Virasoro 顶点算子代数 $L(c_{p,\ q},\ 0)$ 模范畴中的子结构

Qirui Fang、Yu Teng、Yukun Xiao*、Wen Zheng

青岛大学数学与统计学院，中国青岛 *266071*；青岛国际数学中心，中国青岛 *266071*

arXiv:2512.23980v1 [math.QA] 30 Dec 2025

摘要

我们确定了 Virasoro 顶点算子代数 $L(c_{p,\ q},\ 0)$ 的模范畴以及 $L(c_{p,\ p+1},\ 0)$ 的简单流扩张的模范畴中的所有预模子范畴和模张量子范畴。

关键词：顶点算子代数、模张量范畴、子范畴、酉级数、简单流扩张。

MSC 2020： 17B69, 18M20.

1. 引言

顶点算子代数理论和模张量范畴理论的诞生，部分受到二维共形场论的推动（见 [8, 18]）。在它们之间众多的联系中，理性且 C_2-余有限的顶点算子代数的模范畴是一个模张量范畴 $\mathbb{C}$ （见 [10, 11]）。

若每个半单模张量子范畴都等价于 $\mathcal{C}$ 或平凡模范畴 $\mathrm{Vec}_{\mathbb{C}}$，则称模张量范畴 $\mathcal{C}$ 为素的。Müger 在 [19] 中引入了素分解，指出每个模张量范畴都等价于若干素模张量范畴的 Deligne积。从这个意义上说，模张量子范畴极为重要，因为它们可视为原模张量范畴的骨架。受这些方面的启发，我们确定了 Virasoro 顶点算子代数 $L(c_{p,\ q},\ 0)$ 的模范畴（记为 $\mathcal{C}_{p,\ q}$）中的所有模张量子范畴，以及 $L(c_{p,\ p+1},\ 0)$ 的简单流扩张的模范畴（记为 $\mathcal{C}_p$）中的所有模张量子范畴。

约定。 在本文中，模张量范畴 $\mathcal{C}$ 的子范畴 $\mathcal{D}$ 是一个非平凡满子范畴，其简单对象类是 $\mathcal{C}$ 中简单对象的子集。

显然，并非模张量范畴的每个子范畴仍然是模的。考虑最简单的例子 $\mathcal{C}_{3,\ 4}$，它表示 $L(\frac{1}{2},0)$ 的模范畴。它只有三个简单对象： $L(\frac{1}{2},0)$、 $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 和 $L(\frac{1}{2},\frac{1}{16})$。根据融合规则（见 [5, 22]），由 $L(\frac{1}{2},0)$ 和 $L(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ 生成的子范畴是 $\mathcal{C}_{3,\ 4}$ 唯一可能的预模子范畴，但它不是模的。对于一般的范畴 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 和 $\mathcal{C}_p$，我们也从以下步骤开始

*通讯作者电子邮件地址： ykxiao@qdu.edu.cn (Yukun Xiao)

根据融合规则确定所有可能的预模子范畴，然后通过计算 S-矩阵的行列式，选出其中的模子范畴（我们还在第3节中通过确定 Müger 中心提供了一种更范畴论的方法）。这一过程中得到的预模子范畴很有用。正如第5节所示，我们将这些预模子范畴（它们可能不是模的）中的简单对象进行粘合，从而实现 GKO 构造中出现的一大类顶点算子子代数。

本文其余部分安排如下：在第2节中，我们证明，当 $p \geq 5$ 时，$\mathcal{C}_{p,q}$ 中只有 6 个预模子范畴（其他情形见注2.2）。此外，当 p, q 奇偶性不同时，$\mathcal{C}_{p,q}$ 中只有 2 个模张量子范畴；当 p, q 均为奇数时，则有 6 个。在第3节中，我们采用一种不同且更具范畴论性质的方法来解决这个问题。特别地，我们给出了一个判据，用以确定哪些对象属于 Müger 中心（见引理 3.1）。第4节专门讨论 $L(c_{p,p+1}, 0)$ 的简单流扩张，其中 $p \equiv 1,2 \pmod 4$。我们证明，当 $p \neq 9,10$ 时，$\mathcal{C}_p$ 中只有 2 个~预模和模张量子范畴；当 $p = 9,10$ 时，则有 6 个。在第5节中，作为我们结果的一项应用，我们得到了一大类顶点算子代数，它们出现在第2节所确定的两个适当预模子范畴的 Deligne积中。

我们假设读者熟悉顶点算子代数的基础知识（参见 [8],[15]）和模张量范畴（参见 [7]）。

2. $C_{p,q}$中的预模与模张量子范畴

预模范畴是一个 $\mathbb{C}$-线性有限半单幺正刚性阿贝尔范畴，带有编织结构和带状结构。模张量范畴是一个预模范畴，其 S-矩阵非退化。预模范畴 $\mathcal{C}$ 中 T-矩阵的有限阶通常称为其 Frobenius-Schur 指数，记作 FSexp($\mathcal{C}$)。

记 $\mathcal{C}_{p,q}$ 为 Virasoro 顶点算子代数 $L(c_{p,q}, 0)$ 的模范畴，并记 (m, n) 为 $L(c_{p,q}, 0)$ 的模 $L(c_{p,q}, h_{m,n})$，其中 $c_{p,q} = 1 - \frac{6(p-q)^2}{pq}$，$h_{m,n} = \frac{(pm-nq)^2 - (p-q)^2}{4pq}$，$p, q \geq 2$，~~$\gcd(p, q) = 1$~~，~~$0 < m < p$~~ 且 $0 < n < q$。不失一般性，本文假设 $p < q$。事实上，$\mathcal{C}_{p,q}$ 是模张量范畴。

命题 2.1. 对于任意$p \geq 5$，$\mathcal{C}_{p,q}$ 只有六个非平凡预模子范畴。

证明。 我们使用 [22]中的融合规则：

$$(m, n) \boxtimes (m', n') = \bigoplus_{(m'', n'')} (m'', n''),$$

其中，$((m'', n''), (m, n), (m', n'))$是一个由有序对组成的容许三元组。根据预模子范畴的定义，我们只需利用融合规则来研究融合张量积的封闭性。

为简单起见，我们先找出所有水平方向或垂直方向上的子范畴，再用它们生成更大的子范畴。$\mathcal{C}_{p,q}$ 的**水平** 或**垂直** 子范畴分别由形如$(1, n)$或(m, n)的模构成。

情形 1：当 p 和 q 为奇数时，我们用 $\mathcal{D}$ 表示$\mathcal{C}_{p,q}$的一个可能的水平子范畴。根据定义，单位对象(1,1)包含于 $\mathcal{D}$中。

如果模 (1，2) $\in \mathcal{D}$，那么由 (1，3) $\in \mathcal{D}$ 可知，因为 (1，2)$\boxtimes$(1，2) $=$(1，1)$\oplus$(1，3)。重复这一过程，我们发现对于每个 $n \geq 4$，(1，n) 是 (1，2)$\boxtimes$(1，$n-1$) 的一个直和项

因此 $(1,\ n) \in \mathcal{D}$。然后我们得到子范畴

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_1} = \{(1,1),(1,2),(1,3),\ldots,(1,q-1)\}.$$

如果模 $(1,\ 2) \notin \mathcal{D}$ 和 $(1,\ 3) \in \mathcal{D}$，则由 $(1,\ 5) \in \mathcal{D}$ 可知，因为 $(1,\ 3) \boxtimes (1,\ 3) = (1,\ 1) \oplus (1,\ 3) \oplus (1,\ 5)$。重复这一过程，我们还可以发现所有的 $(1,\ 2n-1) \in \mathcal{D}$，因为对于 $2 \le n \le \frac{q-1}{2}$，$(1,\ 2n-1)$ 是 $(1,\ 3) \boxtimes (1,\ 2n-3)$ 的一个直和项。于是得到子范畴

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_2} = \{(1,1),(1,3),(1,5),\ldots,(1,q-2)\}.$$

如果模 $(1,\ n) \in \mathcal{D}$，其中 n 是最小的（$n=1$ 除外）且 $4 \le n < q-1$，则由 $(1,\ 3)$ 是 $(1,\ n) \boxtimes (1,\ n)$ 的一个直和项可知，这与 n 的最小性矛盾。

由于 $(1,q-1) \boxtimes (1,q-1) = (1,1)$，$\mathcal{C}_5 = \{(1,1),(1,q-1)\}$ 也是$\mathcal{C}_{p,q}$的子范畴。

关于垂直子范畴的讨论与水平子范畴类似。垂直子范畴也有三个

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{C}_3} &= \{(1,1),(2,1),(3,1),\ldots,(p-1,1)\},\\
\boldsymbol{\mathcal{C}_4} &= \{(1,1),(3,1),(5,1),\ldots,(p-2,1)\},\\
\boldsymbol{\mathcal{C}_5} &= \{(1,1),(p-1,1)\} = \{(1,1),(1,q-1)\},
\end{aligned}$$

因为模 (m,n) 和 $(p-m,q-n)$ 在 [22] 中是相同的。

接下来，我们使用子范畴 $\mathcal{C}_1,\mathcal{C}_2,\ldots,\mathcal{C}_5$ 生成 $\mathcal{C}_{p,q}$ 的其他预模子范畴。由于对于 $m,\ n > 1$，$(1,n)$（或 $(1,q-n)$）以及 $(m,1)$（或 $(p-m,1)$）都包含在 $(m,n) \boxtimes (m,n)$ 中，因此我们无需考虑其他单行或单列。令 $(\mathcal{D},\mathcal{D}')$ 表示由 $\mathcal{D}$ 和 $\mathcal{D}'$ 生成的子范畴。显然，

$$(m,1) \boxtimes (1,n) = (m,n).$$

因此，我们可以利用一个水平子范畴和一个垂直子范畴生成其余的子范畴。

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_5$

表 1：p 和 q 为奇数时生成的子范畴

结果如上所示，我们得到了一个新的非平凡子范畴：

$$\boldsymbol{\mathcal{C}_6} := (\mathcal{C}_2,\mathcal{C}_4) = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,3) & \ldots & (1,q-2) \\ (3,1) & (3,3) & \ldots & (3,q-2) \\ & \ldots & \ldots & \\ (p-2,1) & (p-2,3) & \ldots & (p-2,q-2) \end{array} \right\}.$$

Case 2：当 p 为奇数且 q 为偶数时，子范畴 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_3$、$\mathcal{C}_4$ 和 $\mathcal{C}_5$ 相同 e

与 p 和 q 均为奇数的情形相同。并且我们有如下结果 s:

$$\mathcal{C}_2 = \{(1,1),(1,3),(1,5),\ldots,(1,q-1)\},$$
$$\mathcal{C}_6 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,3) & \ldots & (1,q-1) \\ (2,1) & (2,3) & \ldots & (2,q-1) \\ & \ldots & \ldots & \\ (\frac{p-1}{2},1) & (\frac{p-1}{2},2) & \ldots & (\frac{p-1}{2},q-1) \end{array} \right\}.$$

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_5$

表2： p 为奇数且 q 为偶数时生成的子范畴

情形3：当 p 为偶数且 q 为奇数时，子范畴 $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$ 和 $\mathcal{C}_5$ 与 p 和 q 均为奇数时的情形相同。此外，我们还有以下结果：

$$\mathcal{C}_4 = \{(1,1),(3,1),(5,1),\ldots,(p-1,1)\},$$
$$\mathcal{C}_6 = \left\{ \begin{array}{cccc} (1,1) & (1,2) & \ldots & (1,\frac{q-1}{2}) \\ (3,1) & (3,3) & \ldots & (3,\frac{q-1}{2}) \\ & \ldots & \ldots & \\ (p-1,1) & (p-1,2) & \ldots & (p-1,\frac{q-1}{2}) \end{array} \right\}.$$

	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_2$	$\mathcal{C}_5$
$\mathcal{C}_3$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_{p,q}$	$\mathcal{C}_3$
$\mathcal{C}_4$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_6$	$\mathcal{C}_4$
$\mathcal{C}_5$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_1$	$\mathcal{C}_5$

表3： p 为奇数且 q 为偶数时生成的子范畴

在结论中，$\mathcal{C}_{p、q}$ 对于任意 $p \geq 5$恰好有六个非平凡预模子范畴 .

□

注2.2。当 $p = 2$ 和 $q \leq 5$ 时，不存在任何非平凡子范畴。当 $p = 2$和 $q \geq 7$时，只有一个非平凡子范畴： {(1、1)、(1、 $\frac{q-1}{2}$)}。当 $p = 3$ 和$q = 4$时，只有一个非平凡子范畴： {(1、1)、(1、3)}。当 $p = 3$和 $q \geq 5$时，只有两个非平凡子范畴： $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_5$。当 $p = 4$ 时，只有四个非平凡预模子范畴： $\mathcal{C}_1$、$\mathcal{C}_2$、$\mathcal{C}_3$ 和 $\mathcal{C}_5$。

命题 2.3。当 p 和 q 的奇偶性不同时，子范畴 $\mathcal{C}_5$ 和 $\mathcal{C}_6$ 不是模的；当 p 和 q 都为奇数时，它们是模的。

证明。记 $\mathcal{C}_i$ 的 S-矩阵为 $S^{(i)}$ (i=1,...,6)。我们需要验证 $S^{(5)}$ 和 $S^{(6)}$ 的非退化性。[4] 已证明，范畴 $\mathcal{C}_{p,q}$ 的范畴 S-矩阵与 $L(c_{p,q},0)$ 的 genus one S-矩阵（见 [23]）仅相差一个常数。因此，在计算中使用 genus one S-矩阵的表达式不会影响其非退化性。

由 [3], 中的公式 (4.5) 可得

$$S^{(5)}=\frac{8}{pq}\sin^2(\frac{q\pi}{p})\sin^2(\frac{p\pi}{q})\left\{\begin{array}{cc}-1 & (-1)^{p+q}\\ (-1)^{p+q} & (-1)^{pq+1}\end{array}\right\}.$$

因此，当 p 和 q 为奇数时， $\mathcal{C}_5$ 是模的；否则它不是模的。

当 p为奇数且 q为偶数时， $\mathcal{C}_6$中的对象具有以下形式：$(j,2i-1)$，其中 $1\le i\le \frac{q}{2}$ 和 $1\le j\le \frac{p-1}{2}$。

$$S^{(6)}{}^{(j,2i-1)}_{(1,1)}=\sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^j\sin(\frac{jq\pi}{p})\sin(\frac{(2i-1)p\pi}{q}),$$

$$\begin{aligned}S^{(6)}{}^{(j,2i-1)}_{(1,q-1)}=&\sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^{2i-1+j(q-1)+1}\sin(\frac{jq\pi}{p})\sin(\frac{p(q-1)(2i-1)\pi}{q})\\ =&\sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^j\sin(\frac{jq\pi}{p})\sin(\frac{(2i-1)p\pi}{q}).\end{aligned}$$

由于对于任意 i 和 j， $S^{(6)}{}^{(j,2i-1)}{}_{(1,1)}=S^{(6)}{}^{(j,2i-1)}{}_{(1,p)}$ 成立，因此矩阵 $S^{(6)}$ 是退化的。

当 p为偶数且 q为奇数时， $\mathcal{C}_6$中的对象具有以下形式：$(2i-1,j)$，其中 $1\le i\le \frac{p}{2}$和 $1\le j\le \frac{q-1}{2}$。

按照与上述类似的计算，对于所有 i 和 j，等式 $S^{(6)}{}^{(2i-1,j)}{}_{(1,1)}=S^{(6)}{}^{(2i-1,j)}{}_{(1,p)}$ 成立，这意味着矩阵 $S^{(6)}$ 也是退化的。

当 p和 q为奇数时， $\mathcal{C}_6$中的对象具有以下形式：$(2i-1,\ 2j-1)$，其中 $1\le i\le \frac{p-1}{2}$和$1\le j\le \frac{q-1}{2}$。我们有以下元素

$$S^{(6)}{}^{(2i'-1,2j'-1)}_{(2i-1,2j-1)}=-\sqrt{\frac{8}{pq}}\sin(\frac{(2i-1)(2i'-1)q\pi}{p})\sin(\frac{(2j-1)(2j'-1)p\pi}{q}),$$

并考虑矩阵 $S^{(6)\mathbf{T}}S^{(6)}$。对于 $(i,\ j)\neq(i',\ j')$,

$$\begin{aligned}(S^{(6)\mathbf{T}}S^{(6)})^{(2i'-1,2j'-1)}_{(2i-1,2j-1)}&=\sum_{k,l}S^{(2k-1,2l-1)}_{(2i-1,2j-1)}S^{(2k-1,2l-1)}_{(2i'-1,2j'-1)}\\ &=\frac{2}{pq}\left[\frac{\sin((p-1)\theta_{i-i'})}{2\sin(\theta_{i-i'})}-\frac{\sin((p-1)\theta_{i+i'-1})}{2\sin(\theta_{i+i'-1})}\right]\sum_l\sin(\eta_{j,l})\sin(\eta_{j',l})\\ &=\frac{2}{pq}(-\frac{1}{2}-(-\frac{1}{2}))\sum_l\sin(\eta_{j,l})\sin(\eta_{j',l})\\ &=0,\end{aligned}$$

其中 $\theta_x=\frac{2xq\pi}{p}$和 $\eta_{y,\ z}=\frac{(2y-1)(2z-1)}{q}p\pi$。由此可得

$$\begin{aligned}(S^{(6)\mathbf{T}}S^{(6)})^{(2i-1,2j-1)}_{(2i-1,2j-1)}&=\frac{8}{pq}\sum_{k,l}\sin^2(\frac{(2i-1)(2k-1)q\pi}{p})\sin^2(\frac{(2j-1)(2l-1)p\pi}{q})\\ &=\frac{8}{pq}\frac{p}{4}\sum_l\sin^2(\frac{(2j-1)(2l-1)p\pi}{q})\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{2}.$$

因此，当 p 和 q 为奇数时，子范畴 $\mathcal{C}_6$ 是模的。 □

定理 2.4. 在范畴 $\mathcal{C}_{p,\,q}$ 中，当 p 为偶数、 q 为奇数且满足 $p \geq 4$ 时，所有预模子范畴（如命题 *2.1* 所述）中，只有 $\mathcal{C}_2$ 和 $\mathcal{C}_3$ 是模张量范畴。另一方面，当 p 为奇数、 q 为偶数且满足 $p \geq 5$ 时，只有 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_4$ 具有模张量范畴结构。

证明。当 p 为偶数、 q 为奇数且满足 $p \geq 4$ 时，由于这些子范畴继承了 $\mathcal{C}_{p,\,q}$ 的预模张量范畴结构，只需证明 S-矩阵 $S^{(2)}$ 和 $S^{(3)}$ 是非退化的，而其他矩阵均为退化的。

对于 $\mathcal{C}_2 = \{(1,\ 1),\ (1,\ 3)\ldots,\ (1,\ q-2)\}$，矩阵 $S^{(2)}$ 的 $(i,\ j)$ 项由 [3] 中的公式 (4.5) 给出，如下:

$$S^{(2)}_{i,j} = -\sqrt{\frac{8}{pq}}\sin(\frac{q\pi}{p})\sin(\frac{(2i-1)(2j-1)p\pi}{q}).$$

令 $M_{(2)\,i,j} = \sin(\frac{(2i-1)(2j-1)p\pi}{q})$。只需证明 $M_{(2)}$ 是非退化的。考虑矩阵 $N^{(2)} := (M_{(2)})^{\mathbf{T}} M_{(2)}$。对于 $j \neq k$,

$$\begin{aligned}
N^{(2)}_{j,k} &= \sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin(\frac{(2i-1)(2j-1)p\pi}{q})\sin(\frac{(2i-1)(2k-1)p\pi}{q}) \\
&= \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{l}\cos(\frac{(2i-1)(2j-2k)p\pi}{q}) - \sum_{i=1}^{l}\cos(\frac{(2i-1)(2j+2k-2)p\pi}{q})\right] \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{\sin((q-1)\frac{(2j-2k)p\pi}{q})}{2\sin(\frac{(2j-2k)p\pi}{q})} - \frac{\sin((q-1)\frac{(2j-2k)p\pi}{q})}{2\sin(\frac{(2j+2k-2)p\pi}{q})}\right] \\
&= \frac{1}{2}(-\frac{1}{2} - (-\frac{1}{2})) \\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中第三个等式成立，是因为 $\sin\theta\left(\sum_{i=1}^{l}\cos(2i-1)\theta\right) = \frac{1}{2}\sin 2l\theta$。对于 $j = k$,

$$\begin{aligned}
N^{(2)}_{j,j} &= \sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}} \sin^2(\frac{(2i-1)(2j-1)p\pi}{q}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\frac{q-1}{2}}\left(1 - \cos((2i-1)\frac{2(2j-1)p\pi}{q})\right) \\
&= \frac{q-1}{4} - \frac{1}{2}\frac{\sin((q-1)\frac{2(2j-1)p\pi}{q})}{2\sin(\frac{2(2j-1)p\pi}{q})} \\
&= \frac{q}{4}.
\end{aligned}$$

因此， $M^{(2)}$ 是非退化的，而 $\mathcal{C}_2$ 是一个模张量范畴。

对于 $\mathcal{C}_3 = \{(1,1),(2,1),(3,1)\ldots,(p-1,1)\}$，矩阵 $S^{(3)}$ 的(i,j)项也由 [3] 中的公式(4.5)给出，如下所示:

$$S^{(3)}_{i,j} = \sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^{i+j+1}\sin(\frac{ijq\pi}{p})\sin(\frac{p\pi}{q}).$$

令 $M_{(3)\,i,j} = (-1)^{i+j+1}\sin(\frac{ijq\pi}{p})$。我们只需证明 $M_{(3)}$ 的非退化性。同样地，我们考虑矩阵 $N^{(3)} := (M_{(3)})^{\mathbf{T}} M_{(3)}$。对于 $j \neq k$，我们有

$$\begin{aligned}
N^{(3)}_{j,k} &= (-1)^{j+k}\sum_{i=1}^{p-1}\sin(\frac{ijq\pi}{p})\sin(\frac{ikq\pi}{p}) \\
&= (-1)^{j+k}\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{p-1}\cos(\frac{i(j-k)q\pi}{p}) - \sum_{i=1}^{p-1}\cos(\frac{i(j+k)q\pi}{p})\right] \\
&= (-1)^{j+k}\frac{1}{4}\left[\frac{\sin((p-\frac{1}{2})\frac{(j-k)q\pi}{p})}{\sin(\frac{(j-k)q\pi}{2p})} - \frac{\sin((p-\frac{1}{2})\frac{(j+k)q\pi}{p})}{\sin(\frac{(j+k)q\pi}{2p})}\right] \\
&= 0,
\end{aligned}$$

其中第三个等号成立，是因为 $\sin\frac{\theta}{2}\left(\sum_{i=1}^{2l-1}\cos i\theta\right) = \frac{1}{2}(\sin(2l-\frac{1}{2})\theta - \sin\frac{\theta}{2})$。对于 $j = k$,

$$\begin{aligned}
N^{(3)}_{j,j} &= \sum_{i=1}^{p-1}\sin^2(\frac{ijq\pi}{p}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p-1}\left(1-\cos(\frac{2ijq\pi}{p})\right) \\
&= \frac{p-1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(p-\frac{1}{2})\frac{2jq\pi}{p}}{2\sin\frac{jq\pi}{p}} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{p}{2}.
\end{aligned}$$

因此，$M^{(3)}$ 是非退化的，而 $\mathcal{C}_3$ 是一个模张量范畴。

对于 $\mathcal{C}_1 = \{(1,1),(1,2),(1,3)\ldots,(1,q-1)\}$，其 S 矩阵的 (i,j) 项为:

$$S^{(1)}_{i,j} = \sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^{i+j+1}\sin(\frac{q\pi}{p})\sin(\frac{ijp\pi}{q}).$$

当 $i = q-1$ 时,

$$\begin{aligned}
S^{(1)}_{q-1,j} &= \sqrt{\frac{8}{pq}}(-1)^{j+1}\sin(\frac{q\pi}{p})\sin(\frac{(q-1)jp\pi}{q}) \\
&= \sqrt{\frac{8}{2l(2l+1)}}(-1)^{j}\sin(\frac{q\pi}{p})\sin(\frac{jp\pi}{q}) \\
&= S^{(1)}_{1,j}.
\end{aligned}$$

这意味着矩阵 $S^{(1)}$ 的第一行与最后一行完全相同。因此，$S^{(1)}$ 是退化的，而 $\mathcal{C}_1$ 不是模张量范畴。

对于 $\mathcal{C}_4 = \{(1,\ 1),\ (3,\ 1),\ (5,\ 1).....,\ (p-1,\ 1)\}$，其 S-矩阵的 $(i,\ j)$ 项 is:

$$S_{i,j}^{(4)} = -\sqrt{\frac{8}{pq}}\sin(\frac{p\pi}{q})\sin(\frac{(2i-1)(2j-1)q\pi}{p}).$$

当 $i = \frac{p}{2}$, -

$$S_{\frac{p}{2},j}^{(4)} = -\sqrt{\frac{8}{pq}}\sin(\frac{p\pi}{q})\sin(\frac{(p-1)(2j-1)q\pi}{p}) = S_{1,j}^{(4)}.$$

那么，矩阵 $S^{(4)}$ 的第一行与最后一行完全相同。因此， $S^{(4)}$ 是退化的，而 $\mathcal{C}_4$ 不是模张量范畴。关于 $\mathcal{C}_5$，$\mathcal{C}_6$，参见命题 2.3。

使用上述相同的方法和命题 2.3，我们可以证明，当 p 为奇数且 q 为偶数，满足 $p \geq 5$ 时，矩阵 $S^{(2)}$，$S^{(3)}$，$S^{(5)}$ 和 $S^{(6)}$ 是退化的，而矩阵 $S^{(1)}$ 和 $S^{(4)}$ 是非退化的。因此，当 p 为奇数且 q 为偶数，满足$p \geq 5$时，只有 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_4$ 具有模张量范畴结构。 □

定理 2.5。在范畴 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 中，当 p 和 q 为奇数且满足 $p \geq 5$ 时，所有预模子范畴（如命题 *2.1* 中所述） $\mathcal{C}_i\,(i = 1,\ .....,\ 6)$ 都是模张量范畴。

证明。矩阵 $S^{(2)}$ 和 $S^{(3)}$ 的非退化性与定理 2.4 中证明的完全相同，而矩阵 $S^{(5)}$ 和 $S^{(6)}$ 的非退化性可见命题 2.3。因此，只需证明矩阵 $S^{(1)}$ 和 $S^{(4)}$ 也非退化。

对于 $\mathcal{C}_1 = \{(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3)\ldots,\ (1,\ q-1)\}$，令 $M_{(1)i,\ j} = (-1)^{i+j+1}\sin(\frac{ijp\pi}{q})$。我们考察矩阵 $N^{(1)} := (M_{(1)})^{\mathbf{T}}M_{(1)}$。对于 $j \neq k$，有

$$\begin{aligned}
N_{j,k}^{(1)} &= (-1)^{j+k}\sum_{i=1}^{q-1}\sin(\frac{ijp\pi}{q})\sin(\frac{ikp\pi}{q}) \\
&= (-1)^{j+k}\frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{q-1}\cos(\frac{i(j-k)p\pi}{q}) - \sum_{i=1}^{q-1}\cos(\frac{i(j+k)p\pi}{q})\right] \\
&= (-1)^{j+k}\frac{1}{4}\left[\frac{\sin((q-\frac{1}{2})\frac{(j-k)p\pi}{q})}{\sin(\frac{(j-k)p\pi}{2q})} - \frac{\sin((q-\frac{1}{2})\frac{(j+k)p\pi}{q})}{\sin(\frac{(j+k)p\pi}{q})}\right] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

对于 $j = k$,

$$\begin{aligned}
N_{j,j}^{(1)} &= \sum_{i=1}^{q-1}\sin^2(\frac{ijp\pi}{q}) \\
&= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{q-1}\left(1 - \cos(\frac{2ijp\pi}{q})\right) \\
&= \frac{q-1}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(q-\frac{1}{2})\frac{2jp\pi}{q}}{2\sin\frac{jp\pi}{q}} - \frac{1}{2}\right) \\
&= \frac{q}{2}.
\end{aligned}$$

因此， $S^{(1)}$ 是非退化的。

至于 $S^{(4)}$的非退化性，可以参照 $S^{(2)}$非退化性的证明进行调整；只需交换 p 和 q。 □

已知对于任意简单对象(m,n)，在 [4] 中，$\mathrm{qdim}_{L(c_{p,q},0)}(m,n) = \dim(m,n)$，而在 [3] 中，$\mathrm{qdim}_{L(c_{p,q},0)}(m,n)$ =Frobenius–Perron维数 (m,n)。因此我们有

$$\mathrm{FPdim}\,(m,n) = \dim\,(m,n).$$

此外，可得 Frobenius–Perron维数$\mathcal{C}_{p,\ q} = \dim\,\mathcal{C}_{p,\ q}$。

命题2.6。 当 p 为奇数且 q 为偶数时，范畴 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 同构于 ***Deligne***积 $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_4$；当 p 为偶数且 q 为奇数时，它同构于 ***Deligne*** 积 $\mathcal{C}_2 \boxtimes \mathcal{C}_3$；当 p 和 q 均为奇数时，它同构于 ***Deligne*** 积 $\mathcal{C}_2 \boxtimes \mathcal{C}_4 \boxtimes \mathcal{C}_5$。

证明。 当 p 为奇数且 q 为偶数时，根据定理 2.4， $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_4$ 是模张量范畴。显然， $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_4$ 分别嵌入 $\mathcal{C}_{p,\ q}$。容易验证， $\mathcal{C}_4$ 是 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 中 $\mathcal{C}_1$ 的中心化子。根据 [2][19], , 范畴 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 同构于 Deligne积 $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_4$。并且我们有

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{p,q}) = \frac{pq}{8\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{\pi}{q}} = \frac{q}{2\sin^2\frac{\pi}{q}} \cdot \frac{p}{4\sin^2\frac{\pi}{p}} = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_1)\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_4).$$

当 p 为偶数且 q 为奇数时，情况与前一种类似；我们还有$\mathcal{C}_{p,\ q} \cong \mathcal{C}_2 \boxtimes \mathcal{C}_3$ 和

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{p,q}) = \frac{pq}{8\sin^2\frac{\pi}{p}\sin^2\frac{\pi}{q}} = \frac{q}{4\sin^2\frac{\pi}{q}} \cdot \frac{p}{2\sin^2\frac{\pi}{p}} = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_2)\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_3).$$

当 p 和 q 均为奇数时，根据前面的结果，我们可以得出范畴 $\mathcal{C}_{p,\ q} \cong \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_4$ 和 $\mathcal{C}_{p,\ q} \cong \mathcal{C}_2 \boxtimes \mathcal{C}_3$。因此， $\mathcal{C}_5$ 是 $\mathcal{C}_2$在 $\mathcal{C}_1$ 中的中心化子，而 $\mathcal{C}_5$ 是 $\mathcal{C}_4$ 在 $\mathcal{C}_3$中的中心化子。于是，我们有 $\mathcal{C}_{p,\ q} \cong \mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_4 \cong \mathcal{C}_2 \boxtimes \mathcal{C}_5 \boxtimes \mathcal{C}_4$ 和

$$\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_{p,q}) = 2 \cdot \frac{q}{4\sin^2\frac{\pi}{q}} \cdot \frac{p}{4\sin^2\frac{\pi}{p}} = \mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_5)\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_2)\mathrm{FPdim}(\mathcal{C}_4).$$

□

注记2.7。 对于每个秩，都存在一个源自酉级数的模张量范畴实例（$\mathcal{C}_{p,\ p+1}$的某个子范畴）。

注记2.8。 不存在任何 Virasoro类型的模子范畴 $\mathcal{D}$ ，使得 $\mathrm{ord}(T_{\mathcal{D}}) = 2$。无论是 $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_4$ 还是 $\mathcal{C}_2$， $\mathcal{C}_3$——即使对于 $\mathcal{C}$——其中都存在某个对象，其共形权不属于 $\frac{1}{2} + \mathbb{Z}$。 Frobenius-Schur 指数为 2 的模张量范畴已在 [21] 中分类为带尖点模张量范畴的 Deligne积。而带尖点模张量范畴在 [20, 6]中实现。

我们已经确定了 $\mathcal{C}_{p,q}$ 的所有模张量子范畴。回顾 [4], 中的结果，每个这样的模张量范畴 $\mathcal{D}$ 都会导出模群 $\mathrm{SL}_2(\mathbb{Z})$ 的一个射影表示$\bar{\rho}$，其 Frobenius-Schur 指数 $\mathrm{FSexp}(\mathcal{D}) = \mathrm{ord}(\bar{\rho}(T))$，并且 $\bar{\rho}$ 存在一个提升，其核是层级为 $n := \mathrm{ord}(\rho(T))$ 的同余子群。然而，由于这些模张量子范畴并非某个顶点算子代数的模范畴，我们无法获得有关顶点算子代数模不变性的相关结果。

若 $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \boxtimes \mathcal{D}_2$，且对于任意简单对象 $Z \in \mathcal{C}$，存在简单对象 $X \in \mathcal{D}_1$， $Y \in \mathcal{D}_2$，使得 $Z = X \boxtimes Y$，则有 $\theta_Z = \theta_{X\boxtimes Y} = \theta_X \cdot \theta_Y$。Deligne

积 $\mathcal{C}_{p,\ q}$ 在我们的讨论中恰好满足上述条件，因此有如下结果。

注 2.9. $\mathcal{C}_p$的 Frobenius-Schur 指数$_q$ 等于其 Deligne积分解中所有子范畴的 Frobenius-Schur 指数的最小公倍数。

3. 非退化性的另一种方法

本节将采用一种更具范畴论意味的方法来证明定理 2.4 和 2.5。众所周知，预模张量范畴 $\mathcal{C}$ 是模的，当且仅当其 Müger 中心为 $\mathcal{C}' =< \mathbf{1} >$。根据定义，如果 $X \in \mathcal{C}$ 属于 $\mathcal{C}'$，那么对任意$Y \in \mathcal{C}$,

$$\beta_{Y,X} \circ \beta_{X,Y} = id_{X\otimes Y}.$$

在不滥用记号的情况下，我们用 θ_X 表示与涉及简单对象 X的同构相关联的常数。根据平衡方程

$$\theta_{X\otimes Y} = (\theta_X \otimes \theta_Y) \circ \beta_{Y,X} \circ \beta_{X,Y}.$$

因此，若 $X \in \mathcal{C}'$，则对任意 $Y \in \mathcal{C}$，可得

$$\theta_{X\otimes Y} = \theta_X \cdot \theta_Y \cdot id_{X\otimes Y}.$$

由 $\mathcal{C}$的半单性可知

$$\begin{aligned} \theta_{X\otimes Y} &= \sum_{Z\in X\otimes Y} \theta_Z \cdot i_Z p_Z, \\ id_{X\otimes Y} &= \sum_{Z\in X\otimes Y} i_Z p_Z. \end{aligned}$$

因此，我们可以得出以下判据。

引理 3.1. 如果 $X \in \mathcal{C}$ 包含于 $\mathcal{C}$的 *Müger* 中心中，那么对于任意 $Y \in \mathcal{C}$，以下结论成立：

$$\theta_Z = \theta_X \cdot \theta_Y$$

对于 $X \otimes Y$的任意直和项 Z。

推论 3.2. 如果存在 $X\otimes Y$的直和项 Z_1、Z_2，使得 $\theta_{Z_1} \neq \theta_{Z_2}$，那么 X 和 Y 都不包含于 *Müger* 中心 $\mathcal{C}'$中。

上面一般范畴论中的符号 $\otimes$ 对应于本文中的符号 $\boxtimes$。对于简单流 $(1, q-1) = (p-1, 1)$, 我们有 $(1, q-1) \boxtimes (1, i) = (1, q-i)$ 或 $(p-1,1) \boxtimes (j, 1) = (p-j, 1)$。那么我们只需检查

$$\theta_{(1,q-i)} = \theta_{(1,q-1)} \cdot \theta_{(1,i)}$$

or

$$\theta_{(p-j,1)} = \theta_{(p-1,1)} \cdot \theta_{(j,1)} \tag{3.1}$$

其中 $(1, i)$ 或 $(j, 1)$ 属于相应的子范畴。

方程 (3) 成立当且仅当 $\frac{(i-1)(p-2)}{2}$ 是一个整数。这意味着，如果 i 仅取奇整数，或者 p 为偶数，那么对于固定的 p，方程 (3) 成立。因此，当 p 为奇数且 q为偶数时，可得 $(1,q-1)\notin\mathcal{C}_1'$ 且 $(1,q-1)\in\mathcal{C}_2'$；当 p为偶数且 q为奇数时，可得 $(1,q-1)\in\mathcal{C}_1'$，但不属于 $\mathcal{C}_2'$；当 p和 q均为奇数时，可得 $(1,q-1)$既不包含于 $\mathcal{C}_1'$，也不包含于 $\mathcal{C}_2'$。

类似地，要使 (3.1) 成立，必须满足 j 仅取奇数值，或 q 为偶数。因此，当 p 为偶数且 q 为奇数时，可得 $(p-1,1)\notin\mathcal{C}_3'$ 且 $(p-1,1)\notin\mathcal{C}_4'$；当 p为奇数且 q 为偶数时，可得 $(p-1,1)\in\mathcal{C}_3'$，但不在 $\mathcal{C}_4'$中；当 p 和 q 均为奇数时，可得 $(p-1,1)$既不包含于 $\mathcal{C}_3'$，也不包含于 $\mathcal{C}_4'$。

在子范畴 $\mathcal{C}_1$ 或 $\mathcal{C}_2$中，如果 $(1,i)\in\mathcal{C}_1'$ 或 $\mathcal{C}_2'$，且 $i\neq1,q-1$，那么对于任意 $(1,j)\in\mathcal{C}_1$ 或 $\mathcal{C}_2$,

$$\theta_{(1,l)}=\theta_{(1,i)}\cdot\theta_{(1,j)},$$

其中 $(1,l)$ 遍历 $(1,i)\boxtimes(1,j)$ 的各个直和项。当取 $j=i$时，$(1,1)$ 和 $(1,3)$ 均包含于 $(1,i)\boxtimes(1,i)$ 中。但是 $\theta_{(1,1)}=1,\theta_{(1,3)}=\exp(2\pi i\frac{2p}{q})$。根据推论 3.2，我们得出 $(1,i)$ 不包含于 Müger 中心 $\mathcal{C}_1'$ 或 $\mathcal{C}_2'$。在子范畴 $\mathcal{C}_3$ 或 $\mathcal{C}_4$中，我们同样观察到，不存在属于 Müger 中心且满足 $j\neq1,p-1$ 的 $(j,1)$。

在子范畴 $\mathcal{C}_5$中，我们只需检查

$$\theta_{(1,q-1)\boxtimes(1,q-1)}=\theta_{(1,q-1)}^2,$$

也就是说，检查 $2h_{1,\ q-1}$ 是否为整数。由于 $h_{1,\ q-1}=\frac{(p-2)(q-2)}{4}$，可知 Müger 中心 $\mathcal{C}_5'$ 平凡，当且仅当 p 和 q 都是奇数；否则非平凡。

在子范畴 $\mathcal{C}_6$中，对任意 p，q 以及任意 $(i,\ j)\in\mathcal{C}_6$，若 $(i,\ j)$ 与简单流不同构，则 $(1,\ 3)$ 和 $(3,\ 1)$ 均包含在 $(i,\ j)\boxtimes(i,\ j)$ 中，并且$\theta_{(1,3)}=\exp(2\pi i\frac{2p}{q})\neq\exp(2\pi i\frac{2q}{p})=\theta_{(3,1)}$，因为 $\overline{p}$ 和 q 互素。因此，这些对象不包含在 Müger 中心 $\mathcal{C}_6'$ 中。简单流不包含在 $\mathcal{C}_6$ 中，当且仅当 p 和 q 都是奇数；否则，它属于 $\mathcal{C}_6$。此外，如果简单流包含在 $\mathcal{C}_6$中，那么根据方程

$$\theta_{(p-i,j)}=\theta_{(p-1,1)}\cdot\theta_{(i,j)},$$

它必须属于 Müger 中心 $\mathcal{C}_6'$。

根据上述讨论，我们可以得出结论：当 p 为奇数且 q 为偶数时，只有 Müger 中心 $\mathcal{C}_1'$ 和 $\mathcal{C}_4'$ 是平凡的；当 p 为偶数且 q 为奇数时，只有 Müger 中心 $\mathcal{C}_2'$ 和 $\mathcal{C}_3'$ 是平凡的；当 p 和 q 都为奇数时，对于 $i\in\{1,2,3,4,5,6\}$，Müger 中心 $\mathcal{C}_i'$ 均为平凡的。因此，我们得到了定理 2.4 和 2.5 的另一种证明。

4. 简单流扩张 $\mathcal{C}_p$ 的模张量子范畴

对任意 $p\geq2$，令 $q=p+1$, $L(c_{p,\ p+1},\ 0)$ 为酉 Virasoro 顶点算子代数。本节将考察其简单流扩张的模范畴。文献 [14] 已对其简单流扩张的性质进行了深入研究：当 $p\equiv1,\ 2\ (\mathrm{mod}\ 4)$ 时，V-模 $V_p=(1,\ 1)\oplus(1,\ p)$ 具有顶点算子代数结构，其中 $(1,\ 1)$ 是顶点算子代数 V，而 $(1,\ p)$ 是 V 的一个简单流。记 V_p 的模范畴为 $\mathcal{C}_p$；根据 [12]，它仍具有模张量范畴结构。我们的目标是找出 $\mathcal{C}_p$ 的子范畴。

同样由 [14], 可知，对于 $p \equiv 1 \pmod 4$， $\mathcal{C}_p$ 的简单对象为 $N_{r,\ s} = (r,s) \oplus (r, p+1-s)$、$(r, \frac{p+1}{2})^+$ 以及 $(r, \frac{p+1}{2})^-$，其中 (r,s)、$(r,p+1-s) \in \mathcal{C}_{p,\ p+1}$ 满足 $1 \le r,\ s \le \frac{p-1}{2}$，且 s 为奇数。对于 $p \equiv 2 \pmod 4$， $\mathcal{C}_p$ 的简单对象为 $N_{r,\ s} = (r,s) \oplus (p-r,s)$、$(\frac{p}{2}, s)^+$ 以及 $(\frac{p}{2}, s)^-$，其中 (r,s)、$(p-r,s) \in \mathcal{C}_{p,\ p+1}$ 满足 $1 \le s \le \frac{p}{2}$、$1 \le r < \frac{p}{2}$，且 r 为奇数。文中也确定了所有简单对象的融合规则。

命题 4.1。 $\mathcal{C}_p$ 的非平凡预模子范畴只有两个，分别对应于 $p \equiv 1$、2（模 4）、 $p \ge 5$ 和 $p \ne 9$、10。

证明。 由于范畴 $\mathcal{C}_p$ 是模张量范畴，我们也利用融合规则来研究融合张量积的封闭性。类比命题 2.1，我们同样找到了水平子范畴和垂直子范畴。

对于 $p \equiv 1$ （模 4），水平子范畴或垂直子范畴只包含 $N_{1,\ s}$，$(1,\ \frac{p+1}{2})^{\pm}$ 或 $N_{r,\ 1}$。将 $\mathcal{D}$ 记作可能的水平子范畴，并令 $p = 4k+1$。

若 k 为奇数，则 $\big((1,\ \frac{p+1}{2})^{\pm}\big)^* = (1,\ \frac{p+1}{2})^{\mp}$，由此可得

$$\begin{aligned}
(1, \frac{p+1}{2})^+ \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^+ &= N_{1,3} \oplus N_{1,7} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-4} \oplus (1, \frac{p+1}{2})^-, \\
(1, \frac{p+1}{2})^+ \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^- &= N_{1,1} \oplus N_{1,5} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-2}, \\
(1, \frac{p+1}{2})^- \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^- &= N_{1,3} \oplus N_{1,7} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-4} \oplus (1, \frac{p+1}{2})^+.
\end{aligned}$$

若 $N_{1,\ 3} \in \mathcal{D}$，则可得到 $N_{1,\ 5} \in \mathcal{D}$，因为 $N_{1,\ 5}$ 是 $N_{1,\ 3} \boxtimes N_{1,\ 3}$的一个直和项。利用 $N_{1,\ n} \in N_{1,\ 3} \boxtimes N_{1,\ n-2}$ 这一事实，可知任意 $N_{1,\ n}$ 都属于 $\widetilde{\mathcal{D}}$，其中 $5 \le n < \frac{p+1}{2}$ 和 n 为奇数。此外，$(1,\ \frac{p+1}{2})^{\pm} \in \underline{N_{1,\ 3}} \boxtimes N_{1,\ \frac{p-3}{2}}$。因此，我们得到

$$\widetilde{\mathcal{C}_1} = \{N_{1,1}, N_{1,3}, \ldots, N_{1, \frac{p-3}{2}}, (1, \frac{p+1}{2})^{\pm}\}.$$

若 $N_{1,s} \in \widetilde{\mathcal{D}}$,$N_{1,3} \notin \widetilde{\mathcal{D}}$ 且 $3 < s < \frac{p+1}{2}$ 与 s 为奇数，则可得 $N_{1,3}$ 是 $N_{1,s} \boxtimes N_{1,s}$ 的一个直和项，这与假设矛盾。若只有 $(1, \frac{p+1}{2})^+$ 或 $(1, \frac{p+1}{2})^-$ 属于 $\widetilde{\mathcal{D}}$，也可由上述融合规则得到 $N_{1,3} \in \mathcal{D}$。因此， $\mathcal{C}_p$只有一个非平凡的水平子范畴。

若 k 为偶数，则 $\big((1, \frac{p+1}{2})^{\pm}\big)^* = (1, \frac{p+1}{2})^{\pm}$，由此可得

$$\begin{aligned}
(1, \frac{p+1}{2})^+ \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^+ &= N_{1,1} \oplus N_{1,5} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-4} \oplus (1, \frac{p+1}{2})^+, \\
(1, \frac{p+1}{2})^+ \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^- &= N_{1,3} \oplus N_{1,7} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-2}, \\
(1, \frac{p+1}{2})^- \boxtimes (1, \frac{p+1}{2})^- &= N_{1,1} \oplus N_{1,5} \oplus \cdots \oplus N_{1, \frac{p+1}{2}-4} \oplus (1, \frac{p+1}{2})^-.
\end{aligned}$$

那么，当 k 为奇数时，情况类似，除 $p = 9$ 外仅有一个水平子范畴。当 $p = 9$ 时，根据上述融合规则，我们得到

$$\begin{aligned}
(1,5)^+ \boxtimes (1,5)^+ &= N_{1,1} \oplus (1,5)^+, \\
(1,5)^+ \boxtimes (1,5)^- &= N_{1,3}, \\
(1,5)^- \boxtimes (1,5)^- &= N_{1,1} \oplus (1,5)^-.
\end{aligned}$$

有三个非平凡的水平子范畴$\{N_{1,1}, (1, 5)^-\}$。垂直子范畴的情况与水平子范畴略有不同。显然，

$$\widetilde{\mathcal{C}}_2 = \{N_{1,1}, N_{2,1}, \ldots, N_{\frac{p-1}{2},1}\}$$

是 $\mathcal{C}_p$的非平凡子范畴。

将 $\mathcal{D}$ 记为 $\mathcal{C}_p$的另一个可能的垂直子范畴。若 $N_{2,\,1} \notin \mathcal{D}$ 且 $N_{3,\,1} \in \mathcal{D}$，则得到 $N_{5,\,1} \in \mathcal{D}$，因为 $N_{5,\,1}$ 是 $N_{3,\,1} \boxtimes N_{3,\,1}$的一个直和项。重复这一过程，似乎可以得到一个新的垂直子范畴，它类似于命题 2。1 中的垂直子范畴。若 $N_{m,\,1} \in \mathcal{D}$为奇数且 $m \geq \frac{p+3}{4}$，则可得

$$(m,1) \boxtimes (m,1) = (1,1) \oplus (3,1) \oplus \cdots \oplus (2m-1,1),$$

根据 $\mathcal{C}_{p,\,p+1}$的融合规则。但由于 $2m-1 > \frac{p-1}{2}$与关于 $\mathcal{C}_p$中对象的假设相矛盾，我们应将变换 σ 添加到 $(2m-1,\ 1)$:

$$\sigma(2m-1,1) = (p+1-2m, p).$$

并且 $N_{p+1-2m,\,1} = (p+1-2m,\ 1) \oplus (p+1-2m,\ p)$。由 $\mathcal{C}_p$的融合规则可得，$N_{p+1-2m,\,1} \in N_{m,\,1} \boxtimes N_{m,\,1}$，其中 $p+1-2m$ 为偶数。于是我们可以得出，所有偶数项 $N_{even,\,1}$ 都属于 $\mathcal{D}$。因此，只有一个非平凡的垂直子范畴，并且除 $p = 9$外，$\mathcal{C}_p$ 只有两个非平凡子范畴。

对于 $p \equiv 2 \pmod 4$，令 $p = 4k+2$。无论 k 是奇数还是偶数，除非 $p = 10$，都只有一个非平凡的水平或垂直子范畴:

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathcal{C}}_1 &= \{N_{1,1}, N_{1,2}, \ldots, N_{1,\frac{p}{2}}\}, \\ \widetilde{\mathcal{C}}_2 &= \{N_{1,1}, N_{3,1}, \ldots, N_{\frac{p-4}{2},1}, (\frac{p}{2}, 1)^{\pm}\}. \end{aligned}$$

因此，除 $p = 10$外，$\mathcal{C}_p$ 只有两个非平凡子范畴。 □

注 4.2。 </style}当，10 时，$\mathcal{C}_p$ 有六个非平凡子范畴。

当 $p = 9$ 时，令 $\mathcal{C}_3 = \{N_{1,1}, (1,\ 5)^+\}$ 和 $\mathcal{C}_4 = \{N_{1,1}, (1,\ 5)^-\}$。然后我们使用 $\mathcal{C}_3$，$\mathcal{C}_4$ 和 $\mathcal{C}_2$ 来生成其他子范畴。因此，$\mathcal{C}_5 = (\mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_3)$ 和 $\mathcal{C}_6 = (\mathcal{C}_2,\ \mathcal{C}_4)$。

当 $p = 10$ 时，令 $\mathcal{C}_3 = \{N_{1,1}, (5,\ 1)^+\}$ 和 $\mathcal{C}_4 = \{N_{1,1}, (5,\ 1)^-\}$。然后我们使用 $\mathcal{C}_3$，$\mathcal{C}_4$ 和 $\mathcal{C}_1$ 来生成其他子范畴。因此，$\mathcal{C}_5 = (\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_3)$ 和 $\mathcal{C}_6 = (\mathcal{C}_1,\ \mathcal{C}_4)$。

定理 4.3。对于 $p \equiv 1$，模 4 余 2，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是模张量范畴。此外，$\mathcal{C}_i$ 在 $i = 3$、4、5、6 时是模张量范畴，其中 $p = 9,\ 10$。

证明。显然，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是预模的。为了证明 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是模张量范畴，只需证明 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是非退化的。

对于 $p = 4k+1$（模 4），$\mathcal{C}_1 = \{N_{1,1}, \ldots, N_{1,\frac{p}{2}}\}$。其中任意范畴 $N_{1,\,j} \in \mathcal{C}_1$、$N_{1,\,1}$ 以及 $N_{1,\,3}$ 都是 $N_{1,\,j} \boxtimes N_{1,\,j}$的直和项。由于 $\theta_{N_{1,\,1}} \neq \theta_{N_{1,\,3}}$，由推论 3.2 可知，$N_{1,\,j}$ 不包含于 $\mathcal{C}_1$的 Müger 中心。由 $N_{1,\,j}$的任意性，我们推得 $\mathcal{C}_1$ 是非退化的。

与 $\mathcal{C}_2$中的情况类似于 $\mathcal{C}_1$中的情况，区别在于对象 $(\frac{p}{2},\ 1)^+$ 和 $(\frac{p}{2},\ 1)^-$。令 $p = 4k+2$。如果 k 为奇数，那么 $N_{1,\,1}$ 和 $N_{5,\,1}$ 属于 $(\frac{p}{2},\ 1)^+ \boxtimes (\frac{p}{2},\ 1)^-$。对于 $p > 6$，由于

θ_{N_1}，$_1 = 1 \neq \exp(2\pi i \frac{6}{p}) = \theta_{N_5}$,1，$(\frac{p}{2}, 1)^+$和$(\frac{p}{2}, 1)^-$均不包含在 $\mathcal{C}_2$的 Müger 中心 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$中。当 $p = 6$时，$\mathcal{C}_2 = \{N_{1,1}, (3,1)^+, (3,1)^-\}$。由此可得$(3,1)^+ \boxtimes (3,1)^- = N_1$,1，以及 $\theta_{(3,1)^+}\theta_{(3,1)^-} = \exp(\frac{4\pi i}{3}) \neq 1 = \theta_{N_1}$,1。因此，$\widetilde{\mathcal{C}_2}$也是非退化的。如果 k为偶数，N_1,1和N_5,1属于$(\frac{p}{2}, 1)^\pm \boxtimes (\frac{p}{2}, 1)^\pm$。这与上文$\widetilde{\quad}$中的情况完全一致；因此，无论 k 为奇数还是偶数，$\mathcal{C}_2$ 都是非退化的。

$p \equiv 1$（模4）的情形与 $p \equiv 2$（模4）的情形类似。因此，$\widetilde{\quad}$ $\mathcal{C}_1$ 和$\widetilde{\quad}\mathcal{C}_2$在 $p \equiv 1$、2（模4）时是非退化的。至于 $p = 9$、10，我们也可以利用推论$\widetilde{\quad}$3。2证明 $\mathcal{C}_i$ 与 $i = 3$、4、5、6是非退化的。 □

$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$**注4.4**。当 $p \equiv 1$、2（模4）时，$\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 是模张量范畴。存在 $\mathcal{C}_1$ 和 $\mathcal{C}_2$ 分别到 $\mathcal{C}_p$中的嵌入。此外，由此还可知，$\mathcal{C}_2$ 是 $\mathcal{C}_p$中 $\mathcal{C}_1$ 的 $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$中心化子。根据 [2, 19], ，范畴 $\mathcal{C}_p$ 同构于 Deligne的$\widetilde{\quad}$ $\widetilde{\quad}$积 $\mathcal{C}_1 \boxtimes \mathcal{C}_2$。

5. 应用

回顾 [16] 和 [1]中提到的镜像扩张。设 $\mathcal{D}_1$ 和 $\mathcal{D}_2$ 是两个有理、C_2-余有限且自对偶的顶点算子代数的模（子）范畴，并设函子 $\mathcal{F}: \mathcal{D}_1 \to \mathcal{D}_2$ 是一个反编织等价。存在顶点算子代数 $1_{\mathcal{D}_1} \boxtimes 1_{\mathcal{D}_2}$ 在 Deligne积 $\mathcal{C} = \mathcal{D}_1 \boxtimes \mathcal{D}_2$中的一个扩张 A，且 A 的分解形式为

$$A = \sum_{X \in Irr(\mathcal{D}_1)} X \boxtimes \mathcal{F}(X)',$$

其中 X 遍历范畴 $\mathcal{D}_1$中的所有简单对象。

在前文中，我们已经确定了 $\mathcal{C}_{p,\ p+1}$ 的所有子范畴，并且可以给出任意秩的模子范畴（见注记2.7）。由于这类子范畴中的所有简单对象都是自对偶的，自然会产生这样的问题：如果两个模子范畴具有相同的秩和融合规则，我们能否通过它们简单对象之间的对应关系，在这两个子范畴之间建立反编织等价，并进一步在这两个子范畴的 Deligne积中实现前述镜像扩张?

与此同时，在固定满足给定条件的两个子范畴后，要使所构造的对象 A 成为顶点算子代数的扩张，它还必须满足以下必要条件：$\theta_A = \mathrm{id}_A$，也就是说，对于任意简单对象 $X \in \mathcal{D}_1$，方程

$$\theta_{X \boxtimes \mathcal{F}(X)'} = \theta_X \cdot \theta_{\mathcal{F}(X)} = \mathrm{id}_{X \boxtimes \mathcal{F}(X)'}$$

成立。根据扭结的定义，该方程等价于：$h_X + h_{\mathcal{F}(X)} \in \mathbb{Z}$ 对于任意简单对象 $X \in \mathcal{D}_1$。

因此，在“粘合”代数后，我们可以首先依据给定条件对其进行筛选。另一方面，根据 [9], GKO 构造中顶点算子代数扩张的分解，所有涉及的简单直和项都是 Virasoro 顶点算子代数的模，我们可以利用 GKO 构造的交换子来验证以这种方式得到的代数是否确实是一个顶点算子代数。

现在我们给出几个具体的例子。

例5.1。 $\mathcal{C}_4$的模子范畴为，5

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= \{(1,1),(1,3)\},\\ \mathcal{C}_3 &= \{(1,1),(2,1),(3,1)\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_{5,\ 6}$ 的模子范畴为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5)\},\\ \mathcal{C}_4 &= \{(1,1),(3,1)\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_{6,\ 7}$ 的模子范畴为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_2 &= \{(1,1),(1,3),(1,5)\},\\ \mathcal{C}_3 &= \{(1,1),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1)\}.\end{aligned}$$

$\mathcal{C}_{7,\ 8}$ 的模子范畴为

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_1 &= \{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(1,7)\},\\ \mathcal{C}_4 &= \{(1,1),(3,1),(5,1)\}.\end{aligned}$$

(1) $\mathcal{C}_{4,\ 5}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_2$ 与$\mathcal{C}_{5,\ 6}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_4$ 具有相同的秩和融合规则，因此我们有

$$A = h_{1,1}^{4,5} \boxtimes h_{1,1}^{5,6} \oplus h_{1,3}^{4,5} \boxtimes h_{3,1}^{5,6},$$

其中 $h^{4,\ 5\,1,\ 1} + h^{5,\ 6\,1,\ 1} = 0$, $h^{4,\ 5\,1,\ 3} + h^{5,\ 6\,3,\ 1} = 2$。 A 是一个出现在 $\mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(1,0)^{\otimes 4}$ 的 *GKO* 构造中的顶点算子代数。

(2) $\mathcal{C}_{5,\ 6}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_1$ 与$\mathcal{C}_{6,\ 7}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_3$ 具有相同的秩和融合规则，因此我们有

$$A = h_{1,1}^{5,6} \boxtimes h_{1,1}^{6,7} \oplus h_{1,2}^{5,6} \boxtimes h_{2,1}^{6,7} \oplus h_{1,3}^{5,6} \boxtimes h_{3,1}^{6,7} \oplus h_{1,4}^{5,6} \boxtimes h_{4,1}^{6,7} \oplus h_{1,5}^{5,6} \boxtimes h_{5,1}^{6,7},$$

其中 $h^{5,6\,1,1} + h^{6,7\,1,1} = 0$, $h^{5,6\,1,2} + h^{6,7\,2,1} = \frac{1}{2}$, $h^{5,6\,1,3} + h^{6,7\,3,1} = 2$, $h^{5,6\,1,4} + h^{6,7\,4,1} = \frac{9}{2}$, $h^{5,6\,1,5} + h^{6,7\,5,1} = 8$。因此，由于其中一些和不是整数， A 不是顶点算子代数。

(3) $\mathcal{C}_{6,7}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_2$ 与$\mathcal{C}_{7,8}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_4$ 具有相同的秩和融合规则，因此我们有

$$A = h_{1,1}^{6,7} \boxtimes h_{1,1}^{7,8} \oplus h_{1,3}^{6,7} \boxtimes h_{3,1}^{7,8} \oplus h_{1,5}^{6,7} \boxtimes h_{5,1}^{7,8},$$

其中 $h^{6,7\,1,1} + h^{7,8\,1,1} = 0$, $h^{6,7\,1,3} + h^{7,8\,3,1} = 2$, $h^{6,7\,1,5} + h^{7,8\,5,1} = 8$。$A$ 是 *GKO* 构造中出现的顶点算子代数，对应于 $\mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(1,\ 0)^{\otimes 6}$。

由 [9] 和 [13], 可得

$$\mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(1,0)^{\otimes(n+1)} = \sum_{0\le 2k\le n+1} \mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(n+1,2k) \otimes M^{(n)}(2k),$$

其中 $M^{(n)}(2k) = \oplus_{0\le 2l\le n} M^{(n-1)}(2l) \otimes L(c_{n+2,\ n+3},\ h_{2l+1,\ 2k+1})$, $M^{(0)}(0) = \mathbb{C}$, 且 k是一个非负整数。此外，空间 $M^{(n-1)}(0) \otimes L(c_{n+2,\ n+3},\ 0)$ 是一个完全顶点

算子子代数 $M^{(n)}(0)$。于是我们有

$$\begin{aligned} M^{(n)}(0) &= \mathrm{Com}_{\mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(1,0)^{\otimes(n+1)}}(\mathcal{L}_{\widehat{sl_2}}(n+1,0)) \\ &= \bigoplus_{0\le 2l\le n}\left[\bigoplus_{0\le 2t\le n-1} M^{(n-2)}(2t)\otimes L(c_{n+1,n+2},h_{2t+1,2l+1})\right]\otimes L(c_{n+2,n+3},h_{2t+1,1}) \\ &= \bigoplus_{0\le 2t\le n-1} M^{(n-2)}(2t)\otimes\left[\bigoplus_{0\le 2l\le n} L(c_{n+1,n+2},h_{2t+1,2l+1})\otimes L(c_{n+2,n+3},h_{2t+1,1})\right], \end{aligned}$$

其中，$\mathrm{Com}_V(U)$ 表示 V 中 U 的交换子顶点算子代数。

这意味着 $M^{(n)}(0)$ 有一个完全顶点算子子代数 $\bigoplus_{0\le 2t\le n-1} M^{(n-2)}(2t)\otimes L(c_{n+2,n+3},h_{2l+1,1})$，并且 $\widetilde{N}^{(n)}$ 也有一个顶点算子子代数 $N^{(n)}:=\oplus_{0\le 2l\le n}L(c_{n+1,n+2},h_{1,2l+1})\otimes L(c_{n+2,n+3},h_{2l+1,1})$。根据 [16] 和 [17],，我们知道 $\{L(c_{n+1,n+2},h_{1,2l+1})|0\le 2l\le n\}$ 和 $L(c_{n+2,n+3},h_{2l+1,1})|0\le 2l\le n$ 是对应范畴的子范畴。

上述子范畴中的第一个是 $\mathcal{C}_{n+1,n+2}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_2$，第二个是 $\mathcal{C}_{n+2,n+3}$ 的子范畴 $\mathcal{C}_4$；具体而言，当 $p=n+2$ 为奇数时，这些子范畴是非退化的；当 $p=n+2$ 为偶数时，这些子范畴是退化的。

注 5.1。顶点算子代数不仅可以通过“粘合”两个模张量子范畴得到，也可以通过“粘合”两个预模子范畴得到。

因此，我们可以基于上述子范畴所推导出的结果，给出一系列交换子顶点算子代数的例子。

注 5.2。关于扩张的初步研究进展，包括仿射顶点算子代数 $\mathcal{L}_{\widehat{\mathfrak{sl}_n}}(k,0)$ 在任意层级 k 下、对整数 $n\ge 2$ 而言的预模和模张量子范畴，以及副费米子顶点算子代数 $K(\mathfrak{sl}_n,k)$ 的模范畴中的相应子范畴，将与结果的完整证明一并在即将发表的论文中详细介绍。

致谢

Y. Xiao 获得国家自然科学基金（编号：12401034）和山东省自然科学基金（编号：ZR2023QA066）的资助。W. Zheng 获得国家自然科学基金（编号：12201334）和山东省自然科学基金（编号：ZR2022QA023）的资助。

参考文献

[1] T. Creutzig, S. Kanade, R. McRae, 顶点代数的粘合，《数学进展》，**396** (2022), 108174.[2] A. Davylov, M. Müger, D. Nikshych, V.Ostrik，非退化辫融合范畴的 Witt 群，《纯粹与应用数学杂志》，**677** (2013), 135-177.[3] C. Dong, X. Jiao, F. Xu, 量子维数与量子伽罗瓦理论，《美国数学会汇刊》，**365** (2013), 6441-6469.[4] C. Dong, X. Lin, S. Ng，共形场论中的同余性质，Algebra Num- ber Theory，**9** (2015), 2121-2166.

[5] C. Dong, G. Mason, Y. Zhu，Virasoro 代数的离散级数与月光模，Proc. Symp. Pure. Math. Amer. Math. Soc., 56 II (1994), 295–316.[6] C. Dong, S. Ng, L. Ren，轨形与极小模扩张，《数学进展》，462 (2025), 110103, 43pp.[7] P. Etingof, S. Gelaki, D. Nikshych, V. Ostrik，张量范畴，Mathematical Surveys and Monographs, vol. 205，美国数学会，普罗维登斯，RI, 2015.[8] I. Frenkel, J. Lepowsky, A. Meurman，顶点算子代数与怪兽群，Pure and Applied Mathematics, vol. 134, Academic Press, Inc., 波士顿, 1988.[9] P. Goddard, A. Kent, D. Olive，Virasoro 代数和超 Virasoro 代数的酉表示，Commun. Math. Phys., 103 (1986), 105–119.[10] Y. Huang，顶点算子代数与 Verlinde 猜想，Commun. Contemp. Math., 10 (2008), 103–154.[11] Y. Huang，顶点算子代数的刚性与模性，Commun. Contemp. Math., 10 (2008), 871–911.[12] Y. Huang, A. Kirillov, J. Lepowsky，编织张量范畴与顶点算子代数的扩张，Comm. Math. Phys., 337 (2015), 1143–1159.[13] C. Jiang, Z. Lin，顶点算子代数 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(1,0)^{\otimes n}$ 中 $L_{\widehat{\mathfrak{sl}_2}}(n,0)$ 的交换子，《数学进展》，301 (2016), 227–257.[14] H. Lam, N. Lam, H. Yamauchi, 单模对酉 Virasoro 顶点算子代数的扩张，Internat. Math. Res. Notices, 11 (2003), 577-611.[15] J. Lepowsky, H. Li，顶点算子代数及其表示导论，Progr. Math. 227, Birhauser Boston, Inc., 波士顿，MA, 2004.[16] X. Lin，有理顶点算子代数的镜像扩张，《美国数学会汇刊》，369 (2016), 3821–3840.[17] R. McRae，余集顶点算子代数的一般镜像等价定理，Sci. China Math., 67 (2024), 2237–2282.[18] G. Moore, N. Seiberg，有理共形场论的多项式方程，Phys. Lett. B, 212 (1988), 451-460.[19] M. Müger，模范畴的结构，Proc. Lond. Math. Soc., 87 (2003), 291-308.[20] V. Nikulin，整对称双线性型及其若干应用，Math. USSR, Izv., 14 (1980), 103–167.[21] Z. Wan, Y. Wang，Frobenius-Schur 指数为 2 的球融合范畴分类，Algebra Colloq., 28 (2021), 39-50.[22] W. Wang，Virasoro 顶点算子代数的有理性，Internet. Math. Res. Notices, 7 (1993), 197-211.[23] Y. Zhu，顶点算子代数特征标的模不变性，《美国数学会杂志》9 (1996), 237-302.