理论中 Witten 的 SU(2)反常的消除条件。事实上，具有 Witten 的 $\mathbb{Z}_2$ 反常的四维理论会约化为受宇称反常影响的三维理论。两者都表现为在大规范变换下规范不变性失效。一个重要区别是，四维反常会使理论不一致，而三维反常则可以通过 CS反项消除。当然，这会破坏宇称，因此得名宇称反常（即规范不变性与宇称之间的冲突）。本文并不关注宇称，因此为何不直接用 CS 项消除反常呢? 问题在于，CS 项的超对称扩展只允许$\mathcal{N}=3$ SUSY [29, 30]。有时，红外 [67], 会发生超对称增强至 $\mathcal{N}=4$ ，但一般而言，我们并不预期这种情况发生。因此，在一般的反常理论中，我们无法同时保持规范不变性和 $\mathcal{N}=4$超对称性（当然也无法保持宇称）。尽管可以探讨超对称增强的可能性，我们仍要求超对称性 $\mathcal{N}=4$ 显式，因此接下来假设 $\mathbb{Z}_2$ 反常消除，也就是说， $\eta_{\mathbf{R}}$ 为偶数（或 (2.12) 为平凡的）。

2.4 S^3上的作用量与超对称

实际上，直接采用 $\mathcal{N}=4$ 分量形式进行计算很容易。我们借用 [9]中关于耦合到矢量多重态的完整超多重态在 S^3 上的作用量。要得到半超多重态，只需将实条件 (2.6) 和 (2.7) 代入完整超多重态作用量。

伪实表示$\mathbf{R}$ 中的规范化半超多重态的作用量为:

$$S_{\text{half-hyper}}[\mathcal{H},\mathcal{V}]=\frac{1}{2}\int d^3x\sqrt{g}\left[\rho\mathcal{D}^\mu q^a\mathcal{D}_\mu q_a-i(\rho\psi^{\dot a})\not{D}\psi_{\dot a}+\frac{3}{4r^2}(\rho q^a)q_a+i(\rho q^a)D_a{}^b q_b\right.$$
$$\left.-\frac{1}{2}(\rho q^a)\Phi^{\dot a\dot b}\Phi_{\dot a\dot b}q_a-i(\rho\psi^{\dot a})\Phi_{\dot a}{}^{\dot b}\psi_{\dot b}+i\left((\rho q^a)\lambda_a{}^{\dot b}\psi_{\dot b}+(\rho\psi^{\dot a})\lambda^b{}_{\dot a}q_b\right)\right]. \tag{2.13}$$

这里，协变导数 $\mathcal{D}_\mu$ 作用于 q_a，并取值于表示 $\mathbf{R}$；ρ作用于规范指标。对 S^3 上的完整超多重态进行费米子路径积分时，分别独立地对 $\psi_{\dot a}$~和 $\psi_{\dot a}$ 积分。然而，经过半超多重态减半（2.7）后，剩余的费米子积分仅对 $\psi_{\dot a}$ 进行。注意，我们选择在作用量前加入因子 $\frac{1}{2}$，以确保当 $\mathbf{R}=\mathcal{R}\oplus\mathcal{R}$时，能够从 [9]恢复完整超多重态。

半超多重态的超对称变换由完整超多重态施加相同的减半条件得到:

$$\delta_\xi q^a=\xi^{a\dot b}\psi_{\dot b},\quad \delta_\xi\psi_{\dot a}=i\gamma^\mu\xi_{a\dot a}\mathcal{D}_\mu q^a+i\xi'_{a\dot a}q^a-i\xi_{a\dot c}\Phi^{\dot c}{}_{\dot a}q^a. \tag{2.14}$$

~ $\widetilde{q}^a$ 和 $\psi_{\dot a}$ 的变换并不独立，而是由（2.6）、（2.7）确定。

半超多重态上的超对称代数闭合性可由完整超多重态上的闭合性推出，且减半条件在代数作用下保持不变。我们通常遵循 [10, 11] 中的约定，该文分析了完整超多重态的情形。特别是，S^3、$\mathfrak{su}(2|1)_\ell\oplus\mathfrak{su}(2|1)_r$上的非共形超对称代数，以及由实质量和 FI参数产生的中心扩张，均与完整超多重态的情形相同。超对称变换用 $\xi_{a\dot a}$参数化，即 S^3上的共形 Killing 旋量，它们按 $SU(2)_H\times SU(2)_C\times SU(2)_E$的 $(\mathbf{2},\mathbf{2},\mathbf{2})$ 表示变换，其中 $SU(2)_E=\text{Spin(3)}$ 是时空对称性，并满足:

$$\nabla_\mu\xi_{a\dot a}=\gamma_\mu\xi'_{a\dot a},\quad \nabla_\mu\xi'_{a\dot a}=-\frac{1}{4r^2}\gamma_\mu\xi_{a\dot a}, \tag{2.15}$$

其中 $\gamma_\mu=e^a_\mu\sigma_a$、$\mu=1$，2，3 和 σ_a 是泡利矩阵，而 e^a_μ 确定局部标架。更精确地说，这些方程的解给出了 S^3 上自由半超多重态所保留的完整三维 $\mathcal{N}=4$ 超共形代数 $\mathfrak{osp}(4|4)$；而矢量多重态和/或质量形变的存在会将其破缺为 $\mathfrak{su}(2|1)_\ell\oplus\mathfrak{su}(2|1)_r\subset\mathfrak{osp}(4|4)$。后一种嵌入可用两个 2×2 矩阵来参数化:

$$h_a{}^b\in\mathfrak{su}(2)_H,\quad \bar h^{\dot a}{}_{\dot b}\in\mathfrak{su}(2)_C, \tag{2.16}$$

从而可以写出关于共形 Killing 旋量的约束，该约束确定了非共形（或有质量）超对称性代数：

$$\xi'_{a\dot{a}} = \frac{i}{2r} h_a{}^b \xi_{b\dot{b}} \bar{h}^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}. \tag{2.17}$$

¯先前研究 [9–11] 采用的约定是，关于泡利矩阵取如下选择： $h,\ h$

$$h = -\sigma^2, \quad \bar{h} = -\sigma^3. \tag{2.18}$$

现在我们写出矢量多重态作用量和 FI 项（对应规范群的一个 $U(1)$ 因子）。它们与物质内容无关，因此形式与 [9]中相同：

$$\begin{aligned} S_{\rm YM}[\mathcal{V}] = \frac{1}{g^2_{\rm YM}} \int \mathrm{d}^3x \sqrt{g}\, \mathrm{Tr} \Big(& F^{\mu\nu}F_{\mu\nu} - \mathcal{D}^\mu \Phi^{\dot{c}\dot{d}} \mathcal{D}_\mu \Phi_{\dot{c}\dot{d}} + i\lambda^{a\dot{a}} \not{\mathcal{D}} \lambda_{a\dot{a}} - D^{cd}D_{cd} - i\lambda^{a\dot{a}}[\lambda_a{}^{\dot{b}}, \Phi_{\dot{a}\dot{b}}] \\ & - \frac{1}{4}[\Phi^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}, \Phi^{\dot{c}}{}_{\dot{d}}][\Phi^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}, \Phi^{\dot{d}}{}_{\dot{c}}] - \frac{1}{2r} h^{ab} \bar{h}^{\dot{a}\dot{b}} \lambda_{a\dot{a}} \lambda_{b\dot{b}} + \frac{1}{r}(h_a{}^b D_b{}^a)(\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \Phi^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}) - \frac{1}{r^2} \Phi^{\dot{c}\dot{d}} \Phi_{\dot{c}\dot{d}} \Big), \end{aligned} \tag{2.19}$$

$$S_{\rm FI}[\mathcal{V}] = i\zeta \int \mathrm{d}^3x \sqrt{g} \left(h_a{}^b D_b{}^a - \frac{1}{r} \bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} \Phi^{\dot{b}}{}_{\dot{a}} \right). \tag{2.20}$$

矢量多重态 SUSY 变换为：

$$\delta_\xi A_\mu = \frac{i}{2} \xi^{a\dot{b}} \gamma_\mu \lambda_{a\dot{b}}\,, \tag{2.21}$$

$$\begin{aligned} \delta_\xi \lambda_{a\dot{b}} = & -\frac{i}{2} \varepsilon^{\mu\nu\rho} \gamma_\rho \xi_{a\dot{b}} F_{\mu\nu} - D_a{}^c \xi_{c\dot{b}} - i\gamma^\mu \xi_a{}^{\dot{c}} \mathcal{D}_\mu \Phi_{\dot{c}\dot{b}} + 2i\Phi^{\dot{c}}{}_{\dot{b}} \xi'_{a\dot{c}} \\ & + \frac{i}{2} \xi_{a\dot{d}} [\Phi_{\dot{b}}{}^{\dot{c}}, \Phi_{\dot{c}}{}^{\dot{d}}]\,, \end{aligned} \tag{2.22}$$

$$\delta_\xi \Phi_{\dot{a}\dot{b}} = \xi^c{}_{(\dot{a}} \lambda_{|c|\dot{b})}\,, \tag{2.23}$$

$$\delta_\xi D_{ab} = -i\mathcal{D}_\mu (\xi_{(a}{}^{\dot{c}} \gamma^\mu \lambda_{b)\dot{c}}) - 2i\xi'_{(a}{}^{\dot{c}} \lambda_{b)\dot{c}} + i[\xi_{(a}{}^{\dot{c}} \lambda_{b)}{}^{\dot{d}}, \Phi_{\dot{c}\dot{d}}]\,. \tag{2.24}$$

味对称群由规范群G 在与伪实表示 $G \to Sp(\mathbf{R})$相关联的辛群中的像的正规化子给出：

$$G_f = \mathcal{N}_G(Sp(\mathbf{R})). \tag{2.25}$$

最后，我们可以 在味对称群的 Cartan 子代数 $\mathfrak{t}_f \subset \mathfrak{g}_f$ 中开启背景矢量多重态 $\mathcal{V}_{\rm b.g.}$ e

，并使背景常数值满足以下约束：

$$2i(\Phi_{\text{b.g.}})^{\dot{c}}{}_{\dot{b}}\xi'_{a\dot{c}} - (D_{\text{b.g.}})_a{}^c\xi_{c\dot{b}} = 0, \tag{2.26}$$

确保 $\delta_\xi\lambda_{\text{b.g.}} = 0$。利用 (2.17)，可将其写为：

$$\frac{1}{r}(\Phi_{\text{b.g.}})^{\dot{c}}{}_{\dot{b}}h_a{}^b\xi_{b\dot{a}}\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{c}} + (D_{\text{b.g.}})_a{}^c\xi_{c\dot{b}} = 0, \tag{2.27}$$

关于 $m \in \mathfrak{t}_f$，它有唯一的解：

$$(\Phi_{\text{b.g.}})^{\dot{a}}{}_{\dot{b}} = -m\,\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}, \quad (D_{\text{b.g.}})_a{}^b = \frac{m}{r}h_a{}^b. \tag{2.28}$$

这给出了实质量形变。[3] 按照我们的约定，这给出 $(\Phi_{\text{b.g.}})_{\dot{1}\dot{2}} = m$。

3 受保护扇区

正如 [9–11], 所研究的，特殊超荷 $\mathcal{Q}_H$，$\mathcal{Q}_C \in \mathfrak{su}(2|1)_\ell \oplus \mathfrak{su}(2|1)_r$ 定义了希格斯分支和库仑分支的“受保护扇区”。也就是说，关于$\mathcal{Q}_H$（分别是 $\mathcal{Q}_C$）进行超对称局域化，可以计算希格斯分支（分别是库仑分支）算符在 $\mathcal{Q}_H$（分别是 $\mathcal{Q}_C$）的上同调中的关联函数。这些关联函数的数据构成了由代数 $\mathcal{A}_H$（分别是 $\mathcal{A}_C$）编码的受保护扇区，该代数配备了扭曲迹。代数 $\mathcal{A}_H$ 和 $\mathcal{A}_C$ 是希格斯分支和库仑分支的短量子化 [39]（后文称为“球面量子化” [68]）。

更准确地说，我们需要等变上同调，因为 $\mathcal{Q}_H$ 和 $\mathcal{Q}_C$ 不是幂零的：

$$\begin{aligned}(\mathcal{Q}_H)^2 &= \frac{i}{r}(P_\tau + R_C + ir\widehat{\zeta}),\\ (\mathcal{Q}_C)^2 &= \frac{i}{r}(P_\tau + R_H + ir\widehat{m}),\end{aligned} \tag{3.1}$$

其中我们在 S^3 上使用的球坐标 $(\theta,\ \tau,\ \varphi)$ 中工作，[9], 和 P_τ 是旋转 τ 角的算符。这里，$R_H = \frac{1}{2}h_a{}^bR_b{}^a$ 和 $R_C = \frac{1}{2}\bar{h}^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}\bar{R}^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}$ 是 $SU(2)_H$ 和 $SU(2)_C$ 的 Cartan 子代数生成元，与 $\mathfrak{u}(1)_\ell \oplus \mathfrak{u}(1)_r \subset \mathfrak{su}(2|1)_\ell \oplus \mathfrak{su}(2|1)_r$ 的生成元之间的关系为 $\backsim R_\ell = R_H + R_C$ 和 $R_r = R_H - R_C$。最后，ζ 和 $\widehat{m}$ 分别是 FI 中心荷和质量中心荷，它们作用于带有拓扑对称性和味对称性荷的态。局域

[3] 在平直空间中，存在 $SU(2)_C$三重态质量和 $SU(2)_H$三重态FI参数，但质量/FI参数只有一个线性组合允许存在于 S^3上，我们称之为实质量/FI参数。

算子在 $\mathcal{Q}_H$ 的等变上同调中必须被 $\mathcal{Q}_H^2$ 湮灭。实现这一点的方法是将它们置于 ∂_τ 的不动点集上，并确保它们被 $\frown R_C + ir\zeta$ 湮灭（希格斯分支算符满足这一条件）。对于 $\mathcal{Q}_C$ 也是如此；在这种情况下，我们讨论的是被 $R_H + ir\widehat{m}$ 湮灭的库仑分支算符。

∂_τ 的不动点集是一个由 φ参数化的大圆 $S^1_\varphi \subset S^3$。$\mathcal{Q}_H$ 和 $\mathcal{Q}_C$（在局域可观测量上）的上同调由沿 S^1_φ插入的“扭曲平移的”局域算符张成：对于 $\mathcal{Q}_H$，是扭曲平移的希格斯分支算符；对于 $\mathcal{Q}_C$，是扭曲平移的库仑分支算符。

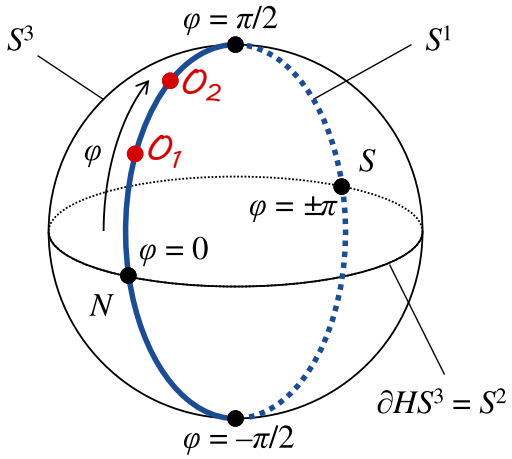

图1：沿着不动圆 $S^1_\varphi \subset S^3$，可以插入扭曲平移的希格斯分支或库仑分支算符，以计算受保护关联函数。

3.1 希格斯扇区

扭曲平移的（半）超多重态字母为：

$$Q(\varphi) = q_1 \cos\frac{\varphi}{2} + q_2 \sin\frac{\varphi}{2}, \quad \widetilde{Q}(\varphi) = \widetilde{q}_1 \cos\frac{\varphi}{2} + \widetilde{q}_2 \sin\frac{\varphi}{2}, \tag{3.2}$$

一般的扭曲平移的希格斯分支算符由这些字母构成的规范不变字构造而成。对于被描述为处于 $\mathbf{R}$ 中的、满足实条件的半超多重态，我们有 $\widetilde{q}_1 = -\widetilde{q}^2 = \rho q_1$ 和 $\widetilde{q}_2 = \widetilde{q}^1 = \rho q_2$，因此

$$\widetilde{Q} = \rho Q, \tag{3.3}$$

而且我们只有一个独立变量，即取值于$\mathbf{R}$的标量 Q。

使用 $\mathcal{Q}_H$进行超对称局域化后，沿着相关方向的有效一维描述——

关联函数随 S^1_φ 涌现。在 [9] 中，这个问题针对完整超多重态已得到彻底解决，并确定规范化拓扑量子力学就是精确的一维描述。等价地说，它是与矩阵模型耦合的拓扑量子力学，其中矩阵变量为 $\sigma \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$。显而易见，这一结论也适用于半超多重态，原因如下。

[9] 中的方法是先对矢量多重态进行局域化，然后再对超多重态进行局域化。第一步之后，剩下一个由 $\sigma \in \mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 标记（并对其积分）的阿贝尔矢量多重态背景，以及矢量多重态的单圈行列式。此后，半超多重态仅与极大环面 $T \subset G$ 中的阿贝尔矢量多重态耦合。

值得注意的是，阿贝尔群 $T = U(1)^r$ 不存在伪实表示。事实上，将 G 的伪实表示 $\mathbf{R}$ 限制到 T 后，会分解为一维复表示之和。（例如， $SU(2)$ 的 $\mathbf{2}$ 作为 $U(1) \subset SU(2)$ 的表示时，会变为 $\mathbb{C}_{+1} \oplus \mathbb{C}_{-1}$。）将规范群限制到 $T \subset G$ 后，$\mathbf{R}$ 中的半超多重态会变成一组阿贝尔完整超多重态。因此，在对矢量多重态进行局域化之后，下一步是对一组与阿贝尔规范场耦合的完整超多重态进行局域化。这在 [9], 中已经完成，因此我们得到了答案。一维扇区由规范化量子力学的路径积分描述:

$$S_{\rm 1D} = 2\pi r \int \mathrm{d}\varphi \, Q\rho\mathcal{D}_\varphi Q, \tag{3.4}$$

或者在规范 固定一维规范场之后，答案也可以写成等价的形式: :

$$Z = \frac{1}{|\mathcal{W}|}\int_{\mathfrak{t}} \mathrm{d}\sigma \, \det{}'_{\rm adj}\left(2\sinh \pi\sigma\right) \int DQ e^{-S_\sigma[Q]}, \tag{3.5}$$

其中

$$S_\sigma[Q] = 4\pi r \int \mathrm{d}\varphi \left[\tfrac{1}{2} Q\rho\,\partial_\varphi Q + \tfrac{1}{2} Q\rho(\sigma + mr)Q - 2\pi i\zeta\cdot\sigma\right], \tag{3.6}$$

并且我们计入了质量和 FI 项的贡献。

因此，一维理论的答案基本上与 [9], 中推导出的结果相同，只不过 ~ 我们令 Q 取值于 $\mathbf{R}$ ，并取 $Q = \rho Q$，而不将其视为独立变量。因此，$\mathbf{R}$ 的辛结构 ρ 自然成为一阶作用量 (3.6) 中的辛结构。

随后便可用这个答案来研究希格斯扇区，这并非本文的主要目标。

3.2 库仑扇区

对于完整超多重态的情形， [10, 11] 给出的库仑扇区描述则大不相同。答案并非通过显式的一维作用量来表述，而是借助某个差分（或移位）算符代数、该代数的一个模，以及模上的内积来表述。更确切地说，代数 $\mathcal{A}_C$ 本身（即“量子化库仑分支”）就是这类差分算符构成的代数，而 $\mathcal{A}_C$ 上的扭曲迹（可用于计算关联函数）则由模及其内积的结构来编码。

让我们简要回顾相关细节。首先， $\mathcal{Q}_C$上同调中的算符是库仑分支手征环算符：当我们绕 S^1行进一周时，它们经历 $U(1)_C$ 旋转。它们由两个基本构件构成：扭曲平移的矢量多重态标量，

$$\Phi(\varphi) = \Phi_{\dot{a}\dot{b}} v^{\dot{a}} v^{\dot{b}}, \quad v = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} e^{i\varphi/2} \\ e^{-i\varphi/2} \end{pmatrix}, \tag{3.7}$$

以及扭曲平移的 BPS磁单极算子 $M_b(\varphi)$，即磁通的点状源。这些是通过将奇异的狄拉克 $U(1)$ 单极子嵌入非阿贝尔群 G 中而构造的 GNO磁单极 [43] 。这类嵌入由余特征 $\mathrm{Hom}(U(1), G)/G \cong \mathrm{Hom}(U(1), \mathbb{T})/\mathcal{W}$（或称 GNO荷）标记。$\mathrm{Hom}(U(1), \mathbb{T})/\mathcal{W}$ 的一个元素被视为代数映射 $\mathbb{R} \to \mathfrak{t}$，将 $1 \mapsto b$ 发送至满足 $e^{2\pi b} = 1$ 的对象（因此 b 是一个余权），并且只考虑在韦伊群作用下的等价类。因此，余特征对应于余权格 $\Lambda^\vee \subset \mathfrak{t}$ 中的 $\mathcal{W}$-轨道。与给定余特征相关联的裸磁单极算子是相应韦伊轨道上的求和，其中由该 $\mathcal{W}$-轨道中的余权$b \in \Lambda^\vee$ 标记的每一项，都是一个局域无序算子，其特征在于规范场和标量场具有如下奇异行为：

$$\star F \sim b \frac{y_\mu \mathrm{d}y^\mu}{|y|^3}, \quad \Phi_{i\dot{1}\dot{1}} = -(\Phi_{\dot{2}\dot{2}})^\dagger \sim -\frac{b}{2|y|} e^{-i\varphi}, \quad \Phi_{i\dot{1}\dot{2}} \sim 0. \tag{3.8}$$

这里， y^μ 是以单极子为中心的黎曼正规坐标。(3.8) 中标量的奇异行为当然由超对称决定， [17], 而其中显式的因子$e^{-i\varphi}$ 体现了“扭曲平移的” [10]这一名称。

更一般地，单极子可以由 $\Phi(\varphi)$中的某个多项式修饰，并须满足相应的规范不变性条件。单极奇点会使插入点处的规范群破缺为子群 $G_b \subset G$，因此着装因子 $P(\Phi)$只需满足 G_b 不变性。于是，一般的库仑分支算符都是着衣单极子（包括 GNO 荷为 0 的情形，此时它们只是 Φ中对 $\mathrm{ad}(G)$不变的多项式）。

我们看到，库仑分支算符的构造只取决于规范群 G，而不取决于物质内容。我们关注它们在 $S^1_\varphi \subset S^3$上的关联函数；当然，这些关联函数取决于物质内容。对于完整超多重态物质，这个问题的解在 $[10,11]$, 中给出，其中一般的库仑分支算符表示为

$$\sum_{v\le b}\sum_{\mathrm{w}\in\mathcal{W}} P(\Phi^{\mathrm{w}})M^{\mathrm{w}\cdot v}, \tag{3.9}$$

其中，我们选取一个主余权 b （每个韦伊轨道恰好包含一个这样的余权），以及与之“相关”的余权 $v<b$，它们对应于起泡现象 [45]（“相关”是指 v 出现在最高权为 b 的最高权不可约表示中）；对于每个 $v\le b$，我们对其韦伊轨道求和，被加数为修饰单极子$P(\Phi^{\mathrm{w}})M_{\mathrm{w}\cdot v}$，其中 $M^{\mathrm{w}\cdot v}$ 由奇点 (3.8) 确定（将 b 替换为 $\mathrm{w}\cdot v$）。这里， M^v 是 $[11]$, 中给出的某个差分算符，我们暂且不写出；本文稍后将给出半超多重态物质情况下的表达式。至于 Φ，它被表示为乘法算符，例如 $\Phi=\frac{1}{r}\left(\sigma+\frac{i}{2}B\right)$，作用于余权 $B\in\Lambda^\vee$ 和 $\sigma\in\mathfrak{t}$ 的函数。事实上，后面这些函数构成一个模，差分算符代数$\mathcal{A}_C$ 作用于其上。我们将这个模的元素视为变量 (σ,B) 上的波函数，并赋予内积（即“粘合公式”）：

$$(f,g)=\frac{1}{|\mathcal{W}|}\sum_{B\in\Lambda^\vee}\int_{\mathfrak{t}}\mathrm{d}^r\sigma\,\mu(\sigma,B)f(\sigma,B)g(\sigma,B), \tag{3.10}$$

其中， $\mu(\sigma,B)$ 是某种“粘合”测度。同样，我们现在不给出 $\mu(\sigma,B)$ 的公式，因为我们将在后文推导一般物质场情况下的公式。

$[10,11]$ 中的一个重要要素是这一粘合公式：它将 S^3 配分函数确定为两个半球配分函数的内积。每个半球HS^3 由某个“波函数” ψ（σ， B）表示，该波函数等于具有特殊边界条件的半球配分函数，这些边界条件由 σ， B标记。半球内部单极子算符的插入，则由前面概述的作用于半球配分函数 ψ（σ， B）上的差分／平移算符表示。这一过程如图 2 所示；在接下来的章节中，我们将在存在半超多重态物质的情况下对其进行详细阐述和推广。

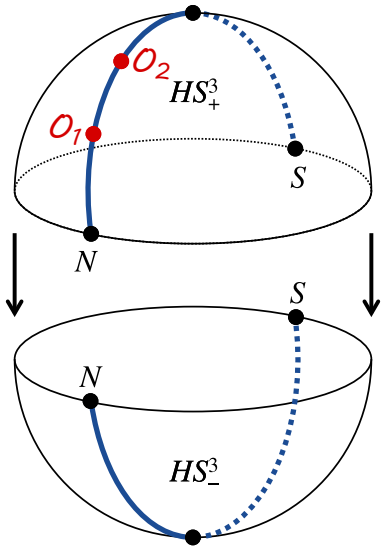

图 2：每个半球配分函数都被视为一个“波函数”，而粘合操作则被视为内积（3.10）。扭曲平移的库仑分支算符的插入由作用于半球波函数上的某些移位算子表示。

4 超对称粘合公式

4.1 为什么旧方法需要升级

我们希望推广 [10, 11], 的粘合公式，将 S^3 配分函数表示为两个半球的内积。此前的方法是聚焦于赤道 $S^2 \subset S^3$的无穷小邻域，在那里我们近似地将几何视为 $S^2 \times \mathbb{R}$的一个局部片段。对于 S^2，人们将场论相空间 $\mathcal{P}[S^2]$与之对应；这是一个无限维空间，其中经典时间演化由一阶方程（哈密顿运动方程）描述。在量子力学中，这形式上导出“波泛函”上的无限维版本的薛定谔方程；这些波泛函只依赖于彼此泊松对易的正则坐标/动量中的一半。 [65, 66] 中的粘合被确定为对这半组变量的积分，也可看作对 $\mathcal{P}[S^2]$的拉格朗日子流形的积分。显然，它是无限维的，看起来就像沿着 S^2对二维理论进行的路径积分。通过仔细选择 $\mathcal{P}[S^2]$中的拉格朗日子流形，可以确保这一二维路径积分具有 $\mathcal{N} = (2, 2)$超对称性，从而能够应用局域化技术。

对于三维 $\mathcal{N} = 4$ 矢量多重态，选择了 $\mathcal{P}[S^2]$ 中的拉格朗日子流形，使得对其积分看起来就像是在S^2上对二维 $\mathcal{N} = (2, 2)$ 矢量多重态进行积分。基本上，二维变量是三维规范场在 S^2 上的拉回及其二维

$\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性补全。然而，对于三维 $\mathcal{N}=4$ 超多重态，要在粘合积分中保持二维 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性，就必须对物质表示作出全纯拉格朗日分解。对于完整超多重态，这种分解

$$\mathbf{R}=\mathcal{R}\oplus\bar{\mathcal{R}} \tag{4.1}$$

已经能够完成任务，因为它在复结构 I 下是全纯拉格朗日的（在该复结构中，$\mathcal{N}=2$ 手征多重态取值于 $\mathcal{R}$ 和 $\bar{\mathcal{R}}$），而且显然是规范不变的。采用这样的选择，我们得到了定义良好的 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称粘合。

然而，对于半超多重态，不存在这样的规范不变拉格朗日分解。事实上，如果我们能够找到一个 G 不变的分解 $\mathbf{R}=\mathbb{L}\oplus\mathbb{L}^{\perp}$，那么得到的就只是 $\mathbb{L}$ 中的完整超多重态。这构成了推广的主要挑战，我们必须找到另一种方法来应对这一挑战。（假如我们能以某种方式将规范扇区与物质扇区分离开来）矢量多重态粘合并不受此问题影响，因为其形式并不依赖于物质内容。因此，粗略地说，我们希望先对矢量多重态进行粘合，再处理半超多重态。矢量多重态粘合涉及沿着 S^2 进行规范固定，此后缺少规范不变分解 $\mathbf{R}=\mathbb{L}\oplus\mathbb{L}^{\perp}$ 便不再是问题。规范固定之后，分解不再需要是规范不变的，因此我们可以选择一个非规范不变的分解。现在，我们希望让这一论证更加严谨。

4.2 切割界面

我们希望在赤道 $S^2\subset S^3$ 上添加一个超对称界面，以实现切割与粘合。我们先处理规范扇区，然后再纳入物质场。我们继续使用球坐标（θ，τ，φ）描述 S^3，其中赤道位于 $\theta=\pi/2$，并将（τ，φ）视为 S^2上的坐标。

与 [10], 中一样，我们通过将三维 $\mathcal{N}=4$矢量多重态限制到赤道 S^2 上，定义一个二维 $\mathcal{N}=$（2，2）矢量多重态，并找出在 $\mathcal{N}=$（2，2）子代数[4]下封闭的子多重态。一个仅由该二维矢量多重态的场构成的 Q-正合杨–米尔斯项，会使赤道自由度局域化，并强制两个半球间的矢量多重态数据匹配。

在平直空间中，二维 $\mathcal{N}=(2,2)$ 子代数的选择与矢量 R 对称性和轴向 R 对称性的选择相关，$U(1)_V\times U(1)_A\subset SU(2)_H\times SU(2)_C$。后者的选择是连续的，

[4]虽然圆约化保留了全部超对称性，但限制到一个子空间至多只能保留一半的超对称性。

由 ^{SU}(2)$_{U\,1}$ ^{H}( )$_H$ $\times$ ^{SU}(2)$_{U\,1}$ ^{C}( )$_C$ 参数化，此外还需选择 $\mathbb{Z}_2$，以确定 $U(1)_H$ 或 $U(1)_C$ 是矢量 R 对称性。特别地，球面 $SU(2)_C/U(1)_C$（库仑分支的扭量球面）决定选取哪个标量线性组合 $\Phi_{\dot{a}\dot{b}}$ 作为实标量 σ，以及哪个作为复标量 ϕ。与这种选择相对应，三维 $\mathcal{N}=4$ 矢量多重态有两种分解方式。一种是熟知的三维 $\mathcal{N}=2$ 分解，将其分为矢量（$A_\mu, \sigma, \ldots$）和伴随手征多重态（$\phi, \ldots$）。另一种是按二维 $\mathcal{N}=(2,2)$ 多重态分解，并将三维坐标（欧几里得号差下）拆分为（$x^{i=1,2}, x^\perp$）。在这种表述中，$\mathbb{R}^2_{x^1,x^2}$上有一对（V, S），分别是一个 (2, 2) 矢量多重态和一个 (2, 2) 伴随手征多重态，其规范群为无限维群 Maps($\mathbb{R}_{x^\perp}, G$)，详见 [6, 附录 A]。其中，V 包含二维规范场 A_i 和复标量ϕ，而 S 则以 $A_\perp + i\sigma$ 开始。这些多重态特别适合用于构造 $x^\perp = 0$ 处的 (2, 2) 边界条件，因为 V 和 S 各自在壳外二维 $\mathcal{N}=(2,2)$ 超对称性下封闭；并且对于 V 中的每个变量，其正则共轭变量都属于 S。在 [6, 附录 A], 中，这些多重态已在平直空间中得到辨认。

在 S^3 上，$SU(2)_H \times SU(2)_C$ 已破缺为 $U(1)_H \times U(1)_C$，因此沿赤道识别 $\mathcal{N}=(2,2)$ 不涉及任何连续选择。除自同构外，只剩下一个离散的（$\mathbb{Z}_2$）选择，从而得到两个称为以下名称的子代数：

$$\mathfrak{su}(2|1)_A \subset \mathfrak{su}(2|1)_\ell \oplus \mathfrak{su}(2|1)_r, \quad \mathfrak{su}(2|1)_B \subset \mathfrak{su}(2|1)_\ell \oplus \mathfrak{su}(2|1)_r, \tag{4.2}$$

where $\mathfrak{su}(2|1)_A$ 包含 $U(1)_H$，而 $\mathfrak{su}(2|1)_B$ 以 $U(1)_C$ 作为 R 对称性。

界面上的场内容

与 [10], 中一样，我们选择使用 $\mathfrak{su}(2|1)_A$ 子代数，因为它包含 $\mathcal{Q}_C$，而相应的二维 [69, 70] 库仑支定位公式很适合我们的目的。按照我们的约定，$\frac{\Phi_{1\dot{1}}-\Phi_{2\dot{2}}}{2}$ 是实标量，$\frac{\Phi_{1\dot{1}}+\Phi_{2\dot{2}}}{2i} - i\Phi_{1\dot{2}}$ 是复标量。赤道 $S^2 \subset S^3$ 上多重态的具体识别如下：

- 一个 **2维 $\mathcal{N}=(2,2)$ 矢量多重态** 包含场

$$(A_i,\ \phi,\ \lambda_\pm,\ \widetilde{\lambda}_\pm,\ D), \qquad i=1,2,$$

其中 A_i 是 规范场到 S^2 的拉回。复标量 ϕ，辅助场

~场 D，以及费米子 λ，λ 均表示为三维场的形式：

$$\phi = \phi_1 + i\phi_2, \quad \phi_1 = \frac{\Phi_{\mathrm{i}\mathrm{i}} + \Phi_{\dot{2}\dot{2}}}{2i}, \quad \phi_2 = -\Phi_{\mathrm{i}\dot{2}}, \tag{4.3}$$

$$D = -\frac{\Phi_{\mathrm{i}\dot{2}}}{r} + \frac{i}{2}(D_{11}^{\mathrm{on}} + D_{22}^{\mathrm{on}}) + i\mathcal{D}_\perp \frac{\Phi_{\mathrm{i}\mathrm{i}} - \Phi_{\dot{2}\dot{2}}}{2}, \tag{4.4}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2}(\lambda_{1\dot{2}} - i\lambda_{2\dot{2}} + \sigma_3(\lambda_{1\mathrm{i}} - i\lambda_{2\mathrm{i}})), \tag{4.5}$$

$$\widetilde{\lambda} = -\frac{1}{2}(\lambda_{1\dot{2}} + i\lambda_{2\dot{2}} - \sigma_3(\lambda_{1\mathrm{i}} + i\lambda_{2\mathrm{i}})). \tag{4.6}$$

这里，D_{ab}^{on} 表示三维辅助场的壳上值，即我们假设 D_{ab}已在体中积分掉。这个壳上值为：

$$\frac{i}{2}(D_{11}^{\mathrm{on}} + D_{22}^{\mathrm{on}}) = \frac{\Phi_{\mathrm{i}\dot{2}}}{r} + \frac{g^2}{8}\left[\rho q_1 T^A q_1 + \rho q_2 T^A q_2\right] - i\zeta\frac{g^2}{2}, \tag{4.7}$$

因此，二维辅助场为：

$$D = \frac{ig^2}{4}\,\mathrm{Im}\left[\rho q_2 T^A q_2\right] - i\zeta\frac{g^2}{2} + i\mathcal{D}_\perp\frac{\Phi_{\mathrm{i}\mathrm{i}} - \Phi_{\dot{2}\dot{2}}}{2}. \tag{4.8}$$

- 一个带有标量 $A_\perp + i\frac{\Phi_{\mathrm{i}\mathrm{i}} - \Phi_{\dot{2}\dot{2}}}{2}$的二维**d** $\mathcal{N} = (2,2)$ **伴随手征多重态，~~其~~具体形式无关紧要。**

界面局域化项

接下来，我们沿赤道添加一个局域化项，

$$e^{-t\int_{S^2}\mathrm{d}^2x\,\mathcal{Q}_C V}, \tag{4.9}$$

其中，$t \to \infty$ 将我们限制在定位轨迹上。概略地说，若体中有一个场 A （例如规范场），并将其在赤道上的限制记为 $a = A\big|_{S^2}$，则我们可以将 A 在 S^3 上的泛函积分写为：

$$\int \mathcal{D}A(\dots) = \int \mathcal{D}a \int_{A\big|=a} \mathcal{D}A(\dots), \tag{4.10}$$

其中，外层积分是对 a 在 S^2上的积分，内层积分则是对满足条件 $A\big| = a$的 A 在 S^3 上的积分。现在，当我们通过在S^2上加入一项 $e^{-t\int_{S_2} L_{\mathrm{loc}}(a,\ \mathrm{d}a,\ \dots)}$来进行局域化时，我们写作 $a = a_0 + \frac{1}{\sqrt{t}}b$，其中 a_0~~—~~位于定位轨迹上。这在

定位轨迹是有限维的情况下很有用，因此对 a_0 的积分是普通积分，而不是泛函积分。由此得到以下近似:

$$\int \mathcal{D}a \int_{A\big|=a} \mathcal{D}A(\dots) \Rightarrow \int \mathrm{d}a_0 \int \mathcal{D}b e^{-\int_{S^2} \mathrm{d}^2x\, b\Delta b} \int_{A\big|=a_0+\frac{1}{\sqrt{t}}} \mathcal{D}A(\dots), \tag{4.11}$$

在 $t \to +\infty$ 极限下变为精确。这里， Δ是描述涨落场 b二次作用量的一般算子。最终我们得到:

$$\int \mathrm{d}a_0 \int \mathcal{D}b e^{-\int_{S^2} \mathrm{d}^2x\, b\Delta b} \int_{A\big|=a_0+\frac{1}{\sqrt{t}}} \mathcal{D}A(\dots) \xrightarrow{t\to+\infty} \int \mathrm{d}a_0 \frac{1}{\sqrt{\det \Delta}} \int_{A\big|=a_0} \mathcal{D}A(\dots). \tag{4.12}$$

经过这些步骤，我们实际上完成了切割与粘合：结果看起来是两个满足 $A\big| = a_0$条件的半球路径积分，通过 a_0 积分粘合在一起，而 S^2 上的单圈行列式则起到粘合测度的作用。

这是以略有不同的方式重新表述的 [66] 过程。我们先用上文确定的二维 $\mathcal{N} =$ (2,2) 矢量多重态，对矢量多重态执行切割与粘合。我们像处理 [10]中的完整超多重态那样，应用 [69,70], 的库仑支定位公式。二维 $\mathcal{N} =$ (2,2) 矢量场的路径积分（经过规范固定后）局域化为对卡坦子代数 $\mathfrak{t} \subset \mathfrak{g}$ 的积分，以及对余权 $B \in \Lambda^\vee$ （穿过 S^2的磁通量）的求和，从而得到三维路径积分的如下表示:

$$\sum_{B\in\Lambda^\vee} \frac{1}{|\mathcal{W}(H_B)|} \int_{\mathfrak{t}} \mathrm{d}^r\sigma\, Z_{\mathrm{vm}}(\sigma, B) \int_{\text{conditions on } S^2} \mathcal{D}[\text{3D fields}](\dots), \tag{4.13}$$

其中 $\mathcal{W}(H_B)$ 是通量 B 保持不变的子群 $H_B \subset G$ 的韦伊群，矢量多重态在 S^2 上的单圈行列式是对正根的乘积:

$$Z_{\mathrm{vm}}(\sigma, B) = \prod_{\alpha\in\Delta^+} (-1)^{\alpha\cdot B} \left[(\alpha\cdot B/2)^2 + (\alpha\cdot\sigma)^2\right], \tag{4.14}$$

而对满足"关于 S^3 的条件"的三维场进行积分，意味着采用与 [10,11] 中相同的一组边界条件:

$$\begin{aligned} A\big|_{S^2} = \frac{B}{2}(\sin\theta - 1)\mathrm{d}\tau, \quad \frac{1}{2i}(\Phi_{\mathrm{i}\dot{\mathrm{i}}} + \Phi_{\dot{2}2})\big|_{S^2} = \frac{B}{2r}, \quad \Phi_{\mathrm{i}\dot{2}}\big|_{S^2} = \frac{\sigma}{r}, \quad D = 0, \\ (\lambda_{1\dot{2}} - i\sigma_3\lambda_{2\dot{\mathrm{i}}})\big|_{S^2} = 0, \quad (\lambda_{2\dot{2}} + i\sigma_3\lambda_{1\dot{\mathrm{i}}})\big|_{S^2} = 0. \end{aligned} \tag{4.15}$$

关键的是，经过这一步后，沿 S^2 的规范自由度已被完全固定。剩余的规范变换沿 S^2 保持常数；也就是说，对每个 $(\sigma,\ B)$，规范对称性会沿 S^2 变为整体对称性 G_∂，其中 G_∂ 是 σ 和 B 的中心化子。一般的 $\sigma,\ B$ 会将 G 破缺至极大环面，因此 $G_\partial = T$；而在 $\sigma = B = 0$ 处，完整群得以恢复，但仅作为整体对称性 $G_\partial = G$。

现在我们可以讨论半超多重态物质场。由于在 S^2 上不再存在任何规范冗余，因此我们可以将半超多重态（限制到 S^2 上）分解为全纯拉格朗日子空间：

$$\mathbf{R} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^\perp. \tag{4.16}$$

更具体地说，我们将 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{L}^\perp$ 视为极大环面 T 的对偶权子空间。事实上，$(B,\ \sigma)$ 给出一个阿贝尔背景，因此我们可以将 G 的伪实表示$\mathbf{R}$ 限制到极大环面 T。这样一来，相对于阿贝尔群 T，半超多重态就转变为完整超多重态。

例子。 上述现象最简单的例子见于 $SU(2)$ 的基本表示，它是一个伪实表示。一个基本表示的半超多重态包含两个标量场，分别对应 $SU(2)$ 的权 $\pm\frac{1}{2}$。限制到极大环面 $U(1) \subset SU(2)$ 后，这两个权变成 $U(1)$ 的两个独立表示，其荷为 ± 1，从而构成相对于 $U(1)$ 的一个完整超多重态。

因此，我们可以对荷属于 $\mathbb{L}$ 的阿贝尔超多重态进行切割与粘合（通过在 $S^2 \subset S^3$ 上类似地插入局域化界面）。这将得到沿着 S^2 的以下边界条件，其推导见 [10]:

$$q_+^{\mathbb{L}}\big|_{S^2} = 0, \quad \left(\mathcal{D}_\perp q_-^{\mathbb{L}} + \frac{1}{2}(\Phi_{1\bar{1}} - \Phi_{\dot{2}\dot{2}})q_-^{\mathbb{L}}\right)\big| = 0, \quad (\psi_1^{\mathbb{L}} - \sigma_3\psi_{\dot{2}}^{\mathbb{L}})\big|_{S^2} = 0, \quad (\widetilde{\psi}_1^{\mathbb{L}^\perp} + \sigma_3\widetilde{\psi}_{\dot{2}}^{\mathbb{L}^\perp})\big|_{S^2} = 0, \tag{4.17}$$

以及一个 由沿 S^2 的局域化产生的额外单圈行列式：

$$Z_{\mathrm{hyp}}(\sigma, B, \mathbb{L}) = \prod_{w\in\mathbb{L}} (-1)^{\frac{1}{2}(|w\cdot B| - w\cdot B)} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} + iw\cdot\sigma + \frac{|w\cdot B|}{2})}{\Gamma(\frac{1}{2} - iw\cdot\sigma + \frac{|w\cdot B|}{2})}. \tag{4.18}$$

记号 $q_\pm^{\mathbb{L}} = q_1^{\mathbb{L}} \pm i q_2^{\mathbb{L}}$ 表示取值于 $\mathbb{L}$ 的分量，而 $\widetilde{\psi}^{\mathbb{L}^\perp}$ 表示取值于 $\mathbb{L}^\perp$ 的分量。

因此，最终我们得到粘合公式：

$$Z_{S^3} = \sum_{B\in\Lambda_{\rm coch}} \frac{1}{|\mathcal{W}(H_B)|}\int_{\mathfrak{t}} \mathrm{d}^r\sigma\, \mu(\sigma,B,\mathbb{L}) Z^{(+)}_{HS^3}(\sigma,B,\mathbb{L}) Z^{(-)}_{HS^3}(\sigma,B,\mathbb{L}), \tag{4.19}$$

其中粘合测度为

$$\mu(\sigma,B,\mathbb{L}) = Z_{\rm vm}(\sigma,B) Z_{\rm hyp}(\sigma,B,\mathbb{L}), \tag{4.20}$$

它显式依赖于全纯拉格朗日子流形 $\mathbb{L}$ 的选择。这里，$Z^{(+)}_{HS^3}(\sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 和 $Z^{(-)}_{HS^3}(\sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 表示两个半球配分函数，其边界条件如上所述：(1) 固定穿过边界的磁通量 B ；(2) 固定标量$\Phi_{\dot{1}\dot{2}}$ 在边界上取值为 σ/r ；(3) 对超多重态施加依赖于 $\mathbb{L}$ 的 (2，2) 边界条件。

对 $\mathbb{L}$ 的依赖性。我们预计最终答案，即 S^3 配分函数和关联函数的集合，不依赖于 $\mathbb{L}$ 的选择；我们将在下文和附录中对此进行验证。

5 移位/差分算子

现在我们需要确定其余的组成部分：半球配分函数或“波函数” $Z(\sigma,\ B)$，以及作用于其上的移位算子；这些移位算子表示在 HS^3 上插入库仑分支算符。

5.1 HS^3 配分函数

采用上述边界条件的 HS^3 配分函数，其计算方法与 [10,11]中相同。首先，我们利用杨-米尔斯作用量作为 $\mathcal{Q}_C$-精确形变，对三维 $\mathcal{N}=4$ 矢量多重态进行局域化。在没有单极子插入的情况下，后者会将所有矢量多重态的场设为零，但取值于 Cartan 子代数的常值真空期望值除外：

$$\Phi_{\dot{1}\dot{2}} = \frac{\sigma}{r}, \quad D_{11} = D_{22} = -i\frac{\sigma}{r^2}. \tag{5.1}$$

在完整的 S^3 上，答案可写成关于 $\sigma\in\mathfrak{t}$的积分；而在 HS^3上，边界条件确定了 $\Phi_{\dot{1}\dot{2}}=\sigma/r$，因此无需再做积分。单圈行列式

空的 HS^3 上矢量多重态的单圈行列式已在 [11]中计算得出:

$$Z_{\text{vec}}(\sigma, B) = \delta_{B,0} \prod_{\alpha \in \Delta} \frac{\sqrt{2\pi}}{\Gamma(1 - i\alpha \cdot \sigma)}, \tag{5.2}$$

其中 $\delta_{B,\ 0}$ 体现了半球为空这一事实，因此没有磁通量穿过边界。接下来对半超多重态进行局域化。它们只与阿贝尔背景 $\sigma \in$ 𝔱耦合，因此它们是半超多重态这一点并不重要。与前面一样，$\mathbf{R}$ 中限制到极大环面 $T \subset G$ 的半超多重态看起来就像完整超多重态。然后可以将$\mathbf{R}$分解为 T-不变子空间： $\mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$。阿贝尔半球配分函数已在 [10], 中计算，空的 HS^3 对应的结果为:

$$Z_{\text{hyp}}(\sigma, B, \mathbb{L}) = \delta_{B,0} \prod_{w \in \mathbb{L}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2} - iw \cdot \sigma)}{\sqrt{2\pi}}. \tag{5.3}$$

因此，乘积 $Z_{\text{vec}}(\sigma,\ B)Z_{\text{hyp}}(\sigma,\ B,\ \mathbb{L})$给出了半球配分函数，其中矢量多重态上标记为 $(\sigma,\ B)$ 的 $\mathcal{N} = (2,\ 2)$ 狄利克雷边界条件，以及由拉格朗日分裂$\mathbf{R} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$标记的半超多重态上的 $\mathcal{N} = (2,\ 2)$ 边界条件。规范场上的狄利克雷边界条件将规范对称性约化为边界上的整体对称性 G ； 而真空期望值 $(\sigma,\ B)$ 和分裂 $\mathbf{R} = \mathbb{L} \oplus \mathbb{L}^{\perp}$还可以进一步将其破缺为一个子群。

空的半球还不够，我们还需要一个在极点插入荷为 b 的单极算符的 HS^3 配分函数。计算它可能是一项相当艰巨的任务，但幸运的是，所有艰苦的工作都已在 [10,11] 中完成。局域化（或 BPS）方程由一组关于矢量多重态场的方程和一组关于超多重态场的方程组成。当我们进行库仑支局域化（即相对于 $\mathcal{Q}_C$ 进行局域化）时，无论是否插入单极子，超多重态的 BPS 方程都只有零解。有趣的事情发生在矢量多重态扇区中。

矢量多重态场上的完整局域化方程组见 [11, 方程 2.11]。施加单极奇点 (3.8) 后，这些方程的解包括规范场和矢量多重态标量 $\Phi_{\mathrm{i}\dot{1}}$ 的非平凡分布，而标量$\Phi_{\mathrm{i}\dot{2}} = \frac{\sigma}{r}$ 保持不变（超多重态只是在这样的矢量多重态背景上发生涨落）。这些方程的一个解是阿贝尔解 ，见 [11,方程 2.12]。将单极荷（余特征）视为 Hom(U(1) T)/$\mathcal{W}$ 的元素，这个余特征由一个韦伊轨道 $\mathcal{W}b$ 表示，其中 $b \in$ 𝔱 是一个主余权，它决定了一个 T-余特征 $e^{i\varphi b} \in$ Hom(U(1) T)。正如 [11], 之后详细解释的那样

局域化后，路径积分化简为一个求和 $\sum_{b'\in\mathcal{W}b}$，其中对每个 b'，我们都有一个奇点 (3.8) 及其对应的解 [11, 方程 2.12]:

$$\Phi_{\mathrm{i}\dot{\mathrm{i}}}=\frac{ib'}{2r\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta\cos^2\varphi}},\quad A^{\pm}=\frac{b'}{2}\left(\frac{\sin\theta\cos\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\theta\sin^2\varphi}}\pm 1\right)\mathrm{d}\tau, \tag{5.4}$$

其中的符号 $\pm$对应于覆盖HS^3上单极子构型的两个坐标片。注意，所有这些场除了

$$\Phi_{\mathrm{i}\dot{2}}=irD_{11}=irD_{22}=\frac{\sigma}{r}, \tag{5.5}$$

取值于 Cartan 子代数 $\mathfrak{t}\subset\mathfrak{g}$之外，因此只需再次计算阿贝尔矢量多重态背景下的单圈行列式即可。这很直接：矢量多重态的贡献从 [11], 复制而来，而与阿贝尔背景耦合的半超多重态不再记得它们带有关于 G 的荷，其表现就如同极大环面 $T\subset G$ 的表示 $\mathbb{L}\oplus\mathbb{L}^{\perp}$ 中的完整超多重态。因此，我们只需从 [10, 11] 直接读出答案:

$$\begin{aligned}Z_{HS^3}(b;\sigma,B,\mathbb{L})&=\sum_{b'\in\mathcal{W}b}[\text{phase}]\times\delta_{B,b'}\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}^{|w\cdot B|/2}}\Gamma\left(\frac{1+|w\cdot B|}{2}-iw\cdot\sigma\right)}{\prod_{\alpha\in\Delta}\frac{1}{\sqrt{2\pi r}^{|\alpha\cdot B|/2}}\Gamma\left(1+|\alpha\cdot B|/2-i\alpha\cdot\sigma\right)}\\&\equiv\sum_{b'\in\mathcal{W}b}Z_0(b';\sigma,B,\mathbb{L}).\end{aligned} \tag{5.6}$$

这里，分母是矢量多重态的单圈行列式，分子则是超多重态的单圈行列式（这与 [11, eq. 2.15], 相同，只是将 $\mathcal{R}$ 替换为 $\mathbb{L}$）。式（5.6）的答案包含一个未知的相位因子，无法从 [10]中的单圈行列式计算中可靠地确定。文中根据一致性条件将其固定为 [phase] $=1$，具体而言，要求单极子—反单极子二点函数具有预期的单极荷依赖关系。然而，该答案仅在超多重态荷的一种固定指定方式下才有意义。对于完整超多重态理论，可以注意到一种对称性：翻转某些超多重态的荷的符号，或在非阿贝尔情形下将表示 $\mathcal{R}$ 替换为其对偶表示 $\mathcal{R}$，都不会改变拉格朗日！然而，答案 [10, eqn. 3.42], 在这种翻转下并不保持不变，还可能获得一个负号。因此，为了计入这个符号，我们必须允许式（5.6）中[phase] $=\pm1$的可能性。于是，借用 [10], 中的论证, 式（5.6）里未确定的因子实际上并非相位，而只是一个符号。这个符号应作适当调整，使得

库仑分支的答案（代数 $\mathcal{A}_C$ 以及关联函数，在可计算时）在将某些物质表示替换为其共轭表示后保持不变。在我们的情形中，这个符号将作相应调整，使答案不依赖于 $\mathbb{L}$。

单极子冒泡。单极子插入附近的 BPS 方程 $[11, \text{式 } 2.11]$（事实上，在 $\theta = \frac{\pi}{2}$ 处的 S^1_φ 附近）包含 Bogomolny 方程 $F = -\star Du$，其中 $u = \mathrm{Re}(\tan\frac{\theta}{2}e^{i\varphi}\Phi_{11})$。带有单极奇点（例如插入在原点）的非阿贝尔 Bogomolny 方程，除了上文描述的显然的阿贝尔解外，还允许存在鼓泡解，前文已有回顾。单极奇点 b 会被屏蔽为磁荷更小的 $v < b$（其中 v 是最高支配权为 b的朗兰兹对偶群 ${}^LG$的表示中的一个权）。重要的是，Bogomolny 方程解的模空间存在一个极限：在该极限下，单极子看起来携带较小磁通量 $v < b$的“屏蔽半径”趋于零。在此极限中，屏蔽发生在单极子的无穷小邻域内；在该邻域之外，解看起来就像上文描述的阿贝尔解。

通过超杨-米尔斯动能项进行局域化，要求矢量多重态的 BPS 背景解为阿贝尔解（这是由于势能 $-\frac{1}{4}[\Phi^{\dot{a}}{}_{\dot{b}}, \Phi^{\dot{c}}{}_{\dot{d}}][\Phi^{\dot{b}}{}_{\dot{a}}, \Phi^{\dot{d}}{}_{\dot{c}}]$）。乍看之下，这似乎排除了鼓泡解。然而，局域化是通过极限 $t \to \infty$ 下的项 $e^{-tS_{\mathrm{YM}}}$ 进行的；对于任何有限的 t，只要泛函 S_{YM} 偏离 0 的量级为 $o(t^{-1})$，我们就可以轻微违反 BPS 方程。鼓泡解正属于这一类：它们只在单极奇点附近一个极小的邻域内不是阿贝尔解，因此会产生任意小的 S_{YM}。因此，它们会对局域化过程作出贡献。在极限$t \to \infty$下，这会产生额外的局域化位置，其中 BPS 解表现为荷更小的阿贝尔解 (5.4)，其荷为 $v < b$。这种背景下的单圈行列式相同，可能还会有由“鼓泡因子” $Z_0(b' \to v'; \sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 捕捉到的额外效应。因此，完整的半球配分函数为：

$$Z_{HS^3}(b; \sigma, B, \mathbb{L}) = \sum_{b' \in \mathcal{W}b} Z_0(b'; \sigma, B, \mathbb{L}) + \sum_{v<b} \sum_{\substack{b' \in \mathcal{W}b \\ v' \in \mathcal{W}v}} Z_0(b' \to v'; \sigma, B, \mathbb{L}) Z_0(v'; \sigma, B, \mathbb{L}). \quad (5.7)$$

正如我们在引言中回顾的那样，近十年来人们对这些气泡因子愈发关注。我们不打算扩展局域化技术来计算它们。相反，我们沿用 $[11]$, 的方法；该文指出，可以通过 $\mathcal{A}_C$的代数一致性来引导得出气泡因子。

5.2 移位/差分算子

库仑分支算符的插入（沿着 $HS^1 \subset HS^3$）可以表示为作用于半球配分函数上的某些算符。此外，由于半圆 HS^1 有两个端点，因此可以通过这两个“入口”将库仑分支算符 $\mathcal{O}$ 加入 HS^1，从而得到它的两个“版本”：算符 $\mathcal{O}_N$表示在 $\varphi = 0$ 处的插入，而 $\mathcal{O}_S$ 表示在 $\varphi = \pi$ 处的插入：

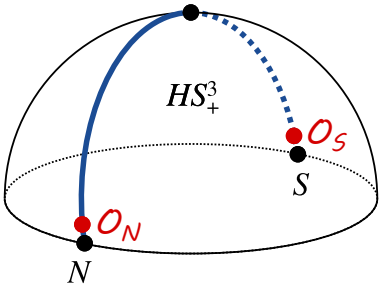

图 3：通过 HS^1 的 N 端点进入半球的扭曲平移的库仑分支算符 $\mathcal{O}(\varphi)$，即 $\mathcal{O}(0)$，表示为作用于半球配分函数的算符 $\mathcal{O}_N$；而 $\mathcal{O}(\pi)$ 则表示为 $\mathcal{O}_S$。

利用这些定义，我们可以直接依靠边界条件推导出 Φ_N 和 Φ_R：

$$\begin{aligned}\Phi_N = \Phi(0) &= \frac{1}{2}(2\Phi_{\dot{1}2} + \Phi_{\dot{1}\dot{1}} + \Phi_{2\dot{2}})\big|_{\varphi=0} = \frac{1}{r}\left(\sigma + \frac{i}{2}B\right), \\ \Phi_S = \Phi(\pi) &= \frac{1}{2}(2\Phi_{\dot{1}2} - \Phi_{\dot{1}\dot{1}} - \Phi_{2\dot{2}})\big|_{\varphi=\pi} = \frac{1}{r}\left(\sigma - \frac{i}{2}B\right).\end{aligned} \tag{5.8}$$

至于表示磁单极子的算符 M_N^b和 M_S^b，其形式是在 [10, 11]中根据若干条件推导出来的：(1) 对任意 $\mathcal{O}$，算符 $\mathcal{O}_N$ 和 $\mathcal{O}_S$ 彼此对易（先在 N 点还是 S 点插入算符并无区别）；(2) 作用于空半球时，$\mathcal{O}_N^{(1)}\mathcal{O}_N^{(2)}\ldots\mathcal{O}_N^{(n)}Z_0(0;\,\sigma,B,\mathbb{L}) = \mathcal{O}_S^{(n)}\mathcal{O}_S^{(n-1)}\ldots\mathcal{O}_S^{(1)}Z_0(0;\,\sigma,B,\mathbb{L})$，因为将局域算子从 $\varphi = 0$移到 $\varphi = \pi$ 会反转它们作用于半球的顺序；(3) 显然，我们必须有 $Z_0(b;\,\sigma,B,\mathbb{L}) = M_N^b Z_0(0;\,\sigma,B,\mathbb{L})$，也就是说，$M_N^b$ 加入了一个磁单极算符，该算符可以移至半球的尖端，从而得到计算 $Z_0(b;\sigma,B,\mathbb{L})$ 的构型。这些论证在 [10, 第 5.1 节 1], 中得到了详细阐述，随后又在 [11]中推广至非阿贝尔情形。我们看到，对于含有半超多重态的理论，实质上并没有什么变化，除了表达式

$Z_0(b;\ \sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 现在涉及 $\mathbb{L}$。因此，我们立即得出：

$$M_N^b = [\text{sign}] \times \frac{\prod_{w\in\mathbb{L}} \frac{(-1)^{(w\cdot b)_+}}{r^{|w\cdot b|/2}} \left(\frac{1}{2} + irw\cdot\Phi_N\right)_{(w\cdot b)_+}}{\prod_{\alpha\in\Delta} \frac{(-1)^{(\alpha\cdot b)_+}}{r^{|\alpha\cdot b|/2}} (ir\alpha\cdot\Phi_N)_{(\alpha\cdot b)_+}} e^{-b\cdot\left(\frac{i}{2}\partial_\sigma + \partial_B\right)},$$
$$M_S^b = [\text{sign}] \times \frac{\prod_{w\in\mathbb{L}} \frac{(-1)^{(-w\cdot b)_+}}{r^{|w\cdot b|/2}} \left(\frac{1}{2} + irw\cdot\Phi_S\right)_{(-w\cdot b)_+}}{\prod_{\alpha\in\Delta} \frac{(-1)^{(-\alpha\cdot b)_+}}{r^{|\alpha\cdot b|/2}} (ir\alpha\cdot\Phi_S)_{(-\alpha\cdot b)_+}} e^{b\cdot\left(\frac{i}{2}\partial_\sigma - \partial_B\right)}, \tag{5.9}$$

其中，[符号] 表示符号歧义，即 (5.6) 中未定相位的剩余部分；这一点在 (5.6) 之后已有讨论。我们还使用以下记号：$(x)_+ = (x+|x|)/2$，以及 $(x)_n = \Gamma(x+n)/\Gamma(x) = x(x+1)\ldots(x+n-1)$。算符 $e^{-b\cdot\partial_B}$ 是一个移位算子，因为

$$e^{-b\cdot\partial_B}\delta_{B,0} = \delta_{B-b,0} = \delta_{B,b}, \tag{5.10}$$

这反映出 M_N^b 和 M_S^b 都会向半球加入磁通量 b。算符 $e^{\pm\frac{i}{2}b\cdot\partial_\sigma}$ 将半球波函数自变量中的 σ 平移 $\pm\frac{i}{2}b$。汇总 r 的总幂次后，我们得到熟悉的单极子标度维数公式：

$$\Delta_b = \frac{1}{2}\left(\sum_{w\in\mathbf{L}} |w\cdot b| - \sum_{\alpha\in\Delta} |\alpha\cdot b|\right) = \frac{1}{4}\sum_{w\in\mathbf{R}} |w\cdot b| - \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Delta} |\alpha\cdot b|, \tag{5.11}$$

其中，第二个表达式是用完整的伪实表示$\mathbf{R}$ 写出的，以强调答案与分解$\mathbf{R} = \mathbb{L}\oplus\mathbb{L}^\perp$无关。这里我们利用了这样一个事实：在每一对权 $(w, -w)$ 中，一个必属于 $\mathbb{L}$，另一个则属于 $\mathbb{L}^\perp$，因为这类权的辛配对非零，所以它们不可能属于同一个拉格朗日子空间。

符号。 为了确定 (5.9) 中未知的 [符号]，我们必须要求由 $M_N^{-b}M_N^b Z_0(0;\ \sigma,\ B,\ \mathbb{L}) = M_S^b M_S^{-b} Z_0(0;\ \sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 表示的二点函数在荷的“翻转”下保持不变，这也意味着它与 $\mathbb{L}$ 无关：选择 $\mathbb{L}$ 就相当于对每一对权 $(w,\ -w)$ 决定是将 w 还是 $-w$ 加到 $\mathbb{L}$ 上（也就是说，在阿贝尔化描述中，选择每个阿贝尔超多重态的 T-荷符号）。对我们来说，一种可行的选择是：

$$[\text{sign}] = (-1)^{\frac{1}{2}\left(\sum_{w\in\mathbb{L}} w\cdot b\right)_+}, \tag{5.12}$$

如果该理论没有反常，这实际上就只是一个符号。

一般的着衣单极子（包括冒泡项）表示为：

$$[P(\Phi)\mathcal{M}^b] = \sum_{\mathrm{w}\in\mathcal{W}} P(\Phi_N^{\mathrm{w}}) M_N^{\mathrm{w}\cdot b} + \sum_{\mathrm{w}\in\mathcal{W}} \sum_{\substack{v<b \\ v'\in\mathcal{W}v}} P(\Phi_N^{\mathrm{w}}) Z_0(b^{\mathrm{w}} \to v'; \sigma, B, \mathbb{L}) M_N^{\mathrm{w}\cdot v'}. \tag{5.13}$$

这里，X^{w} 和 $\mathrm{w}\cdot X$ 的含义相同：韦伊群元素 w 对$X \in \mathfrak{t}$的作用。公式 (5.13) 以“N”表示写出，但同样也可以用“S”表示来写（两种表示下，起泡因子 Z_0 的具体形式可能不同）。

5.3 代数一致性，或多项式性与混合

在 [11] 的非阿贝尔理论中，一个关键思想是多项式性假设，由此提出了多项式性猜想，并在该理论中针对秩为 ≤ 2的规范群得到了验证。正如引言中所解释的，多项式性假设指出，库仑支代数 $\mathcal{A}_C$ 只有多项式关系。这排除了任何分母的出现；这一点颇不平凡，因为移位算子 (5.9) 含有分母，并且对起泡系数的形式施加了严格约束。

多项式性猜想指出，该条件完全确定了起泡系数的形式，但局域算子空间中基的选择除外（即混合歧义）。在平直时空共形场论中，具有相同标度维数的算符可以混合。在具有有量纲尺度的理论中，标度维数不同的算符也可以混合，差值由某个有量纲参数的幂（紫外尺度、红外尺度或某种耦合）补偿。在我们的情形中，相关参数是球面的半径 r。算符可以与维数较低的算符混合，差值由 r补偿：

$$\mathcal{O} = \mathcal{O}_\Delta + \sum_{\Delta'\leq\Delta} \frac{1}{r^{\Delta-\Delta'}} \mathcal{O}_{\Delta'}, \tag{5.14}$$

其中 $\mathcal{O}_\Delta$ 的维数为 Δ。这里的“混合”并非一种物理现象，而是描述方式造成的假象。对于随机构造的算符，混合必然存在，必须通过格拉姆–施密特正交化过程加以消除，例如 [9] 中所做的那样。

虽然人们通常更倾向于使用由确定维数的算子构成的基，但在求解理论的过程中，其他基也完全可能发挥作用。我们的情况正是如此：能够简化冒泡系数的基大有帮助。大致而言，我们利用多项式性假设约束冒泡系数，并保留算子

混合带来的自由度。值得注意的是，这便足以完全确定冒泡系数，从而求解该理论。之后，若有需要，我们当然可以将二点函数对角化，以恢复共形场论数据。下面稍作详细说明。

带有极小单极子的理论。单极子荷是 ${}^{L}G$的权格 $\Lambda^{\vee}$中的韦伊轨道，其中 ${}^{L}G$是对偶群。选取支配权 $b \in \Lambda^{\vee}$，考虑最高权为 b的 ${}^{L}G$-模 R_b。荷为 b 的单极子只能冒泡为其荷也属于 R_b [44, 45]的单极子，但韦伊轨道 $\mathcal{W}b$中的单极子除外。当 R_b 中的全部权恰好构成韦伊轨道 $\mathcal{W}b$时——这类表示称为极小表示——就不会发生冒泡。这类单极子由$\sum_{\mathrm{w}} M^{\mathrm{w}\cdot b}$表示。某个理论是否存在极小单极子，取决于 G的整体形式。很多时候，极小单极子实际上生成整个代数 $\mathcal{A}_C$，于是问题便迎刃而解（尽管更高荷的单极子会发生冒泡）。一个基本例子是 $G = U(N)$，因为 ${}^{L}G = U(N)$，其 N维表示是极小表示。具有 $G = U(N)$的理论（以及酉箭图）的库仑分支，是最早得到充分理解的例子 [24]。另一个基本例子是$G = SO(3)$：对于 ${}^{L}G = SU(2)$，二维表示是极小表示，因为其权构成单个韦伊轨道。这个单极子不会发生冒泡；此外，$M^1 + M^{-1}$和$\Phi(M^1 - M^{-1})$生成整个代数，因此无需分析冒泡问题，库仑支扇区便已得到解决。但无论如何，$G = U(N)$和 $G = SO(3)$都不具有任何伪实表示，因此这类理论只有完整超多重态，所有答案都可以在 [11]中找到。

真实冒泡。现在我们将研究含有半超多重态且其最小单极子会发生冒泡的理论。主要例子是 $G = SU(2)$，它同时具有这两个性质。事实上，${}^{L}G = SO(3)$，其最小表示是三维的，其权$\{-2, 0, 2\}$ 分成两个韦伊轨道，$\{-2, 2\}$ 和 $\{0\}$。由轨道 $\{-2, 2\}$ 表征的单极子可能冒泡为荷为零的单极子，即表现出完全屏蔽。这反映在正确的阿贝尔化单极子为：

$$\widetilde{M}^2 = M^2 + Z(\Phi), \tag{5.15}$$

其中 $Z(\Phi) = Z_0(2 \to 0,\ \sigma,\ B,\ \mathbb{L})$ 是冒泡项，它仅是 Φ 的函数。让我们重复一下 [11] 的论证。将 M^2（或者更准确地说，其韦伊平均 M^2+M^{-2}）加上零单极荷的低维算符（例如（韦伊不变）多项式 $P(\Phi)$），会改变 $Z(\Phi)$ 的形式；也就是说，$Z(\Phi)$ 的泛函形式取决于所选

算符基。考虑冒泡极小磁单极及其着装版本：

$$\begin{aligned}\mathcal{M}^2 &= M^2 + M^{-2} + Z(\Phi) + Z(-\Phi),\\ [\Phi\mathcal{M}^2] &= \Phi(M^2 - M^{-2}) + \Phi(Z(\Phi) - Z(-\Phi)).\end{aligned} \tag{5.16}$$

由一般多项式 $F(\Phi) = f(\Phi^2) + g(\Phi^2)\Phi$ 修饰的同荷单极子可写为 $[F(\Phi)\mathcal{M}^2] = f(\Phi^2) \cdot \mathcal{M}^2 + g(\Phi^2) \cdot [\Phi\mathcal{M}^2]$，更高荷的磁单极子则可通过取乘积得到。因此， $\mathcal{M}^2$、 $[\Phi\mathcal{M}^2]$ 和 Φ^2 生成整个 $\mathcal{A}_C$。然而，$\mathcal{M}^2$ 和 $[\Phi\mathcal{M}^2]$ 包含未知函数 $Z(\Phi)$。为了解决这一问题，我们选取另一组生成元： Φ^2、 X 和 Y，其中

$$X = \mathcal{M}^2 + P_1(\Phi^2), \quad Y = [\Phi\mathcal{M}^2] + P_2(\Phi^2), \tag{5.17}$$

其中包含一些未知多项式 P_1 和 P_2 ，它们体现了混合歧义。我们将要论证，尽管 $Z(\Phi)$、 $P_1(\Phi)$和 $P_2(\Phi)$的形式仍未确定，但存在唯一的 P_1 和 P_2 ，使得 X 和 Y 具有显式表达式。因此，我们将使用 Φ^2、 X、 Y 作为生成元，从而得到 $\mathcal{A}_C$的显式描述。

单极子移位算符（写作 N 表示）为：

$$M^2 = (-1)^{\left(\sum_{w\in\mathbb{L}} w\right)_+} \frac{\prod_{w\in\mathbb{L}} \frac{(-1)^{(2w)_+}}{r^{|w|}} \left(\frac{1}{2} + irw\Phi\right)_{(2w)_+}}{\frac{1}{r^2}(ir\Phi + 1)ir\Phi} e^{-2\partial_B - i\partial_\sigma}, \tag{5.18}$$

$$M^{-2} = (-1)^{\left(-\sum_{w\in\mathbb{L}} w\right)_+} \frac{\prod_{w\in\mathbb{L}} \frac{(-1)^{(-2w)_+}}{r^{|w|}} \left(\frac{1}{2} + irw\Phi\right)_{(-2w)_+}}{\frac{1}{r^2}(ir\Phi - 1)ir\Phi} e^{2\partial_B + i\partial_\sigma}. \tag{5.19}$$

计算以下移位算符的对易子：

$$\begin{aligned}X\Phi^2 - \Phi^2 X &= -\frac{4i}{r}Y - \frac{4}{r^2}X\\ &+ \frac{4}{r^2}(Z(\Phi) + Z(-\Phi) + P_1(\Phi^2)) + \frac{4i}{r}\left(\Phi(Z(\Phi) - Z(-\Phi)) + P_2(\Phi^2)\right),\end{aligned} \tag{5.20}$$

$$\begin{aligned}Y\Phi^2 - \Phi^2 Y &= -\frac{4i}{r}\Phi^2 X - \frac{4}{r^2}Y\\ &+ \frac{4}{r^2}\left(\Phi(Z(\Phi) - Z(-\Phi)) + P_2(\Phi^2)\right) + \frac{4i}{r}\Phi^2\left(Z(\Phi) + Z(-\Phi) + P_1(\Phi^2)\right).\end{aligned} \tag{5.21}$$

多项式性假设告诉我们，右端是多项式。特别地：

$$\frac{1}{r}(Z(\Phi)+Z(-\Phi)+P_1(\Phi^2))+i\left(\Phi(Z(\Phi)-Z(-\Phi))+P_2(\Phi^2)\right)=iA_0(\Phi^2), \tag{5.22}$$

$$\frac{1}{r}\left(\Phi(Z(\Phi)-Z(-\Phi))+P_2(\Phi^2)\right)+i\Phi^2\left(Z(\Phi)+Z(-\Phi)+P_1(\Phi^2)\right)=iA_1(\Phi^2) \tag{5.23}$$

是关于 Φ^2 的多项式。根据第一个方程，我们确定 $P_2(\Phi^2)$，使得 $A_0(\Phi^2)=0$：

$$P_2(\Phi^2)+\Phi(Z(\Phi)-Z(-\Phi))=\frac{i}{r}\left(Z(\Phi)+Z(-\Phi)+P_1(\Phi^2)\right). \tag{5.24}$$

于是第二个方程变为：

$$\left(\frac{1}{r^2}+\Phi^2\right)\left(Z(\Phi)+Z(-\Phi)+P_1(\Phi^2)\right)=A_1(\Phi^2) \tag{5.25}$$

由于我们总可以写成 $A_1(\Phi^2)=c+(r^{-2}+\Phi^2)B(\Phi^2)$，显然可以适当选择 $P_1(\Phi^2)$，使得 $A_1(\Phi)=c$ 是一个常数，因此：

$$\begin{aligned} Z(\Phi)+Z(-\Phi)+P_1(\Phi^2)&=\frac{c}{\Phi^2+\frac{1}{r^2}},\\ P_2(\Phi^2)+\Phi(Z(\Phi)-Z(-\Phi))&=\frac{i}{r}\frac{c}{\Phi^2+\frac{1}{r^2}}. \end{aligned} \tag{5.26}$$

Th因此，我们唯一确定了 X 和 Y 的表达式，只差一个常数 c：

$$\begin{aligned} X&=M^2+M^{-2}+\frac{c}{\Phi^2+\frac{1}{r^2}},\\ Y&=\Phi(M^2-M^{-2})+\frac{i}{r}\frac{c}{\Phi^2+\frac{1}{r^2}}. \end{aligned} \tag{5.27}$$

代数 $\mathcal{A}_C$ 是否对每个 c 都有定义？并非如此。事实证明，多项式性假设进一步约束了 c。为此，使用移位算符 (5.18) 计算如下：

$$\begin{aligned} XY-YX+\frac{2i}{r}XX=&(-1)^{|\sum_{w\in\mathbb{L}}w|}\frac{2\prod_{w\in\mathbb{L}}\frac{(-1)^{2|w|}}{r^{2|w|}}(\frac{1}{2}+irw\Phi)_{(-2w)_+}(\frac{1}{2}-2w+irw\Phi)_{(2w)_+}}{\Phi(\Phi+\frac{i}{r})^2}\\ &-(-1)^{|\sum_{w\in\mathbb{L}}w|}\frac{2\prod_{w\in\mathbb{L}}\frac{(-1)^{2|w|}}{r^{2|w|}}(\frac{1}{2}+irw\Phi)_{(2w)_+}(\frac{1}{2}+2w+irw\Phi)_{(-2w)_+}}{\Phi(\Phi-\frac{i}{r})^2}+\frac{2i}{r}\frac{c^2}{\left(\Phi^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}. \end{aligned} \tag{5.28}$$

右侧应当是一个关于 Φ的 Weyl 不变多项式。特别是，所有极点

都必须相消。对于 $G=SU(2)$，权取值于 $\frac{1}{2}\mathbb{Z}$：$\mathbb{Z}$中的权属于实的整数自旋表示，而 $\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 中的权属于伪实表示（如果我们要包含半超多重态，就必须有伪实表示）。现在引入：

$$\sum_{w\in\mathbb{L}}|w|=A, \tag{5.29}$$

注意到，$2A$ 模 2 恰好就是第2.3节讨论的 $\mathbb{Z}_2$ 反常。采用这一记号，$\prod_w \frac{(-1)^{2|w|}}{r^{2|w|}}=\frac{(-1)^{2A}}{r^{2A}}$。现在注意以下等式：

$$\left(\frac{1}{2}-2w+irw\Phi\right)_{(2w)_+}=(-1)^{(2w)_+}\left(\frac{1}{2}-irw\Phi\right)_{(2w)_+} \tag{5.30}$$

利用定义 $(x)_n=x(x+1).....(x+n-1)$ 即可验证此式。我们将这一关系应用于 (5.28)，使用 $(-1)^{(2w)_++(-2w)^+}=(-1)^{2A}$，并将 (5.28) 的右端写为：

$$\frac{2}{r^{2A}\Phi}\Big[\chi(\Phi)-(-1)^{2A}\chi(-\Phi)\Big]+\frac{2i}{r}\frac{c^2}{\left(\Phi^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}. \tag{5.31}$$

其中我们引入了：

$$\chi(\Phi)=\mathfrak{s}\times\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}(\frac{1}{2}-irw\Phi)_{(2w)_+}(\frac{1}{2}+2w-irw\Phi)_{(-2w)_+}}{(\Phi+\frac{i}{r})^2},\quad \mathfrak{s}=(-1)^{|\sum_{w\in\mathbb{L}}w|}. \tag{5.32}$$

这表明，当 $(-1)^{2A}=1$（即 $\mathbb{Z}_2$ 反常为零）时，(5.31) 中的 $\Phi=0$ 极点会抵消。奇怪的是，对于 $(-1)^{2A}=-1$，这个极点无法消失，多项式性也就不成立。$\mathbb{Z}_2$ 反常存在时，我们的形式体系便会出现这样的问题：

在反常理论中，多项式性的假设不成立。

表达式 (5.31) 在 $\Phi=\pm\frac{i}{r}$ 处也有明显的极点，这两个极点都必须消去。为提取 $\Phi=-\frac{i}{r}$ 处的极点，我们令 $\Phi=-\frac{i}{r}+x$，并只保留对该极点有贡献的项：

$$\frac{2\mathfrak{s}}{r^{2A}}\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-w-irwx\right)_{(2w)_+}\left(\frac{1}{2}+w-irwx\right)_{(-2w)_+}}{\left(-\frac{i}{r}+x\right)x^2}+\frac{2i}{r}\frac{c^2}{(\frac{2i}{r}-x)^2x^2}. \tag{5.33}$$

注意到 $(\frac{1}{2}-w-irwx)_{2w}=(\frac{1}{2}-w-irwx)(\frac{3}{2}-w-irwx)\ldots(w-\frac{1}{2}-irwx)$，因此将首尾因子、次首与次尾因子依次配对，便得到

$\prod_i \left[-\left(\frac{1}{2}+i-w\right)^2 - r^2w^2x^2\right]$ 只依赖于 x^2。因此，在分子中，我们可以直接令 $x=0$（所有其他项都是 $O(x^2)$，不会对极点作出贡献）。将其余部分按 $\frac{1}{x}$ 展开后，我们收集到以下极点项：

$$\left(\frac{r}{2ix^2}-\frac{r^2}{2x}\right)\left(c^2-\frac{4\mathfrak{s}}{r^{2A}}\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-w\right)_{(2w)_+}\left(\frac{1}{2}+w\right)_{(-2w)_+}\right), \tag{5.34}$$

这显然意味着

$$c^2=\frac{4\mathfrak{s}}{r^{2A}}\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-w\right)_{(2w)_+}\left(\frac{1}{2}+w\right)_{(-2w)_+}\equiv\frac{4\mathfrak{s}}{r^{2A}}\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-|w|\right)_{2|w|}. \tag{5.35}$$

分析 $\Phi=\frac{i}{r}$ 处的极点可得相同的结果。如果一个理论至少有一个半整数权，那么上面的表达式显然为零：

$$\mathbb{L}\cap\left(\mathbb{Z}+\frac{1}{2}\right)\neq\emptyset\Rightarrow c=0. \tag{5.36}$$

特别是，含有真正半超多重态的理论必须包含伪实表示，即具有半整数 $SU(2)$ 自旋的表示。对于这类理论，$c=0$。当所有权均为整数时，我们会得到上文的非平凡 c，并且可以用 [11] 中的技巧确定 c 的符号（从 $U(2)$ 规范群出发，构造单极子并规范 $U(1)_{\text{top}}$）。

更一般地，假设物质场除了带有 $SU(2)$ 荷外，还与某个其他群 G' 耦合，该群可以是整体对称性群，也可以是规范群。考虑 $SU(2)\times G'$ 的一个表示 $\mathsf{s}\otimes R'$，其中 s 是自旋为 s 的 $SU(2)$ 不可约表示。当 $s\in\mathbb{Z}+\frac{1}{2}$ 时，它是赝实的，我们可以如下描述：有 N 个处于 s 中的半超多重态，其整体对称性为 $SO(N)$ 和 $G'\subset SO(N)$。接着，在 $\mathsf{s}\otimes R'$ 中选取一个拉格朗日子空间，具体取为 $\mathbb{L}\otimes R'$，其中 $\mathbb{L}\subset\mathsf{s}$ 是拉格朗日子空间，并且每个权 $(w,w')\in\mathbb{L}\otimes R'$ 都与 $(w,-w')$ 成对出现。另一种情况是 $s\in\mathbb{Z}$，因此 s 是实的，而 R' 必须是赝实的。在这种情况下，选取 $\mathsf{s}\otimes\mathbb{L}'$ 作为拉格朗日子空间，其中 $\mathbb{L}'\in R'$ 是拉格朗日子空间。无论哪种情况，都引入一个与 w' 耦合的标量 Φ'（动力学的或背景的）。于是，(5.18) 中 M^2 和 M^{-2} 的表达式涉及对 (w,w') 的乘积，并且我们将每个 $w\Phi$ 替换为 $w\Phi+w'\Phi'$。基本上，同样的分析也适用，从而得到

以下情形下极点消去的必要性：

$$\frac{2\mathfrak{s}\prod_{(w,w')}\frac{(-1)^{2|w|}}{r^{2|w|}}(\frac{1}{2}+irw\Phi+irw'\Phi')_{(-2w)_+}(\frac{1}{2}-2w+irw\Phi+irw'\Phi')_{(2w)_+}}{\Phi(\Phi+\frac{i}{r})^2}$$
$$-\frac{2\mathfrak{s}\prod_{(w,w')}\frac{(-1)^{2|w|}}{r^{2|w|}}(\frac{1}{2}+irw\Phi+irw'\Phi')_{(2w)_+}(\frac{1}{2}+2w+irw\Phi+irw'\Phi')_{(-2w)_+}}{\Phi(\Phi-\frac{i}{r})^2}+\frac{2i}{r}\frac{c^2}{\left(\Phi^2+\frac{1}{r^2}\right)^2}. \tag{5.37}$$

由于（$w,\ w'$）要么与（$w,\ -w'$）配对，要么与（$-w,\ w'$）配对，我们再次表明 $\Phi=0$ 极点会消去；而在反常消去条件（-1）$^{-2A}=1$ 成立时，$\Phi=\pm\frac{i}{r}$ 极点的消去会导出类似的结果：

$$c^2=\frac{4(-1)^{|\sum_{w\in\mathbb{L}}w|}}{r^{2A}}\prod_{(w,w')}\left(\frac{1}{2}-|w|+irw'\Phi'\right)_{2|w|}. \tag{5.38}$$

也很容易看出（因为每个（$w,\ w'$）都与（$-w,\ w'$）或（$w,\ -w'$）配对），这个表达式是一个完全平方，因此 c 是 Φ' 的多项式。

6 例子

现在，我们已经具备了处理若干含有半超多重态的理论例子的所有工具，并能够完全求解其库仑支扇区。

6.1 一般 $SU(2)$ 与半超多重态

对于规范群为 $SU(2)$ 且至少包含一个半整数自旋表示（这涵盖了所有含半超多重态的例子）的理论，正如我们上文所见，$c=0$。所有库仑分支算符均由 Φ^2 构成（作为韦伊群下的 $\Phi\mapsto-\Phi$），其中我们取$\Phi\equiv\Phi_N=\frac{1}{r}(\sigma+\frac{i}{2}B)$，以及两个最小的韦伊不变单极子：

$$X=M^2+M^{-2},$$
$$Y=\Phi(M^2-M^{-2}). \tag{6.1}$$

我们可以验证，对于 $b_1,\ b_2>0$、$M^{b_1}M^{b_2}=M^{b_1+b_2}$和 $M^{-b_1}M^{-b_2}=M^{-b_1-b_2}$，因此$M^{2n}=(M^2)^n$以及 $M^{-2n}=(M^{-2})^n$。这证明 X、Y和 Φ^2足以生成一切：X^n将包含 $M^{2n}+M^{-2n}$及低维项，而 YX^{n-1}将

包含 $\Phi(M^{2n}-M^{-2n})$ 及低维项。由此，我们构造出移位算子代数的基（将其视为复向量空间）：

$$\text{Basis:}\quad \Phi^{2m}X^n,\ m\geq 0,\ n\geq 0,\quad \text{and}\quad \Phi^{2m}YX^n,\ m\geq 0,\ n\geq 0. \tag{6.2}$$

现在来确定这些关系，使得任意元素都能写成它们的线性组合。其中两个关系是与具体物质内容无关的对易子：

$$X\Phi^2-\Phi^2X=-\frac{4i}{r}Y-\frac{4}{r^2}X, \tag{6.3}$$

$$Y\Phi^2-\Phi^2Y=-\frac{4i}{r}\Phi^2X-\frac{4}{r^2}Y. \tag{6.4}$$

其中一个关系是依赖物质内容的对易子：

$$XY-YX=-\frac{2i}{r}X^2+\frac{1}{r}p(\Phi), \tag{6.5}$$

$$p(\Phi)=4i(M^2M^{-2}+M^{-2}M^2)+2r\Phi(M^{-2}M^2-M^2M^{-2}), \tag{6.6}$$

其中依赖物质的部分 $p(\Phi)$ 可计算为：

$$p(\Phi)=\frac{2\mathfrak{s}\prod_{w\in\mathbb{L}}(-1)^{(2w)_+}}{r^{2A-3}}\times\frac{1}{\Phi}\left[\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}+ir|w|\Phi\right)_{|2w|}}{(1+ir\Phi)^2}-\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-ir|w|\Phi\right)_{|2w|}}{(1-ir\Phi)^2}\right], \tag{6.7}$$

显然，这是关于 Φ^2 的多项式： $\Phi=\pm\frac{i}{r}$ 处的极点会抵消，因为含有半超多重态的无反常理论至少有两个半整数权 $w\in\mathbb{L}$；而 $\Phi=0$ 处的极点则因关于 $\Phi\mapsto-\Phi$ 的对称性而抵消，这也表明它是 Φ^2 的函数。最后，也是最重要的关系，能够降低任意表达式中 Y 的幂次：

$$Y^2=\Phi^2X^2-\frac{2i}{r}YX+\mu(\Phi) \tag{6.8}$$

$$\mu(\Phi)=-2\Phi^2(M^2M^{-2}+M^{-2}M^2)-\frac{4i}{r}\Phi(M^{-2}M^2-M^2M^{-2}), \tag{6.9}$$

其中，依赖于物质场的部分 $\mu(\Phi)$ 是 Φ^2 的某个多项式：

$$\mu(\Phi)=\frac{2\mathfrak{s}\prod_{w\in\mathbb{L}}(-1)^{(2w)_+}}{r^{2A-2}}\left[\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}+ir|w|\Phi\right)_{|2w|}}{(1+ir\Phi)^2}+\frac{\prod_{w\in\mathbb{L}}\left(\frac{1}{2}-ir|w|\Phi\right)_{|2w|}}{(1-ir\Phi)^2}\right]. \tag{6.10}$$

考察交换极限 $r \to \infty$ 很有启发性。在该极限下， $p(\Phi)$ 消失，而 $\mu(\Phi)$ 变为（利用 $A \in \mathbb{Z}$）：

$$\lim_{r\to\infty} \mu(\Phi) = (-\Phi^2)^{A-1} 4\mathfrak{s} \prod_{w\in\mathbb{L}} (-1)^{(2w)_+} |w|^{2|w|} = -\alpha(\Phi^2)^{A-1}. \tag{6.11}$$

由此我们得到满足关系式的交换变量 X， Y， $Z = \Phi^2$ ：

$$Y^2 = ZX^2 - \alpha Z^{A-1}. \tag{6.12}$$

我们总可以通过重新缩放 X 和 Y 来令 $\alpha = 1$，从而得到 D_A 奇点的标准形式。回想一下，此处 $A = \sum_{w\in\mathbb{L}} |w|$。这一结果的一个特例已在 [11] 中得出，适用于具有 N_f 个完整基本超多重态和 N_a 个伴随超多重态的理论；其中发现 $A = N_f + 2N_a$，确实与我们的答案相符。

6.2 具有 D_2 库仑分支的理论

每当 $\sum_{w\in\mathbb{L}} |w| = 2$ 时，我们得到的库仑分支在重新缩放变量后呈现为 $y^2 = zx^2 - z$，形式上这是一个 D_2 奇点。后者不在奇点列表中：它甚至在原点也不是奇异的。相反，它在 $x = \pm 1$、 $y = z = 0$ 处有两个孤立的 A_1 奇点，这反映出在 Dynkin图层面上，$D_2 = A_1 \sqcup A_1$。

有三种无反常的 $SU(2)$ 规范理论具有 $A = 2$：**(1)** 含有一个自旋-$\frac{3}{2}$半超多重态的理论；**(2)** 含有两个基本表示（自旋-1_2）完整超多重态的理论，见 [11, 71, 72]；**(3)** 含有一个伴随完整超多重态的理论。这些都是“坏”理论，库仑分支彼此同构，但希格斯分支各不相同。只有第一种理论含有真正的半超多重态，另外两种则由完整超多重态构成，适用于较早的方法。注意，最后一种理论实际上具有 $\mathcal{N} = 8$ （下文将进一步讨论）。

6.2.1 SU（2）与自旋-$\frac{3}{2}$半超多重态

首先考虑一个具有一个自旋-$\frac{3}{2}$（即四维）不可约表示中的半超多重态的 $SU(2)$ 规范理论。这是包含半超多重态的最简单例子（因为单个自旋-$\frac{1}{2}$ 是 –

反常的）。选择张成拉格朗日子空间的权有四种方式：

$$\mathbb{L}_{++} = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}, \tag{6.13}$$

$$\mathbb{L}_{+-} = \{\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}, \tag{6.14}$$

$$\mathbb{L}_{-+} = \{-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}\}, \tag{6.15}$$

$$\mathbb{L}_{--} = \{-\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}\}. \tag{6.16}$$

这四种情况分别记为 $++$、$+-$、$-+$ 和 $--$，得到的答案都相同。我们发现：

$$++ : M^2 = \frac{(1+3ir\Phi)(3+3ir\Phi)(5+3ir\Phi)}{16ir\Phi} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \quad M^{-2} = \frac{1}{(ir\Phi-1)ir\Phi} e^{\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \tag{6.17}$$

$$+- : M^2 = -\frac{1}{2ir\Phi} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \quad M^{-2} = -\frac{3(1-3ir\Phi)(5-3ir\Phi)}{8ir\Phi} e^{\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \tag{6.18}$$

$$-+ : \quad M^2 = \frac{3(1+3ir\Phi)(5+3ir\Phi)}{8ir\Phi} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \quad M^{-2} = \frac{1}{2ir\Phi} e^{\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \tag{6.19}$$

$$-- : M^2 = \frac{1}{(ir\Phi+1)ir\Phi} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \quad M^{-2} = -\frac{(1-3ir\Phi)(3-3ir\Phi)(5-3ir\Phi)}{16ir\Phi} e^{\frac{2i}{r}\partial_\Phi}. \tag{6.20}$$

三条对易关系具体为：

$$X\Phi^2 - \Phi^2 X = -\frac{4i}{r} Y - \frac{4}{r^2} X, \tag{6.21}$$

$$Y\Phi^2 - \Phi^2 Y = -\frac{4i}{r} \Phi^2 X - \frac{4}{r^2} Y, \tag{6.22}$$

$$XY - YX = -\frac{2i}{r} X^2 + \frac{27i}{2r}. \tag{6.23}$$

而 Y^2 关系为：

$$Y^2 = \Phi^2 X^2 - \frac{2i}{r} YX - \frac{27}{4}\Phi^2 + \frac{15}{4r^2}, \tag{6.24}$$

从而完整地描述了 $\mathcal{A}_C$：它是由 X、Y、$Z = \Phi^2$ 生成的自由结合代数，并模掉关系 (6.24)-(6.23)：

$$\mathcal{A}_C = \mathbb{C}\langle X, Y, \Phi^2\rangle / ((6.24), (6.21), (6.22), (6.23)). \tag{6.25}$$

虽然 Y 的维数为 1，Φ^2 是维数为 2 的算符，但 X 的维数为 0，这表明该理论是“坏”理论。在交换极限 $r \to \infty$中，我们恢复得到库仑分支，它是由以下条件确定的

簇：

$$Y^2 = ZX^2 - \frac{27}{4}Z. \tag{6.26}$$

这个曲面虽然形式上是一个 D_2 奇点，但在原点 $X = Y = Z = 0$处是光滑的（事实上，并不存在所谓的 D_2 奇点）。它有两个孤立的 A_1 奇点（且没有其他奇点），位于：

$$X = \pm\frac{3\sqrt{3}}{2},\ Y = Z = 0. \tag{6.27}$$

然而，这些奇点必然承载某种超共形场论；值得注意的是，它们并不 代表与希格斯分支的交点，因为在这个例子中不存在希格斯分支，这是由于超凯勒商是平凡的：

$$\mathcal{M}_C = \mathbb{C}^4///SU(2) = 0. \tag{6.28}$$

任一奇点处的超共形场论都必然具有与 A_1 奇点同构的库仑分支，且没有希格斯分支。它可能是对扭曲超多重态进行 $\mathbb{Z}_2$ 规范化的理论，也可能是某种非拉格朗日的三维 $\mathcal{N} = 4$ 超共形场论（类似于 [73, 74]）。

6.2.2 $SU(2)$ 与两个基本超多重态

具有“D_2”库仑分支的第三个也是最后一个理论，是一个 $SU(2)$ 理论，含有两个基本表示的完整超多重态；该理论已在 [71, 第 4 节2] 和 [72, 第 7.3 节1]中讨论。这里，起泡系数 $c = 0$以及 $X = M^2 + M^{-2}$、$Y = \Phi(M^2 - M^{-2})$ 与 Φ^2之间的关系再次为：

$$X\Phi^2 - \Phi^2 X = -\frac{4i}{r}Y - \frac{4}{r^2}X, \tag{6.29}$$

$$Y\Phi^2 - \Phi^2 Y = -\frac{4i}{r}\Phi^2 X - \frac{4}{r^2}Y, \tag{6.30}$$

$$XY - YX = -\frac{2i}{r}X^2 + \frac{i}{2r}, \tag{6.31}$$

$$Y^2 = \Phi^2 X^2 - \frac{2i}{r}YX - \frac{1}{4}\Phi^2 + \frac{1}{4r^2}. \tag{6.32}$$

交换极限 $Y^2 = ZX^2 - \frac{1}{4}Z$ 在重新缩放后，就是我们熟悉的复曲面。不过，完整的非交换代数 $\mathcal{A}_C$ 却又有所不同。

至于希格斯分支，超凯勒商 $\mathbb{C}^8///SU(2)$ 实际上是两个 A_1 锥的不交并。可以这样理解：两个基本表示超多重态等同于四个基本半超多重态，这显现出味对称群 $SO(4)$。

因此， $SU(2)_+ \times SU(2)_-$ 作用于半超多重态，而希格斯分支由 $\mathfrak{su}(2)_+ \oplus \mathfrak{su}(2)_-$ 中的幂零锥给出，也就是 $A_1 \cup A_1$。虽然从超凯勒商的角度看，这些锥似乎在顶点处相接，但从物理图像可以清楚看出，量子实在并非如此：它们分别连接到库仑分支上的两个奇异点。因此，位于奇异点处的两个超共形场论都有 $\mathcal{M}_H = \mathcal{M}_X = A_1$ 奇点，这与 [71] 和 [72, 第 7.3 节的结果一致。1], 运用他们的方法，将奇异点处的超共形场论识别为 SQED 的红外极限（即具有两个单位电荷味的 $U(1)$）。这与我们的自旋-$\frac{3}{2}$ 例子形成对照，在那个例子中，奇异点并不代表与希格斯分支的交汇，也支撑着一个尚未确定的超共形场论。若能发展出确定后者的方法，将会很有意义。

6.2.3 $SU(2)$ 完整伴随超多重态

一个带有单个伴随完整超多重态的 $SU(2)$ 规范理论具有非零的冒泡项，其中包含 $c^2 = \frac{1}{4r^4}$。为了确定 c 的符号，我们可以将其视为 $U(2)$ 规范理论（其中 $b = 1$ 单极子是极小的），在该理论中，拓扑 $U(1)_{\text{top}}$ 被规范化；或者更直观地注意到：仅含整数权的物质内容（例如伴随物质）允许规范群为 $SO(3)$。$SU(2)$ 和 $SO(3)$ 规范理论当然可以通过规范化 $\mathbb{Z}_2$ 对称性相互关联。$SO(3)$ 理论允许$b = 1$磁单极子（它们同样是极小的，不会发生冒泡），因此我们有 $x = M^1 + M^{-1}$,$y = \Phi(M^1 - M^{-1})$ 以及

$$M^1 = \frac{ir\Phi + \frac{1}{2}}{ir\Phi} e^{-\frac{i}{r}\partial_\Phi}, \tag{6.33}$$

$$M^{-1} = \frac{ir\Phi - \frac{1}{2}}{ir\Phi} e^{\frac{i}{r}\partial_\Phi}. \tag{6.34}$$

[1]通过计算 $x^2 = M^2 + M^{-2} + \frac{-2r^2}{\Phi^2 + \frac{1}{r^2}} + 2$，我们可以看到这确实确定了符号，$c = -\frac{1}{2r^2}$。我们首先计算 $SO(3)$ 理论中的关系：

$$x\Phi^2 - \Phi^2 x = -\frac{2i}{r} y - \frac{1}{r^2} x, \tag{6.35}$$

$$y\Phi^2 - \Phi^2 y = -\frac{2i}{r} \Phi^2 x - \frac{1}{r^2} y, \tag{6.36}$$

$$xy - yx = -\frac{i}{r} x^2 + \frac{4i}{r}, \tag{6.37}$$

$$y^2 = \Phi^2 x^2 - 4\Phi^2 - \frac{i}{r} yx + \frac{1}{r^2}. \tag{6.38}$$

在 $SU(2)$ 理论中，基本单极子则是 $X = x^2 - 2, Y = yx$，其关系为：

$$X\Phi^2 - \Phi^2 X = -\frac{4i}{r}Y - \frac{4}{r^2}X, \tag{6.39}$$

$$Y\Phi^2 - \Phi^2 Y = -\frac{4i}{r}\Phi^2 X - \frac{4}{r^2}Y - \frac{2i}{r^3}, \tag{6.40}$$

$$XY - YX = -\frac{2i}{r}X^2 + \frac{8i}{r}, \tag{6.41}$$

$$Y^2 = \Phi^2 X^2 - 4\Phi^2 - \frac{2i}{r}YX + \frac{1}{r^2}X + \frac{2}{r^2}. \tag{6.42}$$

我们看到，$SU(2)$ 和 $SO(3)$ 理论的交换极限给出了相同的复曲面 $y^2 = zx^2 - 4z$（甚至不需要重新缩放），这与以下自同构的存在有关：

$$(x, y, z) \mapsto (x^2 - 2, yx, z). \tag{6.43}$$

与此同时，非交换代数并不相同：我们将 $\mathcal{A}_C^{SU(2)}$ 构造为 $\mathcal{A}_C^{SO(3)}$ 的真包含。

至于其余真空态，该理论没有纯希格斯分支。相反，希格斯分支与库仑分支统一为混合模空间，这对于增强超对称性是典型的（事实上，这个例子具有 $\mathcal{N} = 8$）。迄今为止我们找到的"库仑分支"~是模空间的一个切片，在该切片上超多重态标量消失，$Q = Q = 0$。如果我们~纳入（Q，Q），便可得到三维 $\mathcal{N} = 8$ $SU(2)$ 超杨-米尔斯理论的总模空间，~众所周知，它是 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2$ [75, 76]。若将 $\mathbb{C}^4$ 上的坐标记为（m，Φ，Q，Q），并取~~如下等同关系：（m，Φ，Q，Q）$\sim$（$-m$，$-\Phi$，$-Q$，$-Q$），那么通过选取 $x = e^m + m^{-m}$,$y = \Phi(e^m - e^{-m})$，$z = \Phi^2$，我们确实得到总 $\mathbb{C}^4/\mathbb{Z}_2$内的 $y^2 = zx^2 - 4z$。

6.3 $SU(2)$ 群的夸克图

另一个我们简要考察的例子是一个由 $SU(2)$ 群构成的线性箭图，包含 n 个规范节点，相邻的 $SU(2)$ 节点由双基本表示连接，并且每个节点都连接一个自旋为 $\frac{3}{2}$-的半超多重态味，见图 4。由于存在这种味，（与每个节点相关联的）起泡系数 c_i 全部为零。

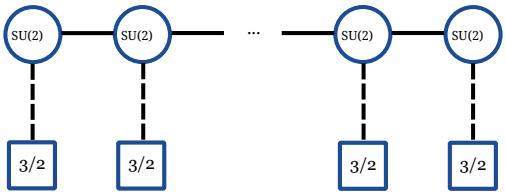

图 4：由虚线连接、带有半超多重态味的 $SU(2)$ 群的夸克图。

因此我们有：

$$X_i = M_i^2 + M_i^{-2}, \tag{6.44}$$

$$Y_i = \Phi_i(M_i^2 - M_i^{-2}), \tag{6.45}$$

其中移位算子为：

$$M^2 = \frac{1}{r^4}\left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2}\Phi_i + \frac{ir}{2}\Phi_{i-1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2}\Phi_i - \frac{ir}{2}\Phi_{i-1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2}\Phi_i + \frac{ir}{2}\Phi_{i+1}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2}\Phi_i - \frac{ir}{2}\Phi_{i+1}\right)$$
$$\times \frac{\left(\frac{1}{2} + \frac{ir}{2}\Phi_i\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{3ir}{2}\Phi_i\right)_3}{(ir\Phi_i + 1)ir\Phi_i} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi}, \tag{6.46}$$

$$M^{-2} = \frac{1}{r^4}\left(\frac{1}{2} - \frac{ir}{2}\Phi_i + \frac{ir}{2}\Phi_{i-1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{ir}{2}\Phi_i - \frac{ir}{2}\Phi_{i-1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{ir}{2}\Phi_i + \frac{ir}{2}\Phi_{i+1}\right)\left(\frac{1}{2} - \frac{ir}{2}\Phi_i - \frac{ir}{2}\Phi_{i+1}\right)$$
$$\times \frac{1}{(ir\Phi_i - 1)ir\Phi_i} e^{+\frac{2i}{r}\partial_\Phi}. \tag{6.47}$$

随后，可以用完全相同的方式推导出所有关系。我们只推导库仑分支的交换极限，并用 X_i、Y_i 和 $Z_i = \Phi_i^2$ 表示：

$$Y_i^2 = Z_i X_i^2 - \frac{27}{1024} Z_i (Z_i - Z_{i-1})^2 (Z_i - Z_{i+1})^2, \quad i = 1 \ldots n. \tag{6.48}$$

这里我们令 $Z_0 = Z_{n+1} = 0$。这个方程组给出了库仑分支的答案，不过我们当然还可以提取更多信息（量子环 $\mathcal{A}_C$ 和关联函数，因为这是一个良性理论）。

7 展望

在这项工作中，我们通过构造具有半超多重态的广义拉格朗日三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的量子化库仑分支 $\mathcal{A}_C$，完成了 [9–11] 的研究计划（即非余切理论）。当该理论良好时，我们还在

代数：

$$(\mathcal{O}\in\mathcal{A}_C)\mapsto\langle Z_{HS^3}|\mathcal{O}|Z_{HS^3}\rangle=\frac{1}{|\mathcal{W}|}\sum_{B\in\Lambda^\vee}\int_{\mathfrak{t}}\mathrm{d}^r\sigma\,\mu(\sigma,B)Z_{HS^3}(\sigma,B,\mathbb{L})\mathcal{O}Z_{HS^3}(\sigma,B,\mathbb{L}),\tag{7.1}$$

其中，Z_{HS^3} 是空半球配分函数 (1.2)，$\mu(\sigma,B)$ 是 (4.20) 中定义的粘合测度，而 $\mathcal{O}$ 是表示 $\mathcal{A}_C$ 中一个元素的移位算子。该映射可以计算与库仑扇区相关的拓扑量子力学中的关联函数，这需要对 σ 进行非平凡积分。然而，我们几乎无需任何积分，就能直接得到代数$\mathcal{A}_C$ 本身（即量子化库仑分支）。

在论文正文给出的答案中，我们忽略了质量和 FI 参数，但它们可以很容易地纳入。要纳入质量，只需将移位算子分子中的波赫哈默符号内的 $w\cdot\Phi$ 替换为 $w\cdot\Phi+M$。这会以复质量形变库仑分支。FI 项则稍微棘手一些，因为它们会抬升库仑分支。如 [10,第 5.1 节2], 所述，FI 项会在单极算符中引入显式的 φ 依赖 $e^{r\zeta_b\varphi}$，并且还会将粘合测度乘以 $e^{-8\pi^2ir\zeta\cdot\sigma}$。

这一领域仍有一些问题有待解决。以下是几个值得关注的问题：

1. 证明一般情形下的多项式性猜想。

2. 开发更高效的方法，从我们的形式体系中提取结果，特别是起泡系数以及 $\mathcal{A}_C$ 的生成元与关系。

3. 开发工具，以提取模空间奇点处超共形场论的数据。我们关于含有一个自旋-$\frac{3}{2}$ 半超多重态的 $SU(2)$ 的例子，是一个有趣的测试案例。这个理论相当刚性：在紫外没有质量形变。它的库仑分支有两个 A_1 奇点，各自承载某种超共形场论（其库仑分支为 A_1，且没有希格斯分支）。目前，我们不知道如何提取这一超共形场论，而 [71, 72, 77, 78] 的工具似乎并不适用。这类似于 Argyres-Douglas 理论如何在四维库仑分支的特殊奇点处出现。

致谢

MD 感谢 Silviu Pufu 和 Matteo Sacchi 的来信交流。DR 谨此感谢 Martin Rocek 在本文撰写期间的来信交流与讨论。

关联函数

本附录旨在证明单极子-反单极子关联函数与拉格朗日分解的选择无关。我们希望计算

$$\langle \mathcal{M}^2 \mathcal{M}^{-2} \rangle = \frac{1}{|\mathcal{W}| Z_{S^3}} \sum_{b \in \Lambda^\vee} \int_{\mathfrak{t}} \mathrm{d}\sigma \, \mu(\sigma, B, \mathbb{L}) Z_{HS^3} \mathcal{M}^2 \mathcal{M}^{-2} Z_{HS^3}(\sigma, B, \mathbb{L}). \tag{A.1}$$

与其余这些例子一样，我们将限于 $SU(2)$，但目前暂不限定该理论的物质内容。对于给定的一组半超多重态，任何一种拉格朗日分解都会将权"分解"为 $\mathbb{L}$ 和 $\mathbb{L}^\perp$。对于给定的理论，我们可以将 $\mathbb{L}$ 定义为

$$\mathbb{L} = \left\{ w_1^{I_1}, ..., w_k^{I_k}, -w_1^{I'_1}, ..., -w_l^{I'_l} \right\} \tag{A.2}$$

其中权为 w_i，重数为 I_i；负权为 $-w_i$，重数为 I'_i。这些权以 k, l 为索引，因为原则上它们可以是不同的数值，但在许多情况下（理论越复杂，这种情况越常见），这些数值相等。这些重数受到以下关系的约束

$$|I_i - I'_i| \leq \max(I_i, I'_i), \quad I_i + I'_i = \mathcal{I}_i \tag{A.3}$$

其中 $\mathcal{I}_i$ 是给定 $|w_i|$的重数，也就是说，若给定的所有 w_i 均为正（或负），则其重数即为此值。重复的指标表示选取一个权 w_i 及其反射$-w_i$。采用这一记号后，我们可以按如下方式划分多重集 $\mathbb{L}$：

$$\mathbb{L}^+ = \left\{ w_1^{I_1}, ..., w_k^{I_k} \right\}, \quad \mathbb{L}^- = \left\{ -w_1^{I'_1}, ..., -w_l^{I'_l} \right\}. \tag{A.4}$$

这将 $\mathbb{L}$ 的所有正权重及其反射分别归入两个不同的集合。结合对 I_k 和 I'_l 的约束，可保证交集 $\mathbb{L}^+ \cap \mathbb{L}^-$ 为空。这一点很有用，主要是因为我们可以用这两个集合重新表达权之和：

$$A \equiv \sum_{w \in \mathbb{L}} |w| = \sum_{w \in \mathbb{L}^+} I_i w_i - \sum_{w' \in \mathbb{L}^-} I'_j w'_j \tag{A.5}$$

其中包含负号，以对应 $\mathbb{L}^-$ 的元素定义中的负号。我们还可以用这种新表述重新表达移位算符

$$M^2 = \frac{(-1)^{\sum_{w_k} I_k w_k}}{r^{A-2}(ir\Phi+1)(ir\Phi)} \prod_{w_k \in \mathbb{L}^+} \prod_{j=0}^{2w_k-1} \left(\frac{1}{2} + irw_k\Phi + j\right)^{I_k} e^{-\frac{2i}{r}\partial_\Phi} \tag{A.6}$$

$$M^{-2} = \frac{(-1)^{-\sum_{w'_k} I'_k w'_k}}{r^{A-2}(ir\Phi-1)(ir\Phi)} \prod_{w'_k \in \mathbb{L}^-} \prod_{j=0}^{-2w'_k-1} \left(\frac{1}{2} - irw'_k\Phi + j\right)^{I'_k} e^{\frac{2i}{r}\partial_\Phi}. \tag{A.7}$$

在这些表达式中，前因子分别包含用 $\mathbb{L}^+$ 和 $\mathbb{L}^-$表示的符号函数的贡献[5], ，以及已显式求出的矢量多重态分母。随后，乘积选取 $\mathbb{L}^+$ 中的一个特定权及其重数，再展开波赫哈默符号 I_k 次。我们注意到，这种移位算符表达式之所以可行，是因为在 5.9 中，只有wb 的组合会同时出现——它们要么取决于 wb 的绝对值（这对应于表达式中的 A，因为它与权的符号无关），要么仅在 wb为正时才有贡献。从单极子移位算符转到反单极子移位算符，会翻转 $\mathbb{L}$中所访问的权。

现在我们可以开始计算单极子-反单极子二点函数。换言之，我们的最终目标是证明这个二点函数不依赖于$\mathbb{L}$的选择。对上述移位算符进行重新表达的思路在于，其表达式中并非 $\mathbb{L}$ 的每个权都会有贡献。这正是拉格朗日分裂的体现——当 $\mathbb{L}$中符号的选择在单极子移位算符中“跳过”带负荷的权，转而将它们放入反单极子移位算符中。换言之，单个移位算符确实依赖于拉格朗日分裂。然而我们注意到，两个荷相反的移位算符（例如二点函数中出现的移位算符）的乘积未必依赖于拉格朗日分裂。

对于半球配分函数和粘合测度，无需重新定义，这分别可由 5.6 和 4.20 的定义看出。从它们的形式可以看出，它并不在意 $\mathbb{L}$ 遍历哪些元素——对它们而言，拉格朗日分裂的选择确实是任意的。因此，我们只需证明关联函数中对 $\mathbb{L}^+$ 和 $\mathbb{L}^-$ 的依赖会消失。

[5]为记号简便起见，符号函数中省略了集合符号。

以下项在磁通守恒下保留下来：

$$\langle \mathcal{M}^2 \mathcal{M}^{-2} \rangle = \langle M^2 M^{-2} \rangle + \langle M^{-2} M^2 \rangle. \tag{A.8}$$

聚焦于 A.8 右侧的第一项，我们先对半球配分函数 HS^3 作用 M^{-2}，随后作用 M^2，得到如下形式的关联函数

$$\langle M^2 M^{-2} \rangle = \frac{\pi^{2-\mathcal{I}}}{2Z_{S^3}} \int_{\mathfrak{t}} \mathrm{d}\sigma \, \mathcal{V}(\sigma) \mathcal{R}(\sigma) \frac{\sinh^2(\pi\sigma)}{\prod_{w \in \mathbb{L}} \cosh(\pi |w| \sigma)}. \tag{A.9}$$

这里，$\mathcal{I}$ 是 $\mathbb{L}$ 的大小，即

$$\mathcal{I} = \sum_{i=1}^{k} I_i + \sum_{j=1}^{l} I'_j \tag{A.10}$$

对于每个正权重和负权重都是如此。它还取决于两个函数 $\mathcal{V}(\sigma)$ 和 $\mathcal{R}(\sigma)$，其形式为

$$\mathcal{V}(\sigma) = \frac{\sigma}{r} \frac{(-1)^{\sum_{w_k} I_k w_k - \sum_{w'_k} I'_k w'_k}}{r^{A-4}} \frac{1}{i\sigma(1+i\sigma)^2(i\sigma+2)} \tag{A.11}$$

and

$$\mathcal{R}(\sigma) = \Bigg(\prod_{w_k \in \mathbb{L}^+} \prod_{j=0}^{2w_k - 1} \left(\frac{1}{2} + i r w_k \Phi + j \right)^{I_k} \Bigg) \Bigg(\prod_{w'_k \in \mathbb{L}^-} \prod_{j=0}^{-2w'_k - 1} \left(\frac{1}{2} - i r w'_k \Phi + j \right)^{I'_k} \Bigg). \tag{A.12}$$

我们先讨论 A.9。二点函数中最右侧的因子，是粘合测度和半球配分函数最终形成的结果——分子来自矢量多重态贡献，分母则来自半超多重态内容。它取决于给定权的绝对值，因此显然与拉格朗日分裂无关。接下来来看 A.11，我们看到它对$\mathbb{L}^+$ 和 $\mathbb{L}^-$ 的唯一依赖体现在符号函数中。但根据关系 A.5，这一点也与拉格朗日分裂无关。由此可知，$\mathcal{V}(\sigma)$与拉格朗日分裂无关。最后来看 A.12。我们需要证明它能生成 $\mathbb{L}$中的每一个可能项。为此，我们注意到，由于 $\mathbb{L}^+$ 和 $\mathbb{L}^-$ 将 $\mathbb{L}$分割开来，它们的并集构成了整个 $\mathbb{L}$。可以看到，$\mathcal{R}(\sigma)$遍历了 $\mathbb{L}^+$ 和 $\mathbb{L}^-$中的每个元素，因此与拉格朗日分裂无关。由此可知，关联函数与拉格朗日分裂的选择无关。

参考文献

[1] A. Hanany 和 E. Witten, 《IIB型超弦、BPS 单极子与三维规范动力学》, *Nucl. Phys.* **B492 (1997) 152–190**,arXiv:hep-th/9611230 [hep-th].[2] K. A. Intriligator 和 N. Seiberg, 《三维规范理论中的镜像对称》, *Phys. Lett.* **B387(1996) 513–519**, arXiv:hep-th/9607207 [hep-th].[3] J. de Boer、K. Hori、H. Ooguri、Y. Oz 和 Z. Yin, 《三维理论中的镜像对称、SL(2,Z) 与 D 膜模空间》, *Nucl. Phys.* **B493(1997) 148–176**, arXiv:hep-th/9612131 [hep-th].[4] A. Kapustin 和 M. J. Strassler, 《论三维阿贝尔规范理论中的镜像对称》, *JHEP***04 (1999) 021**, arXiv:hep-th/9902033 [hep-th].[5] T. Braden、N. Proudfoot 和 B. Webster, 《锥形辛解消的量子化 I：局部与整体结构》, *Ast´erisque*(2012) , arXiv:1208.3863 [math.RT]。

[6] M. Bullimore、T. Dimofte、D. Gaiotto 和 J. Hilburn, 《三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论中的边界、镜像对称与辛对偶》, *JHEP* **10** （2016年）108, arXiv:1603.08382 [hep-th]。

[7] A. Kapustin、B. Willett 和 I. Yaakov, 《含物质场的超共形陈-西蒙斯理论中的威尔逊环精确结果》, *JHEP* **03** （2010年）089, arXiv:0909.4559 [hep-th]。
[8] A. Kapustin、B. Willett 和 I. Yaakov, 《三维中的塞伯格类对偶检验》, arXiv:1012.4021 [hep-th]。[9] M. Dedushenko、S. S. Pufu 和 R. Yacoby, 《希格斯分支算符的一维理论》, *JHEP* **03**（2018年）138, arXiv:1610.00740 [hep-th]。

[10] M. Dedushenko、Y. Fan、S. S. Pufu 和 R. Yacoby, 《三维中的库仑分支算子与镜像对称》, *JHEP* **04** (2018年) 037, arXiv:1712.09384[hep-th]。

[11] M. Dedushenko、Y. Fan、S. S. Pufu 和 R. Yacoby, 《库仑分支量子化与阿贝尔化单极子气泡》, *JHEP* **10(2019年) 179,** arXiv:1812.08788[hep-th]。[12] N. J. Hitchin、A. Karlhede、U. Lindstrom 和 M. Rocek, 《超凯勒度量与超对称》, *Commun. Math. Phys.* **108(1987) 535**。[13] N. Seiberg, 《膜上的红外动力学与时空几何》, *Phys. Lett. B* **384(1996) 81–85,** arXiv:hep-th/9606017。[14] N. Seiberg 和 E. Witten, 《规范动力学与紧化至三维》, 载于《物理学的数学之美: ***Claude It zykson*** 纪念文集。会议论文集，法国萨克莱，***1996***年***6***月***5***日至***7***日。1996年。arXiv:hep-th/9607163 [hep-th]。[15] D. Gaiotto 和 E. Witten, 《N=4 超杨–米尔斯理论中边界条件的 S对偶》, *Adv. Theor. Math. Phys.***13** 第3期（2009年）721–896, arXiv:0807.3720 [hep-th]。[16] V. Borokhov、A. Kapustin 和 X.-k. Wu, 《三维共形场论中的拓扑无序算符》, *JHEP* **11 (2002) 049,**arXiv:hep-th/0206054 [hep-th]。[17] V. Borokhov、A. Kapustin 和 X.-k. Wu, 《单极算符与镜像对称

y

在三维中，" *JHEP* **12(2002) 044,** arXiv:hep-th/0207074 [hep-th].[18] V. Borokhov, "三维 N=4 SYM 中的单极算符与镜像对称，"*JHEP* **03 (2004) 008,** arXiv:hep-th/0310254.[19] D. Bashkirov 和 A. Kapustin, "单极算符导致的超对称性增强，"*JHEP* **05 (2011)015,** arXiv:1007.4861 [hep-th].[20] S. Cremonesi、A. Hanany 和 A. Zaffaroni, "单极算符与希尔伯特级数

of

库仑分支 $3d$ $\mathcal{N}=4$ 规范理论，" *JHEP* **01** （2014）005, arXiv:1309.2657 [hep-th]。[21] H. Nakajima, "迈向三维 $\mathcal{N}=4$ 规范理论的库仑分支的数学定义，I", *Adv. Theor. Math. Phys.* **20** （2016）595–669, arXiv:1503.03676 [math-ph]。

[22] A. Braverman、M. Finkelberg 和 H. Nakajima，“迈向库仑分支的数学定义 n

三维 $\mathcal{N} = 4$ 规范理论的库仑分支，II，”*Adv. Theor. Math.Phys.***22** (2018年) 1071–1147, arXiv:1601.03586 [math.RT].[23] A. Braverman、M. Finkelberg 和 H. Nakajima，“ $3d$ $\mathcal{N} = 4$箭图规范理论的库仑分支及仿射 Grassmannian 中的切片（附录作者：Alexander Braverman、Michael Finkelberg、Joel Kamnitzer、Ryosuke Kodera、Hirak

u

Nakajima、Ben Webster 和 Alex Weekes），” arXiv:1604.03625 [math.RT].[24] M. Bullimore、T. Dimofte 和 D. Gaiotto，“三维 $\mathcal{N} = 4$理论的库仑分支，”*Commun. Math. Phys.* **354**第 2 期，(2017年) 671–751, arXiv:1503.04817[hep-th].[25] A. Braverman、G. Dhillon、M. Finkelberg、S. Raskin 和 R. Travkin，“非余切型的库仑分支（附录作者：Gurbir Dhillon 和 Theo Johnson-Freyd），” arXiv:2201.09475 [math.AG].[26] A. J. Niemi 和 G. W. Semenoff，“轴反常诱导的费米子分数化及奇数维时空中的有效规范理论作用量，”*Phys. Rev.Lett.* **51** (1983年) 2077.[27] A. N. Redlich，“三维费米子的规范非不变性与宇称破缺，”*Phys. Rev. Lett.***52** (1984年) 18.[28] A. N. Redlich，“三维有效规范场作用量的宇称破缺与规范非不变性，”*Phys. Rev. D* **29**(1984年) 2366–2374.[29] H.-C. Kao 和 K.-M. Lee，“具有 N=3 扩展超对称的自对偶切恩-西蒙斯系统，”*Phys. Rev. D* **46**(1992年) 4691–4697, arXiv:hep-th/9205115.[30] D. Gaiotto 和 X. Yin，“关于超共形切恩-西蒙斯物质理论的札记，”*JHEP***08** (2007年) 056, arXiv:0704.3740 [hep-th].[31] E. Witten，“一个 SU(2)反常，”*Phys. Lett. B* **117** (1982年) 324–328.[32] H.-J. Chung 和 T. Okazaki，“(2,2) 和 (0,4) 超对称边界条件

in

三维 $\mathcal{N} = 4$ 理论与 IIB 型膜，”*Phys. Rev. D***96**第 8 期，（2017年）086005, arXiv:1608.05363 [hep-th]。

[33] T. Dimofte、D. Gaiotto 和 S. Gukov，《以三维流形标记的规范理论》，*Commun. Math. Phys.* **325**（2014年）367–419，arXiv:1108.4389[hep-th]。[34] K. Hori 和 M. Romo，《具有边界的二维（2,2）超对称规范理论的精确结果》，arXiv:1308.2438 [hep-th]。[35] J. Knapp、M. Romo 和 E. Scheidegger，《半球配分函数及向合流点的解析延拓》，*Commun. Num. Theor. Phys.***11**（2017年）73–164，arXiv:1602.01382 [hep-th]。[36] K. Hori 和 M. Romo，《半球札记》，2019年。[37] S. M. Chester、J. Lee、S. S. Pufu 和 R. Yacoby，《来自三维超共形自举的 BPS算符精确关联函数》，*JHEP* **03**（2015年）130，arXiv:1412.0334 [hep-th]。[38] C. Beem、W. Peelaers 和 L. Rastelli，《三维中的变形量子化与超共形对称性》，*Commun. Math. Phys.* **354** 第 1 期，（2017年）345–392，arXiv:1601.05378 [hep-th]。[39] P. Etingof 和 D. Stryker，《滤子量子化的短星乘积，I》，*SIGMA***16**（2020年）014，arXiv:1909.13588 [math.RT]。[40] P. Etingof、D. Klyuev、E. Rains 和 D. Stryker，《A型量子化克莱因奇点上的扭曲迹与正定形式》，*SIGMA***17**（2021年）029，arXiv:2009.09437 [math.QA]。[41] D. Klyuev 和 J. Vulakh，《某些 SL(2)库仑分支上的正迹》，arXiv:2507.19447 [hep-th]。[42] D. Klyuev，《量子化阿贝尔库仑分支上的正迹》，arXiv:2510.25021 [math.RT]。[43] P. Goddard、J. Nuyts 和 D. I. Olive，《规范理论与磁荷》，*Nucl.Phys. B***125**（1977年）1–28。[44] J. Gomis、T. Okuda 和 V. Pestun，《S^4上的规范理论中 't Hooft环的精确结果》，*JHEP* **05**（2012年）141，arXiv:1105.2568 [hep-th]。

[45] A. Kapustin 和 E. Witten，《电磁对偶与几何朗兰兹纲领》，Commun. Num. Theor. Phys. 1 (2007) 1–236,arXiv:hep-th/0604151 [hep-th].[46] E. J. Weinberg 和 P. Yi，《SU(N)规范理论中的显式多单极子解》，Phys. Rev. D 58 (1998) 046001, arXiv:hep-th/9803164.[47] C. J. Houghton 和 E. J. Weinberg，《含无质量和有质量单极子的多云解》，Phys. Rev. D 66 (2002) 125002, arXiv:hep-th/0207141.[48] N. A. Nekrasov，《由瞬子计数得到 Seiberg-Witten 预势》，Adv. Theor. Math. Phys. 7 no. 5, (2003) 831–864, arXiv:hep-th/0206161.[49] P. B. Kronheimer，《单极子与 Taub–NUT 度规》，硕士论文，牛津大学，1985年。理学硕士论文，未发表。[50] Y. Ito、T. Okuda 和 M. Taki，《$S^1 \times R^3$ 上的线算子与 Hitchin 模空间的量子化》，JHEP 04 (2012) 010, arXiv:1111.4221 [hep-th]. [勘误：JHEP03,085(2016)].[51] D. Gang、E. Koh 和 K. Lee，《$S^1 \times S^3$上的线算子指标》，JHEP 05 (2012) 007, arXiv:1201.5539 [hep-th].[52] M. Honda 和 D. Yokoyama，《存在单极子冒泡效应时对微扰级数求和》，Phys. Rev. D 100 no. 2, (2019) 025012, arXiv:1711.10799 [hep-th].[53] T. D. Brennan、A. Dey 和 G. W. Moore，《关于 't Hooft 缺陷、单极子冒泡与超对称量子力学》，JHEP 09 (2018) 014, arXiv:1801.01986 [hep-th].[54] T. D. Brennan，《通过弦理论研究单极子冒泡》，JHEP 11 (2018) 126, arXiv:1806.00024 [hep-th].[55] T. D. Brennan、A. Dey 和 G. W. Moore，《't Hooft 缺陷与超对称量子力学中的墙穿越》，JHEP 10 (2019) 173, arXiv:1810.07191 [hep-th].[56] B. Assel 和 A. Sciarappa，《't Hooft 环的单极子冒泡贡献》，JHEP 05 (2019) 180, arXiv:1903.00376 [hep-th].

[57] T. D. Brennan 和 G. W. Moore, 《线缺陷真空期望值给出的类指标定理》, JHEP 09 (2019) 073, arXiv:1903.08172 [hep-th].[58] B. Assel、S. Cremonesi 和 M. Renwick, 《三维 $\mathcal{N}=4$ 理论中的量子化库仑分支、单极子冒泡与墙穿越现象》, JHEP 04 (2020) 213,arXiv:1910.01650 [hep-th].[59] T. Okuda 和 Y. Yoshida, 《Omega 变形三维 $\mathcal{N}=4$规范理论中库仑分支算符的超对称局域化》, Commun. Math. Phys. 399 no. 3, (2023) 1373–1438, arXiv:1910.01802 [hep-th].[60] H. Hayashi、T. Okuda 和 Y. Yoshida, 《't Hooft 算符 ABCD》, JHEP 04 (2021) 241, arXiv:2012.12275 [hep-th].[61] T. Dimofte 和 N. Garner, 《星形箭图的库仑分支》, JHEP 02 (2019) 004, arXiv:1808.05226 [hep-th].[62] N. Garner、S. Raghavendran 和 B. R. Williams, 《由超共形 raviolo 顶点代数得到的 Higgs 分支与库仑分支》, Adv. Math. 482 (2025) 110566,arXiv:2310.08524 [math.QA].[63] N. Garner 和 B. R. Williams, 《Raviolo 顶点代数》, Selecta Math. 31 no. 3, (2025) 46, arXiv:2308.04414 [math.QA].[64] S. Tamagni, 《重新探讨三维 $\mathcal{N}=4$ 中的库仑分支》, arXiv:2412.17904[hep-th].[65] M. Dedushenko, 《粘合，第一部分：积分与对称性》, JHEP 04 (2020) 175,arXiv:1807.04274 [hep-th].[66] M. Dedushenko, 《粘合 II：边界局域化与粘合公式》, Lett. Math. Phys. 111 no. 1, (2021) 18, arXiv:1807.04278 [hep-th].[67] D. Gaiotto 和 E. Witten, 《N=4 超杨-米尔斯理论中的 Janus 构型、陈-西蒙斯耦合与 θ 角》, JHEP 06 (2010) 097, arXiv:0804.2907 [hep-th].[68] D. Gaiotto 和 T. Okazaki, 《球面关联函数与 Verma 模》, JHEP 02 (2020) 133, arXiv:1911.11126 [hep-th]。

[69] N. Doroud、J. Gomis、B. Le Floch 和 S. Lee，《D=2超对称规范理论中的精确结果》，JHEP 05 (2013) 093，arXiv:1206.2606 [hep-th].[70] F. Benini 和 S. Cremonesi，《S^2上的 $\mathcal{N} = (2,2)$ 规范理论的配分函数与涡旋》，Commun. Math. Phys. 334 no. 3，(2015) 1483–1527，arXiv:1206.2356[hep-th].[71] B. Assel 和 S. Cremonesi，《三维 $\mathcal{N} = 4$ $USp(2N)$ 超对称量子色动力学理论的红外不动点》，SciPost Phys. 5 no. 2，(2018) 015，arXiv:1802.04285 [hep-th].[72] S. Giacomelli、C. Hwang、F. Marino、S. Pasquetti 和 M. Sacchi，《利用对偶化算法探测坏理论。第二部分》，JHEP 07 (2024) 165，arXiv:2401.14456 [hep-th].[73] D. Gang 和 M. Yamazaki，《具有超对称性增强的三维规范理论》，Phys. Rev. D 98 no. 12，(2018) 121701，arXiv:1806.07714 [hep-th].[74] D. Gang、S. Kim、K. Lee、M. Shim 和 M. Yamazaki，《来自三维$\mathcal{N} = 4$秩为零超共形场论的非幺正拓扑量子场论》，JHEP 08 (2021) 158，arXiv:2103.09283 [hep-th].[75] N. Seiberg，《关于具有 16 个超荷的理论的笔记》，Nucl. Phys. B Proc. Suppl. 67 (1998) 158–171，arXiv:hep-th/9705117.[76] D. Gang、E. Koh、K. Lee 和 J. Park，《三维 $\mathcal{N} = 8$ 与 4 超共形场论的 ABCD》，arXiv:1108.3647 [hep-th].[77] B. Assel 和 S. Cremonesi，《坏理论的红外物理》，SciPost Phys. 3 no. 3，(2017) 024，arXiv:1707.03403 [hep-th].[78] S. Giacomelli、C. Hwang、F. Marino、S. Pasquetti 和 M. Sacchi，《利用对偶化算法探测坏理论。第一部分》，JHEP 04 (2024) 008，arXiv:2309.05326 [hep-th]。