arXiv:2512.23911v1 [math.OA] 30 Dec 2025

从稳定秩一到实秩零：

关于迹近似振荡为零的一则短札

傅宣龙*

摘要

我们通过迹振荡方法，揭示了稳定秩一与实秩零之间的关系。设 A是一个稳定秩一的单纯可分 C^*-代数。我们证明， A 的迹近似振荡为零，因此，迹序列代数 $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零，其中 J_A 是关于 2-准迹的迹核理想。

我们还证明，对于一个具有非平凡 2-准迹的 C^*-代数 B， B 的迹近似振荡为零，当且仅当 $l^\infty(B)/J_B$ 具有实秩零。

1 引言

稳定秩一（[32]）和实秩零（[4]）是 C^*-代数的正则性性质，在 C^*-代数的分类中发挥着重要作用。能够通过 Elliott 不变量进行分类的 C^*-代数都是 $\mathcal{Z}$-稳定的（即 $A \cong A \otimes \mathcal{Z}$），其中 $\mathcal{Z}$ 是 Jiang 和 Su 于 [20]构造的 Jiang-Su 代数。 $\mathcal{Z}$ 是唯一满足 UCT 且具有与复数相同的 Elliott 不变量的单纯可分单位核无限维 C^*-代数。单纯 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数要么具有稳定秩一，要么具有实秩零。Gong-Jiang-Su 证明，单纯单位 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数要么稳定有限，要么纯无穷（[14]）。Zhang 证明，单纯纯无穷 C^*-代数具有实秩零（[41]）。Rørdam 证明，单纯单位 $\mathcal{Z}$-稳定 C^*-代数要么具有稳定秩一，要么是纯无穷的（[35]）。2021年，作者与 Li 和 Lin 共同证明，单纯 $\mathcal{Z}$-稳定（不一定有单位元） C^*-代数要么具有稳定秩一，要么是纯无穷的（[15, 推论 6.8]）。关于几乎稳定秩一的相关结果，另见 [33, 17] 。非$\mathcal{Z}$-稳定的单纯 C^*-代数也可能具有稳定秩一。Villadsen 第一类代数就是这样的例子（[38]）。Elliott-Ho-Toms 证明，单纯对角 AH 代数具有稳定秩一（[11]）。

典范映射 $\Gamma : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\ }\mathrm{QT}(A)\right)$ 的满射性也是 C^*-代数的一项重要正则性性质，这与计算 C^*-代数的 Cuntz 半群有关。N. P. Brown 首先提出了何时 Γ 是满射这一问题（见 [36] 的问题 1.1 后的注记）。Thiel 证明，对于稳定秩一的单纯可分幺正 C^*-代数， Γ 是满射的（[36, 定理 8.11]）。Antoine-Perera-Robert-Thiel 证明，对于稳定秩一的单纯可分 C^*-代数， Γ 是满射的（[1, 定理 7.13]）。关于 Γ. 的满射性，还有更多研究，见 [5, 13, 8] 。

*同济大学数学系。电子邮箱：xuanlongfu@tongji.edu.cn。

为了研究稳定秩一与其他正则性性质之间的关系，作者与 Lin 在 [18] 中引入了迹近似振荡为零这一概念。正如 [18], 引言第一段所指出的，迹近似振荡为零的概念源于动力系统中的小边界性质。设 A 是一个具有非平凡 2-准迹且具有严格比较性质的单纯可分 C^*-代数。我们证明（见 [18, 定理 1.1]），A 具有稳定秩一，等价于 A 具有迹近似振荡为零；这也等价于典范映射 Γ 是满射且 A 几乎具有稳定秩一。

后来，Lin 运用迹近似振荡为零证明，对于一个单纯 C^*代数 B，若 $\mathrm{Cu}(B) \cong \mathrm{Cu}(B \otimes \mathcal{Z})$ B，则它要么是纯无穷的，要么具有稳定秩一（[26]）。设 A 是一个单纯、可分、非初等、具有稳定秩一的 C^*代数~，且满足 $T(A) \setminus \{0\} \neq \emptyset$.迹近似振荡为零也在 Lin 关于证明 Toms-Winter 猜想的工作中发挥了重要作用，适用于极端边界~为 $T(A) \setminus \{0\}$ 且满足条件 (C) 的 A （见 [27, 定理 5.6]），以及 A 满足 $T(A) \setminus \{0\}$具有 σ紧致、可数维极端边界的情形（见 [25, 定理 1.1]）。更多关于 Toms-Winter 猜想的研究见[6, 23, 29, 30, 35, 36, 40] 。

有许多稳定秩一但不具有实秩零的例子，例如 Jiang-Su 代数和 Villadsen 第一类代数。尽管如此，本文的主要定理是证明，可分单纯稳定秩一 C^*-代数具有迹近似振荡为零的性质，并且按照以下意义，它们具有迹意义下的实秩零（其中 J_A 是相对于 2-准迹的迹核理想）：

定理 A.（定理 5.9）设 A 是一个可分单纯的 C^*代数，且具有稳定秩一，则 A 具有迹近似振荡为零的性质。此外，$l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零。

上述定理的证明基于这样一个观察：Antoine-Perera-Robert-Thiel 的结果（[1]）与 Lin 的技巧（[26]）可以通过一种称为遗传满射的概念结合起来（见定义 4.5）。这一结果将 [18, 定理 5.10] 推广到了不满足严格比较的 C^*代数。特别地，对于单纯可分的 C^*代数 A，如果A 是对角 AH 代数，或者 $A = C(X) \rtimes \mathbb{Z}^d$，其中（$X$，$\mathbb{Z}^d$）是一个极小自由拓扑动力系统，那么 A具有迹近似振荡为零的性质，且 $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零（见定理 6.1）。我们还证明，对于满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$，$A$ 具有迹近似振荡为零，当且仅当 $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零（定理 3.12）。

本文的组织结构如下：第2节是预备知识，主要阐述拟迹不同版本之间的关系。第3节引入迹振荡，并证明迹近似振荡为零等价于$l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零。第4节引入一种称为遗传满射典范映射的主要技术工具，并证明稳定秩一蕴含遗传满射性。第5节证明遗传满射性蕴含迹近似振荡为零，从而证明定理 A。第6节给出一些关于对角 AH 代数和 $\mathbb{Z}^d$-交叉积的应用。

致谢：作者谨向林华新致以谢意，感谢他进行的许多有益讨论。

2 预备知识

记号 2.1。所有正整数的集合记为 $\mathbb{N}$. 所有非负实数的集合记为 $\mathbb{R}_+$. 可分无限维希尔伯特空间上所有紧算子的集合记为 $\mathbb{K}$. 令 $\{e_{i,j}\}$ 表示 $\mathbb{K}$.的一组矩阵单位。设 (X,d) 是一个度量空间，令 $x,y\in X$ 并令 $\varepsilon>0$。若 $d(x,y)\leq\varepsilon$，则记作 $x\approx_\varepsilon y$。

记号 2.2. 设 A 是一个 C^*代数。用 A^1 表示 A的闭单位球，用A_+ 表示 A. 中所有正元素的集合。令 $A_+^1:=A_+\cap A^1$. A 中所有自伴元素的集合记作 A_{sa}.令 $a\in A_+$. 令 $\mathrm{Her}_A(a)$（或简称 $\mathrm{Her}(a)$，当 A 明确时）表示由 a. 生成的 A 的遗传 C^*子代数。 A 的 Pedersen 理想记作 $\mathrm{Ped}(A)$，它是 A ([31, 5.6])的最小稠密理想。令 $\mathrm{Ped}(A)_+=\mathrm{Ped}(A)\cap A_+$，$\mathrm{Ped}(A)^1=\mathrm{Ped}(A)\cap A^1$ 且 $\mathrm{Ped}(A)_+^1=\mathrm{Ped}(A)\cap A_+^1$.

令 $\varepsilon>0$. 。定义连续函数 $f_\varepsilon:\mathbb{R}\to[0,1]$ 如下： $f_\varepsilon(t)=0$，当$t\in(-\infty,\varepsilon]$，$f_\varepsilon(t)=1$，当 $t\in[2\varepsilon,+\infty)$，并且 f_ε 在 $[\varepsilon,2\varepsilon]$.上是线性的

命题 2.3。 ([22, 引理 2.2。], [34]) 设 A 是一个 C^*-代数，设 a、$b\in A_+$，并设 $\varepsilon>\|a-b\|$. 。那么存在一个 压缩元 $c\in A^1$，使得 $(a-\varepsilon)_+=c^*bc$.

定义 2.4。 设 A 是一个 C^*-代数，并设 $a,b\in A_+$. 。若存在$x_k\in A$ 使得 $\lim_{k\to\infty}\|a-x_k^*bx_k\|=0$，则记作 $a\lesssim b$ 。若 $a\lesssim b$ 和 $b\lesssim a$ 均成立，则记作 $a\sim b$ 。Cuntz 关系 $\sim$ 是一个等价关系。令 $\mathrm{Cu}(A)=(A\otimes\mathbb{K})_+/\sim$. 。对于$a\in(A\otimes\mathbb{K})_+$, 令 $[a]$ 表示与 a. 对应的 Cuntz 等价类。$\mathrm{Cu}(A)$ 上的偏序如下：当且仅当 $a\lesssim b$ 成立时，记作 $[a]\leq[b]$ 。

令 $\iota:\mathbb{K}\otimes M_2(\mathbb{C})\to\mathbb{K}$ 为一个 $*$-同构，它诱导出一个 $*$-同构 $\bar{\iota}:=\mathrm{id}_A\otimes\iota:(A\otimes\mathbb{K})\otimes M_2(\mathbb{C})\to A\otimes\mathbb{K}$. 对于 $a,b\in(A\otimes\mathbb{K})_+$，定义 $[a]\oplus[b]:=[\bar{\iota}(a\otimes e_{1,1}+b\otimes e_{2,2})]\in\mathrm{Cu}(A)$。在这个（良定义的）加法下，$\mathrm{Cu}(A)$ 成为一个半群，称为 A. 的 Cuntz 半群

定义 2.5。 令 A 为一个 C^*-代数。若映射 $\varphi:\mathrm{Cu}(A)\to[0,\infty]$ 满足 φ 可加、保序、 $\varphi(0)=0$, 并且保持递增序列的上确界，则称其为一个泛函。令 $\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 为 $\mathrm{Cu}(A)$ 上所有泛函的集合。

$\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 上的偏序是典范偏序： $f_1\leq f_2$ 当且仅当 $f_1(x)\leq f_2(x)$ 对所有 $x\in\mathrm{Cu}(A)$。$\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 配备如下拓扑：网 $\{\lambda_i\}\subset\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 收敛到 $\lambda\in\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$，当且仅当对所有 $a\in(A\otimes\mathbb{K})_+$ 和所有 $\varepsilon>0$.，$\limsup_i\lambda_i([(a-\varepsilon)_+])\leq\lambda([a])\leq\liminf_i\lambda_i([a])$

定义 2.6。 ([2, II.1.1]) 设 A 是一个预-C^*-代数。 A 上的拟迹是一个映射$\tau:A\to\mathbb{C}$，满足 (1) 对所有 $x\in A$， $0\leq\tau(x^*x)=\tau(xx^*)$；(2) τ 在 A的交换 *-子代数上是线性的；(3) 对所有 a， $\tau(a+ib)=\tau(a)+i\tau(b)\,b\in A_{sa}$.

如果 τ 可以扩张为 $M_2(A)$ 上的拟迹，那么 τ 称为 2-准迹。

根据 [2, II.2.3、II.2.5、II.4.1], ，我们有如下结论： C^*-代数 A上的所有拟迹都是连续的。当 τ 是 A 上的 2-准迹时， τ 是保序的，即， $a\leq b$ 蕴含$\tau(a)\leq\tau(b)$，并且对于所有 $n\in\mathbb{N}$.， τ 都可以扩张到 $M_n(A)$

以下结　果是众所周知的结果。对于 2-准迹的情形，参见 [25, 命题 2.7]　.

命题 2.7。 （参见 [25, 命题 2.7]）设 A 是一个 C^*-代数。设 $\tau:\mathrm{Ped}(A)\to\mathbb{C}$是一个拟迹，则 τ 在 $\mathrm{Ped}(A)_+$上是下半连续的。

证明。设 $a \in \mathrm{Ped}(A)_+$，则 $C^*(a) \subset \mathrm{Ped}(A)$（见 [31, 5.6.2]）。根据 [2, II.2.3]， τ 在 $C^*(a)$ 上是连续的。设 $\varepsilon > 0$，则存在 $\delta > 0$ 使得 $\tau(a) - \varepsilon < \tau((a-\delta)_+)$。设 $b \in \mathrm{Ped}(A)_+$，且 $\|a - b\| < \delta.$。根据命题 2.3，存在一个压缩元 $r \in C^*(a,b)^1 \subset \mathrm{Ped}(A)_+$，使得 $(a-\delta)_+ = r^*br.$。于是 $\tau(a) - \varepsilon \leq \tau((a-\delta)_+) = \tau(r^*br) = \tau(b^{1/2}rr^*b^{1/2}) \leq \tau(b)$，这表明 τ是下半连续的。 □

采用 [18, 2 中的约定。7],我们有如下结论:

定义 2.8. 设 A 是一个 C^*-代数。 $A \otimes \mathbb{K}$ 上稠密定义的 2-准迹是指 $\widetilde{\ }$ 一个 2-准迹 $\tau : \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K}) \to \mathbb{C}.$。用 $\mathrm{QT}(A)$ 表示 $A \otimes \mathbb{K}.$ 上所有稠密定义的 2-准迹构成的集合。

上的偏序 $\widetilde{\mathrm{QT}}(A)$ 是典范的：对于 $\tau_1, \tau_2 \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A)$，若 $\tau_1(a) \leq \tau_2(a)$ 对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+.$ 均成立，则记作 $\tau_1 \leq \tau_2$ $\widetilde{\ }$。$\mathrm{QT}(A)$ 上的拓扑由逐点 $\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$ 收敛定义：网 $\{\tau_i\} \subset \mathrm{QT}(A)$ 收敛到 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$，当且仅当对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})$，$\lim_i \tau_i(a) = \tau(a)$。

注记 2.9. (1) 拟迹 $\tau : \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K}) \to \mathbb{C}$ 自动是一个 2-准迹，这是因为 $\mathbb{K} \otimes M_2 \cong \mathbb{K}.$ **(2)** 如果 $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{QT}(A)$ 且 $\tau_1 \leq \tau_2,$ 那么 $\tau_2 - \tau_1 \in \mathrm{QT}(A).$

定义 2.10. ([13, 4.1, p 984]) 设 A 是一个 C^*-代数。 A 上的下半连续 2-准迹是一个下半连续映射 $\tau : (A \otimes \mathbb{K})_+ \to [0, \infty]$，满足 $\tau(0) = 0, \tau(x^*x) = \tau(xx^*)$ 对所有 $x \in A \otimes \mathbb{K}$, $\tau(a+b) = \tau(a) + \tau(b)$ 对所有 $a, b \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，其中$ab = ba.$ 令 $\mathrm{QT}_2(A)$ 表示 A上所有下半连续 2-准迹的集合。

$\mathrm{QT}_2(A)$ 上的偏序定义如下：对于 $\tau_1, \tau_2 \in \mathrm{QT}_2(A),$ 若对所有 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+.$，都有 $\tau_1 \leq \tau_2$ if $\tau_1(a) \leq \tau_2(a)$，则记为.....$\mathrm{QT}_2(A)$ 上的拓扑定义如下：网 $\{\tau_i\} \subset \mathrm{QT}_2(A)$ 收敛到 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A),$ 当且仅当对所有 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$ 以及所有 $\varepsilon > 0.$，$\limsup_i \tau_i((a-\varepsilon)_+) \leq \tau(a) \leq \liminf_i \tau_i(a)$

称 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A).$ τ 为稠密有限，若对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+.$，都有 $\tau(a) < +\infty$。令 $\tau_\infty \in \mathrm{QT}_2(A)$ 为满足对所有 $a \in \mathbb{K}_+ \setminus \{0\}.$，都有 $\tau_\infty(a) = \infty$ 的映射。

命题 2.11. 设 A 是一个单纯的 C^*-代数。对于任意 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$, τ 是稠密有限的。

证明。 设 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$，则 $I := \{x \in A \otimes \mathbb{K} : \tau(x^*x) < \infty\} \neq \{0\}$是一个代数理想; $A \otimes \mathbb{K}.$ $A \otimes \mathbb{K}$ 是单纯的，这意味着 I 在 $A \otimes \mathbb{K}.$ 中稠密。因此 $\mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K}) \subset I.$ □

命题 2.12. 设 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$ 且设 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+.$ 令 $\{e_\lambda\} = \{e \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+ : \|e\| < 1\}$ 为 $A.$ 的近似单位。则 $\lim_\lambda \tau(a^{1/2} e_\lambda a^{1/2}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau((a-\varepsilon)_+)$。

证明。 由于 $a^{1/2} f_{\varepsilon/2}(a) a^{1/2} \geq (a-\varepsilon)_+$，我们有 $\lim_\lambda \tau(a^{1/2} e_\lambda a^{1/2}) \geq \lim_{\varepsilon \to 0} \tau((a-\varepsilon)_+)$。由于 τ 在 $\mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ 上是下半连续的（见命题 2.7），我们还有$\tau(a^{1/2} e_\lambda a^{1/2}) = \tau($ $e_\lambda^{1/2} a e_\lambda^{1/2}) = \lim_{\varepsilon \to 0} \tau(e_\lambda^{1/2} (a-\varepsilon)_+ e_\lambda^{1/2}) \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \tau((a-\varepsilon)_+)$。 □

定义 2.13。 设 X，Y为拓扑空间， X，Y为偏序集。若同胚 $\varphi : X \to Y$满足 φ 和 φ^{-1} 均为保序映射，则称其为有序的。

命题 2.14。 设 A 是一个单纯的 C^*-代数。对于 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$，定义 $\widetilde{\tau} : (A \otimes \mathbb{K})_+ \to [0, \infty]$, $a \mapsto \lim_{\varepsilon \to 0} \tau((a-\varepsilon)_+)$。则映射 $\chi : \tau \mapsto \widetilde{\tau}$是从 $\mathrm{QT}(A)$ 到 $\mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$.的有序仿射 $\widetilde{\ }$ 同胚

证明。使用命题 2.12 中的记号，对于$\widetilde{\ }$所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$以及所有 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，我们有 $\tilde{\tau}(a) = \lim_\lambda \tau(a^{1/2} e_\lambda a^{1/2})$。由 [25, 命题 2.7]， $\tilde{\tau} \in \mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$，且 $\tilde{\tau}$ 延拓 $\tau|_{\mathrm{Ped}(A\otimes\mathbb{K})_+}$，这说明 χ 是单射。设 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$，则根据命题 2.11，$\tau$ 是稠密有限的。我们可以将映射 $\tau|_{\mathrm{Ped}(A\otimes\mathbb{K})_+}$ 典范地延拓为映射$\widetilde{\ }\bar{\tau} : \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K}) \to \mathbb{C}$，并且 $\bar{\tau} \in \mathrm{QT}(A)$。由于 τ 是下半连续的，对于所有 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，有 $\chi(\bar{\tau})(a) = \lim_{\varepsilon\to 0} \bar{\tau}((a-\varepsilon)_+) = \tau(a)$。因此 $\chi(\bar{\tau}) = \tau$，且 χ 是$\widetilde{\ }$$\widetilde{\ }$满射。设 $\{\tau_i\} \subset \mathrm{QT}(A)$ 和 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$。则 $\lim_i \tau_i = \tau \Leftrightarrow \tau_i$ 逐点收敛于 τ在 $\mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+ \Leftrightarrow \chi$上，$\tau_i(\chi)$ 收敛于 $\tau(A \otimes \mathbb{K})$ 在 $\mathrm{Ped}(_+ \Leftrightarrow)_i \chi$上（根据附录中的命题 A.2 (ii)）。因此 χ 是一个同胚。直接验证可知，χ 是仿射且有序的。 □

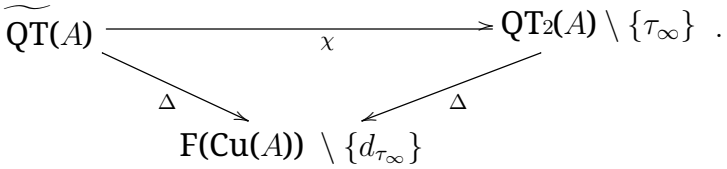
$\widetilde{\ }$**注 2.15.** 根据上述命题，对于单纯的 C^*-代数 A，在方便时，我们将 $\mathrm{QT}(A)\widetilde{\ }$与 $\mathrm{QT}_2(A) \setminus \{\tau_\infty\}$ 视为相同。特别地，对于 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$ 和$a \in (A \otimes \mathbb{K})_+ \setminus \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$， $\tau(a) := \lim_{\varepsilon\to 0} \tau((a-\varepsilon)_+)$。

$\widetilde{\ }$**定义 2.16.** 对于 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A) \cup \mathrm{QT}(A)$，我们将 $d_\tau \in \mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 定义为 $d_\tau([a]) := \lim_n \tau(f_{1/n}(a))$，对所有 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$.在方便时，我们也将 $d_\tau(a)$ 记作 $d_\tau([a])$。$\widetilde{\ }$定义 $\Delta : \mathrm{QT}_2(A) \cup \mathrm{QT}(A) \to \mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ $\tau \mapsto d_\tau$.

定理 2.17。 ([13, 定理 4。4]) $\mathrm{QT}_2(A)$ 和 $\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 都是紧致且豪斯多夫的。 $\Delta : \mathrm{QT}_2(A) \to \mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ $\tau \mapsto d_\tau$ 是一个保序仿射同胚。

我们将命题 2.14 和定理 2.17 总结如下:

命题 2.18。 设 A 是一个单纯 C^*-代数。那么下图是交换图，且所有映射都是保序仿射同胚。



3 迹振荡与实秩零

我们将 A 与 $A\otimes e_{1,1} \subset A\otimes\mathbb{K}$. 注意，如果 $A = \mathrm{Ped}(A)$，则 $A\otimes e_{1,1} \subset \mathrm{Ped}(A\otimes\mathbb{K})$。

$\widetilde{\ }$**定义 3.1.** 设 A 是一个 C^*-代数。对于 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$（定义在 $\mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})$ 上），定义$\|\tau|_A\| := \sup\{\tau(a \otimes e_{1,1}) : a \in \mathrm{Ped}(A)_+^1\}$. 定义 $\mathrm{QT}(A) := \left\{\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}(A)} : \|\tau|_A\| = 1\right\}$.令 $\mathrm{QT}(A)^w$ 为 $\mathrm{QT}(A)$ 在 $\widetilde{\mathrm{QT}(A)}$ 中的闭包。

命题 3.2. ([18, 命题 2.9], [9, 引理 4.5], [13, 定理 4.4]) 设 A 是一个代数简单的 C^*-代数，且 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$. 那么 $\mathrm{QT}(A)^w$ 是紧致且豪斯多夫的。此外，$0 \notin \mathrm{QT}(A)^w$.

定义 3.3. 设 A 是一个具有 $\mathrm{QT}(A)$ 的 C^*-代数。对每个 $x \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，定义$\|x\|_2 = \sup\{\tau(x^*x)^{1/2} : \tau \in \mathrm{QT}(A)^w\} \in [0,\infty]$.。令 $\overline{l^\infty(A)}$ 为由 A. 的所有范数有界序列构成的 C^*-代数。定义 $J_A := \{\{x_n\} \in l^\infty(A) : \lim_{n\to\infty} \|x_n\|_2 = 0\}$.

注意，若 $a \in A_+$，则 $\|a\|_2 \leq \|a\|.$。然而，当 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，可能出现 $\|a\|_2 > \|a\|.$

定义 3.4. ([10, 定义 A.1], [18, 定义 4.1]) 设 A 是一个具有 QT(A) 的代数简单 C^*-代数。$\neq \emptyset$. 设 $a \in (A \otimes \mathcal{K})_+$，定义 a的迹振荡如下：

$$\omega(a) := \lim_{n\to\infty} \sup \left\{ d_\tau(a) - \tau(f_{1/n}(a)) : \tau \in \overline{\mathrm{QT}(A)}^w \right\}. \tag{e 3.1}$$

注 3.5. (1) 在 [10, 定义 A.1]中，(a)是利用迹定义的，其中使用的记号为 ω_S(a)。**(2)** [18, 定义 4.1] 中使用的迹振荡记号为$\omega(a)|_S$.

定义 3.6. ([18, 定义 4.7，定义 5.1]) 设 A 是一个具有 QT(A) 的代数简单C^*-代数。$\neq \emptyset$. 对于 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$， a 称为迹近似振荡为零，若对任意 $\varepsilon > 0$，存在 $c \in \mathrm{Her}_A(a)_+$ 使得 $\|a - c\|_2 < \varepsilon$， $\|c\| \leq \|a\|$，且 $\omega(c) < \varepsilon$.

如果 a 对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，都具有迹近似振荡为零，则称 C^*-代数 A 具有迹近似振荡为零。

设 A 是一个代数简单的 C^*-代数，满足 QT(A) $\neq \emptyset$，且 A 具有迹近似振荡为零。若 B 是另一个 C^*-代数，并且 $A \otimes \mathbb{K} \cong B \otimes \mathbb{K}$，则也称 B 具有迹近似振荡为零。

注记 3.7。上述定义在 [18,定义 5.1] 中称为 T-迹近似振荡为零。在 [18,定义 4.7] 中还介绍了迹近似振荡的其他变体。

T以下列出迹振荡的一些有用性质：

命题 3.8。设 A 是一个代数简单的 C^*-代数，满足 QT(A) $\neq \emptyset$.。**(i)**（[18, 命题 4.2]）设 $a, b \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ · 。若 $a \sim b$，则 $\omega(a) = \omega(b)$。**(ii)**（[18, 命题 4.4 (2)]）设 a, $b \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ · 。若 $ab = 0$，则 $\omega(a + b) \leq \omega(a) + \omega(b)$。**(iii)**（[18], 第 577 页, 第 10 行）对于 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$， $\omega(a) = 0$ 当且仅当映射 $\widetilde{\quad}[a] : \mathrm{QT}(A) \to \mathbb{R}_+$, $\tau \mapsto d_\tau(a)$ 连续。

(iv) ([18, 命题 5.7]) 此外，若 A 是 σ-幺的，则 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ 迹近似振荡为零，当且仅当对于任意 $\varepsilon > 0$，存在 $c \in \mathrm{Her}(A)_+$，使得 $\|a - c\| < \varepsilon$ 且 $\omega(c) < \varepsilon$.

以下是迹近似振荡为零的一个等价描述（对于幺单 C^*-代数）。

命题 3.9。设 A 是一个幺单 C^*-代数，且 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$. 。以下条件等价：

(i) 对于所有 $a \in A_+$， a 的迹近似振荡为零。

(ii) 对于任意 $x \in A_{sa}^1$ 和 $\varepsilon > 0$，存在 $y \in A_{sa}$，使得 $\|y\| \leq 1$ 且 $\delta > 0$，满足 $\|x - y\|_2 < \varepsilon$ 且 $\sup\{\tau(g_\delta(y)) : \tau \in \mathrm{QT}(A)\} < \varepsilon$，其中 $g_\delta(t) := 1 - f_\delta(|t|)$ 对所有 $t \in \mathbb{R}$.

证明。 (i) $\Rightarrow$ (ii)： 令 $x \in A_{sa}^1 \backslash \{0\}$，并令 $\varepsilon \in (0,1)$。由于 x_+, x_- 的迹近似振荡为零，存在 $a \in \mathrm{Her}(x_+)_+$ 和 $b \in \mathrm{Her}(x_-)_+$，使得 $\|a\| \le 1, \|b\| \le 1, \omega(a)\ \omega(b) < \varepsilon/10$，且 $\|x_+ - a\|_2, \|x_- - b\|_2$ 足够小，从而 $\|x - (a-b)\|_2 = \|(x_+ - a) - (x_- - b)\|_2 < \varepsilon/2.$。由于 $\omega(a)\ \omega(b) < \varepsilon/10$，存在 $\theta > 0$ 使得

$$\sup\{d_\tau(a) - \tau(f_{3\theta}(a)) : \tau \in \mathrm{QT}(A)\}, \sup\{d_\tau(b) - \tau(f_{3\theta}(b)) : \tau \in \mathrm{QT}(A)\} < \varepsilon/10. \quad (\mathrm{e}\,3.2)$$

设 h 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的实值连续函数，使得对 $t \in [-2\theta, 2\theta]$ 有 $h(t) = 0$，且对所有 $t \in \mathbb{R}.$ 有 $|h(t) - t| \le 2\theta$。于是 $h(t) \perp g_\theta(t)$。设 $s(t) := \theta \cdot g_\theta(t) + h(t)$。设 $y := s(a-b)$。于是 $\|y - (a-b)\| < 2\theta.$。取足够小的 θ，有

$$\|y - x\|_2 = \|(y - (a-b)) - (x - (a-b))\|_2 < \varepsilon. \quad (\mathrm{e}\,3.3)$$

设 $\delta > 0$ 足够小，使得对 $t \in (-\infty, -3\theta] \cup [-\theta, \theta] \cup [3\theta, \infty)$ 有 $f_\delta(|s(t)|) = 1$。于是对所有 $t \in \mathbb{R}.$，有 $1 \le f_\delta(|s(t)|) + f_{\theta/2}(|t|) - f_{3\theta}(|t|)$。因此 $g_\delta(y) = 1 - f_\delta(|s(a-b)|) \le f_{\theta/2}(|a-b|) - f_{3\theta}(|a-b|) = f_{\theta/2}(a) - f_{3\theta}(a) + f_{\theta/2}(b) - f_{3\theta}(b)$。于是对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$,

$$\begin{aligned} \tau(g_\delta(y)) &\le \tau(f_{\theta/2}(a) - f_{3\theta}(a) + f_{\theta/2}(b) - f_{3\theta}(b)) && (\mathrm{e}\,3.4)\\ &= \tau(f_{\theta/2}(a)) - \tau(f_{3\theta}(a)) + \tau(f_{\theta/2}(b)) - \tau(f_{3\theta}(b))) \overset{(\mathrm{e}\,3.2)}{\le} \varepsilon. && (\mathrm{e}\,3.5) \end{aligned}$$

因此，(e 3.3) 和 (e 3.5) 表明 (ii) 成立。

(ii) $\Rightarrow$ (i)：设 $a \in A_+^1$，并令 $\varepsilon \in (0,1)$。令 $\theta := \varepsilon^4/100.$ 令 $a_0 := a - \theta.$ 定义 $h(t) := f_\theta(t + \theta)$，其中 $t \in \mathbb{R}.$ 令 $\eta \in (0, \theta)$。根据 (ii)，存在 $x \in A_{sa}^1$ 和 $\delta \in (0, \eta)$，使得

$$\|a_0 - x\|_2 < \eta \quad \text{and} \quad \sup\{\tau(g_\delta(x)) : \tau \in \mathrm{QT}(A)\} < \eta. \quad (\mathrm{e}\,3.6)$$

我们可以假设 η 足够小，使得 $\|a_0 - x\|_2 < \eta$ 蕴含以下结论：

$$\begin{aligned} &\|a - (x+\theta)_+\|_2 = \|(a_0 + \theta)_+ - (x+\theta)_+\|_2 < \theta, && (\mathrm{e}\,3.7)\\ &\|h(a_0) b h(a_0) - h(x) b h(x)\|_2 < \theta \ \text{ for all } \ b \in A_+^1, \ \text{and} && (\mathrm{e}\,3.8)\\ &\|a^{1/2} b a^{1/2} - (x+\theta)_+^{1/2} b (x+\theta)_+^{1/2}\|_2 < \theta \ \text{ for all } \ b \in A_+^1. && (\mathrm{e}\,3.9) \end{aligned}$$

令 $x_0 := f_{\delta/4}(x)$ $x_1 := f_{\delta/8}(x)$ $e := h(a_0) x_0 h(a_0)$。那么 $h(x) x_0 = x_0.$ 对于任意 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$,

$$\tau(e) = \tau(h(a_0) x_0 h(a_0)) \overset{(\mathrm{e}\,3.8)}{\ge} \tau(h(x) x_0 h(x)) - 2\theta = \tau(x_0) - 2\theta. \quad (\mathrm{e}\,3.10)$$

注意，$d_\tau(e) = d_\tau(h(a_0) x_0 h(a_0)) \le d_\tau(x_0) \le \tau(x_1)$。那么

$$d_\tau(e) - \tau(e) \le \tau(x_1) - \tau(x_0) + 2\theta \le \tau(g_\delta(x)) + 2\theta \le 3\theta \le \varepsilon. \quad (\mathrm{e}\,3.11)$$

因此 $\omega(e) \le \varepsilon.$ 令 $a_1 := a^{1/2} e a^{1/2} \le a.$ 由于 $e \in \mathrm{Her}(a)$，我们有 $a_1 \sim e.$ 于是 $\omega(a_1) = \omega(e) \le \varepsilon$ （见命题 3.8 (i)）。对于所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$,

$$\begin{aligned} \tau(a - a_1) &= \tau(a - a^{1/2} h(a_0) x_0 h(a_0) a^{1/2}) \le \tau(a - a^{1/2} x_0 a^{1/2}) + 2\sqrt{\theta} && (\mathrm{e}\,3.12)\\ &\overset{(\mathrm{e}\,3.7)}{\le} \tau((x+\theta)_+ - (x+\theta)_+^{1/2} x_0 (x+\theta)_+^{1/2}) + 2\sqrt{\theta} + 3\theta && (\mathrm{e}\,3.13)\\ &\le (\theta + \delta) + 2\sqrt{\theta} + 3\theta \le \varepsilon^2. && (\mathrm{e}\,3.14) \end{aligned}$$

于是 $\tau((a-a_1)^2)^{1/2} \le \tau(a - a_1)^{1/2} \le \varepsilon.$ 因此 $\|a - a_1\|_2 \le \varepsilon.$ 于是 (i) 成立。 $\square$

注 3.10。 最近， [12], 引入了一种称为性质 (S) 的概念，它与迹近似振荡为零相似。性质 (S) 是命题 3.9 中的条件 (ii)，但不要求 $\|y\| \leq 1$.

引理 *3.11*。设 A 是一个具有 *QT(A)* $\neq \emptyset$. 的 C^*-代数。设 $a \in \in$*Ped(*$A \otimes \mathbb{K}$*)+* ，且 $\varepsilon > 0$.。那么存在 $b \in \in$*Her(a)+* ，使得 $b \leq a$、 $n \in \mathbb{N}$, 并且存在单射 *-同态 φ *: Her(b)* $\to$ $\to M_n$*(A)*，满足 $\|a-b\|_2 < \varepsilon$、 $\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_2$，且对所有 $x \in \in$*Her(b)+·*，都有 $\omega(\varphi(x)) = \omega(x)$。

证明。由命题 2.7，得到 $\lim_k \tau(a-(a-1/k)+) = 0.$。由于 $\mathrm{QT}(A)^w$ 是紧致的，且对所有 τ， $\{\tau(a-(a-1/k)+)\}_k$ 构成递减序列，由狄尼定理，存在 $m \in \mathbb{N}$，使得 $\sup\{\tau(a-(a-1/m)+) : \tau \in \in \mathrm{QT}(A)^w\} < (\varepsilon/4)^2.$。于是对所有 $\tau \in \overline{\in \mathrm{QT}(A)^w}$，有 $\tau((a-(a-1/m)+)^2) \leq \tau(\overline{a-(a-1/m)+}) < (\varepsilon/4)^2.$。因此 $\|a-(a-1/m)_+\|_2 \leq \varepsilon/4.$。令 $b := (a-1/m)_+ \in \mathrm{Her}(a)$。

存在 $n \in \mathbb{N}$ 和 $c \in M_n(A)+$ 使得 $\|a-c\| < 1/4m.$ 由 [34, 命题 2.4 (iv)], 可知，存在 $r \in A \otimes \mathbb{K}$ 使得 $(a-1/m)_+ = r^*r$ 且 $rr^* \in \mathrm{Her}(c) \subset M_n(A)$。令$r = v|r|$ 为 r 在 A^{**}. 中的极分解。则映射 φ: $\mathrm{Her}(b) = \mathrm{Her}(r^*r) \to \mathrm{Her}(rr^*) \subset M_n(A)$ $x \mapsto vxv^*$ 是一个单射 *-同态。此外，对于任意 $x \in \mathrm{Her}(b)+$, $vx^{1/2} \in A.$于是，对所有 τ，有 $\tau(\varphi(x)) = \tau(vxv^*) = \tau(x^{1/2}v^*vx^{1/2}) = \tau(x)$，这意味着 $\omega(\varphi(x)) = \omega(x)$，且对于所有 $x \in \mathrm{Her}(b)+\cdot$，有 $\|\tau(\varphi(x))\|_2 = \|\tau(x)\|_2$ □

回顾一下，若 C^*-代数 A 中可逆的$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$自伴元素在 A_{sa} ([4]) 中稠密，则称其具有实秩零。

定理 3.12. 设 A 是一个可分单纯的 C^*-代数，且满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$. 以下条件等价:

(i) A 具有迹近似振荡为零，即对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})+$， a 具有迹近似振荡为零。(ii) 对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A)+$， a 具有迹近似振荡为零。(iii) $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零。

证明。(i) ⇒ (ii)显然。注意， (ii) ⇒ (iii) 已在 [18, 定理 6.4] 中证明。

(iii) ⇒(ii): 记 $l^\infty(A)/J_A$ 为 $B.$。设 π： $l^\infty(A) \to B$ 为商映射。我们可以将 A 典范地嵌入 $l^\infty(A)$ 中。设 $a \in A_+^1$ ，并设 $\varepsilon > 0.$。由于 B 具有实秩零，根据 [4, 2.6 (iii)], ，存在一个投影 $p \in \mathrm{Her}_B(\pi(a)) \subset \pi(l^\infty(\mathrm{Her}_A(a)))$，使得

$$\|\pi(a) - p\pi(a)\| < \varepsilon/2. \tag{e 3.15}$$

令 $p = \pi(\{e_n\})$ 满足对所有 $n.$， $e_n \in \mathrm{Her}_A(a)$。那么 $\{f_{1/4}(e_n)\}$ 是 p 的永久投影提升（见 [18, 定义 6.1、命题 6.2(1)]），因此 $\lim_n \omega(e_n) = 0$ （见 [18,定义 6.2(2)]）。结合 (e 3.15)，存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|a - f_{1/4}(e_m)a\|_2 < \varepsilon, \quad \text{and} \quad \omega(e_m) < \varepsilon. \tag{e 3.16}$$

因此，根据 [18, 命题 5.6 (2)]， a 的迹近似振荡为零。

注意，我们已经证明 (ii) 等价于 (iii)。

(ii) ⇒(i): 令 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})+\cdot$ 令 $\varepsilon > 0.$ 根据引理 3.11，存在 $n \in \mathbb{N}$, $b \in \mathrm{Her}(a)+$ 满足 $b \leq a$ ，以及一个单射 *-同态 $\varphi : \mathrm{Her}(b) \to M_n(A)$，使得 $\|a-b\|_2 < \varepsilon/8$， $\|\varphi(x)\|_2 = \|x\|_2$，并且对所有 $x \in \mathrm{Her}(b)+\cdot$ 都有 $\omega(\varphi(x)) = \omega(x)$。由于 (ii)

成立，且 (ii) 蕴含 (iii)（见 [18, 定理 6.4]），因此 $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零。于是$l^\infty(M_n(A))/J_{M_n(A)} \cong M_n(l^\infty(A)/J_A)$也具有实秩零。由我们刚刚证明的结果（即 (iii) $\Rightarrow$ (ii)），可知 $\varphi(b)$ 具有迹近似振荡为零。于是存在 $c \in \mathrm{Her}(\varphi(b))_+$，使得 $\omega(c) < \varepsilon$ 且 $\|\varphi(b)-c\|_2 < \varepsilon/8$.令 $d := \varphi^{-1}(c) \in \mathrm{Her}(b)$，则$\omega(d) = \omega(c) < \varepsilon$，并且 $\|b-d\|_2 = \|\varphi^{-1}(\varphi(b) - c)\|_2 = \|\varphi(\varphi^{-1}(\varphi(b) - c))\|_2 = \|\varphi(b) - c\|_2 < \varepsilon/8$. 于是根据 [19, 引理 3.5 (2)],，我们有 $\|a-d\|_2^{2/3} \le \|a-b\|_2^{2/3} + \|b-d\|_2^{2/3} \le 2(\varepsilon/8)^{2/3}$.然后 $\|a-d\|_2 < \varepsilon$. 于是 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ 具有迹近似振荡为零，且 (i) 成立。 □

4 遗传满射典范映射

定义 4.1。 ([13, 5.1]) 设 A 为一个 C^*-代数。令 Lsc(F(Cu(A))) 表示满足以下条件的函数 f： F(Cu(A)) $\to [0,\infty]$，函数具有可加性、保序性、齐次性（相对于 $\mathbb{R}_+$）、下半连续性，并且满足 $f(0) = 0$.

对于 f， $g \in$ Lsc(F(Cu(A)))，若 $f \le (1-\varepsilon)g$ 对某个 $\varepsilon > 0$ 成立，且 f 在每个满足 $g(\tau) < \infty$, 的$\tau \in$ F(Cu(A))处连续，则记作 $f \lhd g$.

记 L(F(Cu(A))) 为 Lsc(F(Cu(A))) 的子半群，它由这样的 $f \in$Lsc(F(Cu(A))) 构成：这些元素可以表示为序列 $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ 在 Lsc(F(Cu(A))) 中的逐点上确界，并且对所有 $n \in \mathbb{N}$.均有 $f_n \lhd f_{n+1}$

定义 4.2。 设 A 是一个具有 $\widetilde{\mathrm{QT}}(A) \neq \{0\}$. 的 C^*代数。记 $\mathrm{Aff}\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right)$ 为$\widetilde{\mathrm{QT}}(A)$ f上的连续实值函数集合，满足 $f(s\tau) = sf(\tau)$ $f(\tau+\sigma) = f(\tau) + f(\sigma)$，其中对所有 $s \in \mathbb{R}_+$和 τ， $\sigma \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A)$。 注意，若 $f \in \mathrm{Aff}\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right)$，则$f(0) = 0$. 此外，定义

$$\mathrm{Aff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right) := \left\{f \in \mathrm{Aff}\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right) : f(\tau) > 0 \text{ if } \tau \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A) \setminus \{0\}\right\} \cup \{0\},$$
$$\mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right) := \left\{f : \widetilde{\mathrm{QT}}(A) \to [0,\infty] : \exists\, \{f_n\} \subset \mathrm{Aff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right) \text{ with } f_n \nearrow f\right\},$$

其中 $f_n \nearrow f$表示对所有 $n \in \mathbb{N}$以及所有 τ， $f_n(\tau) \le f_{n+1}(\tau)$，并且 $f(\tau) = \lim_i f_i(\tau)$。

定义 4.3。 设 A 是一个 C^*代数。对 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，定义映射 $[a] : \mathrm{QT}(A) \cup \widetilde{\mathrm{QT}_2}(A) \to [0,\infty]$， $\tau \mapsto d_\tau(a)$，再定义映射 $\widehat{a} : \mathrm{QT}(A) \cup \mathrm{QT}_2(A) \to [0,\infty]$, $\tau \to \lim_{n\to\infty} \tau((a-1/n)_+)$。典范映射 Γ 定义如下：

$$\Gamma : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right), \quad [a] \mapsto \widehat{[a]}. \tag{e 4.1}$$

命题 *4.4.* 设 A 是一个单纯的 C^*-代数，且 $QT(A) \neq \{0\}$. 定义映射 $\Delta : \widetilde{QT(A)} \to F(Cu(A))$，其定义为 $\tau \mapsto d_\tau$. 那么对于任意 $f \in L(F(Cu(A)))$ $f \circ \Delta \in LAff_+\left(\widetilde{QT(A)}\right)$，映射 $\Delta^* : L(F(Cu(A))) \to LAff_+\left(\widetilde{QT(A)}\right)$，$f \mapsto f \circ \Delta$ 是一个仿射双射。

证明。 根据 [13, 定理 5.7]，，存在一个序列 $\{a_n\} \subset (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得对于所有$\tau \in$QT($A$) $f \circ \Delta(\tau) = f(d_\tau) =$极限$_n\, \tau(a_n)$，并且 $\tau(a_n) \le \tau(a_{n+1})$ 对所有 n.此外，根据 [13, 定理 5.7] 的证明， a_n 可以选取为 Ped($A \otimes \mathbb{K}$)$_+$，对所有 n. 于是

$\widehat{a_n} \in \mathrm{Aff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$ 对所有 n. 于是 $\{\widehat{a_n}\}$ 是一个递增序列，并且 $f \circ \Delta =$ 极限 $_n\, \widehat{a_n}$.因此 $f \circ \Delta \in \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$.

$\widetilde{\Delta^*}$ 是仿射的，因为 Δ 是仿射的。根据命题 2.18，$\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)) = \{d_\tau : \tau \in \mathrm{QT}(A)\} \cup \{d_{\tau_\infty}\}$. 设 f_1, $f_2 \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$，使得 $\Delta^*(f_1) = \Delta^*(f_2)$。于是对所有$\widetilde{\tau} \in \mathrm{QT}(A)$，$f_1(d_\tau) = f_2(d_\tau)$。设 $\tau \in \mathrm{QT}(A)\backslash\{0\}$，则 $\tau_\infty = \lim_n n\tau$. 由于 f_1, f_2 是下半连续的，$f_1(d_{\tau_\infty}) = \lim_n f_1(d_{n\tau}) = \lim_n f_2(d_{n\tau}) = f_2(d_{\tau_\infty})$。因此 $f_1 = f_2$.所以 Δ^*是单射的。

设 $g \in \mathrm{LAff}_+(\widetilde{\mathrm{QT}(A)})$. 于是存在一个递增序列 $\{g_n\} \subset \mathrm{Aff}_+(\widetilde{\mathrm{QT}(A)})$，使得 $g = \lim_n g_n$.对每个 $n \in \mathbb{N}$，定义 $\bar{g}_n : \mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)) \to [0, \infty]$ 为 $\bar{g}_n(d_\tau) = g_n(\tau)$ 对 $\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}(A)}$，且 $\bar{g}_n(d_{\tau_\infty}) = \infty$. 那么 $\bar{g}_n$ 是 $\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A))$ 上连续仿射函数的递增序列。由于映射 $d_\tau \mapsto \tau$ 是保序的，$\bar{g}_n$ 也保序。因此 $\bar{g}_n \in \mathrm{Lsc}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$。令 $\bar{g} := \lim_n \bar{g}_n = \lim_n (1 - 1/n)\bar{g}_n \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$。那么 $g = \bar{g} \circ \Delta$. 因此 Δ 是满射。□

定义 4.5。设 A 是一个 C^*-代数，且 $\mathrm{QT}(A) \neq \{0\}$. 如果对任意 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$以及任意 $f \in \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$，只要满足对所有 $\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}(A)}$ $f(\tau) < d_\tau(a)$，就存在$\widetilde{b} \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得 $b \lesssim a$，并且对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$，$d_\tau(b) = f(\tau)$，那么我们称典范映射 $\Gamma : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$ 是遗传满射。

回忆一下，若一个单纯的 C^*-代数 A 满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \{0\}$，则称其对正元素具有严格比较$\widetilde{}$：如果对于任意 a，$b \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，$d_\tau(a) < d_\tau(b)$ 对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A) \setminus \{0\}$均成立，则有 $a \lesssim b$.

定理 4.6。设 A 是一个单纯的 C^*-代数，满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$，对正元素具有严格比较，且 Γ 是满射。那么，Γ 是遗传满射的。

证明。设 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，并设 $\mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$中的 $f \in$满足 $f(\tau) < d_\tau(a)$ 对所有 $\widetilde{\tau} \in \mathrm{QT}(A) \setminus \{0\}$. 均成立。由于 Γ 是满射，存在 $b \in (A \otimes \mathbb{K})_+$ 使得 $\Gamma([b]) = f$.。于是，$d_\tau(b) = \Gamma([b])(\tau) = f(\tau) < d_\tau(a)$ 对所有 $\tau \neq 0$.均成立。因此，由于严格比较，$b \lesssim a$。□

回忆一下，如果一个 C^*-代数 A 中可逆$\widetilde{}$元素的集合在 A ([32]) 中稠密，就称它具有稳定秩一。以下结果是 Antoine-Perera-Robert-Thiel 的结果（[1]）的推论。在下述定理中，对于 $x \in \mathrm{Cu}(A)$，我们用 $\widehat{x}$ 表示评价映射 $\widehat{x} : \mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)) \to \mathbb{R}_+$，$\lambda \mapsto \lambda(x)$。注意，$\widehat{x} \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$。

定理 4.7。（参见 [1, 定理 7。14]）设 A 是一个具有稳定秩一的单纯可分 C^*-代数。设 $a \in \mathrm{Cu}(A)$，并设 $f \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$ 满足 $f \leq \widehat{a}$.那么存在$c \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $c \leq a$ 且 $\widehat{c} = f$.

证明。根据 [1, 定理 7.13]，，存在 $b \in \mathrm{Cu}(A)$，使得 $b = f$. 根据 [1, 定理 3.8]，$b \wedge a$ 的下确界 $\{b, a\}$ 存在。设 $c = b \wedge a \in \mathrm{Cu}(A)$，则 $c \leq a$. 根据 [1, 定理$\widehat{}$6.12] 和 $f \leq \widehat{a}$，我们有 $\widehat{c} = b \wedge a = b \wedge \widehat{a} = f \wedge \widehat{a} = f$. □

定理 4.8. 设 A 是一个稳定秩一的单纯可分 C^*-代数。那么典范映射 $\Gamma : \mathrm{Cu}(A) \to \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$ 是遗传满射。

证明。设 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，并设 $f \in \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$ 满足 $f(\tau) < d_\tau(a) = \widehat{[a]}(\tau)\widetilde{\ }$，对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A) \setminus \{0\}$. 均成立。设 Δ, Δ^* 如命题 4.4 中所述。由命题 4.4, $\widetilde{\ }$ 存在 $g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$，使得 $f = \Delta^*(g) = g \circ \Delta$. 对于任意 $\tau \in \mathrm{QT}(A) \setminus \{0\}$，$\frown g(d_\tau) = g \circ \Delta(\tau) = f(\tau) < d_\tau(a)$。因此 $g \leq [a]$. 由定理 4.7，存在 $b \in (A \otimes \mathbb{K})_+\widetilde{\ }\widehat{\ }$，使得 $b \lesssim a$ 且 $[b] = g \in \mathrm{L}(\mathrm{F}(\mathrm{Cu}(A)))$。于是对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$ $d_\tau(b) = [b](d_\tau) = g(d_\tau) = g \circ \Delta(\tau) = f(\tau)$。因此 Γ 是遗传满射。

□

5 遗传满射蕴含迹近似振荡为零

引理 5.1. ([18, 引理 4.5]) 设 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，且设 $\lambda > 0$. 。假设 $\omega(a) < \lambda$.。那么存在 $\delta_0 > 0$，使得对所有 $\delta \in (0, \delta_0)$ $\omega(f_\delta(a)) < \lambda$.

命题 5.2. 设 A 是一个 C^*-代数，且设 τ 是 A. 上的拟迹。那么对任意$x \in A$以及任意 $f \in C_0((0, +\infty))_+$, $\tau(f(x^*x)) = \tau(f(xx^*))$。

证明。设 $x = u|x|$ 是 A^{**}. 中 x 的极分解。那么 $y := uf(x^*x)^{1/2} \in A$（见 [7, 1.3]），并且 $yy^* = f(xx^*)$。因此 $\tau(f(x^*x)) = \tau(y^*y) = \tau(yy^*) = \tau(f(xx^*))$。 □

下面的引理是 Lin 正交引理的一种表述，它实质上已包含在 [26, 引理 3.1] 和 [27, 命题 2.30]的证明中。为方便读者，我们在此给出证明。

引理 5.3。 (Lin 正交引理，参见 [26, 引理 3。1], [27, 命题 2。30]) 设A 是一个代数简单的 C^*-代数。设 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$, $e \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，并且 $\varepsilon > 0$.假设 $a \lesssim e$ 且 $\omega(a) < \varepsilon$. 那么存在 $b, c \in \mathrm{Her}(e)^1_+$，使得

(1) $d_\tau(a) - \varepsilon < \tau(b) \leq d_\tau(b) \leq d_\tau(a)$ 对所有 $\tau \in \overline{\mathrm{QT}(A)}^w$;*(2)* $\omega(b) < \varepsilon$;*(3)* $bc = 0$;*(4)* $d_\tau(e) - d_\tau(a) \leq d_\tau(c) < d_\tau(e) - d_\tau(a) + \varepsilon$对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)^w$.

证明。 由于 $\omega(a) < \varepsilon$，存在 $\theta_0 > 0$，使得对于任意 $\theta_1 \in (0, \theta_0)$,

$$\sup_{\tau \in \overline{\mathrm{QT}(A)}^w} \{d_\tau(a) - \tau(f_{\theta_1}(a))\} < \varepsilon. \tag{e 5.1}$$

由引理 5.1，存在 $\theta \in (0, \theta_0/4)$，使得 $\omega(f_\theta(a)) < \varepsilon$. 由于 $a \lesssim e$，根据 [34,命题 2.4 (iv)], ，存在 $\eta > 0$ 和 $x \in A \otimes \mathbb{K}$，使得 $x^*x = f_\theta(a)$，并且$xx^* \in \mathrm{Her}(f_\eta(e))$。注意，根据 [18, 命题 4.2], $\omega(xx^*) = \omega(x^*x) = \omega(f_\theta(a)) < \varepsilon$. 由引理 5.1，存在 $\delta > 0$，使得 $\omega(f_\delta(xx^*)) < \varepsilon$. 令 $b_0 := f_{\delta/4}(xx^*)$ $b_1 := f_{\delta/2}(xx^*)$，以及 $b := f_\delta(xx^*)$。于是 $\omega(b) < \varepsilon$，因此 (2) 成立。

Since $b \lesssim xx^* \sim x^*x = f_\theta(a) \lesssim a$, $\tau(b) \leq d_\tau(b) \leq d_\tau(a)$ 对所有 τ. 我们还有

$$\begin{aligned} d_\tau(a) - \tau(b) &= d_\tau(a) - \tau(f_\delta(xx^*)) \overset{(\text{Prop } 5.2)}{=} d_\tau(a) - \tau(f_\delta(x^*x)) && \text{(e 5.2)} \\ &= d_\tau(a) - \tau(f_\delta(f_\theta(a))) \leq d_\tau(a) - \tau(f_{2\theta}(a)) \overset{(\text{e } 5.1)}{<} \varepsilon. && \text{(e 5.3)} \end{aligned}$$

于是 (e 5.3) 表明 (1) 成立。根据连续函数演算，存在 $g \in C^*(e)_+^1$ 使得 $g \sim e$ 且 $gf_\eta(e) = f_\eta(e)$。定义 $c := g - b_1 \in \mathrm{Her}(e)_+^1$. 由于 $gb = b$ 且 $b_1 b = b$，我们有 $bc = 0$，因此 (3) 成立。注意到 $c + b_0 = g + (b_0 - b_1) \geq g \sim e$. 对于所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)^w$，我们有

$$\begin{aligned} d_\tau(e) = d_\tau(g) &\leq d_\tau(c) + d_\tau(b_0) \leq d_\tau(c) + d_\tau(xx^*) = d_\tau(c) + d_\tau(x^*x) && (\mathrm{e}\,5.4)\\ &\leq d_\tau(c) + d_\tau(a). && (\mathrm{e}\,5.5) \end{aligned}$$

最后一步，由于 $c \perp b$ 和 $b + c = g - (b_1 - b) \leq g \sim e$，我们有

$$d_\tau(c) + d_\tau(b) = d_\tau(c + b) \leq d_\tau(g) = d_\tau(e). \tag{e 5.6}$$

于是我们得到

$$d_\tau(c) \overset{(\mathrm{e}\,5.6)}{\leq} d_\tau(e) - d_\tau(b) \overset{(\mathrm{e}\,5.3)}{<} d_\tau(e) - d_\tau(a) + \varepsilon. \tag{e 5.7}$$

然后，(e 5.4) 和 (e 5.7) 表明 (4) 成立。 □

下面的定理刻画了 Γ 何时是遗传满射的。特别地，下面定理的 (2) 表明，要验证 Γ，的遗传满射性，只需考察连续仿射函数即可。下面定理的证明使用了 Lin 的技巧（[26, 引理 3.3]）。

定理 5.4。设 A 是一个代数简单的 C^*-代数，且 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$. 则以下各条件等价：

(1) Γ 是遗传满射的。

(2) 对任意 $e \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，以及任意满足 $h(\tau) < d_\tau(e)$（对所有 $\tau \in QT(A) \setminus \{0\}$）的 $h \in Aff_+\left(\widetilde{QT(A)}\right)$，存在 $y \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得 $y \lesssim e$，并且 $d_\tau(y) = h(\tau)$（对所有 $\tau \in QT(A)$）。

(3) 对任意 $e \in (A \otimes \mathbb{K})_+$、任意 $\varepsilon > 0$，以及任意满足 $h(\tau) < d_\tau(e)$（对所有 $\tau \in QT(A) \setminus \{0\}$）的 $h \in LAff_+\left(\widetilde{QT(A)}\right)$，存在 $y \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得 $y \lesssim e$，并且 $d_\tau(y) = h(\tau)$（对所有 $\tau \in QT(A)$），且 $y = \sum_{n=1}^\infty y_n$，其中 $\{y_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset (A \otimes \mathbb{K})_+$ 是一列两两正交的正元素，满足 $\omega(y_n) = 0$，且对所有 $n \in \mathbb{N}.$，$\|y_n\| < 1/2^n$。此外，对任意 $\varepsilon > 0$，存在一列属于 $\{b_n\} \subset Her(a)_+$ 的两两正交的正元素 $\{b_n\} \subset Her(a)_+$，使得对所有 n，$\omega(b_n) < \varepsilon/2^n$，并且对所有 $\tau \in QT(A)^w.$，$|h(\tau) - \sum_{n=1}^\infty d_\tau(b_n)| < \varepsilon$

证明。(3) $\Rightarrow$ (1) $\Rightarrow$ (2) 是显然的。下面我们将证明 (2) $\Rightarrow$ (3)。如果 A 是一个 $\widetilde{\text{初等}}$ C^*-代数，那么 $\mathrm{QT}(A)$ 由一个 2-准迹生成，这是平凡情形。因此，下面我们可以假设 A 是非初等的。令 $e \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，其中 $\|e\| = 1$，并令 $h \in \mathrm{LAff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}(A)}\right)$ 满足：对于所有 $\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}(A)}$，都有 $h(\tau) < d_\tau(e)$。令 $S := \mathrm{QT}(A)^w.$。令 $\varepsilon > 0.$。不失一般性，我们可以假设

$$\varepsilon < d_\tau(e) - h(\tau) \text{ for all } \tau \in S. \tag{e 5.8}$$

$\widetilde{\ }$注意到 $\mathrm{QT}(A) = \mathbb{R}_+ \cdot S$，且 S 是紧致的。于是根据 [26, 命题 3.2], ，存在一个序列 $\{h_i\} \subset \mathrm{Aff}_+\left(\widetilde{\mathrm{QT}}(A)\right)$，使得

$$h(\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} h_i(\tau) \text{ for all } \tau \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A) \quad (= \mathbb{R}_+ \cdot S). \tag{e 5.9}$$

由于 A 是非初等的，存在 $r' \in \mathrm{Her}(f_{1/4}(e))$，使得 $\sup\{d_\tau(r') : \tau \in S\} < \varepsilon/4$. 利用连续函数演算，我们可以找到 $\bar{r}$， $r \in \mathrm{Her}(r')_+^1$ 使得 $\bar{r} \cdot r = r$.令 $g \in C_0((0,1])_+$ 为满足以下条件的函数： $g(0) = 0$， $g(t) = 1$ 当 $t \in [1/4, 1]$，且 g 在 $[0, 1/4]$. 上线性。于是 $e \sim g(e)$ 且 $g(e) \cdot \bar{r} = \bar{r}$. 令 $\bar{e} := g(e) - \bar{r} \in \mathrm{Her}(e)_+^1$. 于是

$$\bar{e} \cdot r = (g(e) - \bar{r})r = 0. \tag{e 5.10}$$

对于任意 $\tau \in S$， $d_\tau(e) = d_\tau(g(e)) = d_\tau(\bar{e} + \bar{r}) \le d_\tau(\bar{e}) + d_\tau(\bar{r}) < d_\tau(\bar{e}) + \varepsilon$. 因此

$$h(\tau) \overset{\text{(e 5.8)}}{<} d_\tau(e) - \varepsilon < d_\tau(\bar{e}) \text{ for all } \tau \in S. \tag{e 5.11}$$

由于 $\mathrm{Her}(r)$ 是单纯且非初等的，利用 Glimm 引理进行归纳（例如参见 [21, 命题 4.10]），我们可以得到一列两两正交的正元素 $r_1, r_2, \cdots \in \mathrm{Her}(r)$，使得 $\sup\{d_\tau(r_n) : \tau \in S\} < \varepsilon/4^n$. 令 $\delta_n := \inf\{d_\tau(r_n) : \tau \in S\} < \varepsilon/4^n$.

断言： 令 $c_0 := \bar{e}$. 存在数列 $\{a_n\} \subset (A \otimes \mathbb{K})_+$ 以及 $\{b_n\}, \{c_n\} \subset \mathrm{Her}(e)_+^1$，使得对所有 $n \in \mathbb{N}$,

(i) $a_n \lesssim c_{n-1}$ 和 $d_\tau(a_n) = h_n(\tau)$ 对所有 $\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A)$; (ii) $b_n, c_n \in \mathrm{Her}(c_{n-1})_+^1$, $b_n c_n = 0$, 以及 $\omega(b_n) < \varepsilon/2^n$; (iii) $d_\tau(a_n) - \delta_n < d_\tau(b_n) \le d_\tau(a_n)$ 对所有 $\tau \in S$; (iv) $d_\tau(\bar{e}) - \sum_{i=1}^n d_\tau(a_i) \le d_\tau(c_n)$ 对所有 $\tau \in S$.

$\widehat{\ }$为了证明该断言，我们将归纳地构造 a_n， b_n， c_n。由（e 5.11），我们有 $h_1 < [\bar{e}]_{\lesssim}$。由于（2）成立，存在 $a_1 \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得

(i′) $a_1 \lesssim \bar{e} = c_0$ 且 $d_\tau(a_1) = h_1(\tau)$ 对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)$。

由命题 3.8， $\omega(a_1) = 0$. 。由引理 5.3，存在 b_1， $c_1 \in \mathrm{Her}(c_0)_+$，使得

(ii′) b_1， $c_1 \in \mathrm{Her}(c_0)_+^1$， $b_1 c_1 = 0$，且 $\omega(b_1) < \varepsilon/2$;

(iii′) $d_\tau(a_1) - \delta_1 < d_\tau(b_1) \le d_\tau(a_1)$ 对所有 $\tau \in S$; (iv′) $d_\tau(\bar{e}) - d_\tau(a_1) \le d_\tau(c_1)$ 对所有 $\tau \in S$.

假设对于 $n \in \mathbb{N}$，我们已构造出满足 (i)-(iv) 的 $\{a_i\}, \{b_i\}, \{c_i\}$ $(1 \le i \le n)$。接下来考虑情形 $n+1$：对于所有 $\tau \in S$,，我们有

$$h_{n+1}(\tau) \overset{\text{(e 5.9)}}{\le} h(\tau) - \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau) \overset{\text{(e 5.11)}}{<} d_\tau(\bar{e}) - \sum_{i=1}^{n} h_i(\tau) \overset{\text{(i),(iv)}}{\le} d_\tau(c_n). \tag{e 5.12}$$

由于 (2) 成立，根据 (e 5.12)，存在 $a_{n+1} \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，使得

(i″) $a_{n+1} \lesssim c_n$ and $d_\tau(a_{n+1}) = h_{n+1}(\tau)$ for all $\tau \in \widetilde{\mathrm{QT}}(A)$.

根据命题 3.8， $\omega(a_{n+1}) = 0$. 根据引理 5.3，存在 $b_{n+1}, c_{n+1} \in \mathrm{Her}(c_n)_+$，使得

(ii″) b_{n+1}， $c_{n+1} \in \mathrm{Her}(c_n)_+^1$， $b_{n+1} c_{n+1} = 0$，以及 $\omega(b_{n+1}) < \varepsilon/2^{n+1}$;

(iii″) $d_\tau(a_{n+1}) - \delta_{n+1} < d_\tau(b_{n+1}) \le d_\tau(a_{n+1})$ 对所有 $\tau \in S$ 均成立;

(IV) 对所有 $\tau\in S.$， $d_\tau(c_n)-d_\tau(a_{n+1})\le d_\tau($
$c_{n+1})$ 均成立。于是对所有 $\tau\in S$，，我们有

$$d_\tau(\bar{e})-\sum_{i=1}^{n+1}d_\tau(a_i)\overset{\text{(iv)}}{\le}d_\tau(c_n)-d_\tau(a_{n+1})\overset{\text{(IV)}}{\le}d_\tau(c_{n+1}). \tag{e 5.13}$$

因此我们有

(iv″) $d_\tau(\bar{e})-\sum_{i=1}^{n+1}d_\tau(a_i)\le d_\tau(c_{n+1})$ for all $\tau\in S$.

于是 i(″)i、(iii) i(v 表明，″)a_nh$_1$, $_{n+1}$h, c_{n+1}h 满足断言的条件。由归纳法可知，断言成立。

注意，由 (ii) 可知，$\mathrm{Her}(c_0)\supset\mathrm{Her}(c_1)\supset\mathrm{Her}(c_2)\supset\cdots$. 令 $n,m\in\mathbb{N}$ 满足 $n<m.$ 由 (ii) 可知， $b_m\in\mathrm{Her}(c_{m-1})\subset\mathrm{Her}(c_n)\subset\mathrm{Her}(b_n)^\perp$. 因此 $b_n\perp b_m$ $(n\ne m)$。由于 $\bar{e}\perp r$ （见 (e5.10)），且 $\{b_n\}\subset\mathrm{Her}(\bar{e})$ 和 $\{r_n\}\subset\mathrm{Her}(r)$， 我们有

$$b_1,b_2,\cdots,r_1,r_2,\cdots \text{ are mutually orthogonal positive elements in } \mathrm{Her}(e). \tag{e 5.14}$$

对于每个 $n\in\mathbb{N}$，以及所有 $\tau\in S$，我们有

$$h_n(\tau)\overset{\text{(i)}}{=}d_\tau(a_n)\overset{\text{(iii)}}{<}d_\tau(b_n)+\delta_n\le d_\tau(b_n)+d_\tau(r_n)=d_\tau(b_n+r_n). \tag{e 5.15}$$

$\widetilde{\ }$ $\widetilde{\ }$由于 $\mathrm{QT}(A)=\mathbb{R}_+\cdot S$，我们有，对于所有 $\tau\in$，$\mathrm{QT}(A)$。由于 (2) 成立，存在 $x_n\in(A\otimes\mathbb{K})_+$，使得 $x_n\lesssim b_n+r_n$且对于所有 $\tau.$， $d_\tau(x_n)=h_n(\tau)$。由命题 3.8 (iii)，我们有，对于所有 $n.$， $\omega(x_n)=0$

由于 $A\otimes\mathbb{K}$ 是稳定的，存在两两正交的正元素 $y_1,y_2,\cdots\in(A\otimes\mathbb{K})_+^1$，使得 $x_n\sim y_n$ 且 $\|y_n\|<1/2^n$ 对所有 $n.$ 均成立。于是 $\omega(y_n)=\omega(x_n)=0$ 对所有 $n.$均成立。令 $y:=\sum_{n=1}^\infty y_n.$。由于对所有 n均有 $y_n\sim x_n\lesssim b_n+r_n$，因此对所有 $m.$ 均有 $\sum_{n=1}^m y_n\lesssim\sum_{n=1}^m(b_n+r_n)\lesssim a$ $\widetilde{\ }$。于是 $y=\lim_m\sum_{n=1}^m y_n\lesssim a.$。对所有 $\tau\in$，$\mathrm{QT}(A)$ $d_\tau(y)=\sum_{n=1}^\infty d_\tau(y_n)=\sum_{n=1}^\infty d_\tau(x_n)=\sum_{n=1}^\infty h_n(\tau)=h(\tau)$。因此 Γ 是遗传满射。此外，根据(i)和(iii)，对所有 $\tau\in S$，有 $|h_n(\tau)-d_\tau(b_n)|=|d_\tau(a_n)-d_\tau(b_n)|\le\delta_n<\varepsilon/2^n.$。因此

$$\left|h(\tau)-\sum_{n=1}^\infty d_\tau(b_n)\right|\le\sum_{n=1}^\infty|h_n(\tau)-d_\tau(b_n)|<\sum_{n=1}^\infty\varepsilon/2^n=\varepsilon. \tag{e 5.16}$$

By (e 5.14)、(ii) 和 (e 5.16) 表明，(3) 的最后一个陈述也成立 . □

命题 5.5。 设 A 是一个 C^*-代数。设 $a\in\mathrm{Ped}(A\otimes\mathbb{K})_+^1$、 $b\in\mathrm{Her}(a)_+^1$，以及 $\tau\in\widetilde{\ }\mathrm{QT}(A)$。设 $c=a^{1/2}ba^{1/2}.$ 则 $\tau(a-c)\le d_\tau(a)-\tau(b)$。

证明。由 [2, II.2.3.], τ 在 $\mathrm{Her}(a)$ 上连续。设 $a_n:=f_{1/n}(a)$。由于 $b\in\mathrm{Her}(a)_+^1$，因此 $\lim_n[a_n^2,a_nba_n]=0.$ 由 [2, II.2.6], 可得

$$\begin{aligned}\tau(a-c)&=\lim_n\tau(a^{1/2}(a_n(1-b)a_n)a^{1/2})\le\lim_n\tau(a_n(1-b)a_n) &\text{(e 5.17)}\\ &=\lim_n\tau(a_n^2-a_nba_n)=\lim_n(\tau(a_n^2)-\tau(a_nba_n))=d_\tau(a)-\tau(b). &\text{(e 5.18)}\end{aligned}$$

□

命题 5.6。 (Dini 型结果) 设 X 是一个紧空间，并设 $f_1\ge f_2\ge f_3\ge\cdots$ 是定义在 $X.$ 上的实值上半连续函数递减序列。假设存在 $r\in\mathbb{R}$，使得对所有 $x\in X$, $\inf\{f_n(x)\colon\ n\in\mathbb{N}\}<r.$ 那么存在 $m\in\mathbb{N}$，使得对所有 $x\in X.$， $f_m(x)<r$

证明。 定义开集 $V_n := f_n^{-1}((-\infty, r))$。对所有 $n \in \mathbb{N}$. $\{f_n\}$， $\{V_n\}$递减意味着 $\{V_n\}$递增。$\inf\{f_n(x): \ n \in \mathbb{N}\} < r$ 对所有 $x \in X$ 成立，这意味着 $X = \cup_{n=1}^{\infty} V_n$. X 是紧致的，因此存在 $m \in \mathbb{N}$ 使得 $X = \cup_{n=1}^{m} V_n = V_m$. 。由此命题得证。 □

命题 5.7. 设 A 是一个 σ-幺代数简单 C^*-代数，且满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$.。假设 Γ 是遗传满射的。令 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，并令 $\varepsilon > 0$. 。那么存在 $c \leq a$ 使得 $\tau(a - c) < \varepsilon$ 对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)^w$ 和 $\omega(c) < \varepsilon$. 都成立。

证明。 不失一般性，我们可以假设 $\varepsilon < \inf\{d_\tau(a): \ \tau \in \mathrm{QT}(A)^w\}$。 注意， $[a] - \varepsilon/4 \in \mathrm{LAff}_+(\mathrm{QT}(A))$. 由定理 5.4，存在一列两两正交的正元素 $\{b_n\} \subset \mathrm{Her}(a)_+$，使得

$$\omega(b_n) < \varepsilon/2^n \text{ for all } n, \text{ and } |(d_\tau(a) - \varepsilon/4) - \textstyle\sum_{n=1}^{\infty} d_\tau(b_n)| < \varepsilon/4. \tag{e 5.19}$$

定义 $c_m := a^{1/2}(\sum_{n=1}^{m} b_n^{1/m})a^{1/2} \leq a \in \mathrm{Her}(a)_+^1$，则 $\{c_m\}$ 是递增序列，并且 $c_m \sim \sum_{n=1}^{m} b_n^{1/m}$ 对所有 m. 都成立。由命题 3.8，得到

$$\omega(c_m) = \omega\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^{1/m}\right) \leq \sum_{n=1}^{m} \omega(b_n) \overset{(\mathrm{e}\,5.19)}{\leq} \varepsilon. \tag{e 5.20}$$

根据命题 5.5，对所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)^w$，我们有

$$\begin{aligned} \lim_m \tau(a - c_m) &\leq \lim_m \left(d_\tau(a) - \tau\left(\sum_{n=1}^{m} b_n^{1/m}\right)\right) && \text{(e 5.21)} \\ &= d_\tau(a) - \lim_m \sum_{n=1}^{m} \tau\left(b_n^{1/m}\right) = d_\tau(a) - \sum_{n=1}^{\infty} d_\tau(b_n) \overset{(\mathrm{e}\,5.19)}{\leq} \varepsilon. && \text{(e 5.22)} \end{aligned}$$

注意，映射 $\varphi_m: \mathrm{QT}(A)^w \to [0, \infty)$ $\tau \mapsto \tau(a - c_m)$ 在紧致集 $\mathrm{QT}(A)^w$ 上连续，并且 $\{\varphi_m\}$ 是一个单调递减序列，其逐点值均低于 ε 。由命题 5.6，存在 m_0 使得

$$\tau(a - c_{m_0}) < \varepsilon \text{ for all } \tau \in \overline{\mathrm{QT}(A)}^w. \tag{e 5.23}$$

那么 $c := c_{m_0}$ 就是所需的元素。 □

定理 5.8。 设 A 是一个 σ-幺正单纯 C^*-代数，且满足 $\mathrm{QT}(A) \neq \emptyset$. 。假设 Γ 是遗传满射的。那么 A的迹近似振荡为零。

证明。 设 $e \in \mathrm{Ped}(A)_+^1 \setminus \{0\}$. 。那么 $\mathrm{Her}(e)$ 是代数简单的（见命题 A.1）。根据 Brown 稳定同构定理（[3]）， $A \otimes \mathbb{K} \cong \mathrm{Her}(e) \otimes \mathbb{K}$. 。将 A 替换为 $\mathrm{Her}(e)$，不妨假设 A 是代数简单的。

设 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+^1$. 。由命题 5.7，存在 $b \leq a$，使得对于所有 $\tau \in \mathrm{QT}(A)^w$，以及 $\omega(b) < \varepsilon^2 < \varepsilon$.，都有 $\tau(a - b) < \varepsilon^2$。于是 $\|a - b\|_2 = \sup_{\tau \in \mathrm{QT}(A)^w} \tau((a - b)^2)^{1/2} \leq \sup_{\tau \in \mathrm{QT}(A)^w} \tau(a - b)^{1/2} \leq \varepsilon$. 。因此， a 的迹近似振荡为零。 □

定理 5.9。 (定理 A) 设 A 是一个可分的单纯 C^*-代数，且具有稳定秩一，则 A 的迹近似振荡为零。此外， $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零。

证明。 对于第一个结论，应用定理 4.8 和定理 5.8。对于最后一个结论，应用定理 3.12 即可。 □

注 5.10. 在假设严格比较的情况下，上述定理的逆命题成立，见 [18, 定理 1.1]。若不假设严格比较，上述定理的逆命题则不成立：Villadsen 第二类代数具有唯一迹（见 [39, 节 6]），因此迹近似振荡为零（见 [18, 定理 5.9]），但它不具有稳定秩一。

6 应用

关于对角 AH 代数的定义，请读者参见 [11, 定义 2.1]；关于 (URP) 和 (COS) 的定义，请参见 [28]。

定理 6.1. 设 A是一个单纯可分幺 C^*-代数。若满足以下条件之一，则 A 具有迹近似振荡为零，且 $l^\infty(A)/J_A$ 具有实秩零：

(1) A 是一个对角 *AH* 代数。*(2)* $A = C(X) \rtimes \mathbb{Z}^d$，其中 $(X, \mathbb{Z}^d)$ 是一个极小自由拓扑动力系统。*(3)* $A = C(X) \rtimes \Gamma$，其中 Γ 是一个可数离散可恭群，且 (X, Γ) 是一个满足 *(URP)* 和 *(COS)* 的极小自由拓扑动力系统。

证明。 由定理 5.9，只需证明 A 具有稳定秩一：

(1) 由 [11,定理 4.1], ，单纯对角 AH 代数具有稳定秩一。(2) 由 [24, 推论 7.9], $C(X) \rtimes \mathbb{Z}^d$ 具有稳定秩一。(3) 由 [24, 定理 7.8], $C(X) \rtimes \Gamma$ 具有稳定秩一。

□

参考文献

[1] R. Antoine、F. Perera、L. Robert 和 H. Thiel， C^*稳定秩一的 -代数及其 *Cuntz* 半群。《Duke 数学杂志》**171** （2022年），第 1 期，33–99。[2] B. Blackadar 和 D. Handelman， 上的维数函数与迹 C^*-代数。《泛函分析杂志》**45** （1982），297–340。[3] L. G. Brown， 遗传子代数的稳定同构 C^*-代数。《太平洋数学杂志》**71** （1977），第 2 期，335–348。[4] L. G. Brown 和 G. K. Pedersen， C^* 实秩零的 -代数。《泛函分析杂志》**99**（1991），第 1 期，131–149。[5] N. P. Brown、F. Perera 和 A. Toms，*Cuntz* 半群、*Elliott* 猜想以及 上的维数函数 C^*-代数。《纯粹与应用数学杂志》**621** （2008），191–211。[6] J. Castillejos、S. Evington、A. Tikuisis、S. White 和 W. Winter，单纯 的核维数 C^*-代数。《数学发明》**224** （2021年），第 1 期，245–290。[7] J. Cuntz，单纯 中乘法与加法的结构 C^*-代数。《斯堪的纳维亚数学杂志》**40** （1977），第 2 期，215–233。

[8] M. Dadarlat 和 A. Toms，单纯 C^*-代数中的算子秩。《泛函分析杂志》259（2010年），1209–1229。[9] G. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，具有广义迹秩一的单纯稳定无投影 C^*-代数。《非交换几何杂志》14（2020年），251–347。[10] G. Elliott、G. Gong、H. Lin 和 Z. Niu，具有有限核维数的单纯可分 KK-可缩 C^*-代数的分类。《几何与物理杂志》158（2020年），103861，共 51 页。[11] G. Elliott、T. Ho 和 A. Toms，一类具有稳定秩一的单纯 C^*-代数。《泛函分析杂志》256（2009年），第 2 期，307–322。[12] G. Elliott 和 Z. Niu，关于小边界性质与 $\mathcal{Z}$-吸收。预印本，arXiv: 2504.03611v2。[13] G. Elliott、L. Robert 和 L. Santiago， C^*-代数上的下半连续迹锥。《美国数学杂志》133（2011年），969–1005。[14] G. Gong、X. Jiang 和 H. Su，单位单纯 $\mathcal{Z}$-代数的 C^*-稳定性的障碍。《加拿大数学通报》43（2000年），第 4 期，418–426。[15] X. Fu、K. Li 和 H. Lin，迹近似可除性与稳定秩一。《伦敦数学会杂志》106（2022年），3008–3042。[16] X. Fu 和 H. Lin，单纯 C^*-代数中的迹近似。《加拿大数学杂志》第 74 卷第 4 期，2022年8月，942–1004 页。[17] X. Fu 和 H. Lin，具有迹近似的非可和单纯 C^*-代数。（英文摘要）《数学论坛：西格玛》10（2022年），论文编号 e14，共 50 页。[18] X. Fu 和 H. Lin，迹振荡零与稳定秩一。《加拿大数学杂志》77（2025年），第 2 期，563–630。[19] U. Haagerup，正合 C-代数上的拟迹即为迹。《加拿大皇家学会数学报告》36（2-3）（2014年），67–92 页。[20] X. Jiang 和 H. Su，关于单纯单位无投影 C^*-代数。《美国数学杂志》121（1999年），第 2 期，359–413。[21]E. Kirchberg 和 M. Rørdam，非单纯纯无穷 C^*-代数。《美国数学杂志》122（2000年），第 3 期，637–666。[22] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，无限非单纯 C^*-代数：吸收 Cuntz 代数 $\mathcal{O}_\infty$。《数学进展》167（2002年），第 2 期，195–264。[23] E. Kirchberg 和 M. Rørdam，中心序列 C^*-代数与 Jiang-Su 代数的张量吸收。《纯粹与应用数学杂志》695（2014年），175–214。[24] C. Li 和 Z. Niu， $C(X) \rtimes \Gamma$的稳定秩。预印本，arXiv:2008.03361v2。2020年。[25] H. Lin，迹近似与 $\mathcal{Z}$-稳定性。预印本，arXiv: 2205.04013v3。

[26] H. Lin, 《严格比较与稳定秩一》。《泛函分析杂志》289（2025），第9期，论文编号111065，共25页。[27] H. Lin, 《迹振荡零与 $\mathcal{Z}$-稳定性》。《数学进展》439（2024），论文编号109462，共51页。[28] Z. Niu, 《比较半径与平均拓扑维数：Rokhlin 性质、开集的比较以及次齐次 C^*-代数》。《JAMA》146，595–672（2022）。[29] H. Matui 和 Y. Sato, 《单纯核 $\mathcal{Z}$-代数的严格比较与 C^*-吸收》。《数学学报》209（2012），第1期，179–196。[30] H. Matui 和 Y. Sato, 《UHF-吸收 C^*-代数的分解秩》。《Duke 数学杂志》163（14）（2014），2687–2708。[31] G. K. Pedersen, 《 C^*-代数及其自同构群》。《伦敦数学会专著》14。Academic Press, Inc.，伦敦/纽约/旧金山，1979。[32] M. Rieffel, 《 C^*-代数的维数与稳定秩》。《伦敦数学会会刊》46（1983），301–333。[33]L. Robert, 《关于 $\mathcal{Z}$-稳定无投影 C^*-代数的注记》。《格拉斯哥数学杂志》58（2016），第2期，273–277。[34] M. Rørdam, 《与 UHF-代数张量积的单纯 C^*-代数的结构，II》。《泛函分析杂志》107（1992），255–269。[35] M. Rørdam, 《 $\mathcal{Z}$-吸收 C^*-代数的稳定秩与实秩》。《国际数学杂志》15（2004），第10期，1065–1084。[36] H. Thiel, 《稳定秩一的单纯 C^*-代数中的算子秩》。《数学物理通讯》377（2020），第1期，37–76。[37] A. Tikuisis, 《稳定投影无 C^*-代数的核维数、 $\mathcal{Z}$-稳定性与代数简单性》。《数学年刊》（2014）358，729–778。[38] J. Villadsen, 《具有穿孔的单纯 C^*-代数》。《泛函分析杂志》154（1998），第1期，110–116。[39] J. Villadsen, 《关于单纯 C^*-代数的稳定秩》。《美国数学会杂志》12（1999），第4期，1091–1102。[40] W. Winter, 《纯 C^*-代数的核维数与 $\mathcal{Z}$-稳定性》。《数学发明》187（2012），第2期，259–342。[41] S. Zhang, 《纯无穷单纯 C^*-代数的一个性质》。《美国数学会会刊》卷109，第3期（1990年7月），第717–720页。Xuanlong Fu数学系，同济大学，中国上海市杨浦区四平路1239号，邮编200092。电子邮箱：xuanlongfu@tongji.edu.cn。

A 附录

本附录专门介绍一些众所周知的结果。我们不声称本附录中的结果具有原创性。

以下命题包含在 [37, 定理 2.1 (iii)、推论 2.2] 的证明中。原命题假设 A 是 σ-幺的，但这里并不需要这一条件。为完整起见，我们在下文给出证明。

命题 A.1. (参见 [37, 定理 2.1 (iii)]) 设 A 是一个单纯的 C^*-代数。那么 $\mathrm{Ped}(A)$是代数简单的。设 $a \in \mathrm{Ped}(A)_+$，则 $\mathrm{Her}_A(a)$ 是代数简单的。

证明。设 $x \in \mathrm{Ped}(A) \setminus \{0\}$，并设 $I(x) := \{\sum_{i=1}^n y_i x^* x z_i : n \in \mathbb{N}, y_i, z_i \in \mathrm{Ped}(A)\ i = 1, \cdots, n\}$. $I(x)$ 包含在由 x 在 $\mathrm{Ped}(A)$. I 中生成的代数理想内。(x) 也是 A. A 的一个代数理想。A. A 是单纯的，这意味着 $I(x)$ 在 A. 中稠密。因此 $\mathrm{Ped}(A) \subset I(x)$。由此可得 $\mathrm{Ped}(A) = I(x)$，且 $\mathrm{Ped}(A)$ 是代数简单的。

设 $a \in \mathrm{Ped}(A)_+ \setminus \{0\}$、$b \in \mathrm{Her}_A(a)_+$ 以及 $x \in \mathrm{Her}_A(a) \setminus \{0\}$. 。则 $a^{1/3} \in \mathrm{Ped}(A)$，并且 $axa \neq 0$. 由于 $\mathrm{Ped}(A)$ 是代数简单的，存在 y_1、$\cdots y_n$、z_1、$\cdots$、$z_n \in \mathrm{Ped}(A)$，使得 $b^{1/3} = \sum_{i=1}^n y_i axaz_i$. 。于是 $b = \sum_{i=1}^n (b^{1/3} y_i a) x a z_i b^{1/3}$。注意，对于所有 $i.$，都有 $b^{1/3} y_i a$、$a z_i b^{1/3} \in \mathrm{Her}_A(a)$。因此，$b$属于 $\mathrm{Her}_A(a)$ 中由 x 生成的代数理想。故 $\mathrm{Her}_A(a)$ 是代数简单的。□

关于 $\mathrm{QT}_2(A)$ 上的拓扑，请参见定义 2.10。下述命题中 (i) 与 (iii) 的等价性已在 [13, 命题 5.5]的证明中得到说明。这里我们主要证明 (i) 和 (iii) 都等价于 (ii)。

命题 A.2. (参见 [13, 命题 5.5]) 设 A 是一个单纯 C^*-代数。设 $\{\tau_i\} \subset \mathrm{QT}_2(A)$ 是一个网，且 $\tau \in \mathrm{QT}_2(A)$。以下条件等价：

(i) $\{\tau_i\}$ 收敛到 τ；(ii) 对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，$\lim_i \tau_i(a) = \tau(a)$；(iii) 对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$ 以及所有 $\varepsilon > 0.$，$\lim_i \tau_i((a-\varepsilon)_+) = \tau((a-\varepsilon)_+)$

证明. (i) $\Rightarrow$ (ii)：若 $\tau = \tau_\infty$ (见定义 2.10)，则对所有 $a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+^1$，$\tau(a) \leq \liminf_i \tau_i(a)$ 蕴含 $\lim_i \tau_i(a) = \infty = \tau(a)$。以下不妨设 $\tau \neq \tau_\infty$. 令$a \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+^1$. 令 $\varepsilon \in (0, \|a\|/4)$。$\limsup_i \tau_i((a-\varepsilon)_+) \leq \tau(a)$ 蕴含存在 i_0，使得对任意 $i \geq i_0$，$\tau_i((a-\varepsilon)_+) \leq \tau(a) + 1$. 令 $b := (a - 2\varepsilon)_+ \neq 0$. 由命题 A.1，存在 $y_1, \cdots, y_n, z_1, \cdots, z_n \in \mathrm{Ped}(A)$，使得 $a = \sum_{i=1}^n y_i (a - 2\varepsilon)_+ z_i$. 令$M := n(\tau(a) + 1)/\varepsilon$. 于是 $d_{\tau_i}(a) \leq n d_{\tau_i}((a-2\varepsilon)_+) \leq n\tau_i\left(\begin{pmatrix}(a-\varepsilon)_+ \\ \varepsilon\end{pmatrix}\right) \leq M$. 由此可得 $\|\tau_i|_{C^*(a)}\| \leq M$ 对所有 $i \geq i_0$. 因此，对任意 $\theta > 0$，存在 $\eta > 0$ 使得$\tau_i(a) \leq \tau_i((a-\eta)_+) + \theta$ 对所有 $i \geq i_0$ (例如，令 $\eta = \theta/M$)。然后

$$\limsup_i \tau_i(a) \leq \limsup_i (\tau_i((a-\eta)_+) + \theta) \leq \tau(a) + \theta \leq \liminf_i \tau_i(a) + \theta. \quad (\mathrm{e}\,1.1)$$

由于 θ 是任意的，我们有 $\lim_i \tau_i(a) = \tau(a)$。

(ii) $\Rightarrow$ (iii) 显然。我们将证明 (iii) $\Rightarrow$ (i)。令 $a \in (A \otimes \mathbb{K})_+$，并令 $\varepsilon > 0.$。于是 $(a-\varepsilon)_+ \in \mathrm{Ped}(A \otimes \mathbb{K})_+$，且 $\limsup_i \tau_i((a-\varepsilon)_+) = \lim_i \tau_i((a-\varepsilon)_+) = \tau((a-\varepsilon)_+) \leq \tau(a)$。由于 τ 是下半连续的，对于任意 $\theta > 0$，存在 $\delta > 0$ 使得 $\tau(a) - \theta \leq \tau((a-\delta)_+)$。于是 $\tau(a) - \theta \leq \tau((a-\delta)_+) = \lim_i \tau_i((a-\delta)_+) \leq \liminf_i \tau_i(a)$。由于 θ 是任意的，我们有 $\tau(a) \leq \liminf_i \tau_i(a)$。因此 $\{\tau_i\}$ 收敛到 τ.

□