arXiv:2512.24025v1 [math.AT] 30 Dec 2025

带边界条件的滤过余跨度与层间持久性

MICHAEL USHER

摘要。我们提出“滤过余跨”的概念，将其作为一种代数对象，使之与层间持久模的关系，类似于滤过链复形与子水平集持久模之间的关系。这种关系通过一个函子来表达：该函子从滤过余跨范畴映射到持久模范畴，而这些持久模源自 Bauer-Botnan-Fluhr 对相对层间集同调的研究。对于 Morse 函数 $f\colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$，满足 $\partial\mathbb{X}$ 是正则水平集 $f^{-1}(\{\pm\Lambda\})$ 的并集，我们为其关联一个滤过余跨；这样便能通过与 Morse 链复形相关的数据，刻画此类函数的层间持久性。我们还为单纯链复形和奇异链复形关联类似的滤过余跨，并证明了将它们彼此联系起来、并与相对层间集同调联系起来的同构定理。在适当的假设下，滤过余跨可以分解为某些标准初等直和项，由此得到一种适于计算的滤过余跨持久图概念。等距定理将滤过余跨的交错与这些持久图之间的匹配联系起来。

1. 引言

经典 Vietoris-Rips 或下水平集持久同调的标准框架，是从几何数据构造一个以 $\mathbb{R}$ 为指标的持久性模——也就是说，对所有 $t \in \mathbb{R}$，都有一族向量空间 V_t，并配有适当兼容的映射 $V_s \to V_t$，其中 $s \leq t$——然后从该持久性模中提取定量数据（以条形码或持久图的形式），从而对其进行分类。尽管诸如 [C-B15] 中的分类定理只要求存在满足适度驯性假设的持久模结构，但各种情形下可追溯至 [Ba94], [ELZ02], [ZC05] 的标准计算过程利用了这样一个事实：该持久性模通常是通过计算一个过滤链复形（或用本文的术语来说，“上升”链复形）的过滤同调而得到的。上升链复形由数据 $(C^{\uparrow *}, \partial, \ell)$ 给出，其中 $(C^{\uparrow *}, \partial)$ 是一个链复形，而 $\ell\colon \mathbb{C}_{\uparrow *} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一种记录过滤数据的特定类型的函数（见定义 1.1）。即使在实际情形中通常如此，向量空间 V_t 仅在离散的一组取值 $t \in \{t_0, \ldots, t_N\}$ 处发生变化，但通过操作单个对象 $(C^{\uparrow *}, \partial, \ell)$ 来计算持久同调，而非记录并分析完整的持久性模 $V_{t_0} \to V_{t_1} \to \cdots \to V_{t_N}$，显然会更高效；当 N 很大时，后者往往包含大量冗余信息。[ZC05] 中的标准算法印证了这一点。

对于拓扑空间 $\mathbb{X}$ 上的连续函数 $f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$，比上一段提到的子水平集持久性更精细的对象是层间持久性 [CdSM09],，它涵盖了同调群 $H_*(f^{-1}(I))$ 之间的关系，其中 I 遍历 $\mathbb{R}$ 中闭区间的偏序集。正如已经证明的

在 [CdSM09]，中，在适度的假设下，层间持久性携带的信息等价于 [CEH09] 的扩展持久性。层间持久性可以从一种持久模结构导出，而这种结构允许分解为标准的不可约直和项，并可据此导出一种持久图。对此有多种不同的观点。例如，[BEMP13] 和 [CdSM09] 用之字形模来表述层间持久性，而 [BGO19] 和 [BBF24] 则用满足与 Mayer-Vietoris 序列相对应性质的特殊类二维持久模来描述它。本文始终采用我们偏好的表述，即 [BBF24] 中优雅地构造的“相对层间集同调”，它是一种以条带为指标的特定持久模

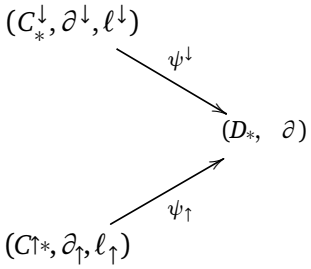
$$\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2\Lambda \le x + y \le 2\Lambda\} \tag{1.1}$$

在偏序 $\preceq$ 下，其中 $(x、y) \preceq (x'、y') \Leftrightarrow \left(x \ge x' \text{ 和 } y \le y'\right)$。这里的 Λ 是某个固定的正数，在 [BBF24] 中通常取为 $\frac{\pi}{2}$。这个单一的持久模捕获了所有相对同调 $H_k(f^{-1}(I)、f^{-1}(C))$，其中 I 是闭区间，C 是开区间的补集，且 $\in \mathbb{Z}$，并纳入了 Mayer-Vietoris 序列中连接同态的信息。

在 [BBF24] 中所考察的具体 $\mathbb{M}$-指标持久模分解为直和，其直和项是由元素 $v \in \mathbb{M} \backslash \partial \mathbb{M}$ 所指标化的“块模”B^v，从而得到一个相对层间集同调的持久图；该持久图是 $\mathbb{M} \backslash \partial \mathbb{M}$ 中元素构成的多重集。

本文引入了“滤过余跨”的概念，旨在使其与 [BBF24] 的 $\mathbb{M}$ 指标持久模之间的关系，类似于过滤链复形与更经典的 $\mathbb{R}$ 指标持久模之间的关系。滤过余跨（见定义 1.3）相当于一个图表

(1.2)



其中，$(C^{\uparrow *}, \partial_{\uparrow}, \ell_{\uparrow})$ 是一个上升链复形，$(C_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}, \ell^{\downarrow})$ 是一个下降链复形（类似于上升链复形，但采用下降滤过而非上升滤过），(D_*, ∂) 是另一个链复形，而这些映射都是链映射。滤过余跨构成一个范畴 $\mathsf{HCO}(\kappa)$（其中 κ 是这些链复形的系数域），我们希望它与滤过链复形的同伦范畴类似；与后者一样，$\mathsf{HCO}(\kappa)$是一个微分分次范畴的零次上同调范畴。为简化与 [BBF24], 之间关系的描述，限制到$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$的全子范畴较为方便，其中对象是“$\Lambda$-有界”的滤过余跨，$\Lambda$ 是式（1.1）中的参数（见定义 1.4）；从几何上看，这相当于考虑函数 $\mathbb{X} \to (-\Lambda, \Lambda)$ 而非 $\mathbb{X} \to \mathbb{R}$。我们的结果和构造包括：

（i）一个分类定理（推论 3.23），它表明任何满足适当条件的滤过余跨都可表示为若干特定标准初等直和项的直和。（ii）一个函子$H_0 \circ \mathscr{F}$，从$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$到范畴$\mathsf{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}$，该范畴由 $\mathbb{M}$-指标持久模构成；此函子将（i）中的标准初等直和项集合双射到 [BBF24], 中的块模B^{ν}集合，其中ν遍历 $\mathbb{M}\setminus \partial\mathbb{M}$。（见第 6.4 节和命题 6.8。）（iii）一个等距定理（定理 1.10），它将对象 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$（属于$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$）之间适当定义的交错距离，等同于它们的 $\mathbb{M}$-指标持久模$H_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{C})$和$H_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{X})$的持久图之间适当定义的瓶颈距离。

给定与滤过余跨 $\mathscr{C}$ 相关的、如 (1.2) 所示的代数数据，第 3.3 节以相当具体的方式说明了如何确定 (i) 中的分解。虽然我们将系统地描述一种特别高效的算法这一问题留待今后研究（包括作者的学生 Cameron Thomas 正在进行的研究），但第 3.3 节中的描述应能清楚表明，这一目标可以通过一系列基于高斯消元的方法来实现；这类方法与经典持久性算法（例如 [ZC05], 中的算法）所采用的方法相似，并辅以复杂度相当或更低的中间步骤。第 5 节给出了若干计算该分解的示例。正如子水平集持久性通常以过滤链复形作为输入，而非以其过滤同调群上的包含诱导映射序列所定义的持久性模作为输入一样，我们的滤过余跨旨在为层间持久性的计算提供比之字形模或以 $\mathbb{M}$ 为指标的持久性模更高效的输入。

若 $\mathbb{X}$ 是一个单纯复形的几何实现，且f 是定义在 $\mathbb{X}$ 上、取值于 $(-\Lambda, \Lambda)$的逐单形线性函数，那么例 1.8 的一个特例将f与一个滤过余跨关联起来，其中三个链复形 $(C^{\uparrow}_{*}、\ \partial_{\uparrow})$、$(C^{\downarrow}_{*}、\ \partial^{\downarrow})$、$(D_{*}、\ \partial)$都等于 $\mathbb{X}$的单纯链复形，并且 (1.2) 中的链映射 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 是恒等映射。在这一代数情形下，滤过余跨的分解可以使用 CEH09 第 6]节中的算法计算。不过，我们也会考虑这样的情形：(1.2) 中的链复形彼此不同，且映射 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 在同调上不诱导同构。这些情形似乎稍微超出了扩展持久性的适用范围；相应地，它们的分解中包含了该背景下不会出现的某类直和项。我们现在讨论这类情形的由来。

1.1. 带边界条件的层间持久性。 我们研究的一般动机对象是一个连续函数 $f: \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$，其中 $\Lambda > 0$。拓扑空间$\mathbb{X}$（通常假设为紧致空间）、参数 Λ以及集合 $\partial^{-}\mathbb{X} := f^{-1}(\{-\Lambda\})$ 和$\partial^{+}\mathbb{X} := f^{-1}(\{\Lambda\})$ 都应视为背景输入（在选择f之前给定）；因此，当f 被视为变量时（例如在稳定性定理中），其变化应限于满足边界条件$f|_{\partial^{-}\mathbb{X}} = -\Lambda$和$f|_{\partial^{+}\mathbb{X}} = \Lambda$ 的函数类，其中预先指定的子集 $\partial^{\pm}\mathbb{X}$ 属于 $\mathbb{X}$。$\partial^{-}\mathbb{X}$ 和/或$\partial^{+}\mathbb{X}$ 为空完全无妨；若二者皆为空，则我们研究的是函数$f: \mathbb{X} \to (-\Lambda, \Lambda)$,

这等价于研究函数 $\varphi^{-1}\circ f\colon \mathbb{X}\to\mathbb{R}$，其中 φ 是读者所偏好的同胚 $\mathbb{R}\to(-\Lambda,\Lambda)$。

在例 1.7 中，我们将“钉扎奇异过滤余跨图” $\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa)$与上述函数 $f\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$ 相关联。（“钉扎”一词旨在让人联想到$f|_{\partial^{\pm}\mathbb{X}}=\pm\Lambda$所受的约束。）这是范畴 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的一个对象，由 的奇异链复形在域 κ上的子商构造而成。定理 7.1 断言，在对f作出适度的驯性假设时， $\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa)$ 在函子$H_0\circ\mathscr{F}\colon \mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to \mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}$ 下的像，与函数$f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$的相对层间集同调同构（如 [BBF24], 中所述，但具体约定请见第 7 节），其中 $\partial\mathbb{X}=\partial^{-}\mathbb{X}\cup\partial^{+}\mathbb{X}$。

在 $\mathbb{X}$ 是有限单纯复形 X 的几何实现，且$f\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$ 是逐单纯形线性的情形下，$f^{-1}(\partial\mathbb{X})$ 对应于 X 的一个子复形，例 1.8 根据 X 的单纯链复形的子商空间构造了“带钉单纯滤过余跨” $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$。命题 4.5 表明， $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$ 在范畴 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中与 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa)$ 同构。由于 $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$ 的同构类型可以组合地计算，结合定理 7.1，这就提供了一种计算 $f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$ 的相对层间集同调的方法。

诚然，由于 $\partial\mathbb{X}=f^{-1}(\{-\Lambda,\Lambda\})$ 且 $f(\mathbb{X})\subset[-\Lambda,\Lambda]$，也可以使用 [CEH09] 中的过程计算 $f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$ 的相对层间集同调，从而确定其扩展持久性。采用 $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$ 方法的一个小优势是，计算时可以忽略包含在 $\partial\mathbb{X}$ 中的任何单形。

本文主要受以下情形的启发： $\mathbb{X}$ 是一个带边界 $\partial\mathbb{X}=\partial^{-}\mathbb{X}\cup\partial^{+}\mathbb{X}$ 的光滑紧流形，函数 $\mathrm{f}\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$ 满足 $\mathrm{f}^{-1}(\{\pm\Lambda\})=\partial^{\pm}\mathbb{X}$，且为 Morse函数，并以 Λ 和 $-\Lambda$ 为正则值。（图5展示了一些例子。）这类余边界上的 Morse函数长期以来一直是拓扑学中富有成果的研究对象，例如见 [Mil65]。当 $\partial^{-}\mathbb{X}=\varnothing$ 时，众所周知（[Mil63, 定理 3.5]），$\mathbb{X}$ 具有由 f 的临界点的下降流形构成的 CW复形的同伦类型。相应的胞腔链复形自然地按照临界点的函数值过滤，因此可以将 f 的子水平集持久性计算为该上升链复形的过滤同调持久性模。本文将其记作 $\mathrm{C\,M}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$，其中 v 表示用于构造临界点下降流形的类梯度向量场。若 $\partial^{-}\mathbb{X}\neq\varnothing$，仍可构造上升Morse复形 $\mathrm{C\,M}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$，但此时其过滤同调与成对空间 $(\mathrm{f}^{-1}([-\Lambda,\mathrm{t}]),\partial^{-}\mathbb{X})$ 的相对同调同构，其中 t 遍历 $[-\Lambda,\Lambda]$。

我们在例 1.9 中引入 Morse过滤余跨 $\mathscr{M}(\mathbb{X},f、\nu、\kappa)$，以便用与 f 的 Morse复形以及 $-f$ 相关的数据来刻画层间持久性。在 $\partial\mathbb{X}=\varnothing$ 的情形下，这等价于 [U23] 中构造的一个特殊情形，也可以用扩展持久性来理解；有关讨论见 [U23，第 3 节。1] 不过， [U23]，的设置虽然很好地适用于该论文所关注的 Novikov理论的情形，但不适用于 $\partial\mathbb{X}\neq\varnothing$ 的情形，因为在这种情况下，f 和 $-f$ 的 Morse同调通常不同构（因为它们分别同构于 $H_*(\mathbb{X},\partial^{-}\mathbb{X}、\kappa)$ 和 $H_*(\mathbb{X},\partial^{+}\mathbb{X}、\kappa)$）。

命题 4.7 表明， $\mathscr{M}(\mathbb{X},f、\nu、\kappa)$ 在范畴 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中同构于钉扎奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},f、\kappa)$；因此，根据定理 7.1，它与 f 的相对层间集合同调相联系。一般而言，$\mathscr{M}(\mathbb{X},f、\nu、\kappa)$ 的同构类型无法组合地计算，因为它部分基于类梯度向量场 ν 的流；不过，我们在第 5 节中计算了许多例子。特别是在第 5.2.1 节中，我们详细讨论了 f 只有一个临界点的情形，此时 $\mathbb{X}$ 是与 $\partial^{-}\mathbb{X}$ 中球面的外科手术相关联的余边界。

本节讨论的余跨 $\mathscr{S}_{\partial}(X,f;\kappa)$, $\mathscr{C}_{\partial}(X,f;\kappa)$, and $\mathscr{M}(\mathbb{X},f,\nu;\kappa)$ 具有一个共同点：从图表 (1.2) 转到（未滤过的）同调时，所得结果在同构意义下为，

$$\begin{array}{ccc} H_*(\mathbb{X},\partial^{+}\mathbb{X};\kappa) & & \\ & \searrow & \\ & & H_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa) \\ & \nearrow & \\ H_*(\mathbb{X},\partial^{-}\mathbb{X};\kappa) & & \end{array}$$

其中这些映射由对的包含映射诱导。只有在 $\partial\mathbb{X}=\varnothing$ 时，这两个映射在所有分次中才都是同构。我们的广义分解定理，即推论 3.23，涉及八种标准初等直和项，记作 $(\uparrow^{b}\mathrm{a})_k$、$(\downarrow^{a}\mathrm{b})_k$、$(\uparrow^{\infty}\mathrm{a})_k$、$(\downarrow^{a}_{-\infty})_k$、$(\nearrow_a)_k$、$(\searrow^{a})_k$、$(>^{b}\mathrm{a})_k$和 $\square_k$，其中 a 和 b 表示滤过参数，k 表示分次。若 (1.2) 中的映射 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 在同调上诱导同构，则出现的直和项只有 $(\uparrow^{b}\mathrm{a})_k$、$(\downarrow^{a}\mathrm{b})_k$和 $(>^{b}\mathrm{a})_k$这几种形式；按照扩展持久性的术语，它们分别对应“普通”“相对”和“扩展”子图表。在函子 $\mathrm{H}_0\circ\mathscr{F}:\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathrm{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}$ 之下，直和项$(\uparrow^{b}\mathrm{a})_k$、$(\downarrow^{a}\mathrm{b})_k$和 $(>^{b}\mathrm{a})_k$（允许改变 k 的值）会被映至块模 B^{ν}，其中 v 位于某个区域的内部；自第 6 节起，这些区域记作 T k L、T^{k}A 和 T kS；另见 [BBF24，图1.1]。不位于任何区域 T k L、T kA 和 T^{k}S 内部的元素 $\mathrm{v}\in\mathbb{M}\backslash\partial\mathbb{M}$，恰好是位于正方形 T^{k}S 周界上的元素。在 [BBF24], 的语境中，这些点被视为不可实现，因为用我们的术语来说， [BBF24] 讨论的是 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 都在同调上诱导同构的情形。但放宽这一条件后，这些点便可以实现：正方形 T^{k}S 的四条开边分别由类型为 $(\uparrow^{\infty}\mathrm{a})_{-k}$、$(\downarrow^{a}_{-\infty})_{-k}$、$(\nearrow_a)_{-k}$和 $(\searrow^{a})_{-k}$的直和项表示；而 T^{k}S 中不在 $\partial\mathbb{M}$ 上的两个顶点则分别对应 $\square_{-k}$ 和 $\square_{-k+1}$。见图 8。我们将在第 5.2.1 节看到，只有一个临界点的 Morse函数已经足以构造涉及任一直和项 $(\uparrow^{\infty}\mathrm{a})_k$、$(\downarrow^{a}_{-\infty})_k$、$(\nearrow_a)_k$、$(\searrow^{a})_k$、$(>^{b}\mathrm{a})_k$和 $\square_k$的分解实例；其余直和项$(\uparrow^{b}\mathrm{a})_k$ 和 $(\downarrow^{a}\mathrm{b})_k$ 则首次出现在具有两个临界点的莫尔斯函数中，例如例 5.4。

1.2. **余跨基础**。 现在，我们开始更精确地表述上文讨论的一些概念。

定义 1.1。 域 κ 上的一个**上升链复形** 是一个三元组 $\mathscr{C}_\uparrow = (C^{\uparrow *}, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$，其中 $(C^{\uparrow *}, \partial_\uparrow)$ 是由 κ上的向量空间构成的链复形，而 $\ell_\uparrow : C_* \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是一个满足以下条件的函数：

- $\ell_\uparrow(x) = -\infty$ 当且仅当 $x = 0$;
- $\ell_\uparrow\left(\sum_{m\, i=1} c_i x_i\right) \le \max\{\ell_\uparrow(x_i) | c_i \neq 0\}$ 对所有$x1, \ldots, x_m \in C^{\uparrow *}$ 以及$c1, \ldots, c_m \in \mathbb{R}$，当$x_i \in C^{\uparrow k_i}$对互不相同的$k1, \ldots, k_m$成立时取等号。
- $\ell_\uparrow(\partial_\uparrow x) \le \ell_\uparrow(x)$ 对所有$x \in C_*$。

在这种情况下，我们有一族嵌套的子复形$C_\uparrow^{\le t} := \{x \in C_{\uparrow *} | \ell_\uparrow(x) \le t\}$，其中$C_\uparrow^{\le s} \subset C_\uparrow^{\le t}$ 当$s \le t$时成立。符号 ↑显然是为了强调这族子复形的递增性质；不过，我们承认（并在此提醒读者），这族子复形由 $\ell_\uparrow$的子水平集而非超水平集确定，这一点可能会造成混淆。

还有一种相应的概念，可得到与函数超水平集相关联的子复形：

定义 1.2. 域 κ 上的**下降链复形** 是一个三元组 $\mathscr{C}^\downarrow = (C_*^\downarrow, \partial^\downarrow, \ell^\downarrow)$，其中 $(C^\downarrow, \partial^\downarrow)$是由 κ-向量空间构成的链复形，并且 $\ell^\downarrow : C_*^\downarrow \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ 满足如下性质：$(C_*^\downarrow, \partial^\downarrow, -\ell^\downarrow)$ 按照定义 1.1 的意义是一个上升链复形。

因此，对于下降链复形 $(C_*^\downarrow, \partial^\downarrow, \ell^\downarrow)$，有 $\ell^\downarrow\left(\sum_i c_i x_i\right) \ge \min\{\ell^\downarrow(x_i) | c_i \neq 0\}$ 且 $\ell^\downarrow(\partial^\downarrow x) \ge \ell^\downarrow(x)$，并且存在一个递减的子复形族 $C_{\ge t}^\downarrow = \{x \in C_*^\downarrow | \ell^\downarrow(x) \ge t\}$。

如上所述，我们的关键代数对象定义如下：

定义 1.3. 设 κ 为一个域。一个**滤过余跨**在 κ 上由以下数据组成：

- 一个在 κ 上的上升链复形，$\mathscr{C}_\uparrow = (C^{\uparrow *}, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$;
- 一个在 κ 上的下降链复形，$\mathscr{C}^\downarrow = (C_*^\downarrow, \partial^\downarrow, \ell^\downarrow)$;
- 另一个由 κ-向量空间构成的链复形，(D_*, ∂_D); 以及
- 链映射 $\psi_\uparrow : C^{\uparrow *} \to D_*$和 $\psi^\downarrow : C_*^\downarrow \to D_*$。

如果固定一个数 $\Lambda > 0$，并假设滤过函数的非平凡值的绝对值都被 Λ 有界，那么与 [BBF24] 的设置的关系在记号上会得到简化。

定义 1.4。 设 Λ 为一个正数。若对于所有 $x \in C^{\uparrow *} \setminus \{0\}$，都有 $-\Lambda < \ell(x) < \Lambda$（相应地，对于所有 $x \in C_*^\downarrow \setminus \{0\}$，都有 $-\Lambda < \ell(x) < \Lambda$），则称上升链复形 $\mathscr{C}_\uparrow = (C^{\uparrow *}, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$（相应地，下降链复形 $\mathscr{C}^\downarrow = (C_*^\downarrow, \partial^\downarrow, \ell^\downarrow)$）是 Λ-**有界的**。

如果滤过余跨 $\mathscr{C} = (\mathscr{C}_\uparrow, \mathscr{C}^\downarrow, (D_*, \partial_D))$ 的上升链复形 $\mathscr{C}_\uparrow$ 和下降链复形 $\mathscr{C}^\downarrow$ 都是 Λ-有界的，则称该滤过余跨是 Λ-有界的。

因此在这种情形下，我们有$C_{\uparrow *} = \cup_{t<\Lambda} C_\uparrow^{\le t}$、$C_*^\downarrow = \cup_{t>-\Lambda} C_{\ge}^\downarrow t$，以及$C_\uparrow^{\le -\Lambda} = C_{\ge \Lambda}^\downarrow = \{0\}$。

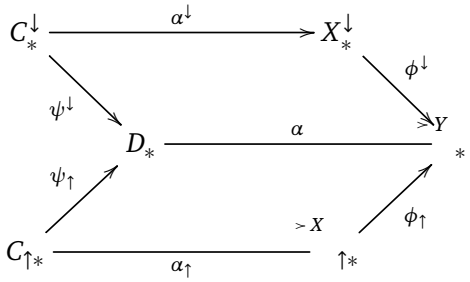
将注意力限定在 Λ-有界的上升链复形或下降链复形上，并不会造成实质性的普遍性损失，因为如果我们固定一个递增双射 $\varphi : \mathbb{R} \to (-\Lambda, \Lambda)$，那么任意上升链复形 $(C^{\uparrow *}, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$ 在将 $\ell_\uparrow|_{C_{\uparrow *} \setminus \{0\}}$ 替换为 $\varphi \circ \ell_\uparrow|_{C_{\uparrow *} \setminus \{0\}}$后，就会变为 Λ-有界的；下降链复形同理。类似的转换

在 [BBF24], 中反复出现，其中 $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ 和 φ 等于反正切函数。在本文其余部分中，应将正实参数 Λ 视为固定的。

在第 2 节中，我们将构造一个范畴 $\mathrm{HCO}(\kappa)$，其对象是关于 κ 的滤过余跨。我们将 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 的全子范畴记作 $\mathrm{HCO}(\kappa)$，其对象是Λ-有界滤过余跨。

$\mathrm{HCO}(\kappa)$（因此也包括 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$）中态射的定义推迟到第 2 节。不过，我们在此记录以下有用的刻画，说明 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中哪些滤过余跨彼此同构。

定理 1.5. 设 $\mathscr{C} = \left((\mathrm{C}\uparrow_*, \partial \mathrm{C}\uparrow, \ell^{C}_{\uparrow}), (\mathrm{C}^{\downarrow}_{*}, \partial^{\downarrow}\mathrm{C}, \ell^{\downarrow}\mathrm{C}), (\mathrm{D}_*, \partial_D), \psi_{\uparrow}, \psi^{\downarrow}\right)$ 和 $\mathscr{X} = \left((\mathrm{X}\uparrow_*, \partial \mathrm{X}\uparrow, \ell^{X}_{\uparrow}), (\mathrm{X}^{\downarrow}_{*}, \partial^{\downarrow}\mathrm{X}, \ell^{\downarrow}\mathrm{X}), (\mathrm{Y}_*, \partial_Y), \phi_{\uparrow}, \phi^{\downarrow}\right)$ 是 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中的两个对象。那么 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构，当且仅当存在一个图表



其中，$\alpha_{\uparrow}$ 和 $\alpha^{\downarrow}$ 是滤过同伦等价，α 是同伦等价，并且两个平行四边形在链同伦意义下交换。

证明。 这是推论 2.6 的第一部分。 □

现在我们详细介绍引言中提到的奇异、单纯形和 Morse 过滤余跨的定义。

例 1.6。 设$f\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ 是一个连续函数。与f相关联的**奇异过滤余跨图**$\mathscr{S}(\mathbb{X}, f; \kappa)$的三个链复形 $(C\uparrow_*, \partial_{\uparrow})$ $(C^{\downarrow}_{*}, \partial^{\downarrow})$和 $(D_*\partial_D)$都等于 $\mathbb{X}$ 的奇异链复形$S_*(\mathbb{X};\kappa)$，其系数取自 κ。链映射$\psi_{\uparrow}\colon C\uparrow_* \to D_*$和 $\psi^{\downarrow}\colon C^{\downarrow}_{*} \to D_*$均取为恒等映射。

将c $S_k(\mathbb{X})$ 的一般元素写作$c = \sum^{n}_{i=1} r_i\sigma_i$，其中$r_i \in \kappa \setminus \{0\}$ 且 $\sigma_i\colon \Delta^k \to \mathbb{X}$（其中各个 σ_i彼此不同），我们定义过滤函数 $\ell_{\uparrow}\colon S_*(\mathbb{X};\kappa) \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 和 $\ell^{\downarrow}\colon S_*(\mathbb{X};\kappa) \to \mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ 如下

$$\ell_{\uparrow}(c) = \max\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, (\forall i)\left(\max_{\Delta^k}(f\circ\sigma_i) \le t\right)\right\}, \quad \ell^{\downarrow}(c) = \min\left\{t \in \mathbb{R} \,\middle|\, (\forall i)\left(\min_{\Delta^k}(f\circ\sigma_i) \ge t\right)\right\}$$

（空集的最大值视为 $-\infty$，空集的最小值视为 $+\infty$）。因此我们有 $C^{\le t}_{\uparrow} = S_*(f^{-1}((-\infty, t]);\ \kappa)$且 $C^{\downarrow}_{\ge t} = S_*(f^{-1}([t,\ \infty));\ \kappa)$。若$f$在开区间 $(-\Lambda, \Lambda)$内有像，则 $\mathscr{S}(\mathbb{X}, f;\ \kappa)$是 Λ-有界的。

例 1.7。 现在考虑一个连续映射 $f\colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$。记

$$\partial^+\mathbb{X} = f^{-1}(\{\Lambda\}) \qquad \partial^-\mathbb{X} = f^{-1}(\{-\Lambda\}) \qquad \partial\mathbb{X} = \partial^+\mathbb{X} \cup \partial^-\mathbb{X}.$$

我们允许 $\partial^+\mathbb{X}$ 和 $\partial^-\mathbb{X}$ 中一个或两个为空；如果它们都为空，此例就会化为例 1.6。

作为 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的一个对象，**钉扎奇异过滤余跨图** $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X}, f; \kappa)$ 定义如下。定义中的三个链复形是相对奇异链复形

$$C_{\uparrow *} = S_*(\mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}; \kappa), \qquad C_*^{\downarrow} = S_*(\mathbb{X} \setminus \partial^-\mathbb{X}, \partial^+\mathbb{X}; \kappa), \qquad D_* = S_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa).$$

映射 $\psi_{\uparrow}\colon C_{\uparrow *} \to D_*$ 和 $\psi^{\downarrow}\colon C_*^{\downarrow} \to D_*$ 是由对子空间的包含映射 $(\mathbb{X} \setminus \partial^{\pm}\mathbb{X}, \partial^{\mp}\mathbb{X}) \to (\mathbb{X}, \partial\mathbb{X})$ 诱导的；换言之，它们是投影 $\pi^{\mp}\colon S_*(\mathbb{X};\kappa)S_*(\partial^{\mp}\mathbb{X};\kappa) \to S_*(\mathbb{X};\kappa)S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)$ 在 $S_*(\mathbb{X} \setminus \partial^{\pm}\mathbb{X}, \partial^{\mp}\mathbb{X};\ \kappa)$ 上的限制。

$\mathrm{C}_{\uparrow k}$ 的一般元素可以唯一表示为奇异链 $\mathrm{c} = \sum_{\mathrm{i}=1}^{n} \mathrm{r}_i\sigma_i$，其中 $\mathrm{r}_i \in \kappa \setminus \{0\}$，且 σ_i 是互不相同的映射 $\Delta^k \to \mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}$，满足任意 σ_i 的像都不完全包含在 $\partial^-\mathbb{X}$ 中。与例 1.6 中一样，在这种情形下，我们定义 $\ell_{\uparrow}(\mathrm{c}) = \max\{\mathrm{t} \mid (\forall \mathrm{i})(\max_{\Delta^k}(\mathrm{f} \circ \sigma_i) \le \mathrm{t})\}$。类似地，$\mathrm{C}^{\downarrow}\mathrm{k}$ 的一般元素可以表示为 $\mathrm{c} = \sum \mathrm{i}\ \mathrm{r}_i\sigma_i$，其中 σ_i 的像与 $\partial^-\mathbb{X}$ 不相交且不包含在 $\partial^+\mathbb{X}$ 中；在这种情形下，我们令 $\ell^{\downarrow}(\mathrm{c}) = \min\{\mathrm{t} \mid (\forall \mathrm{i})(\min_{\Delta^k}(\mathrm{f} \circ \sigma_i) \ge \mathrm{t})\}$。因此，对于 $\mathrm{t} \in [-\Lambda, \Lambda)$，$\mathrm{C}_{\uparrow}^{\le t} = \mathrm{S}_*(\mathrm{f}^{-1}([-\Lambda, \mathrm{t}]), \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$；而对于 $\mathrm{t} \in (-\Lambda, \Lambda]$，$\mathrm{C}_{\ge}^{\downarrow}\mathrm{t} = \mathrm{S}_*(\mathrm{f}^{-1}([\mathrm{t},\ \Lambda]), \partial^+\mathbb{X};\ \kappa)$。

如前所述，定理 7.1 表明，在函数 f 满足适当的驯性假设时，$f\,|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$ 的层间持久性可以从 $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X}, f; \kappa)$ 的同构分类中读出。

例 1.8. 设 X 是一个有限抽象单纯复形，其几何实现为某个 $\mathbb{X}$中的对象，并设其顶点与点 $\mathrm{v}_0, \ldots, \mathrm{v}_N \in \mathbb{R}^d$相对应。（特别地，我们为这些顶点选定了一个全序。）假设 $\mathrm{f}\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}$ 是一个逐单形线性函数，其像包含于 $[-\Lambda, \Lambda]$中。因此，f 由其在顶点 v_i上的取值决定。如例 1.7 中那样，令 $\partial^{\pm}\mathbb{X} = \mathrm{f}^{-1}(\{\pm\Lambda\})$；对于 $+$或 $-$的任一种选择，所有顶点都属于 $\partial^{\pm}\mathbb{X}$ 的 X 的面构成原抽象单纯复形 X 的一个（可能为空的）子复形 $\partial^{\pm}\mathrm{X}$。记 $\partial\mathbb{X} = \partial^+\mathbb{X} \cup \partial^-\mathbb{X}$和 $\partial\mathrm{X} = \partial^+\mathrm{X} \cup \partial^-\mathrm{X}$。（这两者都是不交并，并且 $\partial\mathrm{X}$ 与 $\partial^-\mathrm{X}$ 和 $\partial^+\mathrm{X}$ 一样，因而也是 X 的子复形。）令 X^-为 X 的全子复形，它由 X 中没有顶点属于 $\partial^+\mathrm{X}$ 的单形组成；同样，令 X^+为由 $\mathrm{X} \setminus \partial^-\mathrm{X}$ 中的顶点生成的全子复形。

存在一个包含映射 ι，从 κ-系数单纯链复形 $C_*(X;\ \kappa)$到 $S_*(\mathbb{X};\ \kappa)$，它将 $C_*(X;\ \kappa)$中对应于由 v_{i_0}，……，v_{i_k}张成的 k-单纯形的一个生成元（其中 $i_0 < \cdots < i_k$）映射到 $S_*(\mathbb{X};\ \kappa)$中的生成元，该映射为

$$\Delta^k \to \mathbb{X}$$
$$(t_0, \ldots, t_k) \mapsto \sum_j t_j v_{i_j}.$$

该包含映射限制为包含映射 $C_*(X^-;\ \kappa) \to S_*(\mathbb{X} \setminus \partial\mathbb{X}^+;\ \kappa)$, $C_*(X^+;\ \kappa) \to S_*(\mathbb{X} \setminus \partial\mathbb{X}^-;\ \kappa)$, $C_*(\partial^- X;\ \kappa) \to S_*(\partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$，以及 $C^*(\partial^+X;\ \kappa) \to S_*(\partial^+\mathbb{X};\ \kappa)$。

我们如下构造带钉单纯滤过余跨 $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$。我们取

$$C_{\uparrow *}=\frac{C_*(X^-;\kappa)}{C_*(\partial^- X;\kappa)},\qquad C_*^{\downarrow}=\frac{C_*(X^+;\kappa)}{C_*(\partial^+ X;\kappa)},\qquad D_*=\frac{C_*(X;\kappa)}{C_*(\partial X;\kappa)}.$$

映射 $\psi_\uparrow\colon C_{\uparrow *}\to D_*$ 和 $\psi^{\downarrow}\colon C_*^{\downarrow}\to D_*$ 是由包含映射诱导的显然映射。

包含映射 ι 诱导映射 $\iota_\uparrow\colon \mathrm{C}_{\uparrow *}\to \mathrm{S}_*(\mathbb{X}\setminus\partial^+\mathbb{X},\partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$ 和 $\iota^{\downarrow}\colon \mathrm{C}_*^{\downarrow}\to \mathrm{S}_*(\mathbb{X}\setminus\partial^-\mathbb{X},\partial^+\mathbb{X};\ \kappa)$，而滤过函数 $\ell_\uparrow,\ell^{\downarrow}$ 取为奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}(\mathbb{X},\partial\mathbb{X},\mathrm{f};\kappa)$ 上相应函数经 $\iota_\uparrow$ 和 $\iota^{\downarrow}$ 拉回所得的函数，该奇异过滤余跨图来自例 1.7。因此，$\mathrm{C}_{\uparrow}^{\leq t}$ 是 $\mathrm{C}_*(\mathrm{X}^-;\kappa)\mathrm{C}_*(\partial^-\mathrm{X};\kappa)$ 的子复形，由商投影下那些顶点 v_i 均满足 $\mathrm{f}(\mathrm{v}_i)\leq \mathrm{t}$ 的~~单形的~~像张成；$\mathrm{C}_{\geq}^{\downarrow}\mathrm{t}$ 也类似。

在命题 4.5 中，我们基于定理 1.5 证明，包含映射 ι 在范畴 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中给出 $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$ 与 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa)$之间的同构。结合定理 7.1，这使得可以根据 $\mathscr{C}_\partial(X,f;\kappa)$的同构类型计算 $f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$ 的层间持久性；而该同构类型又可以按照第 5 节开头概述的方法通过算法确定。

例 1.9. 设 $\mathbb{X}$ 是一个紧致光滑流形，其边界 $\partial\mathbb{X}$ 分解为互不相交的闭子集，如 $\partial\mathbb{X}=\partial^-\mathbb{X}\cup\partial^+\mathbb{X}$所示。考虑 Morse函数 $f\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$，其中$-\Lambda$ 和 Λ 是f的正则值，并且$f^{-1}(\{-\Lambda\})=\partial^-\mathbb{X}$ 且$f^{-1}(\{\Lambda\})=\partial^+\mathbb{X}$。我们允许 $\partial^-\mathbb{X}$ 和/或 $\partial^-\mathbb{X}$ 为空。

对 f 的类梯度向量场 v 作一般选择，并且（若 $2\neq 0$ in κ）任意选择 v 的下降流形的定向，便可得到域 κ 上的莫尔斯链复形 $\mathrm{C\,M}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$。$\mathrm{C\,M}_k(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$由 f 的指标为 k 的临界点自由生成，其边界算子的矩阵元计数满足以下条件的孤立未参数化轨道：对于 $-$v，其两端渐近于指标相差一的临界点。关于定义的细节，我们遵循 [P06, Chapter 6], 中的约定，其中该复形记作 $\mathscr{M}_*(\mathrm{f},\mathrm{v})$。通过对不同的临界点 p_i和 $\mathrm{r}_i\in\kappa$置 $\ell_\uparrow\left(\sum \mathrm{i\,r}_i\,\mathrm{p}_i\right)=\max\{\mathrm{f}(\mathrm{p}_i)|\mathrm{r}_i\neq 0\}$，复形 $\mathrm{C\,M}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$便成为上升链复形。类似地，我们可以构造 $\mathrm{C\,M}_*(-\mathrm{f},-\mathrm{v};\kappa)$，通过置 $\ell^{\downarrow}\left(\sum \mathrm{i\,r}_i\,\mathrm{p}_i\right)=\min\{\mathrm{f}(\mathrm{p}_i)|\mathrm{r}_i\neq 0\}$，它便成为下降复形。

我们按如下方式构造 **f 的 Morse过滤余跨**，记作 $\mathscr{M}(\mathbb{X},f,v;\kappa)$:

- $C_{\uparrow *}=CM_*(f,v;\kappa)$;
- $C_*^{\downarrow}=CM_*(-f,-v;\kappa)$;
- $D_*=S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$;
- $\psi_\uparrow\colon CM_*(f,v;\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X})$是链同伦等价 $\mathscr{E}(f,v)\colon CM_*(f,v;\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial^-\mathbb{X};\kappa)$（见 [P06，第 218] 页），其映射$S_*(\mathbb{X},\partial^-\mathbb{X};\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$由对的包含映射诱导。

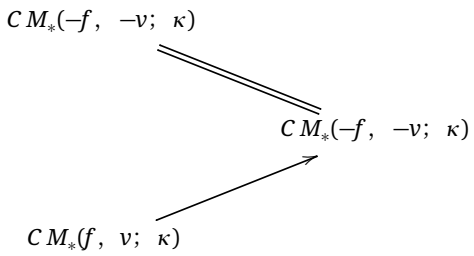
- $\psi^{\downarrow}\colon CM_*(-f,-v;\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$是链同伦等价 $\mathscr{E}(-f,-v)\colon CM_*(-f,-v;\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial^+\mathbb{X};\kappa)$来自 [P06，第 218] 页，其中的映射 $S_*(\mathbb{X},\partial^+\mathbb{X};\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$由对的包含映射诱导。

映射 $\mathscr{E}(f、v)$以及 $\mathscr{E}(-f、-v)$在 [P06], 中仅在同伦意义下确定，但命题 2.4 表明，在其同伦类中改变 $\psi_\uparrow$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 不会影响

在 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的同构类，因此上述内容唯一确定了 $\mathscr{M}(X、f、\nu;\kappa)$，直到同构为止。事实上，我们将在命题 4.7 中证明，$\mathscr{M}(X、f、\nu;\kappa)$ 与带钉奇异余跨 $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},f;\kappa)$ 同构。

Morse过滤余跨的一个优点是，过滤复形 $C\uparrow_*$和$C_*^{\downarrow}$ 通常都相当小。另一方面，在上述定义中，$D_* = S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\ \kappa)$则相当大。不过，由定理 1.5 可知，只要将 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 与同伦等价复合，就可以用任何与D_*同伦等价的复形替换D_*，而不改变滤过余跨的同构类型。因此，我们也完全可以用更小的复形来充当D_*，例如 $(\mathbb{X},\partial\mathbb{X})$的相对三角剖分的奇异复形，或满足$g^{-1}(\{0\})=\partial\mathbb{X}$的Morse函数$g$：的Morse复形。

在 $\partial^{-}\mathbb{X}=\varnothing$ 的情形下，映射 $\psi^{\downarrow}: CM_*(-f,-\nu;\kappa)\to S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)=S_*(\mathbb{X},\partial^{+}\mathbb{X};\kappa)$ 是一个同伦等价。因此，在这种情形下，Morse过滤余跨同构于如下形式的一个滤过余跨



其中，唯一的非平凡箭头在同调上诱导的映射可以认作典范映射 $H_*(\mathbb{X};\kappa)\to H_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$。

1.3. 本文其余部分的组织安排及进一步讨论。接下来的第 2 节将完成范畴 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 的定义，将其构造为微分分次范畴$\mathrm{CO}(\kappa)$的零次上同调范畴；随后基于此定义，给出上述定理 1.5 中所述的 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构的判据。

第 3 节的主要结果是推论 3.23，它断言，任意“可容许”的滤过余跨在$\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中都同构于定义 3.22 所列的一组“标准初等直和项”的直和。若滤过余跨中的上升链复形$C\uparrow_*$ 和下降链复形$C_*^{\downarrow}$ 在每个次数上都是有限维的，则满足容许性假设（定义 3.18）；本文考察的带钉单纯复形和 Morse 过滤余跨便属于这种情形。若 Morse函数f：$\mathbb{X}\to\mathbb{R}$的临界值集合离散、有下界但无上界，则其 Morse复形自然会产生不满足这一性质的滤过余跨；例如，测地线的经典Morse理论和辛同调中就会出现这种情况。在这种情形下，可以构造自然的滤过余跨，它们虽不可容许，却是可容许滤过余跨的逆极限（通过对下降链复形$C_*^{\downarrow}$ 作适当截断得到）。我们将这方面的研究留待未来进行。

第4节在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中确立了以下同构（命题4.5和4.7）：分别是带钉点的单纯与 Morse 过滤余跨和带钉点的奇异滤过余跨之间的同构。这一结果的代数基础是定理 1.5 和命题 4.2，后者

将滤过同伦等价（如定理 1.5 中所示）与滤过拟同构联系起来。单纯过滤余跨与奇异过滤余跨之间的关系可直接由单纯同调与奇异同调之间的标准同构推出。Morse 过滤余跨与奇异过滤余跨之间的关系则通过形式上类似的论证得到，但为此还需要一些关于 Morse 同调与奇异同调之间同构的技术性内容；这些内容推迟至附录 A。

第 5 节给出了若干示例，展示如何将各种函数的带标记单纯或 Morse 过滤余跨分解为标准初等直和项（如推论 3.23 所述），并由此根据命题4.5和4.7得到其带标记奇异过滤余跨的分解。如前所述，这包括第 5.2.1 节对仅有一个临界点的 Morse函数f 所关联的 Morse 过滤余跨的一般讨论。在这种情形下，如果 $\dim \mathbb{X} = n$ 且该临界点的指标为k，那么 $\mathbb{X}$ 可由一个带边界的 $(n-1)$维流形$Y \partial Y \cong S^{k-1} \times S^{n-k-1}$构成：将临界点的一个邻域粘合到$Y \times [-2,2]$上即可。随后，通过分别将$Y$与$D^k \times S^{n-k-1}$ 或$S^{k-1} \times D^{n-k}$ 粘合到其边界上以填充Y，便可得到上、下边界 $\partial^+ \mathbb{X}$ 和 $\partial^- \mathbb{X}$。在推论 5.9 中，我们将说明，如何根据 $\partial Y \cong S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ 的相应球面因子在Y中是否为同调本质的，读出该 Morse 过滤余跨的同构类。

第 2 节至第 5 节完全专注于滤过余跨本身；在第 6 节中，我们则搭建起滤过余跨与持久模之间的桥梁。这一桥梁体现为一个函子 $\mathscr{F}$，它从 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 映至由链复形的同伦范畴 $\mathrm{K}(\kappa)$ 中取值的 $\mathbb{M}$-指标持久模范畴 $\mathrm{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$。对于每个 $(s,t) \in \mathbb{M}$，我们首先在第 6.2 节中构造一个函子 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}$，它从微分分次范畴 $\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)$ 映至链复形的微分分次范畴 $\mathrm{Ch}(\kappa)$；该函子利用与滤过余跨各组成链复形的滤过子复形相关联的映射锥，这些滤过子复形依赖于 (s,t)。在第 6.3 节中，我们针对若干满足 $(s,t) \preceq (s',t')$ 的情形，定义这些函子之间的变换；这些变换在传至零次上同调范畴 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 和 $\mathrm{K}(\kappa)$ 后成为自然变换。第 6.4 节则展示如何将它们组装起来，从而得到函子$\mathscr{F}: \mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathrm{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$。

记 Vect_κ 为 κ 上的向量空间范畴，则有一个协变函子 $\mathrm{H}_0: \mathrm{K}(\kappa) \to \mathrm{Vect}_\kappa$，以及一个反变函子 $\mathrm{H}^0: \mathrm{K}(\kappa) \to \mathrm{Vect}_\kappa$，它们分别由链复形的零次同调和零次上同调给出。范畴 $\mathrm{K}(\kappa)$是三角范畴，而 H_0 和 H^0 都具有将 $\mathrm{K}(\kappa)$ 中的可分三角映射为正合列的一般性质。在 [BBF21], 中指出，函数的相对层间集同调与上同调作为函子 $\mathbb{M} \to \mathrm{Vect}_\kappa$ 和 $\mathbb{M}^{op} \to \mathrm{Vect}_\kappa$，用他们的术语来说，是“同调的”和“上同调的”，因为与 $\mathbb{M}$ 中的矩形相关的某些序列总是正合的。第 6.5 节给出了对此的一种代数阐述：对于任意滤过余跨 $\mathscr{C}$，函子$\mathscr{F}(\mathscr{C}): \mathbb{M} \to \mathrm{K}(\kappa)$ 具有这样的性质，即与 $\mathbb{M}$ 中的矩形相关的某些三角是可分的；于是，[BBF21] 中所述序列的正合性，直接源于 H_0 和 H^0 将可分三角映射为正合列这一事实。参见定理 6.3 和推论 6.5。

从第 6.6 节到论文结尾，我们通常关注函子 $H_0 \circ \mathscr{F}: \mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathrm{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}$，而非 $\mathscr{F}: \mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathrm{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$。（当然，我们也完全可以考虑

$H^0 \circ \mathscr{F} \colon \mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa) \to \mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}^{op}}$，从而得到上同调而非同调，结果类似。）在第 6.6 节中，我们确定了 $H_0 \circ \mathscr{F}$ 对第 3 节中的标准初等直和项的作用，并在命题 6.8 中证明，随着 ν 遍历 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$，$H_0 \circ \mathscr{F}$ 建立了这些基本滤过余跨度与 [BBF21], 的块模 B^ν 之间的显式双射。因此， Λ-有界可容许滤过余跨图 $\mathscr{C}$ 的持久图定义为 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$ 的子多重集，其指标对应于出现在 $H_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{C})$ 的直和分解中的块模。

第 7 节包含定理 7.1 的证明。该定理断言，在关于函数 $\mathrm{f} \colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 的适度假设下，钉扎奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, \mathrm{f}; \kappa)$under $\mathrm{H}_0 \circ \mathscr{F}$ 的像同构于 f 的相对层间集同调，如 [BBF24], 中所述。我们遵循 [BBF24]—— 而不是 [BBF21]—— 通过闭区间的原像而非开区间的原像来建立相对层间集同调（并且使用同调而非上同调）。如果更倾向于使用开区间，可以适当地修改函子 $\mathscr{F}$；例如，将（6.2）中 $\mathscr{F}^0\mathrm{T}^k(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 的定义里出现的 $\mathscr{C}_{\geq}^{\downarrow}\mathrm{x}$ 和 $\mathrm{C}_{\uparrow}^{\leq y}$ 替换为 $\mathscr{C}_{>}^{\downarrow}\mathrm{x}$ 和 $\mathrm{C}_{\uparrow}^{<y}$，并将第 6.1 节中 S 的定义改为 $[-\Lambda, \Lambda) \times (-\Lambda, \Lambda]$ （而不是 $(-\Lambda, \Lambda] \times [-\Lambda, \Lambda)$），同时对 L 和 A 作相应调整。这样便可以证明一个关于相对层间集同调的定理 7.1 类似结果（或者用 $\mathrm{H}^0 \circ \mathscr{F}$ 代替 $\mathrm{H}_0 \circ \mathscr{F}$，得到基于开区间而非闭区间的上同调结果）；事实上，证明会稍微容易一些，并且不需要对 f 作驯性假设，因为某些三元组会自动是切除的。不过，至少对于本文主要研究的良态函数而言，本文作者对闭层间持久性略有偏好，因为它明确地包含了水平集持久性。结合定理 7.1 与第 6.6 节中的计算，我们在命题 7.4 中说明，如何从 f 的钉扎奇异过滤余跨图分解为标准初等直和项的结果中读出 f 的水平集持久条形码 $|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$（等价地，在有定义时，也可从其钉扎单纯或 Morse过滤余跨图中读出）。这有助于直观理解第 5 节计算结果的意义。

最后，第8节证明了一个代数等距定理。对于任意 Λ-有界滤过余跨 $\mathscr{C}$，我们都有一个持久图 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$，它基于将$H_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{C})$ 分解为块模；该持久图是 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$中元素的一个多重集。选取一个递增同胚 φ： $[-\infty, \infty] \to [-\Lambda, \Lambda]$ 会导出区间 $(-\Lambda, \Lambda)$ 的一个平移族，进而在范畴$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$ 和条带$\mathbb{M}$上分别产生流。在 $\mathbb{M}$ 上的流与 [BBF21第 4], 节所描述的流相似，但我们的描述（见（8.5））更为简单，部分原因在于我们对作用于滑移反射T: $\mathbb{M} \to \mathbb{M}$ 采用了不同的基本域，而该滑移反射对应于同调次数的平移。利用这些流，我们在$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$上定义交错距离$d^{\mathscr{T}^\varphi}$ int，在 $\mathbb{M}$上定义扩展度量$d^{\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}$ int，并在 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$中元素的多重集上定义瓶颈距离$d^{\mathbb{M}, \partial\mathbb{M}\, B, \mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}$，并证明:

定理 1.10。设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 是两个 Λ-有界的有限型滤过余跨。那么 $d^{\mathbb{M}, \partial\mathbb{M}\, B, \mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}), \mathscr{D}(\mathscr{C})) = d^{\mathscr{T}^\varphi}\mathrm{int}(\mathscr{X}, \mathscr{C})$。

证明。 一个不等式（“稳定性”）是定理 8.10 的内容，另一个（“逆稳定性”）则在命题 8.7 中得到证明。 □

这里，有限型滤过余跨图指在$\mathsf{HCO}(\kappa)$中同构于这样一种对象的滤过余跨图：其中链复形$C^{\uparrow *}$和$C_*^{\downarrow}$均为有限维。有限型假设可能可以适当放宽。

若 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 是与函数f、$g\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$相关联的钉扎奇异过滤余跨图，则有 $d^{\mathcal{F}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})\le\|\varphi^{-1}\circ f-\varphi^{-1}\circ g\|_{\infty}$，因此可根据 $\|\varphi^{-1}\circ f-\varphi^{-1}\circ g\|_{\infty}$ 得到相关持久图的稳定性结果（推论 8.11 ）。

我们的八种标准初等直和项经由 $H_0\circ\mathscr{F}$ 映射为块模，它们对应于 $\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$ 中的八种区域（即集合 (8.7) 在 T 的某次幂作用下的像，不包括 $\mathfrak{D}\cap\partial\mathbb{M}$）；根据命题 8.5，这些区域位于无限远处

根据扩展度量 d彼此之间
$^{\mathbb{M}}$整数，且其中只有两个（分别对应于形如 $(\uparrow^{b}{}_{a})_{k}$ 和 $(\downarrow^{a}{}_{b})_{k}$的直和项，或对应于扩展持久性的“普通”子图和“相对”子图）与 $\partial\mathbb{M}$之间的距离有限。因此，对于其余六种区域中的任一种，持久图中位于该区域内的点的总重数在瓶颈距离 $d^{\mathbb{M}}$的定义所涉及的匹配下保持不变
$\partial\mathbb{M}$ B
$,\mathcal{F}_{\mathbb{M}}^{\varphi}$ 。特别地，例如，对应于扩展持久性的扩展子图的点（按照我们的记号对应于 $T^{k}S^{\circ}$）必须与其他此类点进行匹配，这与 [BBF24，注 2.5]一致；在水平集持久性的语境下，这对应于以下陈述：连续的水平集条形码族中，次数为 k 的一个闭区间可以收缩为单点，随后在次数为 $k-1$时被一个开区间替代，参见 [BH17]中定理 1.5之后的注释。就我们的持久图而言，这一过程对应于 $T^{k}S^{\circ}$ 中的一个点从 $T^{-k}S^{-}$移动到 $T^{k}S^{+}$中，其中S^{-} 和 S^{+} 的定义见定理 7.1陈述之后不久的部分。

致谢。作者感谢 Cameron Thomas 进行的澄清性讨论。本项目部分源于 Mihai Damian 和 Claude Viterbo 在阿尔比举办的 2023 年辛与接触拓扑中的持久同调会议上提出的问题。本研究由西蒙斯基金会通过资助项目 MPS-TSM-8091 提供支持。

2. 过滤余跨范畴

如引言所述，范畴 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 的对象是定义 1.3 中所述的 κ 上的过滤余跨。在说明 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中的态射之前，我们先暂且离题，介绍一些背景知识。

回顾 [BK91]，微分分次范畴是一个预加性范畴 $\mathscr{C}$，其中每个态射群 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)$ 都赋有上链复形结构，其余边界算子记为 $\delta_{X,Y}$；复合定义了一个上链映射 $\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(Y,Z)\otimes\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Y)\to\mathrm{Hom}_{\mathscr{C}}(X,Z)$；并且每个单位元 id_X满足 $\delta_{X,X}(\mathrm{id}_X)=0$。

微分分次范畴的一个标准例子是链复形范畴 $\mathsf{Ch}(\kappa)$[1] $(C_*=\oplus_{k\in\mathbb{Z}}C_k,\ \partial_C)$其定义在域 κ 上，次数为m的态射构成的 κ-向量空间为 $\mathrm{Hom}^{m}{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}((C_*,\ \partial_C)(D_*,\ \partial_D))$

[1]通常，我们将对象 取为链复形，同时遵循通常的约定，即微分分次范畴中的态射空间是上链复形。

由所有分次为 $-m$ 的 κ-线性映射 $C_* \to D_*$ 构成，也就是说，

$$\mathrm{Hom}^m_{\mathsf{Ch}(\kappa)}((C_*,\partial_C),(D_*,\partial_D)) = \prod_{j\in\mathbb{Z}} \mathrm{Hom}_\kappa(C_j, D_{j-m}).$$

微分 $\delta_{C,D}\colon \mathrm{Hom}^m{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}((C_*,\partial_C),(D_*,\partial_D)) \to \mathrm{Hom}^{m+1}{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}((C_*,\partial_C),(D_*,\partial_D))$ 定义如下

$$\delta_{C,D} f = \partial_D \circ f - (-1)^m f \circ \partial_C.$$

因此，满足 $\delta_{C,D} f = 0$ 的零次元素恰好是链映射 $(C_*,\partial_C) \to (D_*,\partial_D)$，而零次上同调 $H^0(\mathrm{Hom}^*{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}((C_*,\partial_C),(D_*,\partial_D)))$ 是以 κ 为标量的链映射模链同伦向量空间。因此，$\mathsf{Ch}(\kappa)$ 的零次上同调范畴（即具有与 $\mathsf{Ch}(\kappa)$ 相同对象的范畴，其中从 X 到 Y 的态射由上链复形 $\mathrm{Hom}^*{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(X, Y)$ 的零次上同调给出，并采用显然的复合）恰好是链复形的同伦范畴 $K(\kappa)$。

我们的范畴 $\mathsf{HCO}(\kappa)$同样将是一个微分分次范畴 $\mathsf{CO}(\kappa)$ 的零次上同调。因此，$\mathsf{CO}(\kappa)$ 的对象也包括在 κ 上的滤过余跨，其中任意一个都由数据$\mathscr{C} = \left((C_{\uparrow *}, \partial_{C\uparrow}, \ell^C_\uparrow), (C^\downarrow_*, \partial^\downarrow{}_C, \ell^\downarrow{}_C), (D_*, \partial_D), \psi_\uparrow, \psi^\downarrow\right)$组成，如定义 1.3 所述。$\mathsf{CO}(\kappa)$ 中从 $\mathscr{C}$ 到另一个滤过余跨的次数为 m 态态射

$$\mathscr{X} = \left((X_{\uparrow *}, \partial^X_\uparrow, \ell^X_\uparrow), (X^\downarrow_*, \partial^\downarrow_X, \ell^\downarrow_X), (Y_*, \partial_Y), \phi^\downarrow, \phi_\uparrow\right)$$

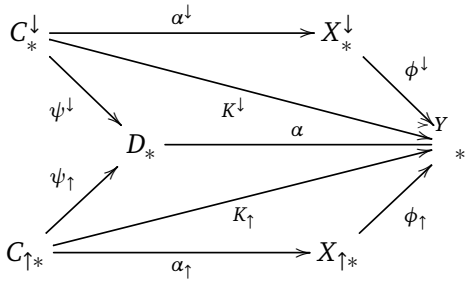
将是一个五元组

$$\begin{aligned}(2.1)\qquad \left(\alpha^\downarrow, \alpha_\uparrow, \alpha, K^\downarrow, K_\uparrow\right) \in &\mathrm{Hom}^m_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C^\downarrow_*, X^\downarrow_*) \times \mathrm{Hom}^m_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C_{\uparrow *}, X_{\uparrow *}) \times \mathrm{Hom}^m_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(D_*, Y_*) \\ &\times \mathrm{Hom}^{m-1}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C^\downarrow_*, Y_*) \times \mathrm{Hom}^{m-1}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C_{\uparrow *}, Y_*)\end{aligned}$$

使得

$$(2.2)\qquad \ell^X_\uparrow(\alpha_\uparrow c) \le \ell^C_\uparrow(c) \text{ for all } c \in C_{\uparrow *}, \text{ and } \ell^\downarrow_X(\alpha^\downarrow c) \ge \ell^\downarrow_C(c) \quad \text{for all } c \in C^\downarrow_*$$

因此我们有一个图表



其中 $\alpha^\downarrow$、α、$\alpha_\uparrow$ 分别通过 $-m$ 影响相应链复形上的分次，而 $K^\downarrow$ 和 $K\uparrow$ 则通过 $1-m$ 影响分次。如（2.2）中所述，$\alpha^\downarrow$ 和 $\alpha_\uparrow$ 必须保持适当复形上的（分别为降序和升序）滤过；另外三个映射的陪域是未滤过复形 (Y_*, ∂_Y)，因此不对它们施加滤过条件

态射的复合定义为

$$(\beta^{\downarrow},\beta_{\uparrow},\beta,L^{\downarrow},L_{\uparrow})\circ(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow}) \tag{2.3}$$
$$=\left(\beta^{\downarrow}\circ\alpha^{\downarrow},\ \beta_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow},\ \beta\circ\alpha,\ L^{\downarrow}\circ\alpha^{\downarrow}+\beta\circ K^{\downarrow},\ L_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow}+\beta\circ K_{\uparrow}\right).$$

注意，该运算以 $(1_{C_*^{\downarrow}},1_{C_{\uparrow *}},1_{D_*},0,0)$ 作为 $\mathrm{Hom}^0{}_{\mathsf{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{C})$中的恒等映射。

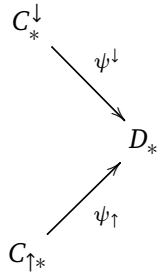
微分分次范畴结构由微分 $\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\colon \mathrm{Hom}^m{}_{\mathsf{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})\to\mathrm{Hom}^{m+1}{}_{\mathsf{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$给出，其定义公式如下：

(2.4)

$$\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\left(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow}\right)=\Big(-\partial_X^{\downarrow}\circ\alpha^{\downarrow}+(-1)^m\alpha^{\downarrow}\circ\partial_C^{\downarrow},\ -\partial_{\uparrow}^{X}\circ\alpha_{\uparrow}+(-1)^m\alpha_{\uparrow}\circ\partial_{\uparrow}^{C},\ \partial_Y\circ\alpha-(-1)^m\alpha\circ\partial_D,$$
$$\phi^{\downarrow}\circ\alpha^{\downarrow}-(-1)^m\alpha\circ\psi^{\downarrow}+\partial_Y\circ K^{\downarrow}+(-1)^m K^{\downarrow}\circ\partial_C^{\downarrow},\ \phi_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow}-(-1)^m\alpha\circ\psi_{\uparrow}+\partial_Y\circ K_{\uparrow}+(-1)^m K_{\uparrow}\circ\partial_{\uparrow}^{C}\Big).$$

因此，元素 $(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow})\in\mathrm{Hom}^0{}_{\mathsf{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$属于 $\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}$的核，当且仅当 $\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow}$和 α 均为链映射，$K^{\downarrow}$是从 $\phi^{\downarrow}\circ\alpha^{\downarrow}$到 $\alpha\circ\psi^{\downarrow}$的链同伦，且 $K_{\uparrow}$是从 $\phi_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow}$到 $\alpha\circ\psi_{\uparrow}$的链同伦。

注记 2.1。以下内容或有助于理解公式 (2.3) 和 (2.4) 的背景。回顾一下，链映射 f) 的映射锥 Cone(，其中 $f\colon C_*\to D_*$ 是两个 κ-向量空间上的链复形之间的映射，其作为分次向量空间给出的链复形为 $\mathrm{Cone}(f)_k=C_{k-1}\oplus D_k$，边界算子为 $\partial_{\mathrm{Cone}(f)}(c,d)=(-\partial_C c,fc+\partial_D d)$。类似于 [Dri04, 2.9], ，可得到一个微分分次函子 $\mathscr{S}^1\colon \mathsf{CO}(\kappa)\to\mathsf{Ch}(\kappa)$，它在对象层面上将



$$\text{to}\quad \mathrm{Cone}\left(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow}\colon\ C_*^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow *}\to D_*\right).$$

该函子还会在第 6.3 节再次出现。在态射层面上，我们令 $\mathscr{S}^1$ 将上述一个次数为 m 的态射 $\left(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow}\right)\colon\ \mathscr{C}\to\mathscr{X}$映射到映射 $\mathrm{Cone}(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow})\to\mathrm{Cone}(-\phi^{\downarrow}+\phi_{\uparrow})$，该映射以块形式给出（作为一个映射 $C_{*-1}^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow *-1}\oplus D_*\to X_{*-m-1}^{\downarrow}\oplus X_{\uparrow *-m-1}\oplus X_{*-m}$），如下所示

$$\begin{pmatrix}\alpha^{\downarrow} & 0 & 0\\ 0 & \alpha_{\uparrow} & 0\\ -K^{\downarrow} & K_{\uparrow} & \alpha\end{pmatrix}.$$

复合律和微分的公式 (2.3) 与 (2.4) 在 $\mathsf{CO}(\kappa)$中的设计恰好保证了下述命题成立；其证明只需例行计算，留给读者完成。

命题 2.2. 对于微分分次范畴 $\mathsf{CO}(\kappa)$中的态射 $\mathfrak{a} = \left(\alpha^{\downarrow}, \alpha_{\uparrow}, \alpha, K^{\downarrow}, K_{\uparrow}\right)$: $\mathscr{C} \to \mathscr{X}$ and$\mathfrak{b} = \left(\beta^{\downarrow}, \beta_{\uparrow}, \beta, L^{\downarrow}, L_{\uparrow}\right)$: $\mathscr{X} \to \mathscr{Z}$，我们有

$$\mathscr{S}^1(\mathfrak{b} \circ \mathfrak{a}) = \mathscr{S}^1(\mathfrak{b}) \circ \mathscr{S}^1(\mathfrak{a}) \quad \text{and} \quad \mathscr{S}^1(\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\mathfrak{a}) = \delta_{\mathscr{S}^1(\mathscr{C}),\mathscr{S}^1(\mathscr{X})}\left(\mathscr{S}^1(\mathfrak{a})\right).$$

因此 $\mathscr{S}^1$: $\mathsf{CO}(\kappa) \to \mathsf{Ch}(\kappa)$ 确实是一个微分分次函子。

现在我们终于完成了范畴 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 和 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$的定义：

定义 2.3。 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 是微分分次范畴 $\mathsf{CO}(\kappa)$的零次上同调范畴。因此$\mathsf{HCO}(\kappa)$与 $\mathsf{CO}(\kappa)$具有相同的对象，并且用上述记号表示，

$$\mathrm{Hom}_{\mathsf{HCO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X}) = H^0\left(\mathrm{Hom}^*_{\mathsf{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X}), \delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\right).$$

类似地，$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$是微分分次范畴 $\mathsf{CO}^{\Lambda}(\kappa$的零次上同调范畴).

由于 $\mathsf{CO}^{\Lambda}(\kappa)$是微分分次范畴 $\mathsf{CO}(\kappa)$的全子范畴，因此也可以将 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 描述为 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 的全子范畴，它与 $\mathsf{CO}^{\Lambda}(\kappa)$具有相同的对象（即， Λ-有界滤过余跨）。

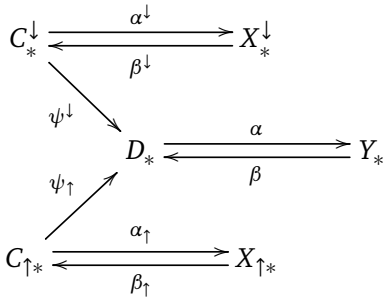
2.1. **HCO 中的同构**$\mathsf{HCO}(\kappa)$。现在我们着手证明定理 1.5，该定理给出了两个滤过余跨在 $\mathsf{HCO}(\kappa)$中同构的充要判据。第一步是以下命题。

命题 2.4. 设 $\mathscr{C} = \left(\mathscr{C}_{\uparrow}, \mathscr{C}^{\downarrow}, (\mathrm{D}_*, \partial_D), \psi_{\uparrow}, \psi^{\downarrow}\right)$ 和 $\mathscr{X} = \left(\mathscr{C}_{\uparrow}, \mathscr{C}^{\downarrow}, (\mathrm{D}_*, \partial_D), \phi_{\uparrow}, \phi^{\downarrow}\right)$ 是 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中具有相同链复形 $\mathscr{C}_{\uparrow}, \mathscr{C}^{\downarrow}, (\mathrm{D}_*, \partial_D)$ 的两个对象，并假设映射 $\psi_{\uparrow}$ 与 $\phi_{\uparrow}$ 之间以及映射 $\psi^{\downarrow}$ 与 $\phi^{\downarrow}$ 之间存在链同伦。那么 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构，且该同构由 $\mathrm{HomCO}_{(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$ 中的元素 $(\alpha^{\downarrow}, \alpha_{\uparrow}, \alpha, \mathrm{K}^{\downarrow}, \mathrm{K}_{\uparrow})$ 表示，其中 $\alpha^{\downarrow}$、$\alpha_{\uparrow}$ 和 α 分别在 $\mathrm{C}^{\downarrow}_*$、$\mathrm{C}\uparrow_*$ 和 D_* 上作用为恒等映射。

证明。假设 $\partial_D \circ \mathrm{K}^{\downarrow} + \mathrm{K}^{\downarrow} \circ \partial^{\downarrow}\mathrm{C} = \psi^{\downarrow} - \phi^{\downarrow}$，且 $\partial_D \circ \mathrm{K}_{\uparrow} + \mathrm{K}\uparrow \circ \partial \mathrm{C}_{\uparrow} = \psi_{\uparrow} - \phi_{\uparrow}$。由 (2.4) 可直接验证，$\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}(1_{C^{\downarrow}_*}, 1_{C_{\uparrow *}}, 1_{D_*}, \mathrm{K}^{\downarrow}, \mathrm{K}_{\uparrow}) = 0$，且 $\delta_{\mathscr{X},\mathscr{C}}(1_{C^{\downarrow}_*}, 1_{C_{\uparrow *}}, 1_{D_*}, -\mathrm{K}^{\downarrow}, -\mathrm{K}_{\uparrow}) = 0$，因此 $(1_{C^{\downarrow}_*}, 1_{C_{\uparrow *}}, 1_{D_*}, \mathrm{K}^{\downarrow}, \mathrm{K}_{\uparrow})$ 和 $(1_{C^{\downarrow}_*}, 1_{C_{\uparrow *}}, 1_{D_*}, -\mathrm{K}^{\downarrow}, -\mathrm{K}_{\uparrow})$ 在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中诱导出态射；根据 (2.3)，这些态射互为逆。□

若 $\mathscr{C}_{\uparrow} = (\mathrm{C}\uparrow_*, \partial\mathrm{C}\uparrow, \ell^C_{\uparrow})$ 以及 $\mathscr{X}_{\uparrow} = (\mathrm{X}\uparrow_*, \partial\mathrm{X}\uparrow, \ell^X_{\uparrow})$ 是上升链复形，则我们定义 $\mathscr{C}_{\uparrow}$ 与 $\mathscr{X}_{\uparrow}$之间的过滤同伦等价数据为一个元组 $(\alpha_{\uparrow}, \beta_{\uparrow}, \mathrm{K}\,\mathrm{C}\uparrow, \mathrm{K}^{X_{\uparrow}})$，其中 $\alpha_{\uparrow}$: $\mathrm{C}\uparrow_* \to \mathrm{X}\uparrow_*$ 和 $\beta_{\uparrow}$: $\mathrm{X}\uparrow_* \to \mathrm{C}\uparrow_*$ 是满足 $\ell^X_{\uparrow} \circ \alpha_{\uparrow} \le \ell^C_{\uparrow}$ 以及 $\ell^C_{\uparrow} \circ \beta_{\uparrow} \le \ell^X_{\uparrow}$的链映射，并且 $\mathrm{K}^{C_{\uparrow}}$: $\mathrm{C}\uparrow_* \to \mathrm{C}\uparrow_{*+1}$和 $\mathrm{K}\,\mathrm{X}\uparrow$: $\mathrm{X}\uparrow_* \to \mathrm{X}\uparrow_{*+1}$满足滤过条件 $\ell^C_{\uparrow} \circ \mathrm{K}^{C_{\uparrow}} \le \ell^C_{\uparrow}$以及 $\ell^X_{\uparrow} \circ \mathrm{K}\,\mathrm{X}\uparrow \le \ell^X_{\uparrow}$，以及链同伦方程 $\partial\mathrm{C}\uparrow \circ \mathrm{K}^{C_{\uparrow}} + \mathrm{K}\,\mathrm{C}\uparrow \circ \partial\mathrm{C}_{\uparrow} = 1_{C_{\uparrow *}} - \beta_{\uparrow} \circ \alpha_{\uparrow}$，和 $\partial\mathrm{X}\uparrow \circ \mathrm{K}^{X_{\uparrow}} + \mathrm{K}\,\mathrm{X}\uparrow \circ \partial\mathrm{X}_{\uparrow} = 1_{X_{\uparrow *}} - \alpha_{\uparrow} \circ \beta_{\uparrow}$。从 $\mathscr{C}_{\uparrow}$ 到 $\mathscr{X}_{\uparrow}$ 的过滤同伦等价按定义是指一个映射 $\alpha_{\uparrow}$: $\mathrm{C}\uparrow_* \to \mathrm{X}\uparrow_*$，它可以补充为过滤同伦等价数据 $(\alpha_{\uparrow}, \beta_{\uparrow}, \mathrm{K}\,\mathrm{C}\uparrow, \mathrm{K}^{X_{\uparrow}})$。同样地，对于下降链复形，也定义过滤同伦等价数据 $(\alpha^{\downarrow}, \beta^{\downarrow}, \mathrm{K}\,\mathrm{C}^{\downarrow}, \mathrm{K}\,\mathrm{X}^{\downarrow})$（不等式的方向相应反转，以适应滤过是下降的情形；例如，不再要求 $\ell^C_{\uparrow} \circ \beta_{\uparrow} \le \ell^X_{\uparrow}$，而要求 $\ell^{\downarrow}\mathrm{C} \circ \beta^{\downarrow} \ge \ell^{\downarrow}\mathrm{X}$）。

命题 2.5. 设 $\mathscr{C}=\Big((\mathrm{C}\uparrow_*、\ \partial\mathrm{C}\uparrow、\ \ell^{C}_{\uparrow})、(\mathrm{C}^{\downarrow}_{*}、\ \partial^{\downarrow}\mathrm{C}\ 、\ \ell^{\downarrow}\mathrm{C})、(\mathrm{D}_*、\ \partial_D)、\ \psi_{\uparrow}、\ \psi^{\downarrow}\Big)$ 是 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中的一个对象，并设有一个上升链复形 $(\mathrm{X}\uparrow_*、\ \partial\mathrm{X}\uparrow、\ \ell^{X}_{\uparrow})$，一个下降链复形 $(\mathrm{X}^{\downarrow}_{*}、\ \partial^{\downarrow}\mathrm{X}、\ \ell^{\downarrow}\mathrm{X})$，以及另一个链复形 $(\mathrm{Y}_*、\ \partial_Y)$，还有一个图表



其中，$\alpha^{\downarrow}$和 $\beta^{\downarrow}$是过滤同伦等价数据 $(\alpha^{\downarrow},\beta^{\downarrow},K_{C}{}^{\downarrow}、\ K_{X}{}^{\downarrow})$、$\alpha_{\uparrow}$和$\beta_{\uparrow}$的组成部分，而 $(\alpha_{\uparrow},\beta_{\uparrow},K^{C_{\uparrow}}、K^{X_{\uparrow}})$是过滤同伦等价数据的组成部分，并且链映射 α和 β 彼此是（未过滤的）同伦逆。于是，记

$$\mathscr{X}:=\Big((X_{\uparrow *},\partial^{X}_{\uparrow},\ell^{X}_{\uparrow}),(X^{\downarrow}_{*},\partial^{\downarrow}_{X},\ell^{\downarrow}_{X}),(Y_*,\partial_Y),\alpha\circ\psi^{\downarrow}\circ\beta^{\downarrow},\alpha\circ\psi_{\uparrow}\circ\beta_{\uparrow}\Big),$$

$\mathrm{Hom}^{0}{}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$中的元素 $\mathfrak{a}=(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,\alpha\circ\psi^{\downarrow}\circ K^{C^{\downarrow}}、\ \alpha\circ\psi_{\uparrow}\circ K_{C\ \uparrow})$在范畴$\mathrm{HCO}(\kappa)$中下降为一个同构。

证明。 在整个证明过程中，为节省篇幅，我们省略$\circ$符号。设$K^{D}\colon D_*\to D_{*+1}$ 以及$K_Y\colon Y_*\to Y_{*+1}$满足 $\partial_D K_D+K_D\ \partial_D=1_{D_*}-\beta\alpha$以及 $\partial_Y K_Y+K^{Y}\partial_Y=1_{Y_*}-\alpha\beta$。补充命题末尾定义的元素 $\mathfrak{a}\in\mathrm{Hom}^{0}{}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$，令

$$\mathfrak{b}=\big(\beta^{\downarrow},\beta_{\uparrow},\beta,-K^{D}\psi^{\downarrow}\beta^{\downarrow},-K^{D}\psi_{\uparrow}\beta_{\uparrow}\big)\in\mathrm{Hom}^{0}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{X},\mathscr{C}).$$

可以验证，$\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\mathfrak{a}=0$并且$\delta_{\mathscr{X},\mathscr{C}}\mathfrak{b}=0$，因此 $\mathfrak{a}$和 $\mathfrak{b}$分别降为 $\mathrm{Hom}_{\mathrm{HCO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$和$\mathrm{Hom}_{\mathrm{HCO}(\kappa)}(\mathscr{X},\mathscr{C})$中的元素。

此外，如果

$$\zeta=(-K^{C^{\downarrow}},-K^{C_{\uparrow}},K^{D},K^{D}\psi^{\downarrow}K^{C^{\downarrow}},K^{D}\psi_{\uparrow}K^{C_{\uparrow}})\in\mathrm{Hom}^{-1}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{C}),$$

计算可得

$$\delta_{\mathscr{C},\mathscr{C}}\zeta=1_{\mathscr{C}}-\mathfrak{b}\mathfrak{a}.$$

（这里 $1_{\mathscr{C}}=(1_{C^{\downarrow}_{*}},1_{C_{\uparrow *}},1_{D_*},0,0)$是 $\mathrm{Hom}^{0}{}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{C})$ 中的恒等映射。）类似地，若令 $L^{\downarrow}=K_D\psi^{\downarrow}\beta^{\downarrow}-\psi^{\downarrow}K_{C}{}^{\downarrow}\beta^{\downarrow}+\psi^{\downarrow}\beta^{\downarrow}K_{X}{}^{\downarrow}$、$L\uparrow=K_D\ \psi_{\uparrow}\beta_{\uparrow}-\psi_{\uparrow}K_{C\ \uparrow}\beta_{\uparrow}+\psi_{\uparrow}\beta_{\uparrow}K_{X\ \uparrow}$，并且

$$\begin{aligned}\eta=\Big(&-(\alpha^{\downarrow}K^{C^{\downarrow}}\beta^{\downarrow}+(1_{X^{\downarrow}_{*}}-\alpha^{\downarrow}\beta^{\downarrow})K^{X^{\downarrow}}),\ -(\alpha_{\uparrow}K^{C_{\uparrow}}\beta_{\uparrow}+(1_{X_{\uparrow *}}-\alpha_{\uparrow}\beta_{\uparrow})K^{X_{\uparrow}}),\\&\alpha K^{D}\beta+\big(\alpha K^{D}\beta+(1_{Y_*}-\alpha\beta)K^{Y}\big)(1_{Y_*}-\alpha\beta),\\&\big((1_{Y_*}-\alpha\beta)K^{Y}\alpha-\alpha K^{D}(1_{D_*}-\beta\alpha)\big)L^{\downarrow}+\alpha\psi^{\downarrow}K^{C^{\downarrow}}(\beta^{\downarrow}K^{X^{\downarrow}}-K^{C^{\downarrow}}\beta^{\downarrow}),\\&\big((1_{Y_*}-\alpha\beta)K^{Y}\alpha-\alpha K^{D}(1_{D_*}-\beta\alpha)\big)L_{\uparrow}+\alpha\psi_{\uparrow}K^{C_{\uparrow}}(\beta_{\uparrow}K^{X_{\uparrow}}-K^{C_{\uparrow}}\beta_{\uparrow})\ \Big),\end{aligned}$$

经过更长但直接的计算可知，元素 $\eta \in \mathrm{Hom}^{-1}\,\mathrm{CO}(\kappa)(\mathscr{X},\mathscr{X})$ 满足

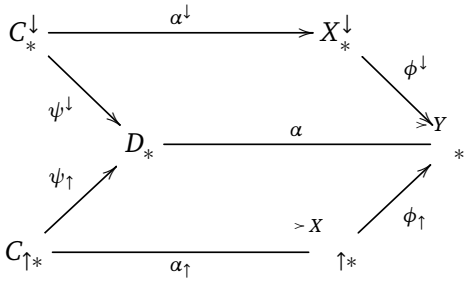
$$\delta_{\mathscr{X},\mathscr{X}}\eta = 1_{\mathscr{X}} - \mathfrak{a}\mathfrak{b}.$$

因此，由 $\mathfrak{a}$ 和 $\mathfrak{b}$ 表示的上同调类在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$中互为逆元，因此它们是同构。

□

现在我们可以证明定理 1.5 的以下更具体版本。

推论 2.6. 设 $\mathscr{C} = \Big((\mathrm{C}\uparrow_*, \partial\mathrm{C}\uparrow, \ell^C_\uparrow), (\mathrm{C}^\downarrow_*, \partial^\downarrow\mathrm{C}, \ell^\downarrow\mathrm{C}), (\mathrm{D}_*, \partial_D), \psi_\uparrow, \psi^\downarrow\Big)$ 和 $\mathscr{X} = \Big((\mathrm{X}\uparrow_*, \partial\mathrm{X}\uparrow, \ell^X_\uparrow), (\mathrm{X}^\downarrow_*, \partial^\downarrow\mathrm{X}, \ell^\downarrow\mathrm{X}), (\mathrm{Y}_*, \partial_Y), \phi_\uparrow, \phi^\downarrow\Big)$ 是 $\mathrm{HCO}(\kappa)$中的两个对象。那么，当且仅当存在一个图表时，$\mathscr{C}$和$\mathscr{X}$ 在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构



其中，$\alpha_\uparrow$ 和 $\alpha^\downarrow$ 是过滤同伦等价，α 是同伦等价，并且两个平行四边形在链同伦意义下交换。此外，在这种情形下，这样的同构可以取为某个 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Hom}^0\,\mathrm{CO}(\kappa)(\mathscr{C},\mathscr{X})$ 的上同调类，其中$\delta_{\mathscr{C}}$，$_{\mathscr{X}}\mathfrak{a} = 0$可写成如下形式：$\mathfrak{a} = (\alpha^\downarrow, \alpha_\uparrow, \alpha, K^\downarrow, K_\uparrow)$，这里给定映射为 $\alpha^\downarrow$、$\alpha_\uparrow$、α，而某些映射为$K^\downarrow\colon C^\downarrow_* \to Y_{*+1}$和$K\uparrow\colon C\uparrow_* \to Y_{*+1}$。

证明。 正向蕴含可由定义直接得出：若$\mathfrak{a} = (\alpha^\downarrow, \alpha_\uparrow, \alpha, K^\downarrow, K_\uparrow) \in$的核为$\delta_{\mathscr{C}}$，$_{\mathscr{X}}|_{\mathrm{Hom}^0\,\mathrm{CO}(\kappa)(\mathscr{C},\mathscr{X})}$下降为 $\mathrm{HCO}(\kappa)$中的一个同构，则由$\delta_{\mathscr{C}}$、$_{\mathscr{X}}\mathfrak{a} = 0$可知 $\alpha^\downarrow$、$\alpha_\uparrow$和 α 是链映射，并且$K^\downarrow$（分别地，$K\uparrow$）给出了 $\phi^\downarrow \circ \alpha^\downarrow$ 与 $\alpha \circ \psi^\downarrow$ 之间的同伦（分别地，给出了 $\phi_\uparrow \circ \alpha_\uparrow$ 与 $\alpha \circ \psi_\uparrow$)之间的同伦）。此外，$\mathrm{CO}(\kappa)$ 中的复合定义以及$\delta_{\mathscr{C}}$、$_{\mathscr{C}}$ 的定义意味着 $\alpha^\downarrow$ 和$\alpha_\uparrow$ 是过滤同伦等价，且 α是同伦等价。

反过来，给定推论中的 $\alpha^\downarrow$、$\alpha_\uparrow$、α，令 $\beta^\downarrow$、$\beta_\uparrow$、β 为命题 2.5 中的同伦逆（前两种情形下为滤过的）。该命题表明，当 $\phi^\downarrow = \alpha \circ \psi^\downarrow \circ \beta^\downarrow$ 且 $\phi_\uparrow = \alpha \circ \psi_\uparrow \circ \beta_\uparrow$时，结论成立。一般情形下，假设 $\phi^\downarrow \circ \alpha^\downarrow$ 与 $\alpha \circ \psi^\downarrow$ 链同伦，再结合 $\alpha^\downarrow$ 和 $\beta^\downarrow$ 互为同伦逆这一事实，可得 $\phi^\downarrow$ 与 $\alpha \circ \psi^\downarrow \circ \beta^\downarrow$链同伦；类似地，$\phi_\uparrow$ 与 $\alpha \circ \psi_\uparrow \circ \beta_\uparrow$ 链同伦。

令 $\mathscr{X}\prime$为从 $\mathscr{X}$得到的 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中的对象，其中将 $\phi_\uparrow$和 $\phi^\downarrow$分别替换为 $\alpha \circ \psi_\uparrow \circ \beta_\uparrow$和 $\alpha \circ \psi^\downarrow \circ \beta^\downarrow$。于是命题 2.5 给出一个映射 $\mathfrak{a}_0 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X}\prime)$，它下降为 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中的一个同构；命题 2.4 给出一个映射 $\mathfrak{a}_1 \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{CO}(\kappa)}(\mathscr{X}\prime,\mathscr{X})$，它下降为 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中的一个同构。因此，$\mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_0$ 的上同调类给出

$\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中 $\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{X}$ 之间的一个同构。此外，由于 $\mathfrak{a}_0$ 可以取为 $(\alpha^{\downarrow}, \alpha_{\uparrow}, \alpha, *, *)$ 的形式，而 $\mathfrak{a}_1$ 可以取为 $(1_{X_*^{\downarrow}}, 1_{X_{\uparrow *}}, 1_{Y_*}, *, *)$ 的形式，因此映射 $\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 \circ \mathfrak{a}_0$ 可以取为推论最后一句所要求的形式。

□

3. 直和分解

现在我们着手建立滤过余跨分解为标准初等直和项的一般条件。在此过程中，我们将讨论滤过向量空间和上升链复形的直和分解。始终如一地，我们按照 [UZ16] 中的方式，使用相对于滤过的“正交性”这一术语。（“正交”一词的这种用法借鉴了非阿基米德几何，不过由于在当前语境中相关的非阿基米德赋值是平凡的，从几何角度看，这一术语可能显得不那么合理。）

3.1. **过滤向量空间**。

定义 3.1：域 κ 上的滤过向量空间是一个二元组 $(V,\ \ell)$ 其中 V 是域 κ 上的向量空间，且 $\ell\colon V \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ 是满足以下条件的函数：

- $\ell(v) = -\infty$ 当且仅当 $v = 0$;
- $\ell(cv) = \ell(v)$ 对所有 $v \in V$ 以及 $c \in \kappa \setminus \{0\}$
- $\ell(v + w) \le \max\{\ell(v),\ \ell(w)\}$ 对所有 $v,\ w \in V$。

注 3.2：标准练习表明，在滤过向量空间 $(V$中，$\ell)$若 $\ell(v) \neq \ell(w)$，则 $\ell(v + w) = \max\{\ell(v), \ell(w)\}$。

注 3.3. 如果 $(\mathrm{V}\ell)$ 是一个滤过向量空间，那么对任意 $\mathrm{t} \in \mathbb{R}$，$\mathrm{V}^{\le t} := \ell^{-1}([-\infty, \mathrm{t}])$ 是 V 的子空间；当 $\mathrm{s} \le \mathrm{t}$ 时，$\mathrm{V}^{\le \mathrm{s}} \le \mathrm{V}^{\le \mathrm{t}}$。因此，如果 $\mathrm{t}_1 < \mathrm{t}_2 < \cdots < \mathrm{t}_k$ 是 ℓ的像中的元素，则有一个严格递增的子空间序列 $\mathrm{V}^{\le \mathrm{t}_1} < \mathrm{V}^{\le \mathrm{t}_2} < \cdots < \mathrm{V}^{\le \mathrm{t}_k}$。特别地，如果 V 是有限维的，则 ℓ 的像是一个有限集。

过滤向量空间构成一个范畴，其中态射 $(\mathrm{V}0, \ell_0) \to (\mathrm{V}1, \ell_1)$ 是线性映射 $\mathrm{A}\colon \mathrm{V}_0 \to \mathrm{V}_1$，满足 $\ell_1(\mathrm{Av}_0) \le \ell_0(\mathrm{v}_0)$ 对所有 $\mathrm{v}_0 \in \mathrm{V}_0$ 均成立。该范畴存在直和：给定过滤向量空间 $(\mathrm{V}_\alpha, \ell_\alpha)$（其中 α 遍历某个可能无限的指标集），令 $\mathrm{V} = \oplus_\alpha \mathrm{V}_\alpha$，并定义 $\ell\colon \mathrm{V} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$，使得 $\ell\left(\sum_\alpha \mathrm{c}_\alpha \mathrm{v}_\alpha\right) = \max_\alpha\{\ell_\alpha(\mathrm{v}_\alpha) | \mathrm{c}_\alpha \neq 0\}$。

定义 3.4。若 (V, ℓ) 是一个滤过向量空间，且 $S \subset V \setminus \{0\}$，我们称 S 是 **ℓ-正交** 的，当且仅当

$$\ell\Big(\sum_{i=1}^{n} c_i v_i\Big) = \max_i \{\ell(v_i) | c_i \neq 0\} \tag{3.1}$$

对于从 S 中选取的任意有限个互不相同的元素 v_i，以及 $c_i \in \kappa$,

等价地，S 是 ℓ-正交的，当且仅当S的张成空间（其滤过由ℓ的限制给出）是S中各元素所张成的一维空间的直和（作为滤过向量空间）。注意，若S 是 ℓ-正交的，则它线性无关。

下面给出一个判据，用于检验有限维滤过向量空间的基是否正交；我们将在第 5 节中发现这一判据很方便。

命题 3.5. 设 (V,ℓ) 是一个有限维滤过向量空间，并对每个 $t \in \mathbb{R}$引入子空间

$$V^{\leq t} = \{v \in V | \ell(v) \leq t\} \qquad V^{<t} = \{v \in V | \ell(v) < t\}.$$

那么：

(i) V 的一组基 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 是 ℓ-正交的，当且仅当对每个 t，t 在多重集 $\{\ell(v_i) | i = 1, \ldots, d\}$ 中的重数等于 $\dim\left(V^{\leq t}/V^{<t}\right)$。(ii) 如果 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 是 (V, ℓ) 的一组 ℓ-正交基，而 $\{w_1, \ldots, w_d\}$ 是 V 的另一组基，那么 $\{w_1, \ldots, w_d\}$ 是 ℓ-正交的，当且仅当多重集 $\{\ell(v_i) | i = 1, \ldots, d\}$ 和 $\{\ell(w_i) | i = 1, \ldots, d\}$ 相等。

证明。对于 (i) 的正向蕴含，只需注意，$\{v_1, \ldots, v_d\}$的正交性意味着，对于任意 t，$V^{\leq t}$是由满足 $\ell(v_i) \leq t$ 的那些 v_i 张成的空间，而 $V^{<t}$ 是由满足 $\ell(v_i) < t$ 的那些 v_i 张成的空间。

现在证明 (i) 的逆向蕴含。由于 V 是有限维的，$\ell(V \setminus \{0\})$ 是一个有限集，设为 $\{t_1, \ldots, t_k\}$，其中 $t_1 < \cdots < t_k$。我们的假设等价于以下陈述：对于 $j = 1, \ldots, k$,

$$\#\{i | \ell(v_i) < t_j\} = \dim V^{<t_j}. \tag{3.2}$$

反设 $\{v_1, \ldots, v_d\}$ 并非正交，则存在某个非零线性组合 $v = \sum_i a_i v_i$，满足 $\ell(v) < \max\{\ell(v_i) | a_i \neq 0\}$。此时，令 j_0 为满足存在某个 i_0 使得 $a_{i_0} \neq 0$ 且 $\ell(v_{i_0}) = t_{j_0}$ 的最大值。那么 $\{v\} \cup \{v_i | \ell(v_i) < t_{j_0}\}$ 将是 $V^{<t_{j_0}}$ 中的一个线性无关集，这与 (3.2) 的 $j = j_0$ 版本矛盾。至此，(i) 的证明完成。

（ii）只需将（i）分别应用于$\{v_1, \ldots, v_d\}$和$\{w_1, \ldots, w_d\}$即可得证。 □

定义 3.6. 若滤过向量空间 (V,ℓ) 满足**最佳逼近性质**，则对于任意真子空间W （属于V）以及任意$v \in V \setminus W$，存在$w_0 \in W$，使得$\ell(v - w_0) \leq \ell(v - w)$对所有$w \in W$均成立。

命题 3.7. 滤过向量空间 (V,ℓ) 满足最佳逼近性质，当且仅当 $\ell(V \setminus \{0\})$ 是.的良序子集。

（特别地，由注记 3.3 可知，若V 是有限维的，则 (V,ℓ) 满足最佳逼近性质。）

证明。逆向蕴含显然，因为最佳逼近性质相当于断言，形如$\{\ell(v - w) | w \in W\}$ 的$V \setminus \{0\}$）的子集（其中$W \leq V$且$v \notin W$）都有最小元。

对于正向蕴含，假设 $\ell(V \setminus \{0\})$ 不是良序，并证明这使我们能够构造一个违反最佳逼近性质的反例。$\ell(V \setminus \{0\})$ 不是良序意味着存在一个序列 $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ in $V \setminus \{0\}$，使得对所有 i，$\ell(x_{i+1}) < \ell(x_i)$。注意，注 3.2 表明 $\{x_i | i \geq 1\}$ 是 ℓ- 正交的，因此是一个线性无关集。令 $v = x_1$，并令 $W = \text{span}\{x_{i+1} - x_i | i \geq 1\}$。由于 $x_i = x_1 + \sum_{j=1}^{i-1}(x_{j+1} - x_j)$，集合 $L := \{\ell(v - w) | w \in W\}$ 包含每个 $\ell(x_i)$；反过来，由于 L 中的每个元素都是通过取各种 x_i的非零线性组合的 ℓ 得到的，根据注 3.2 可知，L 中唯一的元素就是 $\ell(x_i)$。因此，

这些 $\ell(x_i)$严格递减，这意味着 L 不包含其下确界，因此违反了最佳逼近性质。□

以下内容与 [UZ16 的引理 2.15]的一个特例非常相似；为方便读者，我们给出证明。

命题 3.8。设 $(V\ell)$ 是一个滤过向量空间，$S \subset V$ 是一个 ℓ-正交子集，并令 $W = \mathrm{span}(S)$。假设 $v \in V \setminus W$ 且 $w_0 \in W$ 满足：对于所有 $w \in W$，均有 $\ell(v - w_0) \leq \ell(v - w)$。那么 $S \cup \{v - w_0\}$ 仍是一个 ℓ-正交集。

证明。令 $W' = \mathrm{span}(S \cup \{v - w_0\})$，这样 W' 中的任意元素 $w' \in$ 都可以唯一地写成 $w' = a(v - w_0) + w$，其中 $a \in \kappa$，且 $w \in W$；进而，我们可以将 w 写成 $= \sum_{i=1}^{n} b_i s_i$，其中某个 $s_i \in S$ 且 $b_i \in \kappa$，而 S 的正交性意味着 $\ell(w) = \max\{\ell(s_i) | b_i \neq 0\}$。

与 (3.1) 比较，我们需要证明

$$\ell(w') = \begin{cases} \max(\{\ell(v - w_0)\} \cup \{\ell(s_i) | b_i \neq 0\}) & \text{if } a \neq 0 \\ \max\{\ell(s_i) | b_i \neq 0\} & \text{if } a = 0 \end{cases} \tag{3.3}$$

若 $a = 0$，则 $w' = w$，所需结论由S的正交性立即可得，因此下文假设 $a \neq 0$。若 $\ell(v - w_0) < \ell(w)$，则注 3.2 表明$\ell(w') = \ell(w) = \max\{\ell(s_i) | b_i \neq 0\}$；由于假设 $\ell(v - w_0) < \ell(w)$，这等于 (3.3) 右侧的第一行。

在剩下的情形中，$a \neq 0$ 且 $\ell(v - w_0) \geq \ell(w)$，我们有

$$\ell(w') = \ell\left(\frac{1}{a} w'\right) = \ell\left(v - \left(w_0 - \frac{1}{a} w\right)\right) \geq \ell(v - w_0),$$

其中，第一个等号用到了定义 3.1 的第二条，第二个等号则用到了命题中关于w_0 的假设。因此，若 $\ell(v - w_0) \geq \ell(w)$，则 $\ell(w')$ 大于或等于 (3.3) 的右侧；另一方面，反向不等式由定义 3.1 的第三条立即可得。这就证明了 (3.3) 在所有情形下均成立，从而证明了该命题。

□

命题 3.9. 设滤过向量空间 (V, ℓ) 满足最佳逼近性质。那么V 有一个 ℓ-正交子集，它是V的一组基。此外，若S是子空间W 的一组 ℓ-正交基，且W是V 的子空间，则V 有一组包含S 的 ℓ-正交基。

证明. 空集是V的平凡子空间$\{0\}$ 的一组 ℓ-正交基，因此第二句话由第三句话推出，下面我们来证明第三句话。给定W的一组正交基S，令 $\mathscr{S}$ 表示V 的所有满足$S \subset S'$的正交子集 S' 构成的集合，并按包含映射排序。V 的任意全序正交子集族的并仍然正交，因此佐恩引理表明 $\mathscr{S}$ 有一个极大元素。由命题 3.8 可知，不张成V 的正交子集不可能是$\mathscr{S}$中的极大元素，所以这个极大元素就是所需的V的一组 ℓ-正交基。□

定义3.10：如果 (V, ℓ) 是带有子空间 W 的滤过向量空间，则 W 的 **ℓ-正交补** 是指一个子空间 $X \leq V$，满足 $W \oplus X = V$，并且对所有 $w \in W$ 和 $x \in X$，有 $\ell(w + x) = \max\{\ell(w), \ell(x)\}$。

(Equ也就是说，V 是范畴 滤过向量空间中 W 与X 的直和。）

推论 3.11。 如果滤过向量空间 (V,ℓ) 满足最佳逼近性质，那么 V 的每个子空间都有一个 ℓ-正交补。

证明。 设 $W \leq V$ 是任意子空间。该子空间继承了V的最佳逼近性质，因此根据命题 3.9，W 有一个 ℓ-正交基，记为 S。此外，再次应用命题 3.9，可得V 的一个 ℓ-正交基 S'，满足 $S \subset S'$。那么，$S' \setminus S$ 的张成空间将是W的一个 ℓ-正交补。 □

注3.12。 在这种情形下，正交补并不唯一：例如，若V由两个元素v 和w 张成，且 $\ell(v) > \ell(w)$，而 W = 张成空间$\{w\}$，那么张成空间$\{v\}$ 和张成空间$\{v + w\}$ 都可以作为W的一个 ℓ-正交补。

3.2. 上升链复形。根据定义 1.1，域 κ 上的上升链复形由数据 $(C\uparrow_*, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$ 组成，其中 $C_{\uparrow *} = \oplus_{k\in\mathbb{Z}} C\uparrow^k$ 是 κ 上的分次向量空间，$(C\uparrow_*, \ell_\uparrow)$ 是上一节意义下的滤过向量空间，且$(C\uparrow_*, \ell_\uparrow) = \oplus_k (C\uparrow^k, \ell|_{C_{\uparrow k}})$ 是滤过向量空间；此外，$\partial_\uparrow : C\uparrow_* \to C\uparrow_*$ 限制为映射 $\partial_{\uparrow k} : C\uparrow^k \to C\uparrow^{k-1}$，满足 $\partial_{\uparrow k}\partial_{\uparrow k+1} = 0$，并且对所有 $c \in C_*$，都有 $\ell_\uparrow(\partial_\uparrow c) \leq \ell_\uparrow(c)$。照例，我们记 $H_k(C_{\uparrow *}) = \ker \partial_{\uparrow k} \operatorname{Im} \partial_{\uparrow k+1}$，并记 $H_*(C_{\uparrow *}) = \oplus_k H_k(C_{\uparrow *})$。上升链复形构成一个范畴，其态射为滤过链映射，即同时也是滤过向量空间态射的链映射。以显然的方式，可以得到滤过链复形的直和，这扩展了上一节中滤过向量空间直和的概念。

In 在此设定下，将谱不变量函数 $\rho\uparrow : H_*(C_{\uparrow *}) \to \mathbb{R} \cup -\infty$定义为

$$\rho_\uparrow(h) = \inf\{\ell(c) | c \in \ker \partial_\uparrow, [c] = h\} \tag{3.4}$$

（其中 [c] 表示循环 c 的同调类）。

命题 3.13. 设 $(C\uparrow_*, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$ 为一个滤过链复形，记号如上，并假设对于所有 k，$(C\uparrow^k, \ell_\uparrow|_{C_{\uparrow k}})$ 均满足最佳逼近性质。则对于每个 k，存在一个子空间 $\mathscr{H}_k \leq \ker \partial_{\uparrow k}$，使得典范投影 $\pi_k : \ker \partial_k \to H_k(C_{\uparrow *})$ 限制在 $\mathscr{H}_k$ 上是一个同构，并且对于每个 $c \in \mathscr{H}_k$，都有 $\rho_\uparrow(\pi_k(c)) = \ell_\uparrow(c)$。特别地，$(H_k(C_{\uparrow *}), \rho\uparrow|_{H_k(C_{\uparrow *})})$ 是一个满足最佳逼近性质的滤过向量空间。

证明。最佳逼近性质在子空间中得以继承，因此 $\ker \partial_{\uparrow k}$也满足该性质。取 $\mathscr{H}_k$作为子空间 $\operatorname{Im} \partial_{\uparrow k+1}$ 在 $\ker \partial_{\uparrow k}$ 中的 $(\ell_\uparrow|_{\ker \partial_{\uparrow k}})$- 正交补（如推论 3.11 所述）。由于 $(\operatorname{Im} \partial_{\uparrow k+1}) \oplus \mathscr{H}_k = \ker \partial_{\uparrow k}$，投影 π_k 限制在$\mathscr{H}_k$ 上时，是到 $H_k(C_{\uparrow *})$的同构。此外，若 $c \in \mathscr{H}_k$ 且 $c' \in \ker \partial_{\uparrow k}$，并且 $\pi_k(c) = \pi_k(c')$，那么由于 $c' - c \in \operatorname{Im} \partial_{\uparrow k+1}$，$\mathscr{H}_k$与 $\operatorname{Im} \partial_{\uparrow k+1}$的正交性意味着 $\ell_\uparrow(c') = \max\{\ell_\uparrow(c' - c), \ell_\uparrow(c)\} \geq \ell_\uparrow(c)$。因此 $\rho_\uparrow(\pi_k(c)) = \ell_\uparrow(c)$。

因此，π_k给出了滤过向量空间 $(\mathscr{H}_k, \ell_\uparrow|_{\mathscr{H}_k}) \to (H_k(C_{\uparrow *}), \rho\uparrow|_{H_k(C_{\uparrow *})})$之间的同构。因此，由于 $\mathscr{H}_k$ 从 $C\uparrow^k$继承了最佳逼近性质，$(H_k(C_{\uparrow *}), \rho\uparrow|_{H_k(C_{\uparrow *})})$ 也满足此性质。□

命题 3.14。 设 $(C\uparrow*, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$ 是一个上升链复形，其中每个 $C\uparrow k$ 都满足最佳逼近性质。那么，存在 $C\uparrow*$ 的子复形 $A*$ 和 $\mathscr{H}_*$，使得：

- $A*$ 与 $\mathscr{H}_*$ 互为 $\ell_\uparrow$-正交补；
- $\partial_\uparrow|_{\mathscr{H}_*} = 0$，且典范投影 $\ker\partial_\uparrow k \to Hk(C_{\uparrow*})$ 诱导了滤过向量空间 $(\mathscr{H}_k、\ell_\uparrow|_{\mathscr{H}_k})\to(Hk(C_{\uparrow*})、\rho_\uparrow|_{Hk(C_{\uparrow*})})$之间的同构，对每个 k 均成立。
- $Hk(A_*) = 0$ 对所有 k 均成立。

证明。对每个 k，令 $\mathscr{H}_k$ 如命题 3.13 所述，并令 $\mathscr{H}_* = \oplus_k\mathscr{H}_k$；显然， $\mathscr{H}_*$ 是 C↑* 的一个子复形，且其微分为零，满足该命题的第二个要求。此外，令 $F_k \le C\uparrow k$ 为 $\ker\ \partial_\uparrow k$的一个 $(\ell_\uparrow|_{C_\uparrow k})$-正交补。取 $A_k = F_k \oplus \operatorname{Im}\ \partial_{\uparrow k+1}$。则 $A_* = \oplus_k A_k$ 构成 C↑* 的一个子复形，因为 A_k 包含 $\operatorname{Im}\partial_{\uparrow k+1}$ 的所有元素。由于 F_k 是 $\ker\partial_\uparrow k$的补空间， $\partial_\uparrow k$ 限制在 F_k 上时是到 $\operatorname{Im}(\partial_{\uparrow k-1})$的一个同构。因此， $\partial_\uparrow|_{A_k}$ 的核等于 $\operatorname{Im}(\partial_{\uparrow k+1})$；由于 A_{k+1}包含 $\ker\partial_{\uparrow k+1}$的补空间 F_{k+1}，这与 $\operatorname{Im}(\partial_{\uparrow k+1}|_{A_{k+1}})$重合。因此，子复形 $A*$ 具有平凡同调。还需验证，对每个 k， $\mathscr{H}_k$ 与 A_k 是 $\ell_\uparrow$-正交的。若 $h \in \mathscr{H}_k$ 且 $a \in A_k$，则可将 a 写成 $= f + b$，其中 $f \in F_k$ 且 $b \in \operatorname{Im}\partial_{\uparrow k+1}$。若 $\ell_\uparrow(b) > \ell_\uparrow(h)$，则根据注 3.2， $\ell_\uparrow(b + h) = \ell_\uparrow(b)$；若 $\ell_\uparrow(b) \le \ell(h)$，则 $\ell_\uparrow(h) = \max\{\ell_\uparrow(b), \ell_\uparrow(h)\} \ge \ell_\uparrow(b + h) \ge \rho_\uparrow([h]) = \ell_\uparrow(h)$，因此处处取等号。无论哪种情况，都有 $\ell_\uparrow(b + h) = \max\{\ell_\uparrow(b), \ell_\uparrow(h)\}$。现在，由于 F_k 与 $\ker\partial_\uparrow k$ 是 $\ell_\uparrow$-正交的，我们有

$$\begin{aligned}\ell_\uparrow(a+h) &= \ell_\uparrow(f+b+h) = \max\{\ell_\uparrow(f), \ell_\uparrow(b+h)\} = \max\{\ell_\uparrow(f), \ell_\uparrow(b), \ell_\uparrow(h)\} \\ &= \max\{\ell_\uparrow(f+b), \ell_\uparrow(h)\} = \max\{\ell_\uparrow(a), \ell_\uparrow(h)\},\end{aligned}$$

正如所需。 □

在命题 3.14 的情形下，为每个 $\mathscr{H}_k$ 选取一个 $\ell_\uparrow|_{\mathscr{H}_k}$ 正交基（由命题 3.9 可知这样的基存在），我们便得到 $\mathscr{H}_*$ 的分解：它是若干过滤的一维链复形的直和，且每个复形的微分都为零。同样，下面的命题使我们能够将无环复形 $A*$ 分解为简单过滤链复形的直和（不过，由于 $H_k(A_*) = 0$，这些直和项的微分必须非零，因此它们将是二维的，而非一维的）。

命题 3.15。设 $(A_*, \partial_\uparrow, \ell_\uparrow)$ 是一个上升链复形，满足对所有 k 都有 $H_k(A_*) = 0$，并假设对每个 k， A_k 都满足最佳逼近性质。那么，对于适当的指标集 $\mathscr{I}_k$，存在各个 A_k 的 $(\ell_\uparrow|_{A_k})$-正交基 $\{x\,k\,i \mid i \in \mathscr{I}_{k+1}\} \cup \{y^k j \mid j \in \mathscr{I}_k\}$，使得对每个 $i \in \mathscr{I}_{k+1}$，都有 $\partial_\uparrow y^{k+1} i = x\,k\,i$。

证明。记 $B_k = \partial_\uparrow(A_{k+1})$，因此，假设 $H_k(A_*) = 0$ 意味着 $B_k = \ker(\partial_\uparrow|_{A_k})$。对于每个 k，令 F_k为 B_k的一个 $(\ell_\uparrow|_{A_k})$-正交补。于是， $\partial_\uparrow$将 F_{k+1} 限制为到 B_k的向量空间同构。为证明该命题，只需对任意 k，找出 F_{k+1}的一个 $(\ell_\uparrow|_{F_{k+1}})$-正交基 $\{y^{k+1} i \mid i \in \mathscr{I}_{k+1}\}$，使其在 $\partial_\uparrow$ 下的像是 B_k的一个 $(\ell_\uparrow|_{B_k})$-正交基。（事实上，由于 B_k 和 F_k 是$\ell_\uparrow$-正交的，两个子集 $\{\partial_\uparrow y^{k+1} i \mid i \in \mathscr{I}_{k+1}\} \subset B_k$和 $\{y^k j \mid j \in \mathscr{I}_k\} \subset F_k$分别正交，便可立即推出它们的并集正交。）

命题 3.7 意味着集合 $\ell_\uparrow(A_{k+1}\setminus\{0\})$ 是良序的。我们使用由这个良序集指标化的递归来构造所需的基

$$J_{k+1} := \ell_\uparrow(A_{k+1}\setminus\{0\})\cup\{\infty\}$$

（其中 $\infty > \lambda$ 对所有 $\lambda\in\ell_\uparrow(A_{k+1}\setminus\{0\})$均成立）。对于任意 $\lambda\in J_{k+1}$，记

$$F_{k+1}^{\le\lambda} = \{y\in F_{k+1}|\ell_\uparrow(y)\le\lambda\} \qquad F_{k+1}^{<\lambda} = \{y\in F_{k+1}|\ell_\uparrow(y)<\lambda\}$$
$$B_{k,\le\lambda} = \partial_\uparrow(F_{k+1}^{\le\lambda}) \qquad B_{k,<\lambda} = \partial_\uparrow(F_{k+1}^{<\lambda})$$

因此， $\partial_\uparrow$同构地将映射 $F^{\le\lambda}{}_{k+1}$到 $B_{k,\le\lambda}$并将 $F^{<\lambda}{}_{k+1}$同构地映射到 $B_{k,<\lambda}$。作为特例，$F^{<\infty}{}_{k+1} = F_{k+1}$ 和 $B_{k,<\infty} = B_k$。

给定 $\lambda\in J_{k+1}$，作为递归构造的输入，我们假设对于所有满足 $\mu<\lambda$ 的 $\mu\in J_{k+1}$，都已构造出一个 $F^{<\mu}{}_{k+1}$ 的 $(\ell|_{F^{<\mu}{}_{k+1}})$-正交基 S_μ，使得 $\partial(S_\mu)$ 同时也是 $B_{k,<\mu}$ 的一个 $(\ell|_{B_{k,<\mu}})$-正交基；此外，我们还假设，对于满足 $\mu<\lambda$ 的各种 S_μ，若 $\nu<\mu<\lambda$，则 $S_\nu\subset S_\mu$。为了继续递归，我们需要将此构造扩展到情形 $\mu=\lambda$。

如果 λ 在 J_{k+1} 中没有直接前驱（即 $\{\mu\in J_{k+1}|\mu<\lambda\}$ 没有最大元素），那么我们只需取 $S_\lambda = \cup_{\mu<\lambda}S_\mu$ 即可。因此，现在假设 λ 在 J_{k+1} 中确有直接前驱，记为 λ^-。于是 $F^{<\lambda}{}_{k+1} = F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$，且 $B_{k,<\lambda} = B_{k,\le\lambda^-}$，因此我们的任务是将 $F^{<\lambda^-}{}_{k+1}$ 的基 S_{λ^-} 扩充为 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$ 的一组基，同时保留该基及其在 $\partial_\uparrow$ 下的像均为 $\ell_\uparrow$-正交的性质。

现在，作为 A_k 的子空间，$B_{k,\le\lambda^-}$ 满足最佳逼近性质，因此根据命题 3.9，我们可以将 $B_{k,<\lambda^-}$ 的 $\ell_\uparrow$-正交基 $\partial_\uparrow(S_{\lambda^-})$ 扩充为 $B_{k,\le\lambda^-}$ 的一组 $\ell_\uparrow$-正交基 $\partial_\uparrow(S_{\lambda^-})\cup T$。我们声称 $S_\lambda := S_{\lambda^-}\cup(\partial_\uparrow|_{F_{k+1}})^{-1}(T)$ 满足所需性质。从构造可直接得出，$S\,\partial_\uparrow($ 是 $B_{k,\le\lambda^-}$ 的一组 $\ell_\uparrow$-正交基；我们只需验证 S_λ 是 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$ 的一组 $\ell_\uparrow$-正交基。

映射 $\partial_\uparrow|_{F_{k+1}}$ 将 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$ 和 $F^{<\lambda^-}{}_{k+1}$ 分别同构映至 $B_{k,\le\lambda^-}$ 和 $B_{k,<\lambda^-}$；因此 $\partial_\uparrow|_{F_{k+1}}$ 下降为向量空间同构 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}\,F^{<\lambda^-}_{+1}\;\to\;k\,B_{k,\le\lambda^-}\,B_{k,<\lambda^-}$。此外，子集 $T\subset B_{k,\le\lambda^-}$ 在商空间 $B^{\ k}_{,\le\lambda^-}B_{k,<\lambda^-}$ 中投影为一组基。因此 $(\partial_\uparrow|_{F_{k+1}})^{-1}(T)$ 投影为 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}\,F^{<\lambda^-}{}_{k+1}$ 的一组基。

一般而言，若 (V,ℓ_V) 是一个滤过向量空间，$t\in\mathbb{R}$，且 $Z\subset V$ 是 $V(\{t\})$ 的子集，那么容易验证，Z 是 ℓ_V-正交的，当且仅当它在 $V^{\le t}V^{<t}$ 中下降为一个线性无关集。此外，若此条件成立，则 $\mathrm{span}(Z)$ 与 $V^{<t}$ 是 ℓ_V-正交子空间（由注 3.2 可知）。应用到当前情形，由于 S_{λ^-} 是 $F^{<\lambda'}{}_{k+1}$ 的一组 $\ell_\uparrow$-正交基，且 $S_{\lambda^-}\cup(\partial_\uparrow|_{F_{k+1}})^{-1}(T)$ 张成 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$，其中 $(\partial_\uparrow|_{F_{k+1}})^{-1}(T)$ 在 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}F^{<\lambda^-}{}_{k+1}$ 中投影为一组基，因此 $S_{\lambda^-}\cup(\partial_\uparrow|_{F_{k+1}})^{-1}(T)$ 是 $F^{\le\lambda^-}{}_{k+1}$ 的一组 $\ell_\uparrow$-正交基，即 $F^{<\lambda}{}_{k+1}$ 的一组基。至此，完成了 λ 有直接前驱时的递归步骤。

按照这种方式递归地定义 S_λ 作为 $F^{<\lambda}{}_{k+1}$ 的基（其中 $\lambda\in J_{k+1}$），最终我们得到 S_∞ 作为 $F^{<\infty}{}_{k+1}$ 的基，即作为 F_{k+1} 的基，它满足所要求的性质。□

定义 3.16. 给定一个域 κ，定义其上的**初等上升链复形** $\mathscr{E}_k(a、b)_\uparrow$和 $\mathscr{E}_k(c,\ \infty)_\uparrow$ 如下：

(3.2.1) 若$k\ \in \mathbb{Z}$ 且$a,b\ \in \mathbb{R}$ 满足$a\ \le b$，$\mathscr{E}_k(a,b)_\uparrow$ 是上升链复形$(C\uparrow_*,\partial_\uparrow,\ell_\uparrow)$，则其具有：

- $C\uparrow k\ = C\uparrow k+1 = \kappa$，且$C\uparrow j = 0$ 对$j\ \notin \{k,k\ +1\}$，
- $\partial_{\uparrow j}\colon C\uparrow j\ \to C\uparrow j-1$ 当$j\ \neq k+1$时等于零，而当$j\ = k\ +1$时等于恒等映射$\kappa \to \kappa$；
- $\ell_\uparrow|_{C\uparrow k\setminus\{0\}} \equiv a$；以及 $\ell_\uparrow|_{C\uparrow k+1\setminus\{0\}} \equiv b$。

(3.2.2) 若$k\ \in \mathbb{Z}$和$c\ \in \mathbb{R}$, $\mathscr{E}_k(c,\ \infty)_\uparrow$是定义在$\mathbb{R}$ 上的上升链复形$C\uparrow_*,\partial,\ell)$，满足：

- $C\uparrow k\ = \kappa$，并且当$j\ \neq k$时，$C\uparrow j = 0$；
- $\partial_\uparrow = 0$；以及
- $\ell_\uparrow|_{C\uparrow k\setminus\{0\}} \equiv c.$

推论 3.17. 设 $(C\uparrow_*,\partial_\uparrow,\ell_\uparrow)$ 是一个过滤链复形，且具有如下性质：对于所有k，$(C\uparrow k,\ell_\uparrow|_{C_\uparrow k})$ 都满足最佳逼近性质（等价地，$\ell_\uparrow(C\uparrow k\setminus\{0\})$ 是良序的）。那么，$(C\uparrow_*,\partial_\uparrow,\ell_\uparrow)$ 在上升链复形范畴中同构于以下形式的直和

$$\left(\bigoplus_{i\in I}\mathscr{E}_{k_i}(a_i,b_i)_\uparrow\right)\oplus\left(\bigoplus_{j\in J}\mathscr{E}_{l_j}(c_j,\infty)_\uparrow\right) \tag{3.5}$$

对适当的指标集 I和 J、整数 k_i、l_j以及实数 a_i、b_i、c_j，其中 $a_i \le b_i$。此外，子复形 $\mathscr{H}_* = \bigoplus_{j\in J}\mathscr{E}_{l_j}(cj,\infty)_\uparrow$同构于同调 $(H_*(C_{\uparrow*}),0,\rho_\uparrow)$，将其视为一个微分为零、滤过函数由式 (3.4) 的谱不变量函数 $\rho\uparrow$ 给出的上升链复形。

证明。 命题 3.14 给出了过滤链复形 $(C\uparrow_*,\partial_\uparrow$ 的直和分解 $\ell_\uparrow) = A_* \oplus \mathscr{H}_*$，其中 A_* 具有平凡同调，而 $\mathscr{H}_*$ 微分为零，且同构于$(H_*(C_{\uparrow*}),0,\rho_\uparrow)$。命题 3.15 表明，$A_*$ 在同构意义下可分解为直和 $\bigoplus_{i\in I}\mathscr{E}_{k_i}(a_i,b_i)_\uparrow$。取过滤向量空间$(\mathscr{H}_k,\ell_\uparrow|_{\mathscr{H}_k})$的 $\ell_\uparrow|_{\mathscr{H}_k}$正交基（由命题 3.9 给出），可知 $\mathscr{H}_*$（其微分为零）在同构意义下可分解为如下形式的直和 $\bigoplus_{j\in J}\mathscr{E}_{l_j}(cj,\infty)_\uparrow$ □

3.3. **滤过余跨**。 回顾一下，滤过余跨由以下数据组成：

- 一个上升链复形（依照第 1.1 节的定义） $\mathscr{C}_\uparrow = (C\uparrow_*,\partial_\uparrow,\ell_\uparrow)$;
- 一个下降链复形，即一个三元组 $\mathscr{C}^\downarrow = (C_*^\downarrow,\partial^\downarrow,\ell^\downarrow)$，满足$\mathscr{C}^\downarrow := (C_*^\downarrow,\partial^\downarrow,-\overline{\ell^\downarrow})$是一个上升链复形；
- 另一个（未滤过的）链复形 (D_*,∂_D)，以及链映射 $\psi_\uparrow\colon C\uparrow_* \to D_*$和 $\psi^\downarrow\colon C_*^\downarrow \to D_*$。

一般而言，若 $\mathscr{C} = (C_*,\partial,\ell)$是一个上升（分别地，下降）链复形，我们将$\mathscr{C} = (C_*,\partial,-\ell)$ 记作通过对滤过函数 ℓ取负而得到的下降（分别地，上升）链复形。作为这一做法的特例，对于 $\infty > a\ \ge b\ \ge -\infty$，我们记作

$$\mathscr{E}_k(a,b)^\downarrow = \overline{\mathscr{E}_k(-a,-b)_\uparrow},$$

因此，若 $b > -\infty$，则 $\mathcal{E}_k(a,b)^{\downarrow}$的生成元为 x和 y，其次数分别为 k和 $k+1$，滤过层级分别为 a 和 b，且 y 的边界为 x。显然，下降链复形构成一个范畴，其态射 $\mathscr{C}_1^{\downarrow} \to \mathscr{C}_2^{\downarrow}$与上升链复形的态射 $\mathscr{C}_1^{\downarrow} \to \mathscr{C}_2^{\downarrow}$重合（作为映射，在集合意义上）。通过共轭运算 $\mathscr{C} \leftrightarrow \mathscr{C}$，上升链复形的直和概念由此推广为下降链复形的直和概念；推论 3.17 表明，若$\mathscr{C}^{\downarrow} = (C_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}, \ell^{\downarrow})$具有如下性质：对每个 k，$\ell^{\downarrow}(C^{\downarrow}{}_k \setminus \{0\})$的每个子集都有一个最大元素，则 $\mathscr{C}^{\downarrow}$ 可分解为如下形式的直和

$$\mathscr{C}^{\downarrow} = \left(\bigoplus_{i \in I} \mathcal{E}_{k_i}(a_i, b_i)^{\downarrow} \right) \oplus \left(\bigoplus_{j \in J} \mathcal{E}_{l_j}(c_j, -\infty)^{\downarrow} \right). \tag{3.6}$$

下降链复形 $\mathscr{C}^{\downarrow}$所对应的谱不变量函数 (3.4) 的适当版本，是将与 $\mathscr{C}^{\downarrow}$相关的谱不变量函数 $\rho^{\uparrow}$取负得到的，即 它是映射 $\rho^{\downarrow}\colon H_*(C_*^{\downarrow}) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$，定义如下

$$\rho^{\downarrow}(h) = \sup\{\ell(c) | c \in \ker \partial^{\downarrow}, [c] = h\}. \tag{3.7}$$

我们为若干特定类型的滤过余跨引入一些术语：

定义 3.18。 若一个滤过余跨 $\mathscr{C} = \left((C^{\uparrow *}, \partial_C{}^{\uparrow}, \ell_{\uparrow}^C), (C_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}{}_C, \ell^{\downarrow}{}_C), (D_*, \partial_D), \psi_{\uparrow}, \psi^{\downarrow} \right)$满足以下条件，则称其为：

> (i) 若对每个$k \in \mathbb{Z}$，像 $\ell_{\uparrow}^C(C^{\uparrow k} \setminus \{0\})$ 和 $(-\ell^{\downarrow}{}_C)(C^{\downarrow}{}_k \setminus$都是 $\mathbb{R}$ 的良序子集, $\{0\})$ 则称其为**可容许**；(ii) 若同调群$H_*(C_{\uparrow *})$、$H_*(C_*^{\downarrow})$和$H_*(D_*)$ 均为零，则称其为**无环的**。(iii) 若微分 $\partial_C{}^{\uparrow}, \partial^{\downarrow}{}_C$和 ∂_D均为零，则称其为**完美的**。

因此，对于可容许过滤余跨图，其上升链复形 $(C^{\uparrow *}, \partial_C{}^{\uparrow}, \ell_{\uparrow}^C)$（如式 (3.5)）以及下降链复形 $(C_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}{}_C, \ell^{\downarrow}{}_C)$（如式 (3.6)）均有直和分解。若该滤过余跨无环，则分解中只会出现形如 $\mathcal{E}_k(a,b)_{\uparrow}$ 或$\mathcal{E}_k(a,b)^{\downarrow}$ 的直和项；若该滤过余跨是完美的，则唯一出现的直和项为形如 $\mathcal{E}_k(c, \infty)_{\uparrow}$或 $\mathcal{E}_k(c, -\infty)^{\downarrow}$的项。

滤过余跨范畴 $\mathsf{CO}(\kappa)$ 中的直和按显而易见的方式构造，即将其各组成部分的直和组合起来。

命题 3.19。 任意一个系数取自域 κ 的可容许滤过余跨图 $\mathscr{C} = \left((C^{\uparrow *}, \partial_C{}^{\uparrow}, \ell_{\uparrow}^C), (C_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}{}_C, \ell^{\downarrow}{}_C), (D_*, \partial_D), \psi_{\uparrow}, \psi^{\downarrow} \right)$在 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中同构于一个无环滤过余跨与一个完美滤过余跨的直和。此外：

- $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$可取为如下形式：$((A^{\uparrow *}, \partial_C{}_{\uparrow}\,|_{A^{\uparrow *}}, \ell_C{}_{\uparrow}\,|_{A_{\uparrow *}}), (A_*^{\downarrow}, \partial^{\downarrow}{}_C\,|_{A_*^{\downarrow}}, \ell^{\downarrow}{}_C|_{A_*^{\downarrow}}), 0, 0, 0)$其中$A^{\uparrow *}$是$C^{\uparrow *}$ 的一个适当子复形，$A_*^{\downarrow}$ 是$C_*^{\downarrow}$ 的一个适当子复形，且二者的同调均为平凡（剩余的未滤过链复形等于零复形）。
- $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$可以取为如下形式：$\left((H_*(C_{\uparrow *}), 0, \rho_{\uparrow}), (H_*(C_*^{\downarrow}), 0, \rho^{\downarrow}), (H_*(D_*), 0), \psi_{\uparrow *}, \psi_*^{\downarrow} \right)$，其中 $\rho^{\uparrow}$和 $\rho^{\downarrow}$是 (3.4 和 (3.7) 中的谱不变量函数，而 $\psi_{\uparrow *}$和 $\psi_*^{\downarrow}$是 $\psi_{\uparrow}$ 和 $\psi^{\downarrow}$ 在同调上诱导的映射。

证明。按照命题 3.14，将上升链复形 $(C\uparrow_*, \partial C\uparrow, \ell^C_\uparrow)$ 分解，使得 $C\uparrow_*$ 作为上升链复形的直和，是无环子复形 $A\uparrow_*$ 与一个子复形 $\mathscr{H}_{\uparrow *}$ 的直和，在该子复形上 $\partial C\uparrow$ 消失，并且通过到同调的投影，将滤过向量空间 $(\mathscr{H}_{\uparrow *}, \ell^C_\uparrow|_{\mathscr{H}_{\uparrow *}})$ iden- tified 与 $(H_*(C_\uparrow), \rho_\uparrow)$相识别。记 $\pi\uparrow$: $C\uparrow_* \to H_*(C_{\uparrow *})$ 为如下复合：先取与直和分解 $C_{\uparrow *} \to \mathscr{H}_{\uparrow *}$ 相关的投影 $C\uparrow_* = A_{\uparrow *} \oplus \mathscr{H}_{\uparrow *}$，再取由过渡到同调给出的同构 $\mathscr{H}_{\uparrow *} \to H_*(C_{\uparrow *})$。另外定义 $j\uparrow: H_*(C_{\uparrow *}) \to C\uparrow_*$ 为上述同构 $\mathscr{H}_{\uparrow *} \to H_*(C_{\uparrow *})$ 的逆与将 $\mathscr{H}_{\uparrow *}$ 包含到 $C\uparrow_*$中的包含映射的复合。

未滤过链复形 (D_*, ∂_D) 同样可以分解为一个无环子复形 A^D_* 与一个子复形 H^D_* 的直和；在后者上，∂_D 为零，而投影到同调给出一个同构 $H^D_* \cong H_*(D_*)$。[2] 如上一段所述，我们得到一个投影 $\pi^D: D_* \to H_*(D_*)$ 以及一个包含映射 $j^D: H_*(D_*) \to D_*$。

由于 $H_*(C_{\uparrow *})$ 和 $H_*(D_*)$ 上的微分均为零，映射 $\pi\uparrow, \pi^D, j\uparrow, j^D$ 都是链映射。显然，$\pi\uparrow \circ j\uparrow$ 和 $\pi^D \circ j^D$ 分别是 $H_*(C_{\uparrow *})$ 和 $H_*(D_*)$ 上的恒等映射。另一方面，$j\uparrow \circ \pi\uparrow$ 和 $j^D \circ \pi^D$ 是从复形 $C\uparrow_*$ 和 D_* 到其直和项 $\mathscr{H}_{\uparrow *}$ 和 $H D_*$ 的投影。映射 $j\uparrow \circ \pi\uparrow$ 和 $j^D \circ \pi^D$ 分别与恒等映射链同伦（在未滤过意义下）。事实上，如命题 3.14 的证明中所述，可以令 $F\uparrow k$ 为 $A\uparrow k$ 中 $B\uparrow k := \mathrm{Im}(\partial C_\uparrow|_{C_{\uparrow k+1}})$ 的一个向量空间补空间，使得$\partial C\uparrow$ 将 $F\uparrow k+1$同构地映到 $B\uparrow k$。可定义映射 $K: C\uparrow_* \to F_{\uparrow *+1} \subset C\uparrow_{*+1}$：先依据直和分解 $C\uparrow k = F_{\uparrow k} \oplus B_{\uparrow k} \oplus \mathscr{H}_{\uparrow k}$，将 $C\uparrow k$ 投影到 $B\uparrow k$，再将 $B\uparrow k$ 中的元素映射到它们在 $F\uparrow k+1$ 中经 $\partial C\uparrow$ 映射所得的唯一原像。该映射 K 给出了 $j\uparrow \circ \pi\uparrow$ 与 $C\uparrow_*$ 上恒等映射之间的链同伦。类似的推理表明，$j^D \circ \pi^D$ 与 D_* 上的恒等映射链同伦。

于是我们得到一个交换图表

(3.8)
$$\begin{array}{ccc} D_* & \xrightarrow{\quad\pi^D\quad} & H_*(D_*) \\ {\scriptstyle \psi_\uparrow \circ j_\uparrow \circ \pi_\uparrow}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \begin{bmatrix} 0 & \psi_{\uparrow *} \end{bmatrix}} \\ C_{\uparrow *} & \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1_{C_{\uparrow *}} - j_\uparrow \circ \pi_\uparrow \\ \pi_\uparrow \end{bmatrix}]{} & A_{\uparrow *} \oplus H_*(C_{\uparrow *}) \end{array}$$

事实上，(3.8) 中的任一复合都会将$A\uparrow_*$ 的所有元素映为零，并将元素$h \in \mathscr{H}_{\uparrow *}$（它必然属于 $\ker(\partial^C_\uparrow)$）映为 $H_*(D_*)$ 中的 $\psi_\uparrow h$ 的同调类。此外，π^D 是一个同伦等价（采用$H_*(D_*)$ 上的零微分），并且只要赋予$A_{\uparrow *} \oplus H_*(C_{\uparrow *})$ 上升链复形结构——该结构是将$A\uparrow_*$ 作为$C\uparrow_*$ 的子复形所继承的结构，与$H_*(C_{\uparrow *})$上的结构作直和得到的，其中$H_*(C_{\uparrow *})$上的微分为零，且以$\rho\uparrow$ 作为滤过函数——(3.8) 中的下方映射就是过滤同伦等价。

[2]这是域 κ 上向量空间的各种短正合列分解的标准推论；如果将 D_* 视为配备平凡滤过函数 ℓ 的上升链复形，该函数在 D_* 的所有非零元素上均取值为零，那么这也可以看作命题 3.14 的一个特例。

由于$j_\uparrow \circ \pi_\uparrow$与恒等映射链同伦，因此图表

(3.9)
$$\begin{array}{ccc} D_* & \xrightarrow{\pi^D} & H_*(D_*) \\ {\scriptstyle \psi_\uparrow}\uparrow & & \uparrow{\scriptstyle \begin{bmatrix} 0 & \psi_{\uparrow *} \end{bmatrix}} \\ C_{\uparrow *} & \xrightarrow[\begin{bmatrix} 1_{C_{\uparrow *}} - j_\uparrow \circ \pi_\uparrow \\ \pi_\uparrow \end{bmatrix}]{} & A_{\uparrow *} \oplus H_*(C_{\uparrow *}) \end{array}$$

在同伦意义下交换。

对下降链复形 $(C_*^\downarrow, \partial^\downarrow C, \ell^\downarrow C)$ 的共轭复形 $(C_*^\downarrow, \partial^\downarrow C, \ell^\downarrow C) = (C_*^\downarrow, \partial^\downarrow C, -\ell^\downarrow C)$ 应用上述相同的推理，我们得到一个同伦交换图

(3.10)
$$\begin{array}{ccc} C_*^\downarrow & \xrightarrow{\begin{bmatrix} 1_{C_*^\downarrow} - j^\downarrow \circ \pi^\downarrow \\ \pi^\downarrow \end{bmatrix}} & A_*^\downarrow \oplus H_*(C_*^\downarrow) \\ {\scriptstyle \psi^\downarrow}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \begin{bmatrix} 0 & \psi_*^\downarrow \end{bmatrix}} \\ D_* & \xrightarrow[\pi^D]{} & H_*(D_*) \end{array}$$

其顶行是下降链复形之间的过滤同伦等价；这里，$A_*^\downarrow$是对 $(C_*^\downarrow, \partial^\downarrow C, \ell^\downarrow C)$应用命题 3.14 得到的无环子复形，而 $H_*(C_*^\downarrow)$ 被视为一个下降链复形，其微分为零，滤过函数由 $\overline{\rho^\downarrow}$ 给出。

将 (3.9) 和 (3.10) 合并，根据推论 2.6 可知，我们原来的滤过余跨 $\mathscr{C}$ is在 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中同构于

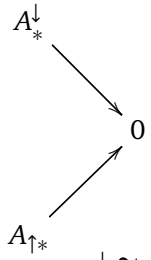
$$\begin{array}{ccc} A_*^\downarrow \oplus H_*(C_*^\downarrow) & & \\ & \searrow^{\begin{bmatrix} 0 & \psi_*^\downarrow \end{bmatrix}} & \\ & & H_*(D_*) \\ & \nearrow_{\begin{bmatrix} 0 & \psi_{\uparrow *} \end{bmatrix}} & \\ A_{\uparrow *} \oplus H_*(C_{\uparrow *}) & & \end{array}$$

或者等价地，滤过余跨范畴中的直和

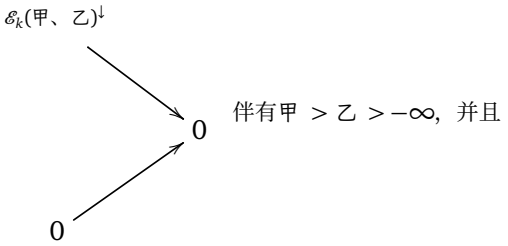
$$\begin{array}{ccc} A_*^\downarrow & & H_*(C_*^\downarrow) \\ & \searrow & \\ & 0 \quad \text{and} & \\ & \nearrow & \\ A_{\uparrow *} & & H_*(C_{\uparrow *}) \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} & \overset{\psi_*^\downarrow}{\searrow} & \\ & H_*(D_*). & \\ & \underset{\psi_{\uparrow *}}{\nearrow} & \end{array}$$

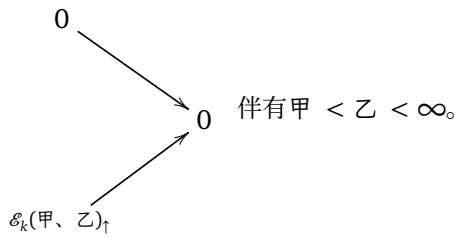
□

命题 3.19 中的直和项 $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ 和 $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$ 还可以进一步分解为不可分解对象。由于域上的无环链复形总是同伦等价于零复形，任意无环滤过余跨 $\mathscr{A}$ （利用推论 2.6）在$\mathsf{HCO}(\kappa)$中同构于如下形式的对象



假设 $\mathscr{A}$ 可容许，则推论 3.17 给出了范畴中 $\mathrm{A}_*^{\downarrow} \cong \bigoplus_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}^{\downarrow}} \mathscr{E}_{k}{}^{\downarrow}\,\mathrm{i}\,(\mathrm{a}^{\downarrow}\mathrm{i}、\ \mathrm{b}^{\downarrow}\mathrm{i}\ )^{\downarrow}$ 以及 $\mathrm{A}_{\uparrow *} \cong \bigoplus_{\mathrm{i}\in \mathrm{I}_{\uparrow}} \mathscr{E}_{k_{i\uparrow}}(\mathrm{a}_{i\uparrow}、\ \mathrm{b}_{i\uparrow})_{\uparrow}$ 的分解，分别对应下降链复形和上升链复形。这里 $\mathrm{a}^{\downarrow}\,\mathrm{i} \geq \mathrm{b}^{\downarrow}\,\mathrm{i} > -\infty$ 以及 $\mathrm{a}_{i\uparrow} \leq \mathrm{b}_{i\uparrow} < \infty$。（由于 $\mathrm{A}_*^{\downarrow}$ 和 $\mathrm{A}_{\uparrow *}$ 具有平凡同调，$\mathrm{b}^{\downarrow}\,\mathrm{i}$ 和 $\mathrm{b}_{i\uparrow}$ 是有限的。）注意，形如 $\mathscr{E}_k(\mathrm{a}、\ \mathrm{a})_{\uparrow}$ 或 $\mathscr{E}_k(\mathrm{a}、\ \mathrm{a})^{\downarrow}$ 的任一直和项都与零复形滤过同伦等价。因此，根据推论 2.6，一个可容许的无环滤过余跨 $\mathscr{A}$ 同构于形如 (3.11) 的对象的直和

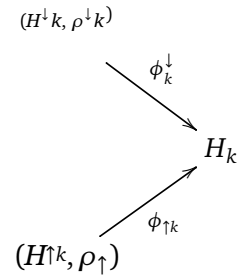




我们分别将 (3.11) 中展示的滤过余跨简记为 $(\downarrow^{a}\ \text{乙})_k$ 和 $(\uparrow^{b}\ \text{甲})_k$。

现在来描述可容许的完美滤过余跨的分解。由于其中涉及的链复形的微分为零，我们可以立即将它们分解为其分次分量的直和，其中次数为k 的直和项具有如下的一般形式

(3.12)

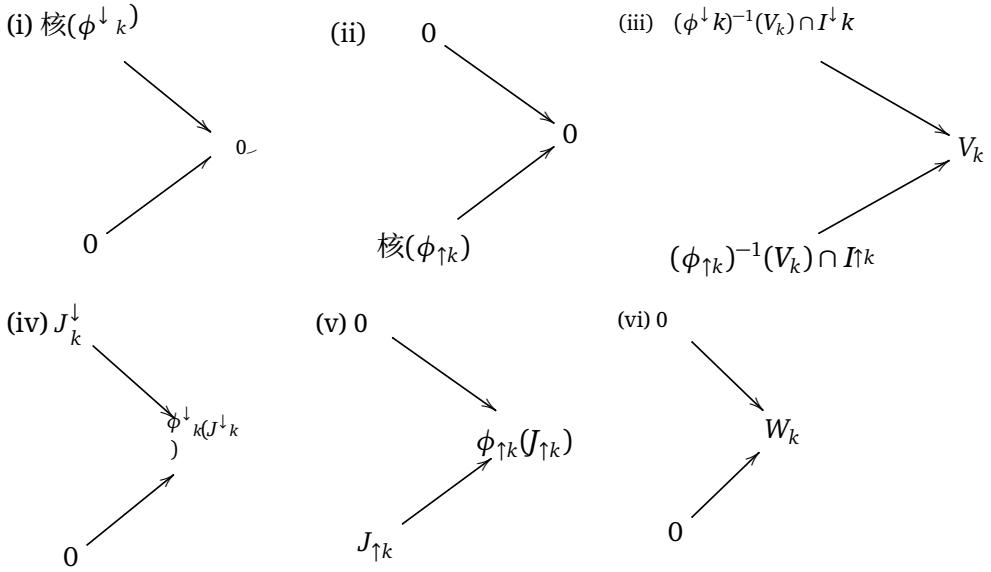


其中 $(H^{\uparrow k}、\ \rho_{\uparrow})$和 $(H^{\downarrow}{}_k、\ -\rho^{\downarrow})$是满足最佳逼近性质的滤过向量空间（由于微分均为零，故在记号中全部省略）。考虑子空间 $V_k = \phi_{\uparrow k}(H_{\uparrow k}) \cap \phi^{\downarrow}{}_k(H^{\downarrow}{}_k) \leq H_k$。选择：

- 一个 $\rho_{\uparrow}$-正交补 $I_{\uparrow k}$，位于 $H_{\uparrow k}$ 内的 $\ker(\phi_{\uparrow k})$;
- 在 $\rho_{\uparrow}$ 的正交补 $J_{\uparrow k}$，该补空间位于 $(\phi_{\uparrow k})^{-1}(V_k) \cap I_{\uparrow k}$ 内的 $I_{\uparrow k}$;
- 在 $(-\rho^{\downarrow})$ 的正交补 $I^{\downarrow}{}_k$，该补空间位于 $\ker(\phi^{\downarrow}{}_k)$ 于$H^{\downarrow}{}_k$内;
- 在 $(-\rho_{\uparrow})$ 的正交补 $J^{\downarrow}{}_k$，该补空间位于 $(\phi^{\downarrow}{}_k)^{-1}(V_k) \cap I^{\downarrow}{}_k$内的 $I^{\downarrow}{}_k$；以及
- 一个补子空间 W_k，它与子空间 $\phi_{\uparrow k}(H_{\uparrow k}) + \phi^{\downarrow}{}_k(H^{\downarrow}{}_k)$ 互补，且它是 H_k 的子空间。

这些给出了滤过余跨 (3.12) 的直和分解，分为以下六个直和项；在每种情形中，所示映射（通过限制 $\phi_{\uparrow k}$ 和 $\phi^{\downarrow}{}_k$ 给出）都是同构，除非其定义域或陪域为零：

(3.13)



我们将 κ_k 记作这样的分次 κ-向量空间：将其视为具有零微分的链复形，其第 k 个分次部分为 κ，而在所有其他次数上均为零。于是，定义 3.16 中的初等递增链复形 $\mathscr{E}_k(a、\infty)_{\uparrow}$ 作为链复形与 κ_k重合，且其所有非零元素的过滤层级均为 a；对于初等下降链复形 $\mathscr{E}_k(a、-\infty)^{\downarrow} = \mathscr{E}_k(-a、\infty)_{\uparrow}$，也有类似的结论。

接下来，我们引入以下记号，表示 (3.13)(i)-(vi) 中的直和项可进一步分解成的各种不可分解构件：

(3.14)

$$(\downarrow^{a}_{-\infty})_k = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_k(a,\ -\infty)^{\downarrow} & & \\ & \searrow & \\ & & 0 \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{pmatrix},\quad (\uparrow^{\infty}_{a})_k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \searrow & \\ & & 0, \\ & \nearrow & \\ \mathscr{E}_k(a,\ \infty)_{\uparrow} & & \end{pmatrix},\quad (>^{b}{}_{a})_k = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_k(b,\ -\infty)^{\downarrow} & & \\ & \searrow & \\ & & \kappa_k \\ & \nearrow & \\ \mathscr{E}_k(a,\ \infty)_{\uparrow} & & \end{pmatrix},$$

$$(\searrow^{a})_k = \begin{pmatrix} \mathscr{E}_k(a,\ -\infty)^{\downarrow} & & \\ & \searrow & \\ & & \kappa_k \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{pmatrix},\quad (\nearrow_{a})_k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \searrow & \\ & & \kappa_k, \\ & \nearrow & \\ \mathscr{E}_k(a,\ \infty)_{\uparrow} & & \end{pmatrix},\quad \square_k = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \searrow & \\ & & \kappa_k \\ & \nearrow & \\ 0 & & \end{pmatrix}.$$

这里，任何定义域或陪域不为零的映射，从集合论的角度看，都是 κ 上的恒等映射。将命题 3.9 应用于 $\ker(\phi^{\downarrow}{}_k)$、$\ker(\phi_{\uparrow k})$、$J^{\downarrow}{}_k$ 和 $J\uparrow k$，很容易验证，(3.13)(i)、(ii)、(iv) 和 (v) 中的滤过余跨在同构意义下（在 $\mathsf{CO}(\kappa)$ 和 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中均如此）可分别分解为形如 $(\downarrow^{a}_{-\infty})_k$、$(\uparrow^{\infty}{}_{a})_k$、$(\searrow^{a})_k$ 和 $(\nearrow_{a})_k$ 的项的直和。(3.13)(vi) 可分解为 $\square_k$ 的若干个副本的直和，这只需为 W_k 选取一组基即可看出。要看出 (3.13)(iii) 可分解为形如 $(>^{b}{}_{a})_k$ 的项的直和，则稍微不那么显然，但这可由以下结论推出：

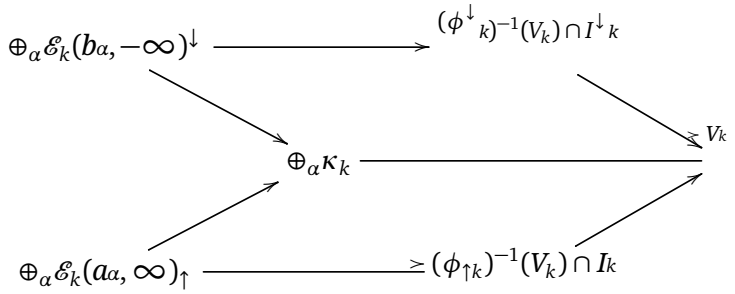
命题 3.20。设 $(X、\ \ell)$ 和 $(Y、\ \ell')$ 是两个滤过向量空间，且 $\ell(A\setminus\{0\})$ 和 $\ell'(B\setminus\{0\})$ 均为良序，并设 $\phi\colon A\to B$ 是一个向量空间同构。那么，存在一个 ℓ-正交基 $\{v_\alpha\}$，它是 A 的基，并且 $\{\phi(v_\alpha)\}$ 是 B 的一个 ℓ'-正交基。

证明。由命题 3.15 形式上即可得出：应用于如下上升链复形，其中 1 阶为 $(X、\ \ell)$，0 阶为 $(Y、\ \ell')$，其他所有次数均为零，且微分由 ϕ 给出。□

推论 3.21。式 (3.13)(iii) 中的滤过余跨在 $\mathsf{CO}(\kappa)$ 和 $\mathsf{HCO}(\kappa)$ 中同构于如下形式的直和 $\oplus_\alpha(>^{b_\alpha}{}_{a_\alpha})_k$，其中实数 a_α、b_α 取适当值。

证明。如（3.13）之前所述，（3.13）（iii）中出现的映射是通过限制 $\phi^{\downarrow}{}_k$ 和 $\phi_{\uparrow k}$ 给出的，它们都是向量空间同构。（对于（iii），这是因为 $I^{\downarrow}{}_k$ 和 $I\uparrow k$ 分别与 $\phi^{\downarrow}{}_k$ 和 $\phi_{\uparrow k}$ 的核交集平凡，且根据 V_k 是 $\phi^{\downarrow}{}_k$ 和 $\phi_{\uparrow k}$ 的像的交集这一事实。）因此，我们得到一个向量空间同构 $\phi\colon (\phi_{\uparrow k})^{-1}(V_k)\cap I_k\to(\phi^{\downarrow}{}_k)^{-1}(V_k)\cap I^{\downarrow}{}_k$，其定义为

将 $\phi_{\uparrow k}$ 的限制与 $\phi^{\downarrow}{}_k$的限制的逆映射复合。将命题 3.20 应用于这个同构 ϕ，其中使用 $\ell = \rho_{\uparrow k}$ 和 $\ell' = -\rho^{\downarrow}{}_k$。由此得到$(\phi_{\uparrow k})^{-1}(V_k) \cap I_k$的一组基$\{v^\alpha\}$。令$a_\alpha = \rho_{\uparrow k}(v_\alpha)$ 和$b_\alpha = \rho^{\downarrow}{}_k(\phi(v_\alpha))$。于是，我们通过下图得到从 $\oplus_\alpha (>^{b_\alpha}{}_{a_\alpha})_k$ 到（3.13）（iii）的一个同构



其中，水平映射将 $\mathscr{E}_k(a_\alpha, \infty)_{\uparrow}$ 的标准生成元映射到 v_α，将 αth 个 $\oplus_\alpha \kappa_k$ 直和项的标准生成元映射到 $\phi_{\uparrow k}(v_\alpha)$，并将 $\mathscr{E}_k(b_\alpha, -\infty)^{\downarrow}$ 的标准生成元映射到 $\phi(v_\alpha)$。□

定义 3.22：任意一个标准初等直和项都是以下构件之一：$(\downarrow^a{}_b)_k$ 或$(\uparrow^b{}_a)_k$（来自 (3.11)），或 $(\downarrow^a_{-\infty})_k$, $(\uparrow^{\infty}{}_a)_k$, $(>^b{}_a)_k$, $(\searrow^a)_k$, $(\nearrow_a)_k$，或 $\square_k$（来自 (3.14)）。

推论 3.23。任意一个系数取值于某个域 κ 的可容许过滤余跨图 $\mathscr{C}$，在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中都同构于标准初等直和项的直和。

证明。命题 3.19 将 $\mathscr{C}$ 分解为一个无环滤过余跨 $\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$ 和一个完美滤过余跨 $\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$。如 (3.11) 前所述，推论 3.17 表明，$\mathscr{A}_{\mathscr{C}}$同构于一族形如 $(\downarrow^a{}_b)_k$ 和 $(\uparrow^b{}_a)_k$ 的对象的直和。同时，$\mathscr{H}_{\mathscr{C}}$ 分解为 (3.13) 中各直和项的直和；利用命题 3.9 和推论 3.21，这些直和项分别同构于 (3.14) 中所述对象的直和。□

推论 3.23 的分解中的直和项由 $\mathscr{C}$ 唯一确定；其证明留待推论 6.9。

当然，推论 3.23 的结论也适用于任何在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构于某个可容许滤过余跨的滤过余跨 $\mathscr{C}$，即使 $\mathscr{C}$ 本身并不可容许。例如，若 $f\colon \mathscr{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 是定义在有限单纯复形几何实现上的逐单纯形线性函数，则带钉奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)$（除非 f 是局部常值函数）远非可容许，但根据命题 4.5 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)$ 同构于带钉单纯滤过余跨 $\mathscr{C}_\partial(X, f; \kappa)$，后者是可容许的。

注记 3.24。如果 $\mathscr{C}$ 是 Λ-有界的，那么在 $\mathscr{C}$ 的分解中，形如 $(\downarrow^a{}_b)_k$、$(\uparrow^b{}_a)_k$、$(\downarrow^a_{-\infty})_k$、$(\uparrow^{\infty}{}_a)_k$、$(>^b{}_a)_k$、$(\searrow^a)_k$或 $(\nearrow_a)_k$ 的直和项中出现的参数 a 和 b 的所有取值显然都落在开区间 $(-\Lambda, \Lambda)$内。

4. Hco（κ）中的更多同构$\mathrm{HCO}(\kappa)$

本节建立了一个用于判定滤过同伦等价的充分判据（命题 4.2），从而便于检验两个滤过余跨满足推论 2.6 中的条件

以便它们在 HCO(κ) 中同构；我们利用这一点建立了示例 1.7、1.8 和 1.9 中滤过余跨之间的同构。

定义 4.1。 若 $(C_*, \partial_C, \ell_\uparrow^C)$ 和 $(D_*, \partial_D, \ell_\uparrow^D)$ 是两个上升链复形，且$f\colon C_* \to D_*$ 是一个滤过链映射，则称f 为**滤过拟同构**，如果对于每个$k \in \mathbb{Z}$ 和 $t \in J$，诱导映射$f_*\colon H_k(C_*^{\le t}) \to H_k(D_*^{\le t})$ 是一个同构。

若$f\colon C_* \to D_*$ 是一个滤过链映射，则映射锥 Cone(f) 具有上升链复形的结构，其中 Cone(f)$^{\le t}k = C^{\le t}{}_{k-1} \oplus D^{\le t}{}_k$。由标准正合列

$$\cdots \longrightarrow H_k(C^{\le t}) \xrightarrow{f_*} H_k(D^{\le t}) \xrightarrow{j_*} H_k(Cone(f)^{\le t}) \xrightarrow{p_*} H_{k-1}(C^{\le t}) \xrightarrow{f_*} H_{k-1}(D^{\le t})$$

（其中$j\colon D_* \to$Cone(f) 和$p\colon$ Cone(f) $\to C[-1]$ 分别为包含映射和投影）可知，f 是滤过拟同构，当且仅当 Cone(f) 是**滤过无环**的，也就是说，对于所有k和t，$H_k(\text{Cone}(f)^{\le t}) = 0$。

命题 4.2. 设 $(C_*, \partial_C, \ell_\uparrow^C)$ 和 $(D_*, \partial_D, \ell_\uparrow^D)$ 是满足以下性质的上升链复形：

- 每个 C_k 都有一个 $\ell_C\uparrow$-正交基，且每个 D_k 都有一个 $\ell_D\uparrow$-正交基；
- $C_k = D_k = 0$ 对所有 $k < 0$ 均成立。

那么，从 C_* 到 D_* 的每个滤过拟同构都是过滤同伦等价。

证明依赖于以下引理，其思路与 [We94, 引理 10.4.6] 中采用的策略类似。

引理 4.3. 设 $(D_*, \partial_D, \ell_\uparrow^D)$ 是满足命题 4.2 中条件的上升链复形，并设 $(A_*, \partial_A, \ell_\uparrow^A)$ 是任意一个过滤无环的上升链复形。那么，每个滤过链映射 $j\colon D_* \to A_*$ 都过滤同伦于 0。

引理 *4.3* 的证明。 将 $j_n\colon D_n \to A_n$, $\partial_{n\,D}\colon D_n \to D_{n-1}$，以及 $\partial_{n\,A}\colon A_n \to A_{n-1}$ 记作 j、∂_D、∂_A 在相应分次分量上的限制。我们必须对每个$n \in \mathbb{Z}$构造过滤映射 $K_n\colon D_n \to A_{n+1}$（因此 $\ell_\uparrow^A \circ K_n \le \ell_\uparrow^D|_{D_n}$），使得

$$\partial_A^{n+1} \circ K_n + K_{n-1} \circ \partial_D^n = j_n. \tag{4.1}$$

由于我们假设对所有$n < 0$都有$D_n = 0$，因此对所有$n < 0$，使用所有$n < 0$对应的$K_n = 0$，(4.1) 均成立。因此，假设$m \ge 0$，并且我们已构造了所有$n < m$ 对应的K_n，使得对所有$n < m$，(4.1) 均成立。由于j 是链映射，因此有

$$\partial_A^m \circ (j_m - K_{m-1} \circ \partial_D^m) = (j_{m-1} - \partial_A^m \circ K_{m-1}) \circ \partial_D^m = K_{m-2} \circ \partial_D^{m-1} \circ \partial_D^m = 0.$$

此外，根据归纳假设，$j_m - K_{m-1} \circ \partial^m{}_D$ 是过滤映射。因此，由于A_* 是过滤无环的，对每个$d \in D_m$，存在$a_d \in A_{m+1}$，使得 $\ell_\uparrow^A(a_d) \le \ell_\uparrow^D(d)$，并且 $\partial^{m+1}{}_A\, a_d = j_m d - K_{m-1}\partial_{m\,D}\, d$。

如果 $\{d_i\}_{i\in\mathcal{I}}$ 是 $\ell_\uparrow^D$-正交基，则我们可以设 $K_m\left(\sum_i r_i d_i\right) = \sum_i r_i a_{d_i}$。根据 $\{d_i\}$ 的正交性，K_m 是一个过滤映射，并且 (4.1) 在 $n = m$ 时成立，从而完成归纳论证。□

命题 4.2 的证明。设 $f : C_* \to D_*$ 是一个滤过拟同构，并将引理 4.3 应用于 $A_* = \mathrm{Cone}(f)$，其中 j 等于将 D_* 包含映射到 $\mathrm{Cone}(f)$ 中的包含映射。由引理 4.3 产生的零伦 K 随后是一个过滤映射 $D_* \to C_* \oplus D_*[1]$。若将此映射的各个连通分支写作 $h: D_* \to C_*$ 和 $L : D_* \to D_*[1]$，则 K 是 j 的零伦这一事实，很容易看出等价于以下陈述：h 是一个链映射，并且过滤映射 L 是 $f \circ h$ 与 D 上恒等映射之间的同伦*。

因此，h 是f的右过滤同伦逆。现在假设f 是滤过拟同构，因此h 在过滤同调上诱导的映射是f所诱导映射的逆。特别地，h 是滤过拟同构。

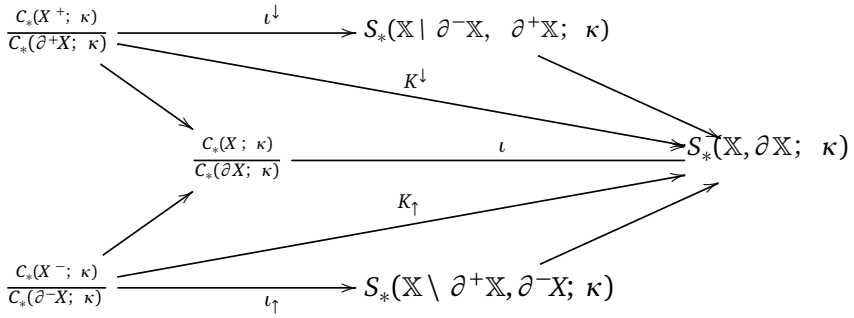
现在，我们可以交换C_* 和D_* 的角色，并用f 替换h，应用证明的第一部分。由此可得一个过滤映射$g: C_* \to D_*$，使得$h \circ g$ 与C上的恒等映射过滤同伦。但考察$f \circ h \circ g$ 即可得出 f 与g 彼此过滤同伦，并且它们中的任意一个都是h的双侧过滤同伦逆。特别地，f 是过滤同伦等价。□

注记 4.4。 将命题 4.2 中的上升链复形换成下降链复形，显然也有相应的结论；只需将过滤函数取负，即可把下降复形转化为上升复形。此外，在未过滤的情形下，若 (C_*, ∂_C)和 (D_*, ∂_D) 是 κ-向量空间上的复形，且$C_k = D_k = 0$ 对$k < 0$ 成立，那么从C_* 到D_* 的任意拟同构都是同伦等价；如果C_* 和D_* 赋予平凡的 κ-上升链复形结构，其中所有非零元素的过滤层级均为零，那么这可以看作命题 4.2 的一个特例；或者，也可以由 [We94，推论 10.4.7] 推出（对于有下界的投射模复形，此结论更一般地成立）。

现在我们来建立所承诺的固定奇异余跨与固定单纯形过滤余跨之间的同构。

命题 4.5. 采用例 1.7 和 1.8 中的记号，对于一个单纯复形 X 及其几何实现 $\mathbb{X}$，以及一个逐单形线性函数 $f : \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$，我们在 $\mathrm{HCO}^\Lambda(\kappa)$ 中有一个同构

(4.2)



在 $\mathscr{C}_\partial(X, f;\ \kappa)$与 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f;\ \kappa)$之间，对于某些一次映射的选择 $K\uparrow$、$K^\downarrow$。

证明。$S_k(\mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$的通常基由映射 $\sigma: \Delta^k \to \mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}$组成，这些映射的像不包含在 $\partial^-\mathbb{X}$中；该基关于滤过函数 $\ell_\uparrow$ 在 $S_k(\mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$下是正交的。类似的说明也适用于 $S_k(\mathbb{X} \setminus \partial^-\mathbb{X}, \partial^+\mathbb{X};\ \kappa)$、$C_*(X^-;\kappa) C_*(\partial^- X;\kappa)$ 以及 $C_*(X^+;\kappa) C_*(\partial^+ X;\kappa)$。

若令 $K\uparrow = K^{\downarrow} = 0$，则图表 (4.2) 可交换。因此，根据推论 2.6、命题 4.2 和注记 4.4，只需证明 ι 是拟同构，且 $\iota\uparrow$ 和 $\iota^{\downarrow}$ 是滤过拟同构。

显然，ι 是一个拟同构，这一点直接由 [Ha02，第 2.27]定理得出。$\iota\uparrow$ 和 $\iota^{\downarrow}$ 的情形完全相同（通过改变 f 的符号即可相互转换），因此我们只考虑$\iota\uparrow$。给定 $t \in [-\Lambda, \Lambda)$，令 $X^{\leq t}$ 表示单纯复形 X 的子复形，该子复形由顶点的 $f \leq t$ 的单形组成，并令 $\mathbb{X}^{\leq t}$ 表示这些单形在几何实现 $\mathbb{X}$ 中的并（因此，$\mathbb{X}^{\leq t}$ 是 $X^{\leq t}$ 的几何实现）。我们有 $\mathbb{X}^{\leq t} \subset f^{-1}([-\Lambda,t])$; 通常包含映射是严格的，因为存在这样的单形：其中一些顶点满足 $f \leq t$，而另一些顶点满足 $f > t$。将$\iota\uparrow$ 限制到 $C_*(X^-$的 t-滤过部分所得的映射；$\kappa)C_*(\partial^-X;\ \kappa)$等于以下复合

$$\frac{C_*(X^{\leq t};\kappa)}{C_*(\partial^- X;\kappa)} \to S_*(\mathbb{X}^{\leq t}, \partial^-\mathbb{X};\kappa) \to S_*(f^{-1}([-\Lambda, t]), \partial^-\mathbb{X};\kappa)$$

其中，第一个映射是从单纯同调到奇异同调的标准包含映射（根据 [Ha02 定理 2.27]，它是一个拟同构），第二个映射则由包含映射 $(\mathbb{X}^{\leq t}, \partial^-\mathbb{X}) \to (f^{-1}([-\Lambda, t]), \partial^-\mathbb{X})$诱导。但根据一个标准论证（例如，参见 [EH10 图 VI.8]附近的讨论），后一个包含映射是同伦等价。因此，对任意 t，$\iota\uparrow$在 $C_*(X^-;\kappa)C_*(\partial^-X;\kappa)$的 t-过滤部分到 $\partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}$的 t-过滤部分上的限制是拟同构；$\kappa)$由此完成了 $\iota\uparrow$是一个过滤拟同构的证明。□

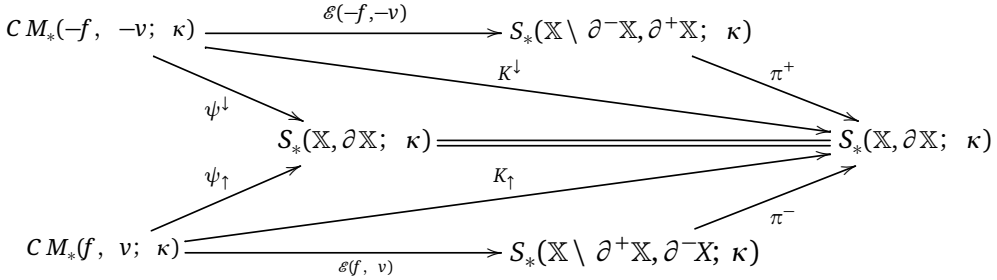
带基点的奇异滤过余跨与 Morse 过滤余跨之间的关系需要进一步研究，尤其要处理构造同伦等价 $\mathscr{E}(f, v)$from [P06]（从 Morse 链复形到奇异链复形）时涉及的细节。正如例 1.9 中所指出的，[P06]中的描述只能规范地确定 $\mathscr{E}(f, v)$的同伦类；映射本身取决于构造过程中所作的各种辅助选择。我们将对此留待附录 A 中详细讨论，并在其中证明以下引理。

引理 4.6。**</style}映射 f**, v) 可以按照 [P06]中的过程一致地构造，使其像包含于 $S_*(\mathbb{X}\backslash\partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa) \subset S_*(\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$，且成为滤过准同构 $\mathscr{E}(f, v)$: $CM_*(f, v;\ \kappa) \to S_*(\mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$。

根据引理 4.6，固定奇异余跨与莫尔斯过滤余跨之间的同构可直接得出：

命题 4.7。设 $\mathbb{X}$ 是一个带边界的紧致光滑流形，且f: $\mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 是一个在 $\partial\mathbb{X}$上没有临界点的 Morse函数，其中 $\partial\mathbb{X} = \partial^-\mathbb{X} \cup \partial^+\mathbb{X}$且 $\partial^{\pm}\mathbb{X} = f^{-1}(\{\pm\Lambda\})$。那么，对于$f$的类梯度向量场$v$，例 1.9 中的 Morse 滤过余跨 $\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, v;\kappa)$同构于钉扎奇异过滤余跨图

余跨 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)$，通过一个形如以下形式的同构



其中，同伦等价 $\mathcal{E}(\pm f、\ \pm\nu)$ 的定义采用了适当的选择，并且与 [P06，第 6]章中的构造相一致。（特别地，在这些选择下，它们的像包含于子复形 $S_*(\mathbb{X}\setminus\partial^\pm\mathbb{X}、\ \partial^\mp\mathbb{X};\ \kappa)$ 中的 $S_*(\mathbb{X}, \partial^\mp\mathbb{X};\ \kappa)$。）

证明。回忆 $\psi^\downarrow = \pi^+ \circ \mathcal{E}(-f、\ -\nu)$ 以及 $\psi_\uparrow = \pi^- \circ \mathcal{E}(f、\ \nu)$，因此，只要令 $K^\downarrow = K_\uparrow = 0$，上述图表就交换。（如例 1.9 中所述，在构造 $\mathcal{E}(\pm f、\ \pm\nu)$ 时所作的不同选择会产生同伦映射，因此，如果用于构造 $\psi^\downarrow$ 和 $\psi_\uparrow$ 的 $\mathcal{E}(\pm f、\ \pm\nu)$ 版本不同于图表中构造的版本，该图表仍会在同伦意义下交换。）

根据引理 4.6，$\mathcal{E}(f, \nu)$可以与 [P06]一致地构造，使其成为从 $CM_*(f, \nu;\ \kappa)$到 $S_*(\mathbb{X}\setminus\partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$的滤过准同构。由命题 4.2 可知，这个版本的 $\mathcal{E}(f, \nu)$于是是一个过滤同伦等价。类似地（将滤过取负以把下降复形转换为上升复形之后），$\mathcal{E}(-f,\ -\nu)$的一个合适版本是过滤同伦等价。结论现在由命题 2.6 得出。□

5. 计算与示例

我们现在更实际地讨论如何求出推论 3.23 所保证的分解，并通过一些实现例 1.8 和 1.9 的例子来进行演示。这里假设 $\mathscr{C} = \left((\mathrm{C}\uparrow_*, \partial\mathrm{C}\uparrow, \ell_\uparrow^C), (\mathrm{C}_*^\downarrow, \partial^\downarrow\mathrm{C}, \ell^\downarrow\mathrm{C}), (\mathrm{D}_*, \partial_D), \psi_\uparrow, \psi^\downarrow\right)$是域$\kappa$ 上的一个滤过余跨，且 $\mathrm{C}\uparrow_*$ 和 $\mathrm{C}_*^\downarrow$ 都是有限维的（这意味着 $\mathscr{C}$ 是可容许的）。推论 3.23 的证明过程表明，可以从各种 $\mathrm{C}\uparrow_k$和 $\mathrm{C}^\downarrow\mathrm{k}$ 的基 $\mathscr{X}_{\uparrow k} = \mathscr{A}_{\uparrow k} \sqcup \mathscr{B}_{\uparrow k} \sqcup \mathscr{H}_{\uparrow k}$及 $\mathscr{X}^\downarrow\mathrm{k} = \mathscr{A}^\downarrow\mathrm{k} \sqcup \mathscr{B}^\downarrow\mathrm{k} \sqcup \mathscr{H}^\downarrow$中读出该分解，这些基分别满足以下性质：

(5.0.1) $\mathscr{X}_{\uparrow k}$是 $\ell_\uparrow^C$-正交的，且 $\mathscr{X}^\downarrow{}_k$是 $(-\ell^\downarrow C)$-正交的，即 对于$c_x \in \kappa$,

$$\ell_\uparrow^C\left(\sum_{x\in\mathscr{X}_{\uparrow k}} c_x x\right) = \max\{\ell_\uparrow^C(x) | c_x \neq 0\} \quad \text{and} \quad \ell_C^\downarrow\left(\sum_{x\in\mathscr{X}_k^\downarrow} c_x x\right) = \min\{\ell_C^\downarrow(x) | c_x \neq 0\}.$$

(5.0.2) $\mathscr{B}_{\uparrow k} \sqcup \mathscr{H}_{\uparrow k}$是 $\ker(\partial C_\uparrow\,|_{C_{\uparrow k}})$的一组基，且 $\mathscr{B}^\downarrow{}_k \sqcup \mathscr{H}^\downarrow{}_k$是 $\ker(\partial^\downarrow{}_C\,|_{C^\downarrow{}_k})$的一组基。

(5.0.3) $\partial C\uparrow$将 $\mathscr{A}_{\uparrow k+1}$双射到 $\mathscr{B}_{\uparrow k}$，且 $\partial^\downarrow{}_C$将 $\mathscr{A}^\downarrow{}_{k+1}$双射到 $\mathscr{B}^\downarrow{}_k$。因此，商投影（模去 $\partial C\uparrow$ 和 $\partial^\downarrow{}_C$的像）将 $\mathscr{H}_{\uparrow k}$ 和 $\mathscr{H}^\downarrow{}_k$分别识别为相应同调群 $H_k(C_{\uparrow *})$ 和 $H_k(C_*^\downarrow)$的基。

(5.0.4) 对于某些非负整数 m、p、p'、q、q'（取决于 k），我们可以写成 e

$$\mathscr{H}_{\uparrow k} = \{x_1, \dots, x_m, x_{m+1}, \dots, x_{m+p}, x_{m+p+1}, \dots, x_{m+p+q}\},$$
$$\mathscr{H}_k^{\downarrow} = \{y_1, \dots, y_m, y_{m+1}, \dots, y_{m+p'}, y_{m+p'+1}, \dots y_{m+p'+q'}\}$$

其中（记d] 为循环$d \in D_k$的同调类）：

(i) $[\psi_{\uparrow} x_i] = [\psi^{\downarrow} y_i]$ for $i = 1, \dots, m$;

(ii) $\{[\psi_{\uparrow} x_1], \dots, [\psi_{\uparrow} x_m], [\psi_{\uparrow} x_{m+1}], \dots [\psi_{\uparrow} x_{m+p}], [\psi^{\downarrow} y_{m+1}], \dots, [\psi^{\downarrow} y_{m+p'}]\}$ is a linearly independent set in $H_k(D_*)$; and

(iii) $[\psi_{\uparrow} x_{m+p+i}] = [\psi^{\downarrow} y_{m+p'+i'}] = 0 \in H_k(D_*)$ for all $i = 1, \dots, q, i' = 1, \dots, q'$.

在这种情形下，$\mathscr{C}$ 同构于以下各项的直和，其中k 取遍各值：

- For each $x \in \mathscr{A}_{\uparrow k+1}$ such that $\ell_{\uparrow}^C(\partial_{\uparrow}^C x) < \ell_{\uparrow}^C(x)$, a copy of $\left(\uparrow_{\ell_{\uparrow}^C(\partial_{\uparrow}^C x)}^{\ell_{\uparrow}^C(x)}\right)_k$;
- For each $x \in \mathscr{A}_{k+1}^{\downarrow}$ such that $\ell_C^{\downarrow}(\partial_C^{\downarrow} x) > \ell_C^{\downarrow}(x)$, a copy of $\left(\downarrow_{\ell_C^{\downarrow}(x)}^{\ell_C^{\downarrow}(\partial_C^{\downarrow} x)}\right)_k$;
- For $i = 1, \dots, m$, a copy of $\left(>_{\ell_{\uparrow}^C(x_i)}^{\ell_C^{\downarrow}(y_i)}\right)_k$;
- For $i = m+1, \dots, m+p$, a copy of $(\nearrow_{\ell_{\uparrow}^C(x_i)})_k$;
- For $i = m+1, \dots, m+p'$, a copy of $(\searrow^{\ell_C^{\downarrow}(y_i)})_k$;
- For $i = m+p+1, \dots, m+p+q$, a copy of $\left(\uparrow_{\ell_{\uparrow}^C(x_i)}^{\infty}\right)_k$;
- For $i = m+p'+1, \dots, m+p'+q'$, a copy of $\left(\downarrow_{-\infty}^{\ell_C^{\downarrow}(y_i)}\right)_k$; and
- A number of copies of $\square_k$ equal to $\dim H_k(D_*) - (m+p+p')$ (*i.e.*, to the dimension of the cokernel of $\psi_{\uparrow *} + \psi_*^{\downarrow} \colon H_k(C_{\uparrow *}) \oplus H_k(C_*^{\downarrow}) \to H_k(D_*)$).

虽然我们在此不追求寻找合适基底 $\mathscr{X}_{\uparrow k}$ 和 $\mathscr{X}^{\downarrow}{}_k$ 的最优高效算法，但我们指出，源自 [Ba94],[ZC05]的持久条形码标准高斯消元算法足以实现条件 (5.0.1) 至 (5.0.3)，随后还可通过相关技术修改基底 $\mathscr{H}_{\uparrow k}$ 和 $\mathscr{H}^{\downarrow}{}_k$，使条件 (5.0.4) 也成立。

在例 1.8 和 1.9 这类情形中，k-单形或指标为k 的临界点所给出的标准基，在$C^{\uparrow k}$ 和$C^{\downarrow}{}_k$ 中是正交的，但通常不满足 (5.0.1) 至 (5.0.4) 中的任何条件，因此必须将其改换为其他正交基。命题 3.5(ii) 随后给出了一个便捷的方法，用于检验这些新基确实是正交的。

在下面所有示例中，滤过余跨都将是有界的，并且我们令参数 Λ 等于 2。

5.1. **单纯复形**。 以下两个例子将说明如何计算例 1.8 中定义的单纯过滤余跨 $\mathscr{C}_{\partial}(X, f$ 的同构类型；其中，κ) 单纯复形X 以及f是定义在X的几何实现上的逐单形线性函数：$\mathbb{X} \to [-2, 2]$（在第一个例子中，f 的像将包含于 $[-1, 1]$，因此，按例 1.8 中的记号，$\partial X = \varnothing$和$X^- = X^+ = X$）。

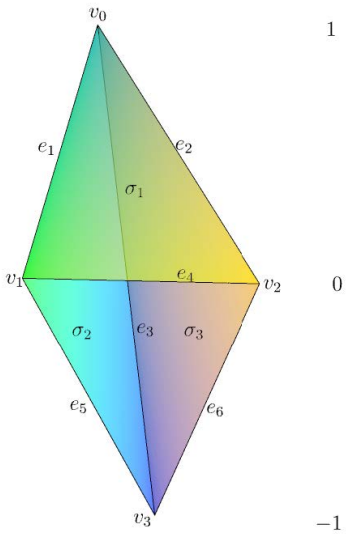


图1. 例5.1中的函数

例5.1。 考虑图1所示的单纯复形X和函数f。因此，X是标准3-单纯形的0-角（即 删去与第零个顶点相对的面后的 Δ^3 边界），且f在顶点v_0, v_1, v_2, v_3上的取值依次为 1、0、0 和 -1。

由于在此情形下 ∂X为空，复形 $(C^{\uparrow *}, \partial_{C^{\uparrow}})$, $(C^{\downarrow}_{*}, \partial^{\downarrow}{}_{C})$ 以及 (D_*, ∂_D) 均等于 X 的单纯链复形；函数 $\ell^C_{\uparrow}$ 和 $\ell^{\downarrow}{}_C$ 分别将单纯链映射到 f 在该链支撑上的最大值和最小值。

记 ∂^k 为 X 的单纯边界算子的 k 次部分（将 k 链映射到 $(k-1)$ 链）。我们看到，按照图中对各个单形的标记，∂^2 是单射，$\ker \partial^1 = \operatorname{Im} \partial^2 = \operatorname{span}\{e_1 - e_2 + e_4, e_1 - e_3 + e_5, e_2 - e_3 + e_6\}$，且 $\operatorname{Im}\ \partial^1 = \left\{ \sum_{i=0}^{3} a_i v_i \,\middle|\, a_0 + a_1 + a_2 + a_3 = 0 \right\}$。因此，同调在零次以外的次数上平凡，这并不令人意外；而在零次上，它是一维的，由任意一个顶点 v_i 的类生成。

让我们找出合适的基 $\mathscr{X}^{\downarrow}{}_k$ 和 $\mathscr{X}_{k\uparrow}$，如本节开头所述。本例的主要微妙之处出现在 $k=1$: 由于 1 阶同调平凡，我们需要构造 $(-\ell^{\downarrow}{}_C)$-正交基和 $\ell^C_{\uparrow}$-正交基 $\mathscr{X}^{\downarrow}_1 = \mathscr{A}^{\downarrow}_1 \sqcup \mathscr{B}^{\downarrow}_1$ 与 $\mathscr{X}^1_{\uparrow} = \mathscr{A}^1_{\uparrow} \sqcup \mathscr{B}^1_{\uparrow}$，使得$\mathscr{B}^{\downarrow}_1$和 $\mathscr{B}^1_{\uparrow}$ 张成空间 $\operatorname{Im}\partial_2$，并且在 ∂^2下具有正交原像；同时，$\mathscr{A}^1_{\uparrow}$和 $\mathscr{A}^{\downarrow}_1$在 ∂^1下的像也彼此正交。

为构成 $\mathscr{X}_1^{\downarrow}$，我们可以取 $\mathscr{B}_1^{\downarrow}$ 等于 $\{\partial\sigma_1, \partial\sigma_2, \partial\sigma_3\} = \{e_1 - e_2 + e_4, e_1 - e_3 + e_5, e_2 - e_3 + e_6\}$，以及 $\mathscr{A}_1^{\downarrow} = \{e_1, e_4, e_5\}$。（因此，根据 (5.0.3)，我们还必须取 $\mathscr{X}_2^{\downarrow} = \mathscr{A}_2^{\downarrow} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 和 $\mathscr{B}_0^{\downarrow} = \partial\left(\mathscr{A}_1^{\downarrow}\right) = \{v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_1\}$。）事实上，不难根据 $\ell^{\downarrow}$ C 的定义直接验证，$\mathscr{B}_0^{\downarrow}$ 是 $(-\ell^{\downarrow}\mathrm{C})$-正交的，而 $\mathscr{A}_2^{\downarrow}$ 是 $(-\ell^{\downarrow}\mathrm{C})$-正交的。要证明一维链的基 $\mathscr{X}_1^{\downarrow} = \mathscr{A}_1^{\downarrow} \cup \mathscr{B}_1^{\downarrow} = \{e_1, e_4, e_5, e_1 - e_2 + e_4, e_1 - e_3 + e_5, e_2 - e_3 + e_6\}$ 是 $(-\ell^{\downarrow}\mathrm{C})$-正交的，可以引用命题 3.5(ii)，注意到 $\ell^{\downarrow}$ C 将该基和“标准”基 $\{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ 都映射到 $\{0, 0, 0, -1, -1, -1\}$。

为了完成对基 $\mathscr{X}^{\downarrow}{}_k$ 的讨论，我们需要将基 $\mathscr{B}_0^{\downarrow} = \{v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_1\}$ 补充为张成空间 $\partial_1 \mathrm{Im}$ 的一个 $(-\ell^{\downarrow}{}_C)$-正交基 $\mathscr{B}_0^{\downarrow} \cup \mathscr{H}_0^{\downarrow} \{v_0, v_1, v_2, v_3\}$。容易看出（例如再次应用命题 3.5(ii)），做到这一点的唯一方式（忽略无关紧要的标量因子）是取 $\mathscr{H}_0^{\downarrow} = \{v_0\}$。

为了开始将其转化为所需的标准初等直和项分解，注意到对于 $\mathrm{k} = 0$ 和 $\mathrm{k} = 1$，每个 $\mathrm{x} \in \mathscr{A}^{\downarrow}\mathrm{k}{+}1$ 都满足 $\ell^{\downarrow}\mathrm{C}(\partial\mathrm{k}^{+1}\mathrm{x}) = \ell^{\downarrow}\mathrm{C}(\mathrm{x})$。因此，$\mathscr{A}^{\downarrow}\,\mathrm{k}{+}1$ 和 $\mathscr{B}^{\downarrow}\,\mathrm{k}$ 不会对分解贡献任何项 $(\downarrow^{a}\mathrm{b})_k$（其根本原因在于，可能记作“$(\downarrow^{a}\mathrm{a})_k$”的对象在 $\mathrm{HCO}(\kappa)$ 中同构于零）。另一方面，由于 $\mathscr{H}_0^{\downarrow}$ 中的单个元素 v_0 满足 $\ell^{\downarrow}\mathrm{C}(v_0) = 1$，它将贡献一个形如 $(>^{1}\mathrm{b})_0$的直和项；我们将在下面构造出 $\mathscr{H}_{\uparrow}^{0}$ 之后看到，$\mathrm{b} = -1$.[3]

现在我们转向 $\mathscr{X}\mathrm{k}{\uparrow}$。令 $\mathscr{A}_{\uparrow}^{2}$ 与标准基 $\mathscr{A}_2^{\downarrow} = \{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ 重合并不可行，因为该基的像并非 $\ell^{\downarrow}$C-正交：有 $\ell_{\uparrow}^{C}\left(\partial^2(\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3)\right) = \ell_{\uparrow}^{C}(e_4 - e_5 + e_6) = 0$，而 $\ell_{\uparrow}^{C}(\partial^2\sigma_1) = \ell_{\uparrow}^{C}(\partial^2\sigma_2) = \ell_{\uparrow}^{C}(\partial^2\sigma_3) = 1$。为此，我们取 $\mathscr{A}_{\uparrow}^{2} = \{\sigma_1 - \sigma_2 + \sigma_3, \sigma_2, \sigma_3\}$，从而得到 $\mathscr{B}_{\uparrow}^{1} = \partial^2(\mathscr{A}_{\uparrow}^{1}) = \{e_4 - e_5 + e_6, e_1 - e_3 + e_5, e_2 - e_3 - e_6\}$。于是可以取 $\mathscr{A}_{\uparrow}^{1} = \{e_1, e_4, e_5\}$（再次由命题 3.5(ii) 可知，$\mathscr{A}_{\uparrow}^{1} \cup \mathscr{B}_{\uparrow}^{1}$ 是 $\ell_{\uparrow}^{C}$-正交的）、$\mathscr{B}_{\uparrow}^{0} = \partial(\mathscr{A}_{0}^{\uparrow}) = \{v_1 - v_0, v_2 - v_1, v_3 - v_1\}$，以及 $\mathscr{H}_{\uparrow}^{0} = \{v_3\}$。（此处选择 v_3 是使其 $\mathscr{B}_{\uparrow}^{0} \cup \mathscr{H}_{\uparrow}^{0}$ $\ell_{\uparrow}^{C}$-正交所必需的。）

由于 $\ell_{\uparrow}^{C}(v_3) = -1$，这证实了先前的断言：与由 $\mathscr{H}_0^{\downarrow}$ 和 $\mathscr{H}_{\uparrow}^{0}$ 中唯一元素同时表示的零阶同调类相关联的直和项是 $(>_{-1}^{1})_0$。与 $\mathscr{A}^{\downarrow}{}_{k+1}$ 的情形一样，$\mathscr{A}_{k_{\uparrow}}{}^{+1}$ 中的大多数元素与其在 ∂^{k+1} 下的像具有相同的过滤层级，因此不会对分解有所贡献，但有一个例外：$f_1 - f_2 + f_3 \in \mathscr{A}_{\uparrow}^{2}$ 有 $\ell_{\uparrow}^{C}(f_1 - f_2 + f_3) = 1$ 和 $\ell_{\uparrow}^{C}(\partial^2(f_1 + f_2 + f_3)) = 0$，从而产生一个直和项 $(\uparrow_0^1)_1$。

我们得出，在此例中，$\mathscr{C}_{\partial}(X、f;\ \kappa)$ 与 $(\uparrow_0^1)_1 \oplus (>_{-1}^{1})_0$同构。根据命题 7.4 和 4.5，这对应于以下陈述：f 的水平集条形码：$\mathbb{X} \to \mathbb{R}$ 由一个 $[0,1)$ 1 阶区间和一个 $[-1,1]$ 0 阶区间组成。事实上，f 在 $[0,1)$ 中的各个水平集都与S^1, 同胚，而在 $[-1,1] \setminus [0,1)$ 中的水平集都是可缩的，其余水平集则为空。

[3]由于一般理论中记作 $\psi^{\downarrow}$ 和 $\psi_{\uparrow}$ 的映射在此情形下在同调上诱导同构（事实上，它们是恒等映射），因此不会出现任何形如 $(\uparrow^{\infty}{}_{a})_k$、$(\downarrow_{-\infty}^{a})_k$、$(\nearrow^{a})_k$、$(\searrow^{a})_k$或 $\square_k$的直和项。

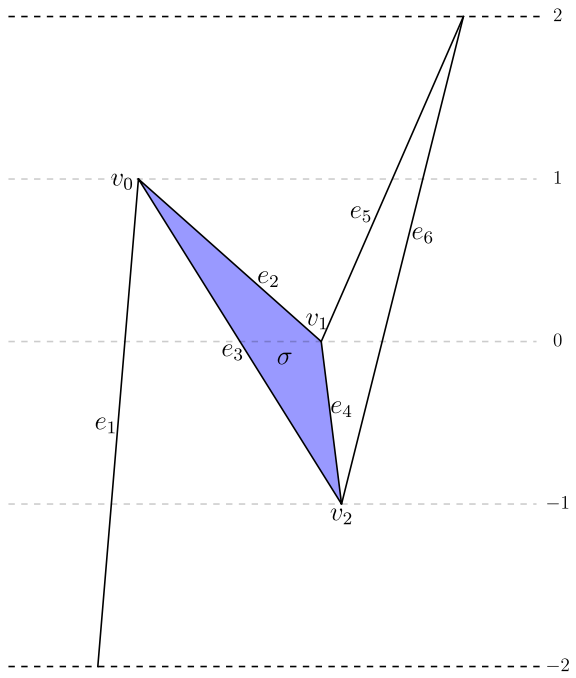


图 2. 例5.2中的函数

例5.2。对于一个具有 $\mathscr{C}_\partial(X、f；\kappa)$和 $\partial X \neq \varnothing$的例子，考虑图 2 所示的函数。这里，$\partial^+X$ 和 ∂^-X 各由一个点组成；由于这些点不会为任何相关链复形贡献生成元，因此图中未对其命名。根据例 1.8 中的定义，复形 (D_*, ∂_D) 是商复形 $C_*(X；\kappa)C_*(\partial X；\kappa)$，因此在 0 阶由 v_0, v_1, v_2，自由生成，在 1 阶由 $e_1, \ldots\ldots, e_6$，生成，在 2 阶由 σ生成。为确定符号，我们将 e_1, e_5，和 e_6 定向为背离边界，因此$\partial_D e_1 = v0$，$\partial_D e_5 = v1$，$\partial_D e_6 = v_2$。显然，$H_*(D_*, \partial_D)$与 S^1 相对于两个点的同调同构，因此它在 1 阶的秩为二，在其他次数上均为平凡；作为生成该同调的循环，我们可以取 $e_1 + e_2 - e_5$ 和 $e_4 + e_5 - e_6$。

复形 $C^{\uparrow *}$ 和 $C_*^{\downarrow}$ 是 D_* 的子复形，分别由那些不与 $f^{-1}(\{2\})$ 和 $f^{-1}(\{-2\})$相交的单形生成。因此，它们在次数 0 和 2 上与 D_*相同，而 $C^{\uparrow 1}$ = 张成空间$\{e_1, e_2, e_3, e_4\}$，$C_1^{\downarrow}$ = 张成空间$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$。

由于$C^{\uparrow 2}$和$C_2^{\downarrow}$都由 σ生成，我们取 $\mathscr{X}_\uparrow^2 = \mathscr{A}_\uparrow^2 = \mathscr{X}_2^{\downarrow} = \mathscr{A}_2^{\downarrow} = \{\sigma\}$，因此 $\mathscr{B}_\uparrow^1 = \mathscr{B}_1^{\downarrow} = \{e_2 - e_3 + e_4\}$。

∂_D 在一次中的核由 $\{e_2 - e_3 + e_4, e_1 + e_2 - e_5, e_4 + e_5 - e_6\}$ 张成，它与 $C^{\uparrow 1}$ 的交集仅为张成空间$\{e_2 - e_3 + e_4\}$ = 张成空间$\mathscr{B}_\uparrow^1$。因此 $\mathscr{H}_\uparrow^1$ 必为空，而对于 $\mathscr{A}_\uparrow^1$，我们需要同时确保 $\{e_2 - e_3 + e_4\} \cup \mathscr{A}_\uparrow^1$ 是 $\ell_\uparrow^C$-正交的，并且$\partial_D(\mathscr{A}_\uparrow^1)$是 $\ell_\uparrow^C$-正交的。后一条件要求 $\mathscr{A}_\uparrow^1$ 中的一个元素的边界为

在 sp 中 an$\{v_2\}$，另一个元素的边界属于张成空间$\{v_1, v_2\}$。一种合适的选择是取

$$\mathscr{A}_{\uparrow}^{1} = \{e_1 + e_3, e_4, e_2\}, \quad \text{and hence} \quad \mathscr{X}_{\uparrow}^{0} = \mathscr{B}_{\uparrow}^{0} = \{v_2, v_2 - v_1, v_1 - v_0\}.$$

由于$C\uparrow_*$的同调是平凡的，它对 $\mathscr{C}_\partial(X、f;\ \kappa)$的分解的唯一贡献，来自某个 $\mathscr{A}_{k_\uparrow}{}^{+1}$ 中的元素x，满足$x) < \ell_{\uparrow}^{C}(x)$。上面有一个这样的$x$，即$x = e_1 + e_3 \in \mathscr{A}_{\uparrow}^{1}$，由此产生一个直和项$(\uparrow_{-1}^{1})_0$。

转到 $C_*^{\downarrow}$，其 1 次循环由边界 $e_2 - e_3 + e_4$ 和同调非平凡元素 $e_4 + e_5 - e_6$ 张成。由于它们的任意非平凡线性组合都有 $\ell^{\downarrow} C = -1$，因此它们是 $(-\ell^{\downarrow} C)$-正交的，所以我们取 $\mathscr{H}_1^{\downarrow} = \{e_4 + e_5 - e_6\}$。对于 $\mathscr{A}_1^{\downarrow}$，我们必须同时满足：$\{e_2 - e_3 + e_4, e_4 + e_5 - e_6\} \cup \mathscr{A}_1^{\downarrow}$ 是 span$\{e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$ 的 $(-\ell^{\downarrow} C)$-正交基，且 $\mathscr{B}_0^{\downarrow} := \partial_D(\mathscr{A}_1^{\downarrow})$ 是 span$\{v_0, v_1, v_2\}$ 的 $(-\ell^{\downarrow} C)$-正交基；取……即可满足这一条件

$$\mathscr{A}_1^{\downarrow} = \{-e_2 + e_5, e_5, e_6\}, \quad \text{and hence} \quad \mathscr{X}_0^{\downarrow} = \mathscr{B}_0^{\downarrow} = \{v_0, v_1, v_2\}.$$

任意 $\mathscr{A}^{\downarrow} k_{+1}$ 中，滤过层级 $\ell^{\downarrow} C$ 与其边界不同的唯一元素是 $-e_2 + e_5 \in \mathscr{A}_1^{\downarrow}$；这在 $\mathscr{C}_\partial(X, f; \kappa)$ 的分解中给出一个直和项 $(\downarrow_0^1)_0$。同调非平凡循环 $e_4 + e_5 - e_6 \in \mathscr{H}_1^{\downarrow}$，满足 $\ell^{\downarrow} C = -1$，给出一个直和项 $(\searrow^{-1})_1$，因为它在 $H_1(D_*)$ 中的像非平凡。最后，$H_1(C_{\uparrow *}) \oplus H_1(C_*^{\downarrow}) \to H_1(D_*)$ 的像的一维补空间给出一个直和项 $\square_1$。

我们得出结论：$\mathscr{C}_\partial(X、f;\ \kappa) \cong (\uparrow_{-1}^{1})_0 \oplus (\downarrow_0^1)_0 \oplus (\searrow^{-1})_1 \oplus \square_1$，通过命题 7.4 对应于一个水平集条形码，它由区间 $[-1, 1)$、$(0, 1]$、$(-1, 2)$ 和 $(-2, 2)$ 组成，且都处于零次，与图 2 一致。

5.2. **莫尔斯函数**。本节中，我们考察例 1.9 中 Morse过滤余跨 $\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, v;\ \kappa)$ 的若干情形。在所有情形中，κ 都是一个域，而 $f\colon \mathbb{X} \to [-2, 2]$是定义在带边界紧流形 $\mathbb{X}$ 上的 Morse函数，其中 -2和 2 是正则值，且 $\partial\mathbb{X} = f^{-1}(\{-2, 2\})$。因此，Morse过滤余跨中的组成部分包括与一般梯度类向量场 v相关联的滤过莫尔斯复形 $C\uparrow_* = CM_*(f, v;\ \kappa)$和 $C_*^{\downarrow} = CM_*(-f, -v;\ \kappa)$，以及相对奇异链复形 $D_* = S_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X};\ \kappa)$。

我们有时记作 $I = [-2, 2]$，以及 $\partial I = \{-2, 2\}$。与例 1.9 一样，我们也写作 $\partial^{\pm}\mathbb{X} = f^{-1}(\{\pm 2\})$。

例 5.3。最简单的一类 Morse函数是没有临界点的函数。在这种情形下，v 的流允许我们构造一个微分同胚 $\mathbb{X} \cong M \times I$，其中 $M = \partial^{-}X$，将 $f^{-1}(\{t\})$ 与每个 $t \in I$ 对应的 $M \times \{t\}$相识别。Morse复形 $C\uparrow_*$ 和 $C_*^{\downarrow}$ 都是零复形，而相对奇异链复形与相对同调 $H_*(M \times I, M \times \partial I;\ \kappa)$同伦等价，且其微分为零。因此，$\mathscr{M}(X, f, v;\ \kappa)$ 是

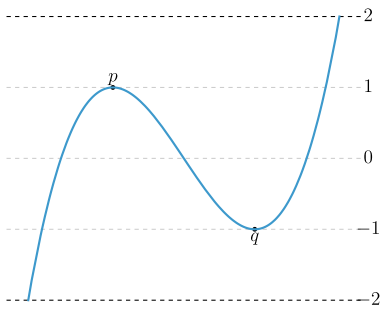


图3. 例 5.4 中的函数

在 $\mathrm{HCO}^{\wedge}(\kappa)$中同构于

$$0 \to H_*(M \times I,\ M \times \partial I;\ \kappa), \quad 0 \to$$

即 到直和 $\oplus_k (\square_k)^{\oplus \dim H_k(M\times I, M\times \partial I;\kappa)}$. 根据定理4.7和命题 7.4，这对应于一个水平集条形码，其中对每个k，都有若干个次数为$k-1$且等于 $H_k(M \times I, M \times \partial I;\ \kappa)$的副本；这与悬挂同构$H_{k-1}(M;\ \kappa) \cong H_k(M \times I, M \times \partial I;\ \kappa)$一致。

例 5.4. 再看一个简单的例子，考虑函数$f:\ \mathbb{X} \to [-2,2]$，如图3所示。

这里，$\mathrm{C}\uparrow^1 = \mathrm{C}_0^{\downarrow} =$ 由{p}张成，而$\mathrm{C}_{\uparrow}^0 = \mathrm{C}_1^{\downarrow} =$ 由{q}张成，微分由$\partial \mathrm{C}\downarrow \mathrm{p} = \pm \mathrm{q}$ 和 $\partial^{\downarrow}\mathrm{C}\,\mathrm{q} = \pm \mathrm{p}$ 给出（其中符号 $\pm$ 取决于辅助选择，但不影响结论）。由于 $\ell_{\uparrow}(\pm \mathrm{p}) = \ell^{\downarrow}(\pm \mathrm{p}) = \mathrm{f}(\mathrm{p}) = 1$ 且 $\ell_{\uparrow}(\pm \mathrm{q}) = \ell^{\downarrow}(\pm \mathrm{q}) = \mathrm{f}(\mathrm{q}) = -1$，可知无环复形$\mathrm{C}\uparrow_*$ 和$\mathrm{C}_*^{\downarrow}$ 分别与 $\mathscr{E}_0(-1,1)_{\uparrow}$和 $\mathscr{E}_0(1,-1)^{\downarrow}$滤过同伦等价。另一方面，由于 $\mathbb{X}$同胚于一个区间，$\mathrm{D}_* = \mathrm{S}_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X};\ \kappa)$与 κ_1同伦等价（区间相对于其边界的同调）。因此，在这种情况下我们得到如下分解

$$\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, v; \kappa) \cong (\uparrow_{-1}^1)_0 \oplus (\downarrow_{-1}^1)_0 \oplus \square_1.$$

5.2.1. 初等余边界。 我们以对Morse函数$f:\ \mathbb{X} \to [-2,2]$ 恰好只有一个临界点p且临界值为零的情形作一般性讨论，来结束对例子的讨论。我们始终记

$$n = \dim \mathbb{X}, \quad k = \mathrm{ind}_f(p).$$

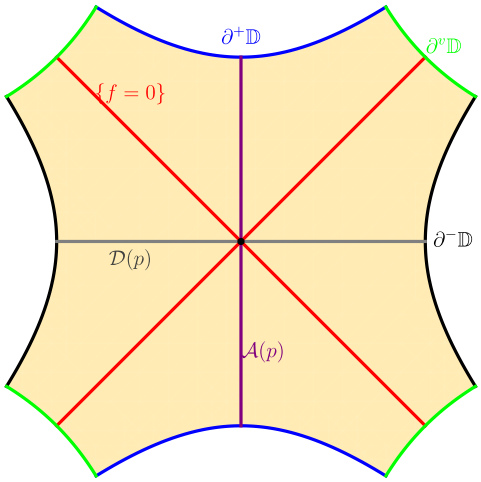


图4. 情形 $k=1, n=2$ 下的标准邻域 $\mathbb{D}$。

So

$$C_{\uparrow *}=\mathscr{E}_k(0,\infty)_{\uparrow},\quad C_*^{\downarrow}=\mathscr{E}_{n-k}(0,-\infty)^{\downarrow}.$$

对于类梯度向量场v的适当选择，临界点p 的一个邻域可以与集合等同

$$\mathbb{D}=\left\{(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{R}^k\times\mathbb{R}^{n-k}\,|\,-2\le-\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\le 2,\ \|\vec{x}\|\vec{y}\|\le 2\right\},$$

见图4，其中将f 在此邻域上的限制识别为 $(\vec{x},\ \vec{y})\mapsto-\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$，而$v$ 的时间t 流由 $(\vec{x},\ \vec{y})\mapsto(e^{-t}\vec{x},e^t\vec{y})$ 给出。

此集合 $\mathbb{D}$ 是 $\mathbb{R}^n$ 的带角光滑子流形，其余维为一的边界层的闭包构成

$$\partial^+\mathbb{D}=\{(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{D}|\ -\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2=2\},\quad \partial^-\mathbb{D}=\{(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{D}|\ -\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2=-2\},$$

and

$$\partial^v\mathbb{D}=\{(\vec{x},\vec{y})\in\mathbb{D}|\ \|\vec{x}\|\|\vec{y}\|=2\}.$$

存在 $\mathbb{D}\cap\partial^{\pm}\mathbb{X}=\partial\ \mathbb{D}$，其满足 $\partial^-\mathbb{D}$ 和 $\partial^+\mathbb{D}$，分别与 $S^{k-1}\times D^{n-k}$ 以及 $D^k\times S^{n-k-1}$ 微分同胚，并且存在一个微分同胚

$$\psi\colon\partial^v\mathbb{D}\to S^{k-1}\times S^{n-k-1}\times I$$

$$(\vec{x},\vec{y})\mapsto\left(\frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|},\frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|},-\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2\right).\tag{5.1}$$

由于f 在 $\mathbb{D}$ 之外没有临界点，且v 的流与 $\partial^v\mathbb{D}$相切，因此可以利用该流构造一个微分同胚 $\mathbb{X}\setminus\mathbb{D}\cong Y\times I$，其中$Y=\partial^-\mathbb{X}\setminus\partial^-\mathbb{D}$ 是一个光滑的$(n-1)$维带边界流形，其边界为 $\partial Y=\partial_v\mathbb{D}\cap\partial^-\mathbb{D}\cong S^{k-1}\times S^{n-k-1}$。

反过来，我们可以从一个光滑的 $(n-1)$维带边界流形Y和一个微分同胚 $\phi\colon S^{k-1}\times S^{n-k-1}\to\partial Y$出发，通过沿着 $\partial_v\mathbb{D}$和$(\partial Y)\times I$将 $\mathbb{D}$粘合到$Y\times I$上，构造出 $\mathbb{X}$，从而在保Morse函数f的微分同胚意义下恢复 $\mathbb{X}$:

$$\mathbb{X}=\frac{\mathbb{D}\coprod(Y\times I)}{\psi^{-1}(\phi^{-1}(y),t)\sim(y,t)\text{ for }y\in\partial Y,\,t\in I} \tag{5.2}$$

其中 ψ 是式（5.1）中的映射。函数f的定义很简单：在 $(\partial Y)\times I$ 上取到 I 因子的投影，在 $(\vec{x},\ \vec{y})\mapsto-\|\vec{x}\|^2+\|\vec{y}\|^2$ 上则取 $\mathbb{D}$。

因此，在本节余下部分，我们将把一个指标为 k 的 n 维初等协边的输入数据视为由一个紧致的带边界 $(n-1)$ 维流形Y以及一个微分同胚 $\phi\colon S^{k-1}\times S^{n-k-1}\to\partial Y$组成。我们假设$Y$的每个连通分支都具有非空边界；这相当于假设由式（5.2）得到的流形 $\mathbb{X}$ 是连通的。（一般情形可通过添加例 5.3 中的平凡协边得到。）

恰当地选择类梯度向量场后，唯一临界点 $p=(\vec{0},\vec{0})\in\mathbb{D}$ 的下降流形是 k-圆盘 $\mathscr{D}(p)=\mathbb{D}\cap(\mathbb{R}^k\times\{\vec{0}\})$，而上升流形是 $(n-k)$-圆盘 $\mathscr{A}(p)=\mathbb{D}\cap(\{\vec{0}\}\times\mathbb{R}^{n-k})$。正如 例如，[Mil65，第 3.14], 定理所述，可以将 $\mathbb{X}$ 分别变形收缩到 $\partial^-\mathbb{X}\cup\mathscr{D}(p)$ 或 $\partial^+\mathbb{X}\cup\mathscr{A}(p)$，这些变形收缩限制为将 $\mathbb{D}$ 变形收缩到 $\partial^-\mathbb{D}\cup\mathscr{D}(p)$ 或 $\partial^+\mathbb{D}\cup\mathscr{A}(p)$。

在此语境中，映射 $\psi_\uparrow\colon \mathrm{CM}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)\to\mathrm{S}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 将 $\mathrm{CM}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$ 的唯一生成元 p 映射为一个相对循环，其在 $\mathrm{H}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 中的同调类与下降圆盘 $\mathscr{D}(\mathrm{p})$ 的同调类相同；类似地， $\psi^\downarrow\colon \mathrm{CM}_*(-\mathrm{f},-\mathrm{v};\kappa)\to\mathrm{S}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 将该生成元映射为上升圆盘对应类的一个代表元。我们将这些在 $\mathrm{H}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 中的类分别记为 $[\mathscr{D}(\mathrm{p})]$ 和 $[\mathscr{A}(\mathrm{p})]$。$\mathscr{M}(\mathbb{X},\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$ 的代数分类取决于这些类是否非平凡；若非平凡，则还取决于它们是否线性相关。（$\mathscr{D}(\mathrm{p})$ 和 $\mathscr{A}(\mathrm{p})$ 的类在 $\mathrm{H}_k(\mathbb{X},\partial^-\mathbb{X};\kappa)$ 和 $\mathrm{H}_{n-k}(\mathbb{X},\partial^+\mathbb{X};\kappa)$ 中始终是非平凡的，但对于相对于整个边界 $\partial\mathbb{X}$ 的同调，情况则更为多样。）

例 5.5. 当 $k=0$ 或 $k=n$ 时，会出现一种有些退化的情形。由于我们假设 $\partial Y\cong S^{k-1}\times S^{n-k-1}$，并且 Y 的所有连通分支都有非空边界，又因为 $S^{-1}=\varnothing$，因此 Y 必定是空流形。因此 $\mathbb{X}=\mathbb{D}$，在这种情形下，它是 $\mathbb{R}^n$ 中半径为 $\sqrt{2}$ 的圆盘，而f 则由 $\vec{x}\mapsto\|\vec{x}\|^2$ 或 $\vec{x}\mapsto-\|\vec{x}\|^2$ 给出，具体取决于 $k=0$ 还是 n。

若 $\mathrm{k}=0$，则 $\partial^-\mathbb{X}=\varnothing$ 和 $\mathbb{X}$ 与上升流形 $\mathscr{A}(\mathrm{p})$重合。于是 $\mathrm{H}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)=\mathrm{H}_*(\mathbb{X},\partial^+\mathbb{X};\kappa)$在除 n 以外的次数上都是平凡的，并且在次数 n 上由 $[\mathscr{A}(\mathrm{p})]$生成。本情形中的下降流形是一个点，它在 $\mathrm{H}_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$中[5] 消失。因此，由于 $\mathrm{CM}_*(\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$和 $\mathrm{CM}_*(-\mathrm{f},-\mathrm{v};\kappa)$的生成元的过滤级别均为 0，可知当 $\mathrm{k}=0$时， $\mathscr{M}(\mathbb{X},\mathrm{f},\mathrm{v};\kappa)$同构于 $(\uparrow_0^\infty)_0\oplus(\searrow^0)_n$。

[4]模去取决于任意选择且不影响结论的符号[5]这里我们假设 $n\neq0$；对于 $n=0$ 这一极度退化的情形，读者可以作相应的修改。

若 $k = n$，情况则相反：我们有 $\partial^+\mathbb{X} = \varnothing$ 和 $\mathbb{X}$ 与 $\mathscr{D}(p)$重合，并且映射 $\psi_\uparrow\colon CM_*(f, v; \kappa) \to S_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa)$ 在同调上诱导一个同构，而 $\psi^\downarrow$诱导零映射。因此在此情形下，$\mathscr{M}(\mathbb{X},f, v;\kappa) \cong (\nearrow_0)_n \oplus (\downarrow^0_{-\infty})_0$。

排除例 5.5 后，从现在起假设 $0 < k < n$。给定微分同胚 $\phi\colon S^{k-1} \times S^{n-k-1} \to Y$，选取基点 $*$ 于S^{k-1}和S^{n-k-1}，并引入球面

$$S_- = \phi(S^{k-1} \times \{*\}), \qquad S_+ = \phi(\{*\} \times S^{n-k-1}) \tag{5.3}$$

于 ∂Y中。我们可以将S_-看作边界 $\partial\mathscr{D}(p) \subset \partial^-\mathbb{D}$沿 $\partial Y \cong \partial_v\mathbb{D} \cap \partial^-\mathbb{D}$ 推离所得，其中该边界属于下降圆盘 $\mathscr{D}(p)$；同样，S_+ 可看作将 $\partial\mathscr{A}(p)$ 推离至 $\partial_v\mathbb{D} \cap \partial^+\mathbb{X}$所得。

回顾微分同胚 $\psi\colon \partial \mathrm{v}\mathbb{D} \to \mathrm{S}^{k-1} \times \mathrm{S}^{n-k-1} \times \mathrm{I}$，我们在 $\partial \mathrm{v}\mathbb{D}$中有圆柱 $\mathrm{C}_- = \psi^{-1}(\mathrm{S}^{k-1} \times \{*\} \times \mathrm{I})$和 $\mathrm{C}_+ = \psi^{-1}(\{*\} \times \mathrm{S}^{n-k-1} \times \mathrm{I})$，其边界位于 $\partial \mathrm{v}\mathbb{D} \cap (\partial^+\mathbb{D} \cup \partial^-\mathbb{D})$上。用 $\partial^+\mathbb{D}$ 中的一个圆盘封住 C_- 的一个边界分支，可见 C_- 在 $\mathrm{H}_k(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D}; \kappa)$ 中表示与下降流形 $\mathscr{D}(\mathrm{p})$相同的类（相差一个符号）。类似地，C_+ 在 $\mathrm{H}_{n-k}(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D}; \kappa)$中表示与 $\mathscr{A}(\mathrm{p})$ 相同的类（模符号）。注意，在形成 $\mathbb{X}$的粘合 (5.2) 下，圆柱 $\mathrm{C}_\pm$ 对应于 $\mathrm{S}_\pm \times \mathrm{I} \subset (\partial \mathrm{Y}) \times \mathrm{I}$。

命题 5.6. 假设 $\mathrm{char}\ \kappa = 2$，或者 $\mathbb{X}$可定向，[6]并设 $\iota\colon \partial Y \to Y$为包含映射。那么：

(i) $[\mathscr{D}(p)] = 0 \in H_k(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa)$ 当且仅当 $\iota_*[S_-] = 0 \in H_{k-1}(Y; \kappa)$. (ii) $[\mathscr{A}(p)] = 0 \in H_{n-k}(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa)$ 当且仅当 $\iota_*[S_+] = 0 \in H_{n-k-1}(Y; \kappa)$. (iii) $\mathrm{span}\{[\mathscr{D}(p)], [\mathscr{A}(p)]\}$ 始终是 $H_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}$的一个一维子空间；$\kappa$)。

注记 5.7. 若$n \neq 2k$，则命题 5.6(iii)显然意味着 $[\mathscr{D}(p)]$和 $[\mathscr{A}(p)]$ 中恰有一个非零，因为这两个类的分次不同。然而，若$n = 2k$，则 $[\mathscr{D}(p)]$ 和 $[\mathscr{A}(p)]$ 可能都非零，且线性相关。

命题 *5.6* 的证明。考虑图表

(5.4)

$$\begin{array}{ccccc} H_*((\partial Y) \times I, (\partial Y) \times \partial I; \kappa) & \xrightarrow{(j^D_*, j^Y_*)} & H_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D}; \kappa) \oplus H_*(Y \times I, Y \times \partial I; \kappa) & \longrightarrow & H_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa) \\ \sigma \uparrow \cong & & & & \\ H_{*-1}(\partial Y; \kappa) & & & & \end{array}$$

其中，顶行是 Mayer-Vietoris 序列的一部分（其中 j^D、j^Y 分别是将$\partial Y \times I \cong \partial_v\mathbb{D}$ 包含到 $\mathbb{D}$ 和 $Y \times I$中的包含映射），而 σ 是悬挂同构。与命题中一样，我们用 $[\mathscr{D}(p)]$ 和 $[\mathscr{A}(p)]$ 表示$H_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}; \kappa)$中下降流形和上升流形的相对同调类；引入记号 $[\mathscr{D}(p)]_{\mathbb{D}}$

[6]为了用输入数据 Y 和 ϕ, $\mathbb{X}$ 来给出判据，当且仅当 Y 存在一种定向，使其在边界上诱导的定向令微分同胚 $\phi\colon \mathrm{S}^{k-1} \times \mathrm{S}^{n-k-1} \to \partial \mathrm{Y}$ 为反向定向，其中 $\mathrm{S}^{k-1} \times \mathrm{S}^{n-k-1}$ 带有由 S^{k-1} 和 S^{n-k-1} 作为 D^k 和 D^{n-k}的边界所诱导的标准乘积定向。情形 $\mathrm{k} = 1$ 或 $\mathrm{k} = \mathrm{n} - 1$ 时，注意，S^0 作为 D^1 的边界所具有的定向，会给 S^0的两个点赋予相反的符号。若 $1 < \mathrm{k} < \mathrm{n} - 1$，因此 $\partial \mathrm{Y}$ 连通，则只要求 Y 可定向即可，二者等价。

并用 $[\mathscr{A}(p)]_{\mathbb{D}}$ 表示$H_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D}; \kappa)$中下降流形和上升流形的类。命题之前的讨论表明

$$j_*^D \sigma[S_-] = \epsilon_1 [\mathscr{D}(p)]_{\mathbb{D}} \quad \text{and} \quad j_*^D \sigma[S_+] = \epsilon_2 [\mathscr{A}(p)]_{\mathbb{D}} \tag{5.5}$$

对于适当选取的 $\epsilon_1, \epsilon_2 \in \{-1, 1\}$。

建立以下结论将很有帮助：

断言 5.8。 核 j_*^D ⊂核 j_*^Y。

断言 *5.8* 的证明。 我们有一个 Mayer-Vietoris 序列

$$H_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa) \oplus H_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa) \to H_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa) \to H_{*-1}(\mathbb{D};\ \kappa) \to H_{*-1}(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa) \oplus H_{*-1}(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa),$$

其中 $\mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa)$ 和 $\mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D};\ \kappa)$ 均为一维，分别由下降流形和上升流形的类生成。因此，$\mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D}; \kappa)$（对所有分次求和）是三维的，其一组基由次数 k 中的 $[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathscr{D}}$、次数 n − k 中的 $[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathscr{D}}$，以及次数 1 中 $\mathbb{D}$ 内连接 $\partial^-\mathbb{D}$ 与 $\partial^+\mathbb{D}$ 的任意路径的类组成。这些生成元在相差一个符号的意义下，分别是类$[\mathrm{S}_-]$、$[\mathrm{S}_+]$和 $[\mathrm{pt}]$ 在 $\mathrm{H}_*(\partial \mathrm{Y};\ \kappa)$ 中经 $\mathrm{j}_*^D \circ \sigma$ 映射所得的像。特别地，$\mathrm{j}_*^D \circ \sigma\colon \mathrm{H}_{*-1}(\partial \mathrm{Y};\ \kappa) \to \mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa)$ 在这三个类张成的空间上的限制是单射。现在，由于我们假设 $\mathrm{char}\ \kappa = 2$ 或 $\mathbb{X}$ 可定向，因此存在基本类 $[\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}] \in \mathrm{H}_n(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X};\ \kappa)$。由于 $\mathrm{H}_n(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa) = \mathrm{H}_n(\mathrm{Y} \times \mathrm{I}, \mathrm{Y} \times \partial \mathrm{I};\ \kappa) = \{0\}$，连接同态 $\delta\colon \mathrm{H}_n(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X};\ \kappa) \to \mathrm{H}_{n-1}((\partial \mathrm{Y}) \times \mathrm{I}, (\partial \mathrm{Y}) \times \partial \mathrm{I};\ \kappa)$ 将 $[\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}]$ 映射为 $\mathrm{H}_{n-1}((\partial \mathrm{Y}) \times \mathrm{I}, (\partial \mathrm{Y}) \times \partial \mathrm{I};\ \kappa)$ 中的非零元素，而该元素随后被 $(\mathrm{j}^*\mathrm{D}, \mathrm{j}^*\mathrm{Y})$ 消去。（事实上，$\delta[\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}] = \pm\sigma[\partial \mathrm{Y}]$。）

因此 $H_*((\partial Y) \times I, (\partial Y) \times \partial I;\ \kappa)$ 是四维的，因为它与 $H_{*-1}(S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ 同构；$\kappa)$ 有一个三维子空间，在其上 j_*^D 是单射；另有一个一维子空间，在其上 j_*^D 和 j_*^Y 均为零。因此 $\ker j_*^D \subset \ker j_*^Y$。□

现在回到证明主体，由 (5.4) 顶行的正合性可知，一般线性组合 $\mathrm{x}[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} + \mathrm{y}[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} \in \mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa)$ 在包含诱导映射到 $\mathrm{H}_*(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X};\ \kappa)$ 下为零，当且仅当 $(\mathrm{x}[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} + \mathrm{y}[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}},\ 0)$ 属于 $\mathrm{Im}(\mathrm{j}_*^D, \mathrm{j}_*^Y)$。现在断言 5.8 表明，$\mathrm{Im}(\mathrm{j}_*^D, \mathrm{j}_*^Y)$ 中的元素由其在 $\mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa)$ 中的连通分支唯一确定。因此，根据 (5.5)，$\mathrm{Im}(\mathrm{j}_*^D, \mathrm{j}_*^Y)$ 中唯一一个 $\mathrm{H}_*(\mathbb{D}, \partial^-\mathbb{D} \cup \partial^+\mathbb{D};\ \kappa)$-分量等于 $\mathrm{x}[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} + \mathrm{y}[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}}$ 的元素是 $\left(\mathrm{x}[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} + \mathrm{y}[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}}, \mathrm{j}_*^Y \sigma(\epsilon_1 \mathrm{x}[\mathrm{S}_-] + \epsilon_2 \mathrm{y}[\mathrm{S}_+])\right)$，其中 ϵ_1、ϵ_2 为某些普适符号。因此，$\mathrm{x}[\mathscr{D}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}} + \mathrm{y}[\mathscr{A}(\mathrm{p})]_{\mathbb{D}}$ 在包含映射下为零，当且仅当 $\mathrm{j}_*^Y \sigma(\epsilon_1 \mathrm{x}[\mathrm{S}_-] + \epsilon_2 \mathrm{y}[\mathrm{S}_+]) = 0$。但是，$\mathrm{j}_*^Y \sigma(\epsilon_1 \mathrm{x}[\mathrm{S}_-] + \epsilon_2 \mathrm{y}[\mathrm{S}_+])$ 与 $\iota_*(\epsilon_1 \mathrm{x}[\mathrm{S}_-] + \epsilon_2 \mathrm{y}[\mathrm{S}_+]) \in \mathrm{H}_{*-1}(\mathrm{Y};\ \kappa)$ 在悬挂同构 $\mathrm{H}_{*-1}(\mathrm{Y};\ \kappa) \cong \mathrm{H}_*(\mathrm{Y} \times \mathrm{I}, \mathrm{Y} \times \partial \mathrm{I};\ \kappa)$ 下的像一致。

命题的第 (i) 项可直接通过将上述讨论应用于$x = 1$ 和$y = 0$的情形得出，而第 (ii) 项则由$x = 0$ 和$y = 1$的情形得出。上述讨论还表明

$$\dim\left(\left\{(x, y) \in \kappa^2 | x[\mathscr{D}(p)] + y[\mathscr{A}(p)] = 0\right\}\right) = \dim\left(\ker \iota_*|_{\mathrm{span}\{[S_-], [S_+]\}}\right).$$

因此，命题的 (iii) 项等价于以下陈述：$\iota_*[S_-]$ 和 $\iota_*[S_+]$ 张成 $H_*(Y; \kappa)$ 的一个一维子空间。我们通过确立这一陈述来完成证明。

如果 $k = 1$ 且 $n = 2$，则该结论可通过简短的情形分析得到，我们将其推迟到例 5.10 中讨论。如果 $k = 1$ 且 $n > 2$，于是 $\partial Y \cong S^0 \times S^{n-2}$ 有两个连通分支，那么 S_- 由这两个连通分支上各取的一个点组成，而 S_+ 等于 ∂Y 的一个连通分支。于是，$\iota_*[S_-] = 0$ 当且仅当 Y 是连通的。在这种情形下，$\iota_*\colon H_{n-2}(\partial Y;\kappa) \to H_{n-2}(Y;\kappa)$ 的核由 ∂Y 的基本类张成（因为该基本类是 $(Y,\partial Y)$ 的基本类在边界映射下的像，而后者生成 $H_{n-1}(Y;\kappa)$），其任意代表元都支撑于 ∂Y 的两个连通分支中。因此，如果 $\iota_*[S_-] = 0$，则 $\iota_*[S_+] \neq 0$。另一方面，如果 $\iota_*[S_-] \neq 0$，从而 Y 不连通，那么 S_+ 是 Y 的一个连通分支的边界，因此 $\iota_*[S_+] = 0$。所以，如果 $k = 1$ 且 $n > 2$，则 $\iota_*[S_-]$ 和 $\iota_*[S_+]$ 中恰有一个非零。如果 $k = n-1$ 且 $n > 2$，同样的结论也成立；这对应于在上述论证中交换 S_- 和 S_+ 的角色。

因此，在证明余下部分中，假设 $1 < k < n-1$，这样可以确保 $S^{k-1} \times S^{n-k-1} \cong \partial Y$ 的两个因子均为正维。接着，由庞加莱-勒夫谢茨对偶在对偶空间 $(Y,\partial Y)$ 的同调与上同调序列之间所建立的联系（例如参见 [Bre93，定理 VI.9.2]），可知 $\iota^*\colon H^{k-1}(Y;\kappa) \to H^{k-1}(\partial Y;\kappa)$ 的秩（等价地，$\iota_*\colon H_{k-1}(\partial Y;\kappa) \to H_{k-1}(Y;\kappa)$ 的秩）等于 $\iota_*\colon H_{n-k-1}(\partial Y;\kappa) \to H_{n-k-1}(Y;\kappa)$ 的核的维数。若 $n \neq 2k$，使得 $H_{k-1}(\partial Y;\kappa)$ 和 $H_{n-k-1}(\partial Y;\kappa)$ 均为一维，分别由 $[S_-]$ 和 $[S_+]$ 生成，则这意味着 $\iota_*[S_-] = 0$ 当且仅当 $\iota_*[S_+] \neq 0$，与上述 $k = 1$ 情形相同。若 $n = 2k$，使得 $H_{k-1}(\partial Y;\kappa) = H_{n-k-1}(\partial Y;\kappa) =$ 由 $\{[S_-],[S_+]\}$ 张成，则 $i_*\colon H_{k-1}(\partial Y;\kappa) \to H_{k-1}(Y;\kappa)$ 的像与核的维数均为一。因此，无论哪种情况，命题陈述中的 (iii) 的结论都成立。

□

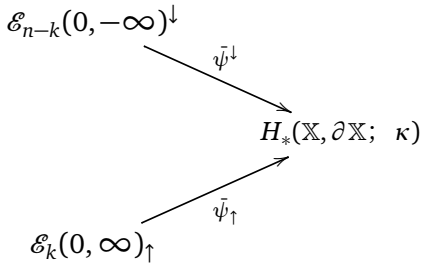
推论 5.9. 设$f\colon \mathbb{X} \to [-2,2]$ 是光滑连通紧致n维流形 $\mathbb{X}$上的 Morse函数，且只有一个临界点p，满足$f(p) = 0$，且p 的指标为$k \in \{1, \ldots, n-1\}$。若 $\operatorname{char}\kappa \neq 2$，则假设 $\mathbb{X}$ 可定向。设S_-、S_+为 (5.3) 中的球面。那么，对于一般梯度类向量场v，Morse过滤余跨 $\mathscr{M}(\mathbb{X},f、v;\ \kappa)$同构于适当数量的各类 $\square_j$ 的直和，其中 $1 \le j \le n$，再加上以下其中之一：

(i) $(\uparrow_0^\infty)_k \oplus (\searrow^0)_{n-k}$，情形为 $\iota_*[S_-] = 0$ 和 $\iota_*[S_+] \neq 0$；(ii) $(\nearrow_0)_k \oplus (\downarrow_{-\infty}^0)_{n-k}$，情形为 $\iota_*[S_-] \neq 0$ 和 $\iota_*[S_+] = 0$；或 (iii) $(>_0^0)_k$，情形为 $\iota_*[S_-]$ 和 $\iota_*[S_+]$ 均非零；这仅当$n = 2k$时才可能。

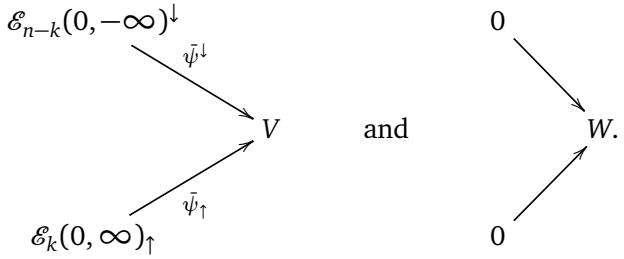
证明。 将例 1.9 中的映射 $\psi_\uparrow, \psi^\downarrow$ 与 $S_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 及其同调（配备零微分）之间的链同伦等价复合，我们得到一个

[7]具体而言，$\square_j$的副本数为 $\dim H_j(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\ \kappa) - 1$ 在情形 (i) 中，若 $j = n-k$，或在情形 (ii) 或 (iii) 中，若 $j = k$，则为此数；而对于其他所有 j，则为 $\dim H_j(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\ \kappa)$。为了将其与带边界的 $(n-1)$-流形 Y 联系起来，对命题 5.6 证明中序列 (5.4) 的分析，以及悬挂同构 $H_j(Y \times I, Y \times \partial I;\kappa) \cong H_{j-1}(Y;\kappa)$，推出 $H_j(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\ \kappa) \cong H_{j-1}(Y;\kappa)$，若 $j < n$；而 $H_j(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\ \kappa) \cong \kappa$。

$\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, \nu; \kappa)$ 与该滤过余跨之间的同构



其中涉及的所有复形均具有零微分，且映射 $\bar{\psi}^{\downarrow}$ 和 $\bar{\psi}_{\uparrow}$ 的像分别由类 $[\mathscr{A}(p)]$ 和 $[\mathscr{D}(p)]$ 张成。由命题 5.6，$V := \mathrm{span}\{[\mathscr{A}(p)], [\mathscr{D}(p)]\}$ 是一维的，因此，取 W 作为 $H_k(\mathbb{X}, \partial\mathbb{X}$ 中 V 的分次向量空间补空间 W 后，κ) 我们得到 $\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, \nu; \kappa)$ 的进一步直和分解



其中第二个同构于若干个 $\square_j$ 的直和，而第一个的分类可直接由命题 5.6 得出。□

换一种方式来描述这一拓扑情形，我们可以从一个光滑的 $(n-1)$ 维流形 Y 开始，其边界通过参数化与 $S^{k-1} \times S^{n-k-1}$ 相联系，并在 $S_- \cong S^{k-1}\{*\}$ 和 $S_+ \cong \{*\} \times S^{n-k-1}$ 上选定球面。由此得到的余边界 $\mathbb{X}$ 具有边界分支

$$\partial^- \mathbb{X} \cong (S^{k-1} \times D^{n-k}) \cup_{\partial} Y, \qquad \partial^+ \mathbb{X} \cong (D^k \times S^{n-k-1})_{\partial} Y.$$

用手术理论的语言来说，有一个附着球面 $S^{k-1} \times \{0\} \subset S^{k-1} \times D^{n-k} \subset \partial^- \mathbb{X}$ 和一个腰带球面 $\{0\} \times S^{n-k-1} \subset D^k \times S^{n-k-1} \subset \partial^+ \mathbb{X}$，它们各自都带有平凡化法丛；我们的余边界是与附着球面上的带框架手术相对应的余边界。球面 $S_{\pm} \subset \partial Y$ 是将附着球面和腰带球面沿其法丛平凡化所确定的恒定方向，推离至其管状邻域边界所得的。在 Morse 函数 f 的意义下，附着球面和腰带球面分别是下降圆盘和上升圆盘 $\mathscr{D}(p)$ 与 $\mathscr{A}(p)$ 的边界，而其框架在同痕意义下由将法丛在 $\mathscr{D}(p)$ 和 $\mathscr{A}(p)$ 上的平凡化限制到它们的边界而得到。

例 5.10。考虑 $k = 1$ 和 $n = 2$ 的情形。此时，Y 是一个紧致的 1-流形，其边界由四点空间 $S^0 \times S^0$, 参数化，并且 Y 的每个连通分支都有非空边界。在微分同胚意义下，Y 唯一可能的选择是两个闭区间 $I_1 \sqcup I_2$ 的不交并。我们有 $S^0 \times S^0 =$

$\{(1,1),(1,-1),(-1,1),(-1,1)\}$；我们可以重新标记，使得参数化 $\phi\colon S^0\times S^0\to\partial Y$ 满足 $\phi(1,1)\in\partial I_1$，于是根据另外三个点 $(1,-1)$、$(-1,1)$、$(-1,-1)$ 中哪一个被映射到 I_1的另一个边界点，会有三种可能的情形。

现在，$S^0\times S^0$ 的标准定向为点 $(1,1)$ 和$(-1,-1)$赋予正号，为点 $(1,-1)$和 $(-1,1)$ 赋予负号；因此，当且仅当 $\phi^{-1}(\partial I_1)$（从而 $\phi^{-1}(\partial I_2)$也）由两个符号相反的点组成时，粘合后得到的流形 $\mathbb{X}$才是可定向的 2 维流形。因此，为了符合命题 5.6 的假设，若 $\phi(-1,-1)\in\partial I_1$，则应假设 $\operatorname{char}\kappa=2$；而在其余两种情形下，无需此限制。

在 $\mathrm{H}_0(\partial\mathrm{Y};\kappa)$ 中，我们有 $\mathrm{S}_-=[\phi(1,1)]-[\phi(-1,1)]$ 和 $\mathrm{S}_+=[\phi(1,1)]-[\phi(1,-1)]$。因此，若 $\phi(-1,1)\in\partial\mathrm{I}_1$，则 $[\mathrm{S}_-]$ 在包含诱导映射到 $\mathrm{H}_0(\mathrm{Y};\kappa)$ 下映为零，而 $[\mathrm{S}_+]$ 不为零；若 $\phi(1,-1)\in\partial\mathrm{I}_1$，则情况相反。在剩下的情形 $\phi(-1,-1)\in\partial\mathrm{I}_1$，中，$\iota_*[\mathrm{S}_-]$ 和 $\iota_*[\mathrm{S}_+]$ 在 $\mathrm{H}_0(\mathrm{Y};\kappa)$中都非零，而 $\iota_*[\mathrm{S}_+]-\iota_*[\mathrm{S}_-]=0$，因为此时 $\phi(1,-1)$ 和 $\phi(-1,1)$ 是 I_2 的两个边界点。这证实了命题 5.6 的证明中的陈述：$\operatorname{span}\{\iota_*[\mathrm{S}_-],\iota_*[\mathrm{S}_+]\}$ 始终是一维的（该证明已处理 k 和 n 的其他所有取值，而将 $\mathrm{n}=2$ 且 $\mathrm{k}=1$ 的情形留待本例讨论）。因此，命题 5.6 和推论 5.9 的结论确实适用于当前情形。

因此，由推论 5.9 可知，$\mathscr{M}(\mathbb{X},f,v;\kappa)$可分解为：

(i) $\square_1\oplus\square_2\oplus(\uparrow_0^\infty)_1\oplus(\searrow^0)_1$ if $\phi^{-1}(\partial I_1)=\{(1,1),(-1,1)\}$;
(ii) $\square_1\oplus\square_2\oplus(\nearrow_0)_1\oplus(\downarrow_{-\infty}^0)_1$ if $\phi^{-1}(\partial I_1)=\{(1,1),(1,-1)\}$; and
(iii) $\square_1\oplus\square_2\oplus(>_0^0)_1$ if $\phi^{-1}(\partial I_1)=\{(1,1),(-1,-1)\}$ and $\operatorname{char}\kappa=2$.

这三种情形对应于将两条带 $\mathrm{I}_1\times\mathrm{I}$ 和 $\mathrm{I}_2\times\mathrm{I}$ 粘合到图4中的标准邻域 $\mathbb{D}$ 的三种方式，其中 $\cup_j(\partial\mathrm{I}_j)\times\mathrm{I}$ 与 $\partial\mathrm{v}\mathbb{D}$ 相配，而 $\cup_j(\partial\mathrm{I}\,\mathrm{j})\times\{\pm2\}$ 与 $\partial\mathrm{v}\mathbb{D}\cap\partial^{\pm}\mathbb{D}$ 相配。在情形 (i) 中，这会得到一个从 $\partial^-\mathbb{X}\cong\mathrm{S}^1$ 到 $\partial^+\mathbb{X}\cong\mathrm{S}^1\sqcup\mathrm{S}^1$, 的裤子曲面余边；在情形 (ii) 中，则得到一个从 $\mathrm{S}^1\sqcup\mathrm{S}^1$ 到 S^1 的裤子曲面余边。在情形 (iii) 中，$\partial^+\mathbb{X}$ 和 $\partial^-\mathbb{X}$ 都是圆，而 $\mathbb{X}$ 与 $\mathbb{R}\mathrm{P}^2$ 中去掉两个圆盘后的补集微分同胚。见图5。

根据定理4.7和命题 7.4，我们的分解对应于这样的表述：f 的水平集条形码由以下区间组成：

- 在情形 (i) 中，$(0,2)$和 $(-2,2)$为零次，$[0,2)$和 $(-2,2)$为一次；
- 在情形 (ii) 中，$(-2,0)$和 $(-2,2)$为零次，$(-2,0]$和 $(-2,2)$为一次；
- 在情形 (iii) 中，假设 $\operatorname{char}\kappa=2$，则只有 $(-2,2)$为零次，$(-2,2)$和$[0,0]$ 为 1 阶。

这反映在图5中。如果在特征不为 2 的域上考虑情形 (iii)，那么由于证明断言 5.8 时使用了 $\mathbb{X}$ 的基本类，命题 5.6 不适用。在此情形下，$H_*(\mathbb{X},\partial\mathbb{X};\kappa)$ 是一维的，支撑在一次上，并且 $[\mathscr{D}(p)]$和 $[\mathscr{A}(p)]$在 $H_1(\mathbb{X},\partial\mathbb{X}$中均为零；$\kappa)$这是因为 $\mathscr{D}(p)$和 $\mathscr{A}(p)$都没有与 $\mathbb{X}$的两个边界分支相交。因此，$\mathscr{M}(\mathbb{X},f$、v；$\kappa)$分解为

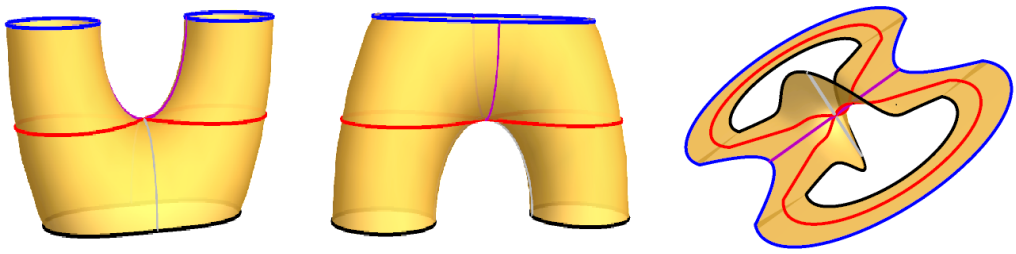


图5。二维指标为一的初等配边的三种类型。如图4所示， -2、0和2处的水平集分别以黑色、红色和蓝色显示；上升流形为紫色，下降流形为浅灰色。

$\square_1 \oplus (\uparrow_0^\infty)_1 \oplus (\downarrow_{-\infty}^0)_1$，对应于一个水平集条形码，其中 $(-2,2)$ 位于零次， $(-2,0]$ 和 $[0,-2)$ 位于一次。

例5.11。 最后，我们考虑一族满足 $k = 2$ 和 $n = 4$ 的情形。因此，Y 应为带环面边界的三维流形；具体而言，我们取 $Y = S^1 \times D^2$。当然， ∂Y 有一个由 $S^1 \times S^1$, 给出的标准参数化，但通过考虑不同的参数化 ϕ，我们可以得到一系列不同的余边界：$S^1 \times S^1 \to \partial Y$ 相对于 S^1 与 $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ 的标准识别，可由矩阵 $\begin{pmatrix} p & r \\ q & s \end{pmatrix} \in SL(2$表示； $\mathbb{Z})$。所得流形 $\mathbb{X}$ 总是可定向的，因此我们可以对任意系数域 κ 应用命题 5.6。

根据例 5.10 之前的讨论，边界 $\mathbb{X}$ 的底部 $\partial^- \mathbb{X}$ 是通过将另一份 $S^1 \times D^2$ 粘合到 Y 上形成的，粘合方式使得另一份的子午线被映到曲线 $r[S^1 \times \{pt\}] + s[\{pt\} \times \partial D^2] \in H_1(\partial Y; \mathbb{Z})$所属的类中。因此，$\partial^- \mathbb{X}$ 与透镜空间 L(r, s)微分同胚；例如参见 [Rol76， 第 9] 章。类似地，由于 $\partial^+ \mathbb{X}$ 是通过经由 ϕ 将 $D^2 \times S^1$ 粘合到 Y 上形成的， $\partial^+ \mathbb{X}$ 与 L(p, q)微分同胚。

现在，按照推论 5.9 的记号，当且仅当 ϕ 将 $S^1 \times \{pt\}$ 映到 $S^1 \times \partial D^2$, 的子午线在 $H_1(\partial Y; \kappa)$中的某个倍数时， $\iota_*[S_-] = 0$； 当且仅当 ϕ将 $\{pt\} \times S^1$ 映到 $S^1 \times \partial D^2$的子午线的某个倍数时， $\iota_*[S_+] = 0$。这两个条件分别等价于 $p = 0 \in \kappa$ 和 $r = 0 \in \kappa$。因此，我们得出，从 L(r, s) 到 L(p, q) 的初等协边 $\mathbb{X}$ 具有 $\mathscr{M}(\mathbb{X}, f, v; \kappa)$ 同构于：

- $\square_1 \oplus \square_4 \oplus (\uparrow_0^\infty)_2 \oplus (\searrow^0)_2$ 如果 $p = 0 \in \kappa$;
- $\square_1 \oplus \square_4 \oplus (\nearrow_0)_2 \oplus (\downarrow_{-\infty}^0)_2$ 如果 $r = 0 \in \kappa$;
- $\square_1 \oplus \square_4 \oplus (>_0^0)_2$ 如果 $pr \neq 0 \in \kappa$。

这些分别对应于水平集条形码 $\{(-2,2)_0, (0,2)_1, [0,2)_2, (-2,2)_3\}$、$\{(-2,2)_0, (-2,0)_1, (-2,0]_2, (-2,2)_3\}$ 和 $\{(-2,2)_0, [0,0]_2, (-2,2)_3\}$，其中“$I_j$”指的是分次 j 中的区间 I。

6. 从过滤余跨到 $\mathbb{M}$-指标化持久模

本节关注函子 $\mathscr{F}\colon \mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$ 的构造及其性质。这里，$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 是第 2 节中 Λ-有界滤过余跨所构成的范畴，$\mathsf{K}(\kappa)$ 是由 κ-向量空间上的链复形构成的同伦范畴；并且遵循 [BBF24]（用我们的语言来说，他们通常取 $\Lambda = \frac{\pi}{2}$ ），

$$\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2\Lambda \leq x + y \leq 2\Lambda\},$$

可将其视为一个范畴：当x、y) $\to$ (x'、y') 时，存在唯一态射 (；当$x \geq x'$ 且$y \leq y'$时，则不存在态射 (x、y) $\to$ (x'、y') 。记号 $\mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$ 随后表示从 $\mathbb{M}$ 到$\mathsf{K}(\kappa)$的函子范畴，其态射由自然变换给出。（换言之，$\mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$ 是$\mathsf{K}(\kappa)$中的持久性模范畴，其指标由 $\mathbb{M}$ 这一 $\mathbb{R}^{\circ} \times \mathbb{R}$的子序偏序集给出，其中 $\mathbb{R}^{\circ}$ 表示将实数集视为一个序与通常序相反的偏序集。）函子 $\mathscr{F}$的构造需要若干步骤，它将使我们能够把本文截至目前讨论的$\mathsf{HCO}(\kappa)$的性质与层间持久性联系起来。

6.1. **条带** $\mathbb{M}$。 在定义函子 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$ 之前，我们先介绍关于 [BBF24] 条带 $\mathbb{M} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | -2\Lambda \leq x + y \leq 2\Lambda\}$ 中区域的约定。回顾一下，这个条带被视为一个偏序集，其序由 $\preceq$ 如下给出$(x, y) \preceq (x', y')$ 当且仅当 $x \geq x'$ 且 $y \leq y'$。根据 [BBF24], , 存在一个重要的严格递增且保序的映射

$$T\colon \mathbb{M} \to \mathbb{M}$$
$$(x, y) \mapsto (-2\Lambda - y, 2\Lambda - x).$$

这是一个滑移反射，先关于直线 $\{x + y = 0\}$ 进行反射，然后平移 $(-2\Lambda, 2\Lambda)$。此映射 T 在 $\mathbb{M}$上生成一个 $\mathbb{Z}$-作用，其商空间是莫比乌斯带。作为此作用的一个基本域，我们将使用集合

$$\mathfrak{D} = S \sqcup L \sqcup A$$

其中：

$$S = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, -\Lambda < x \leq \Lambda,\, -\Lambda \leq y < \Lambda\right\};$$
$$L = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y \geq -2\Lambda,\, x \leq -\Lambda,\, y < \Lambda\right\};$$
$$A = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x + y \leq 2\Lambda,\, x > -\Lambda,\, y \geq \Lambda\right\}.$$

（这里，“S”表示“正方形”，“L”表示“左侧”，“A”表示“上方”。）集合 $\mathbb{M}$ 是集合 $T^k(\mathfrak{D})$ 的不交并，这一点留给读者验证，其中 k 遍历 $\mathbb{Z}$。参见图 6。注意，在大多数 [BBF24],[BBF21] 中使用的基本域与 $\mathfrak{D}$ 不同。

6.2. **函子** $\mathscr{F}^0_{(s、t)}$。 在本小节中，对于每个 $(s、t) \in \mathbb{M}$，我们将定义一个函子

$$\mathscr{F}^0_{(s,t)}\colon \mathsf{CO}^{\Lambda}(\kappa) \to \mathsf{Ch}(\kappa).$$

首先，我们补充一些记号。

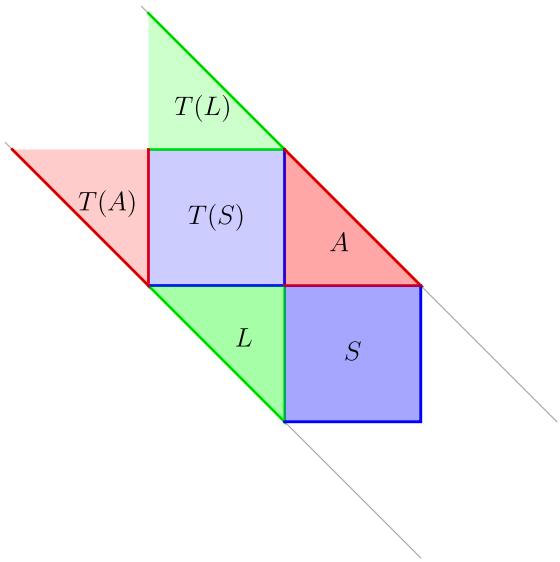


图 6。条带 $\mathbb{M}$，展示了区域 S、L、A，它们构成了由 T 生成的作用的基本域 $\mathfrak{D}$，以及这些区域在 T 作用下的像。

对于 $\mathsf{CO}^\Lambda(\kappa)$ 中的一个对象，其数据为 $\left((C^\uparrow{}_*, \partial_C{}^\uparrow, \ell^C_\uparrow), (C^\downarrow_*, \partial^\downarrow{}_C, \ell^\downarrow{}_C), (D_*, \partial_D), \psi_\uparrow, \psi^\downarrow\right)$，如定义 1.3 所示；对于 $t \in [-\Lambda, \Lambda]$，回顾子复形的记号

$$C^{\leq t}_\uparrow = (\ell^C_\uparrow)^{-1}((-\infty, t]), \quad C^\downarrow_{\geq t} = (\ell^\downarrow_C)^{-1}([t, \infty]). \tag{6.1}$$

由于 $\mathsf{CO}^\Lambda(\kappa)$ 的对象按假设是 Λ-有界的，因此我们有

$$C^{\leq -\Lambda}_\uparrow = C^\downarrow_{\geq \Lambda} = \{0\}.$$

对于 $Ch = (C_*, \partial_C)$ 中的对象 $C = (C_*, \partial_C)$，以及 $k \in \mathbb{Z}$，$C[k]$ 表示通过令 $C[k]_n = C_{n+k}$ 和 $\partial_{C[k]} = (-1)^k \partial_C$ 得到的链复形。赋值 $C \mapsto C[k]$ 可通过将其在 $\mathrm{Hom}^m{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C,D)$ 上的作用定义为乘以 $(-1)^{mk}$，从而扩充为微分分次函子 $\mathsf{Ch}(\kappa) \to \mathsf{Ch}(\kappa)$。

$\mathscr{F}^0_{(s,t)}$ 的公式取决于 (s, t) 相对于第 6.1 节中引入的子集所处的位置，注意到

$$\mathbb{M} = \sqcup_{k \in \mathbb{Z}} T^k(S \sqcup L \sqcup A); \tag{6.2}$$

事实上，对于 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $(x, y) \in \mathfrak{D} = S \sqcup L \sqcup A$，我们将设定，

$$\mathscr{F}^0_{T^k(x,y)} = \begin{cases} \mathscr{S}^k_{x,y} & \text{if } (x,y) \in S \\ \mathscr{L}^k_{x,y} & \text{if } (x,y) \in L \\ \mathscr{A}^k_{x,y} & \text{if } (x,y) \in A \end{cases} \tag{6.3}$$

其中，$\mathscr{S}_{k x、y}$、$\mathscr{L}_{k x、y}$、$\mathscr{A}_{k x、y}$的定义如下。给定一个对象 $\mathscr{C}=\Big((C_{\uparrow *}、\ \partial_{C\uparrow}、\ \ell_{\uparrow}^{C})、\ (C_{*}^{\downarrow}、\ \partial^{\downarrow}{}_{C}、\ \ell^{\downarrow}{}_{C})、\ (D_{*}、\ \partial_{D})、\ \psi_{\uparrow}、\ \psi^{\downarrow}\Big)$，如定义 1.3 中所述，并采用公式 (6.1) 中的记号，我们设定：

$$\begin{aligned}\mathscr{S}_{x,y}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow}\colon\ C_{\geq x}^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow}^{\leq y}\to D)[-k+1]\\ \mathscr{L}_{x,y}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(C_{\uparrow}^{\leq -2\Lambda-x}\hookrightarrow C_{\uparrow}^{\leq y})[-k]\\ \mathscr{A}_{x,y}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(C_{\geq 2\Lambda-y}^{\downarrow}\hookrightarrow C_{\geq x}^{\downarrow})[-k].\end{aligned}$$

（在上面最后两行中，$\hookrightarrow$ 表示包含映射；这些包含映射是良定义的，因为$x\leq 2\Lambda-y$ 在A上成立，且$y\geq -2\Lambda-x$ 在L上成立。）

现在，给定两个来自 $\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)$ 的对象 $\mathscr{C}=\Big((\mathrm{C}\uparrow_{*},\partial\mathrm{C}\uparrow,\ell_{\uparrow}^{C}),(\mathrm{C}_{*}^{\downarrow},\partial^{\downarrow}\mathrm{C}\,,\ \ell^{\downarrow}\mathrm{C}),(\mathrm{D}_{*},\partial_{D}),\psi_{\uparrow},\ \psi^{\downarrow}\Big)$ 以及$\mathscr{X}=\Big((\mathrm{X}\uparrow_{*},\partial\mathrm{X}\uparrow,\ell_{\uparrow}^{X}),(\mathrm{X}_{*}^{\downarrow},\partial^{\downarrow}\mathrm{X}\,,\ \ell^{\downarrow}\mathrm{X}\,),(\mathrm{Y}_{*},\partial_{Y}),\phi^{\downarrow},\phi_{\uparrow}\Big)$，并给定一个次数为 m 的态射 $\mathfrak{a}=(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,\mathrm{K}^{\downarrow},\ \mathrm{K}_{\uparrow})\in\mathrm{Hom}^{m}\,\mathrm{CO}^{\wedge(\kappa)}{}^{(\mathscr{C},\mathscr{X})}$，我们将函子在 $\mathfrak{a}$ 上的作用写成块形式如下：

$$\mathscr{S}_{x,y}^{k}(\mathfrak{a})=(-1)^{m(k-1)}\begin{pmatrix}\alpha^{\downarrow}&0&0\\0&\alpha_{\uparrow}&0\\-K^{\downarrow}&K_{\uparrow}&\alpha\end{pmatrix}\tag{6.4}$$

(作为分次映射 $C_{\geq}^{\downarrow}x\,[-k]\oplus C_{\uparrow}^{\leq y}[-k]\oplus D[-k+1]\to X_{\geq}^{\downarrow}x\,[-m-k]\oplus X^{\leq}y_{\uparrow}\ [-m-k]\oplus Y\,[-m-k+1]$);

$$\mathscr{L}_{x,y}^{k}(\mathfrak{a})=(-1)^{mk}\begin{pmatrix}\alpha_{\uparrow}&0\\0&(-1)^{m}\alpha_{\uparrow}\end{pmatrix}\tag{6.5}$$

(作为分次映射 $C_{\uparrow}^{\leq -2\Lambda-x}[-k-1]\oplus C_{\uparrow}^{\leq y}[-k]\to X^{\leq -2\Lambda-}{}_{x_{\uparrow}}\qquad[-m-k-1]\oplus X_{\uparrow}^{\leq y}[-m-k]$); 且

$$\mathscr{A}_{x,y}^{k}(\mathfrak{a})=(-1)^{mk}\begin{pmatrix}\alpha^{\downarrow}&0\\0&(-1)^{m}\alpha^{\downarrow}\end{pmatrix}\tag{6.6}$$

(作为分次映射 $C_{\geq 2\Lambda-}^{\downarrow}y[-k-1]\oplus C_{\geq}^{\downarrow}x\,[-k]\to X_{\geq 2\Lambda-}^{\downarrow}y[-m-k-1]\oplus X_{\geq}^{\downarrow}x\,[-m-k]$).

容易验证，$\mathscr{S}$k x,y、$\mathscr{L}$k x,y 和 $\mathscr{A}$k x,y 均与复合相容，并交织微分 δ，因此它们各自定义了微分分次函子，从而在同伦范畴之间诱导出函子 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathrm{K}(\kappa)$。对于 (s, t) $\in\mathbb{M}$，我们将由 $\mathscr{S}$k x,y 、$\mathscr{L}$k x,y 或 $\mathscr{A}$k x,y 分别诱导的同伦范畴上的函孑记作 $\mathscr{F}_{(\mathrm{s,t})}^{0}$，其中若 $(\mathrm{s,t})=\mathrm{T}^{k}(\mathrm{x,y})$，则 (x, y) 分别属于 S、L 或 A。

6.3. **在 $\mathscr{F}_{(s、t)}^{0}$之间的变换**。对于对象 $\mathscr{C}=\Big((C\uparrow_{*}、\ \partial_{C}\uparrow、\ \ell_{\uparrow}^{C})、\ (C_{*}^{\downarrow}、\ \partial^{\downarrow}{}_{C}、\ \ell^{\downarrow}{}_{C})、\ (D_{*}、\ \partial_{D})、\ \psi_{\uparrow}、\ \psi^{\downarrow}\Big)$，属于 $\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)$，记作

$$\begin{aligned}\mathscr{S}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow}\colon\ C^{\downarrow}\oplus C_{\uparrow}\to D)[-k+1]\\ \mathscr{L}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(C_{\uparrow}\to C_{\uparrow})[-k]\\ \mathscr{A}^{k}(\mathscr{C})&=\mathrm{Cone}(C^{\downarrow}\to C^{\downarrow})[-k]\end{aligned}$$

其中，定义 $\mathscr{L}^k(\mathscr{C})$、$\mathscr{A}^k(\mathscr{C})$ 的锥中的映射分别为恒等映射。因此，各个 $\mathscr{S}^{kx,y}(\mathscr{C})$、$\mathscr{L}^{kx,y}(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{A}^{kx,y}(\mathscr{C})$ 分别是 $\mathscr{S}^k(\mathscr{C})$、$\mathscr{L}^k(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{A}^k(\mathscr{C})$ 的某些滤过子复形。

我们定义以下映射，并以显然的分块矩阵形式表示：

$$\phi^{T^kL}_{T^kS}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1_{C_\uparrow[-k]} & 0 \end{pmatrix} : \mathscr{S}^k(\mathscr{C}) \to \mathscr{L}^k(\mathscr{C})$$

$$\phi^{T^kA}_{T^kS}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1_{C^\downarrow[-k]} & 0 & 0 \end{pmatrix} : \mathscr{S}^k(\mathscr{C}) \to \mathscr{A}^k(\mathscr{C})$$

$$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1_{C_\uparrow[-k-1]} & 0 \\ 0 & \psi_\uparrow \end{pmatrix} : \mathscr{L}^k(\mathscr{C}) \to \mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{C})$$

$$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} -1_{C^\downarrow[-k-1]} & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \psi^\downarrow \end{pmatrix} : \mathscr{A}^k(\mathscr{C}) \to \mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{C})$$

直接计算可知，这些映射中的每一个都是链映射。它们旨在为图 6 中相邻区域之间的转换提供相应的结构映射，这些结构映射属于与 $\mathscr{C}$ 相关联的 $\mathbb{M}$-指标持久性模。

下面记录一些关于上述映射复合的计算。回忆一下，复形 $\mathrm{Hom}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C,D)$ 上的微分 $\delta_{C,D}$ 由以下公式给出：对于 $\psi \in \mathrm{Hom}^m{}_{\mathsf{Ch}(\kappa)}(C,D)$，$\delta_{C,D}\psi = \partial_D\psi - (-1)^m\psi\partial_C$。我们有：

$$\phi^{T^{k+1}A}_{T^{k+1}S}(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C}) = 0; \qquad \phi^{T^{k+1}L}_{T^{k+1}S}(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C}) = 0; \tag{6.7}$$

$$\phi^{T^{k+1}L}_{T^{k+1}S}(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{\mathscr{L}^k(\mathscr{C}),\mathscr{L}^{k+1}(\mathscr{C})} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k \end{pmatrix}; \tag{6.8}$$

$$\phi^{T^{k+1}A}_{T^{k+1}S}(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \delta_{\mathscr{A}^k(\mathscr{C}),\mathscr{A}^{k+1}(\mathscr{C})} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (-1)^{k+1} \end{pmatrix}; \tag{6.9}$$

$$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C})\phi^{T^kL}_{T^kS}(\mathscr{C}) = \delta_{\mathscr{S}^k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{C})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^k & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \tag{6.10}$$

$$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C})\phi^{T^kA}_{T^kS}(\mathscr{C}) = \delta_{\mathscr{S}^k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{C})} \begin{pmatrix} (-1)^{k+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}; \text{ and} \tag{6.11}$$

$$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C})\phi^{T^kA}_{T^kS}(\mathscr{C}) - \phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C})\phi^{T^kL}_{T^kS}(\mathscr{C}) = \delta_{\mathscr{S}^k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{C})} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^k \end{pmatrix}. \tag{6.12}$$

关于映射 $\phi^{T^k_k\mathrm{L\,T\,S}}$, $\phi^{T^k_k\mathrm{A\,T\,S}}$, $\phi^{T^{k+1}_k\mathrm{S\,T\,L}}$, $\phi^{T^{k+1}_k\mathrm{S\,T\,A}}$ 的自然性，设 $\mathscr{X}=\left((\mathrm{X}\uparrow_*,\partial\mathrm{X}\uparrow,\ell^{X}_{\uparrow}),(\mathrm{X}\downarrow_*,\partial^{\downarrow}\mathrm{X},\ell^{\downarrow}\mathrm{X}),(\mathrm{Y}_*,\partial_Y),\phi^{\downarrow},\phi_{\uparrow}\right)$ 是 $\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)$ 的另一个对象，并且 $\mathfrak{a}=(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,\mathrm{K}^{\downarrow},\mathrm{K}_{\uparrow})\in\mathrm{Hom}^m{}_{\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})$。将 $\mathscr{S}\mathrm{k}(\mathfrak{a})\in\mathrm{Hom}^m{}_{\mathrm{Ch}(\kappa)}(\mathscr{S}\mathrm{k}(\mathscr{C},\mathscr{X}))$ 记为由（6.4）右侧给出的态射（但现在视为未滤过复形 $\mathscr{S}\mathrm{k}(\mathscr{C})$ 与 $\mathscr{S}\mathrm{k}(\mathscr{X})$之间的映射）；类似地，令 $\mathscr{L}\mathrm{k}(\mathfrak{a})$ 和 $\mathscr{A}\mathrm{k}(\mathfrak{a})$ 由（6.5）和（6.4）右侧给出。我们得到：

(6.13)　$\phi^{T^kL}_{T^kS}(\mathscr{X})\mathscr{S}^k(\mathfrak{a})=\mathscr{L}^k(\mathfrak{a})\phi^{T^kL}_{T^kS}(\mathscr{C});\qquad \phi^{T^kA}_{T^kS}(\mathscr{X})\mathscr{S}^k(\mathfrak{a})=\mathscr{A}^k(\mathfrak{a})\phi^{T^kL}_{T^kA}(\mathscr{C});$

(6.14)　$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{X})\mathscr{L}^k(\mathfrak{a})-\mathscr{S}^{k+1}(\mathfrak{a})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kL}(\mathscr{C})=\delta_{\mathscr{L}^k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{X})}(\mathscr{K}_{\uparrow}\mathfrak{a})+\mathscr{K}_{\uparrow}(\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\mathfrak{a});$ and

(6.15)　$\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{X})\mathscr{A}^k(\mathfrak{a})-\mathscr{S}^{k+1}(\mathfrak{a})\phi^{T^{k+1}S}_{T^kA}(\mathscr{C})=\delta_{\mathscr{A}^k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{X})}(\mathscr{K}^{\downarrow}\mathfrak{a})+\mathscr{K}^{\downarrow}(\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\mathfrak{a}),$

其中，我们通过以下方式定义 $\mathscr{K}_{\uparrow}:\mathrm{Hom}^m{}_{\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})\to\mathrm{Hom}^{m-1}{}_{\mathrm{Ch}(\kappa)}(\mathscr{L}_k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{X}))$ 和 $\mathscr{K}^{\downarrow}:\mathrm{Hom}^m{}_{\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C},\mathscr{X})\to\mathrm{Hom}^{m-1}{}_{\mathrm{Ch}(\kappa)}(\mathscr{A}_k(\mathscr{C}),\mathscr{S}^{k+1}(\mathscr{X}))$

$$\mathscr{K}_{\uparrow}(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow})=(-1)^{(m-1)(k-1)}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&K_{\uparrow}\end{pmatrix}\quad\text{and}$$

$$\mathscr{K}^{\downarrow}(\alpha^{\downarrow},\alpha_{\uparrow},\alpha,K^{\downarrow},K_{\uparrow})=(-1)^{(m-1)(k-1)}\begin{pmatrix}0&0\\0&0\\0&K^{\downarrow}\end{pmatrix}$$

方程 (6.13) 表明，$\phi^{T^k\mathrm{L\,T\,kS}}$ 定义了函子 $\mathscr{S}\mathrm{k},\mathscr{L}\mathrm{k}:\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathrm{Ch}(\kappa)$ 之间的自然变换；同样，$\phi^{T\mathrm{kA\,T}^k\mathrm{S}}$ 定义了 $\mathscr{S}\mathrm{k}$ 与 $\mathscr{A}^k$ 之间的自然变换。另一方面，方程 (6.14) 和 (6.15) 表明，变换 $\phi^{T\mathrm{k}^{+1}\mathrm{S\,T\,k\,L}}$ 和 $\phi^{T^{k+1}\mathrm{S\,T\,kA}}$ 并不构成从 $\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)$ 到 $\mathrm{Ch}(\kappa)$ 的函子之间的自然变换，但它们会诱导自然变换 $\phi^{T\mathrm{k}^{+1}\mathrm{S\,T\,k\,L}}$ 和 $\phi^{T^{k+1}\mathrm{S\,T}^k\mathrm{A}}$，它们是同伦范畴层面上由 $\mathscr{S}\mathrm{k},\mathscr{L}\mathrm{k},\mathscr{A}\mathrm{k}$ 诱导的函子 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathrm{K}(\kappa)$ 之间的自然变换。

我们关注的重点并非这些变换作为完整复形 $\mathscr{S}k(\mathscr{C}),\mathscr{L}k(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{A}k(\mathscr{C})$ 之间映射的作用，而是它们作为滤过子复形 $\mathscr{S}kx,y(\mathscr{C}),\mathscr{L}kx,y(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{A}kx,y(\mathscr{C})$ 之间映射的作用；这些映射用于定义经由 (6.3)[8], 得到的 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C})$，并且是在同伦意义下考察的。

可以验证，若 $(\mathrm{s},\mathrm{t}),(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathbb{M}$ with $(\mathrm{s},\mathrm{t})\preceq(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$，且以下条件之一成立：$(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{T}^k\mathrm{S}$ 和 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathrm{T}^k\mathrm{L}$，或 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{T\,kS}$ 和 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathrm{T\,kA}$，或 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{T\,k\,L}$ 和 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathrm{T\,k}^{+1}\mathrm{S}$，或 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{T\,kA}$ 和 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathrm{T\,k}^{+1}\mathrm{S}$，那么 $\phi^{T^k_k\mathrm{L\,T\,S}}(\mathscr{C})$、$\phi^{T^k_k\mathrm{A\,T\,S}}(\mathscr{C})$、$\phi^{T\mathrm{k}^{+1}\mathrm{S\,T\,k\,L}}(\mathscr{C})$ 和 $\phi^{T^{k+1}_k\mathrm{S\,T\,A}}(\mathscr{C})$ 中相应的映射限制为从 $\mathscr{F}^0_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 到 $\mathscr{F}^0_{(\mathrm{s}',\mathrm{t}')}(\mathscr{C})$ 的映射。让我们在第三种情形下确认这一点，其中 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{T}^k\mathrm{L}$ 且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathrm{T\,k}^{+1}\mathrm{S}$（仍假设 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\preceq(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$）；

[8]我们仍将条带 $\mathbb{M}$ 中的一般元素记作 (s,t)，而将 $(x、y)$ 保留用于已知或选定属于基本域 $\mathfrak{D}=S\cup L\cup A$ 的元素。

其他情形类似或更简单。记 $(s、t) = T^k (x、y)$ 和 $(s'、t') = T^{k+1}(x'、y') = T^k(-2\Lambda - y'、2\Lambda - x')$，其中 $(x、y) \in L$ 且 $(x'、y') \in S$。那么（作为分次 κ-向量空间）我们有

$$\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) = C^{\leq -2\Lambda - x}_{\uparrow}[-k-1] \oplus C^{\leq y}_{\uparrow}[-k], \quad \mathscr{F}^0_{(s',t')}(\mathscr{C}) = C^{\downarrow}_{\geq x'}[-k-1] \oplus C^{\leq y'}_{\uparrow}[-k-1] \oplus D[-k].$$

根据定义，$\phi^{T^{k+1}_k}$ S T L $(\mathscr{C})$ 将 $(a, b) \in C_{\uparrow}[-k-1] \oplus C_{\uparrow}[-k]$ 映射到 $(0, a, \psi_{\uparrow} b) \in C^{\downarrow}[-k-1] \oplus C_{\uparrow}[-k-1] \oplus D[-k]$。它限制为映射 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(s',t')}(\mathscr{C})$，等价于条件 $C^{\leq -2\Lambda - x}_{\uparrow} \subset C^{\leq y'}_{\uparrow}$，即 $-2\Lambda - x \leq y'$。在假设 $(s, t) \preceq (s', t')$ 下，这确实成立，因为映射 T 关于 $\preceq$ 严格递增，因此 $T^{-k}(s, t) \preceq T^{-k}(s', t')$，即 $(x, y) \preceq (-2\Lambda - y', 2\Lambda - x')$，由此可得 $x \geq -2\Lambda - y'$。

类似地，若 $(s, t) \in T^k A$ 且 $(s', t') \in T^{k+1} A$，设 $(s, t) = T^k(x, y)$ 且 $(s', t') = T^{k+1}(x', y') = T^k(-2\Lambda - y', 2\Lambda - x')$，并且若 $(s, t) \preceq (s', t')$，则映射

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} : C^{\downarrow}[-k-1] \oplus C^{\downarrow}[-k] \to C^{\downarrow}[-k-2] \oplus C^{\downarrow}[-k-1],$$

它出现在 (6.9) 中，并限制为映射 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(s',t')}(\mathscr{C})$。事实上，这等价于 $C^{\downarrow}_{\geq 2\Lambda - y} \subset C^{\downarrow}_{\geq x'}$，也就是说 $2\Lambda - y \geq x'$，而这一不等式可由假设 $T^k(x, y) \preceq T^k(-2\Lambda - y', 2\Lambda - x')$ 推出。类似地，出现在 (6.8) 中的映射 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} : C_{\uparrow}[-k-1] \oplus C_{\uparrow}[-k] \to C_{\uparrow}[-k-2] \oplus C_{\uparrow}[-k-1]$，在 $(s, t) \in T^k L$ 且 $(s', t') \in T^{k+1} L$，并满足 $(s, t) \preceq (s', t')$ 的情形下，限制为映射 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(s',t')}(\mathscr{C})$。

现在，方程（6.8）和（6.9）表明，将这些映射 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ 视为完整复形上的映射 $\mathscr{L}_k(\mathscr{C}) \to \mathscr{L}_{k+1}(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{A}_k(\mathscr{C}) \to \mathscr{A}_{k+1}(\mathscr{C})$ 时，它们是零伦的（它们本来也必然如此，因为 $\mathscr{A}_k(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{L}_k(\mathscr{C})$ 是同伦范畴中的零对象）。然而，将这些映射限制为滤子子复形上的映射 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(s',t')}(\mathscr{C})$ 时，只有当（6.8）或（6.9）右侧出现的映射 $\pm\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ 限制后仍是这些子复形之间的映射时，方程（6.8）或（6.9）才能推出它们是零伦的。

复合映射 $\phi^{T^{k+1}}$ S T^k L $(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}}$ L T kS $(\mathscr{S})(\mathscr{C})$ 和 $\phi^{T^{k+1}}$ L T kA $(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}}$ A T k L $(\mathscr{S})(\mathscr{C})$ 从 $\mathscr{S}k(\mathscr{C})$ 映射到 $\mathscr{S}k^{+1}(\mathscr{C})$，其像都包含在 $[-k]D\,\mathscr{S}k^{+1}(\mathscr{C}) = C^{\downarrow}[-k-1] \oplus C_{\uparrow}[-k-1] \oplus D[-k]$ 的直和项中。由于该直和项包含于每个滤子子复形 $\mathscr{S}k_{+1}\,x,y\,(\mathscr{C})$ 中，因此可知，对于任意选择的 $(x, y), (x', y') \in S$，这些映射都限制为映射 $\mathscr{S}k\,x,y\,(\mathscr{C}) \to \mathscr{S}k_{+1}\,x',y,(\mathscr{C})$。此外，同样由于直和项 $D[-k]$ 是 $\mathscr{S}k^{+1}(\mathscr{C})$ 的每个滤子子复形所共有的，(6.12) 表明，$\phi^{T^{k+1}_k}$ S T L $(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}}$ L T kS $(\mathscr{S})(\mathscr{C})$ 和 $\phi^{T^{k+1}}$ L T kA $(\mathscr{C})\phi^{T^{k+1}}$ A T k L $(\mathscr{S})(\mathscr{C})$ 作为映射 $\mathscr{S}k\,x,y\,(\mathscr{C}) \to \mathscr{S}k_{+1}\,x',y,(\mathscr{C})$ 是同伦的，其中 $(x, y), (x', y')$ 可任意选择。（同时，(6.11) 和 (6.10) 表明，这些映射仅在 $(x, y), (x', y')$ 的某些选择下是零伦的。）

6.4. 函子 $\mathscr{F}\colon \mathrm{HCO}^{\wedge}(\kappa)\to \mathrm{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$。对于 $\mathrm{CO}^{\wedge}(\kappa)$ 中的一个对象 $\mathscr{C}=\big((\mathrm{C}\uparrow_{*},\partial\mathrm{C}\uparrow,\ell^{C}_{\uparrow}),(\mathrm{C}^{\downarrow}_{*},\partial^{\downarrow}\mathrm{C},\ell^{\downarrow}\mathrm{C}),(\mathrm{D}_{*},\partial_{D}),\psi_{\uparrow},\psi^{\downarrow}\big)$，以及满足 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\preceq(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 的 $(\mathrm{s},\mathrm{t}),(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in\mathbb{M}$，我们有微分分次范畴 $\mathrm{Ch}(\kappa)$ 的对象 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C}),\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s}',\mathrm{t}')}$；因此它们也是同伦范畴 $\mathrm{K}(\kappa)$ 的对象。现在定义态射 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})\in \mathrm{Hom}^{\mathrm{K}(\kappa)}(\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C}),\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s}',\mathrm{t}')}(\mathscr{C}))$ 如下：

(a) 若 (s,t) 和 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 要么都属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kS}$，要么都属于 $\mathrm{T}^{k}\mathrm{L}$，要么都属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kA}$，从而 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 是 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s}',\mathrm{t}')}(\mathscr{C})$ 的子复形，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是包含映射的同伦类。(b) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}^{k}\mathrm{S}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 属于 $\mathrm{T}\,k\,\mathrm{L}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k}_{k}\mathrm{L}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}}(\mathscr{C})$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(c) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kS}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 属于 $\mathrm{T}^{k}\mathrm{A}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k}_{k}\mathrm{A}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}}(\mathscr{C})$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(d) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}^{k}\mathrm{L}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 属于 $\mathrm{T}\,k^{+1}\mathrm{S}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k+1}_{k}\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}}(\mathscr{C})$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(e) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kA}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')$ 属于 $\mathrm{T}^{k+1}\mathrm{S}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k+1}_{k}\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{A}}(\mathscr{C})$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(f) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}\,k\,\mathrm{L}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in$ 属于 $\mathrm{T}\,k^{+1}\mathrm{L}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k+1}_{k+1}\mathrm{L}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}}(\mathscr{C})\circ\phi^{T\,k^{+1}\mathrm{S}\,\mathrm{T}^{k}\mathrm{L}}(\mathscr{C})=\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix}$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(g) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kA}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in$ 属于 $\mathrm{T}^{k+1}\mathrm{A}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k+1}_{k+1}\mathrm{A}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}}(\mathscr{C})\circ\phi^{T\mathrm{k}^{+1}\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{kA}}(\mathscr{C})=\begin{pmatrix}0&0\\-1&0\end{pmatrix}$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类。(h) 若 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in$ 属于 $\mathrm{T}\,\mathrm{kS}$，且 $(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\in$ 属于 $\mathrm{T}^{k+1}\mathrm{S}$，则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将 $\phi^{T^{k+1}_{k}\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{L}}(\mathscr{C})\circ\phi^{T\,\mathrm{k}\,\mathrm{L}\,\mathrm{T}\,\mathrm{kS}}(\mathscr{C})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&\psi_{\uparrow}&0\end{pmatrix}$ 限制到 $\mathscr{F}^{0}_{(\mathrm{s},\mathrm{t})}(\mathscr{C})$ 上所得映射的同伦类，或者等价地，是 $\phi^{T^{k+1}_{k}\mathrm{S}\,\mathrm{T}\,\mathrm{A}}(\mathscr{C})\circ\phi^{T^{k}_{k}\mathrm{A}\,\mathrm{T}\,\mathrm{S}}(\mathscr{C})=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\\psi^{\downarrow}&0&0\end{pmatrix}$ 的同伦类。(i) 在所有其他情形下，$\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=0$。

命题 6.1. 态射 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 满足以下性质：

(I) If $(s,t)\preceq(s',t')$ with either $s'\le -2\Lambda-t$ or $t'\ge 2\Lambda-s$, then $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=0$.
(II) If $(s,t)\preceq(s',t')\preceq(s'',t'')$ then $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=\Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$.

(III) If $\mathscr{X}$ is another object of $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$, if $\mathfrak{a} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{CO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C}, \mathscr{X})$ has $\delta_{\mathscr{C},\mathscr{X}}\mathfrak{a} = 0$, inducing $\underline{\mathfrak{a}} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C}, \mathscr{X})$, then $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{X}) \circ \underline{\mathscr{F}^0_{(s,t)}}(\underline{\mathfrak{a}}) = \underline{\mathscr{F}^0_{(s',t')}}(\underline{\mathfrak{a}}) \circ \Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$.

与第 6.2 节末尾一样，$\mathscr{F}^0_{(\underline{s,t})}$ 表示由 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}$ 诱导的同伦范畴上的函子。

该命题使我们能够作出如下定义：

定义6.2. 对于 HCO 的对象 $\mathscr{C}$，记 $\mathscr{F}(\mathscr{C})$ 为函子 $\mathbb{M} \to \mathrm{K}(\kappa)$，它将对象 $(s,t) \in \mathbb{M}$ 发送到 $\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C})$；对于 $(s,t) \preceq (s',t')$，则将唯一的态射 $(s,t) \to (s',t')$ 发送到 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$。当对象 $\mathscr{C}$ 已明确时，我们也可简写为 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}$。

对于态射 $\mathfrak{a} \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)}(\mathscr{C}, \mathscr{X})$，记 $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ 为函子 $\mathscr{F}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}(\mathscr{X})$ 之间的自然变换，其在每个 $(s,t) \in \mathbb{M}$ 上由 $\mathscr{F}(\mathfrak{a})(s,t) = \mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathfrak{a}) \in \mathrm{Hom}_{\mathrm{K}(\kappa)}(\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}), \mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}))$ 给出。

事实上，命题 6.1(II)意味着 $\mathscr{F}(\mathscr{C})$ 是一个从 $\mathbb{M}$ 到 $\mathrm{K}(\kappa)$ 的函子，而命题 6.1(III)意味着 $\mathscr{F}(\mathfrak{a})$ 是函子之间的自然变换。

命题 *6.1* 的证明。根据定义以及 (6.13)、(6.14) 和 (6.15)，性质（III）可直接得出。注意，在 $\mathscr{K}_{\uparrow}$ 和 $\mathscr{K}^{\downarrow}$ 的定义中出现的映射 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K_{\uparrow} \\ 0 & \end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & K^{\downarrow} \\ 0 & \end{pmatrix}$，其像均包含于直和项 $Y[-k]$ 中；该直和项是所有 $\mathscr{S}_{k+1\,x,y}(\mathscr{X})$（其中 $(x,y) \in S$）共有的。

为证明 (I)，取 $(s,t) = \mathrm{T}^k(x,y)$，其中 $(x,y) \in S \cup L \cup A$，并令 $(s',t') = \mathrm{T}^k(w,z)$。条件 $(s,t) \preceq (s',t')$ 中 $s' \leq -2\Lambda - t$ 或 $t' \geq 2\Lambda - s$ 成立，等价于条件 $(x,y) \preceq (w,z)$ 中 $w \leq -2\Lambda - y$ 或 $z \geq 2\Lambda - x$ 成立。不妨设 $z \geq 2\Lambda - x$；情形 $w \leq -2\Lambda - y$ 的证明类似。（此时考虑 $(-2\Lambda - y, y)$，而非 $(x, 2\Lambda - x)$。）

若 $(x,y) \in S \cup A$，则 $(x, 2\Lambda - x) \in A$，且 $\mathscr{F}^0\mathrm{T}^k(x,2\Lambda - x)(\mathscr{C}) = \mathrm{Cone}(\mathrm{C}^{\downarrow}x \to \mathrm{C}^{\downarrow}x)[-k]$ 在 $\mathrm{K}(\kappa)$ 中同构于零（因为它是恒等映射的锥）。由于 $(x,y) \preceq (w,z)$ 且 $z \geq 2\Lambda - x$，我们有 $(x, 2\Lambda - x) \preceq (w,z)$，因此 $(w,z) \in A \cup \bigcup_{j \geq 1} \mathrm{T}^j(S \cup L \cup A)$。若 $(x,y) \in S$ 且 $(w,z) \notin A \cup \mathrm{T}(S)$，或者若 $(x,y) \in S$ 且 $(w,z) \notin A \cup \mathrm{T}(S) \cup \mathrm{T}(A)$，那么映射 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C}) = \Phi^{T^k(w,z)\,\mathrm{T}^k(x,y)}(\mathscr{C})$ 属于我们规定的最后一种情形 (i)，因此按定义为零。在其余各情形中（即 $(x,y) \in S$ 且 $(w,z) \in A \cup \mathrm{T}(S)$，或 $(x,y) \in A$ 且 $(w,z) \in A \cup \mathrm{T}(S) \cup \mathrm{T}(A)$），由于 $(x,y) \preceq (x, 2\Lambda - x) \preceq (w,z)$ 且 $(x, 2\Lambda - x) \in A$，从情形 (a)、(c)、(e)、(g) 和 (h) 的某种组合可知，我们有一个分解 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C}) = \Phi^{(s',t')}\mathrm{T}^k(x,2\Lambda - x)(\mathscr{C}) \circ \Phi^{T^k(x,\,2\Lambda - x)\,\mathrm{T}^k x,\,s,t)}(\mathscr{C})$。此复合为零，因为它经由零对象 $\mathscr{F}^0\mathrm{T}^k(x,2\Lambda - x)(\mathscr{C})$ 分解。至此，情形 $(x,y) \in S \cup A$ 且 $z \geq 2\Lambda - x$ 下的 (I) 得证。

若 $(x,y) \in L$ 且 $z \geq 2\Lambda - x$，则有 $(x,y) \preceq (x, 2\Lambda - x) \preceq (w,z)\,\mathrm{with}(x, 2\Lambda - x) \in \mathrm{T}(L)$。因此 $(w,z) \in \mathrm{T}(L) \cup \mathrm{T}(S) \cup \bigcup_{j \geq 2} \mathrm{T}^j(S \cup L \cup A)$。若 $(w,z) \notin \mathrm{T}(L)$

[9]我们用 (w,z) 代替 (x', y')，因为该点可能不在 $S \cup L \cup A$ 中。

则 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 属于情形 (i)，因此根据定义为零。若 $(w,z)\in T(L)$，使得 $(s,t)\in T^k(L), T^k(x,2\Lambda-x)\in T^{k+1}(L)$，且 $T(s',t')\in T^{k+1}(L)$，那么根据定义中的情形 (a) 和 (f)，映射 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 经由零对象 $\mathscr{F}^0 T^k(x,2\Lambda-x)(\mathscr{C})$ 分解，因此为零。至此，我们已在所有 $z\geq 2\Lambda-x$ 的情形下证明了命题 (I)。如前所述，另一种情形 $w\leq -2\Lambda-y$ 的证明也非常类似，此处留给读者。

处理完（I）后，我们转向（II）。设 $(s,t),(s',t'),(s'',t'')\in\mathbb{M}$ 满足 $(s,t)\preceq(s',t')\preceq(s'',t'')$。正如我们在（I）的证明中已经用到的，许多情况下，关系 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=\Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 可由构造直接得出。若一对 $((s_0,t_0),(s_1,t_1))\in\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ 满足 $(s_0,t_0)\preceq(s_1,t_1)$，且 (s_0,t_0) 和 (s_1,t_1) 相对于分解 $\mathbb{M}=\cup_k(T^kS\cup T^kL\cup T^kA)$ 的位置，使得 $\Phi^{(s_1,t_1)}_{(s_0,t_0)}(\mathscr{C})$ 的构造由情形（a）—（h）之一决定，我们就称这对为近端的。如果 $\big((s,t),(s'',t'')\big)$ 在此意义下是近端的，那么两对 $\big((s,t),(s',t')\big)$ 和 $\big((s',t'),(s'',t'')\big)$ 以及 (s'',t'') 也都是近端的；检查情形（a）—（h）中的相应公式可知，在这种情况下，恒等式 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=\Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 成立。

如果 $((s_0,t_0),(s_1,t_1))\in\mathbb{M}\times\mathbb{M}$ 满足 $(s_1,t_1)\in(-2\Lambda-t_0,s_0]\times[t_0,2\Lambda-s_0)$，我们就称这对元素是强近端的。容易看出，强近端的一对元素也是近端的；并且，如果 $\big((s,t),(s'',t'')\big)$ 是强近端的，且 $(s,t)\preceq(s',t')\preceq(s'',t'')$，那么 $\big((s,t),(s',t')\big)$ 和 $\big((s',t'),(s'',t'')\big)$ 都是强近端的。现在，命题的 (I) 部分断言，如果 $((s_0,t_0),(s_1,t_1))$ 不是强近端的，那么 $\Phi^{(s_1,t_1)}_{(s_0,t_0)}(\mathscr{C})=0$。因此，如果 $\big((s,t),(s',t')\big)$ 或 $\big((s',t'),(s'',t'')\big)$ 不强近端，那么恒等映射 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=\Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 成立，因为两边都为零。

剩下的情形仅有以下几种：$\big((s,t),(s',t')\big)$ 和 $\big((s',t),(s'',t'')\big)$ 都是强近端的，但 $\big((s,t),(s'',t'')\big)$ 不是近端的（因而也不是强近端的）。在这种情形下，按定义有 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=0$，因此我们需要验证 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=0$。现在，由于 $((s,t),(s'',t''))$ 不是强近端的，所以要么 $s''\leq -2\Lambda-t$，要么 $t''\geq 2\Lambda-s$。假设 $s''\leq -2\Lambda-t$。由于 $((s,t),(s',t'))$ 是强近端的，$s'>-2\Lambda-t$，因此得到一条链 $(s,t)\preceq(s',t')\preceq(-2\Lambda-t,t')\preceq(s'',t'')$。现在，数对 $((s,t),(-2\Lambda-t,t'))$ 是近端的[10] 但不是强近端的；由我们此前已经证明的结果，近端性意味着 $\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$，而非强近端性意味着 $\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})=0$。同时，我们还有 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})=\Phi^{(s'',t'')}_{(-2\Lambda-t,t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s',t')}(\mathscr{C})$。因此

$$\begin{aligned}\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})&=\Big(\Phi^{(s'',t'')}_{(-2\Lambda-t,t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\Big)\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})\\&=\Phi^{(s'',t'')}_{(-2\Lambda-t,t')}(\mathscr{C})\circ\Big(\Phi^{(-2\Lambda-t,t')}_{(s',t')}(\mathscr{C})\circ\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})\Big)=0.\end{aligned}$$

[10]事实上，配对 $((s、t)、T(s、t))$ 始终是近端的，并且 $(s、t)\preceq(-2\Lambda-t、t')\preceq T(s、t)$。

在最后一种情形中，若 $t'' \geq 2\Lambda - s$，同样利用链 $(s,t) \preceq (s',t') \preceq (s',2\Lambda - s) \preceq (s'',t'')$，可推出 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C}) \circ \Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C}) = 0$。因此，在 $\big((s,t),(s',t')\big)$ 和 $\big((s',t),(s'',t'')\big)$ 都是强近端的，而 $\big((s,t),(s'',t'')\big)$ 不是近端的所有情形下，我们都有 $\Phi^{(s'',t'')}_{(s',t')}(\mathscr{C}) \circ \Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C}) = \Phi^{(s'',t'')}_{(s,t)}(\mathscr{C}) = 0$，从而完成了 (II) 的证明。 □

6.5. **可分三角**。对于链复形 (C, ∂_C)，D，以及链映射 $\alpha: C \to D$，我们有链映射 $j: D \to \mathrm{Cone}(\alpha)$ 和 $p: \mathrm{Cone}(\alpha) \to C${v28>，它们分别由包含映射和投影给出；这些映射可组成如下序列

$$C \xrightarrow{\alpha} D \xrightarrow{j} \mathrm{Cone}(\alpha) \xrightarrow{p} C[-1]. \tag{6.16}$$

回忆一下，同伦范畴 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中形如以下形式的态射序列

$$X \xrightarrow{u} Y \xrightarrow{v} Z \xrightarrow{w} X[-1]$$

当且仅当它作为 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中的图表与形如 (6.16) 的图表同构时，才称为可分三角。众所周知（参见，例如，[We94，命题 10.2.4]），$\mathsf{K}(\kappa)$ 关于这一可分三角的概念满足三角范畴的公理。

定理 6.3。设 $\mathscr{C}$ 是 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的一个对象，令 $(s,t), (u,v) \in \mathbb{M}$ 满足 $(s,t) \preceq (u,v) \preceq T(s,t)$，并令 k 为满足 $(s,t) \in T^k(S \cup L \cup A)$ 的整数。那么以下序列是 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中的一个可分三角：

$$\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) \xrightarrow{(-1)^k\left(\Phi^{(u,t)}_{(s,t)} \oplus \Phi^{(s,v)}_{(s,t)}\right)} \mathscr{F}^0_{(u,t)}(\mathscr{C}) \oplus \mathscr{F}^0_{(s,v)}(\mathscr{C}) \xrightarrow{-\Phi^{(u,v)}_{(u,t)} + \Phi^{(u,v)}_{(s,v)}} \mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C}) \xrightarrow{\Phi^{T(s,t)}_{(u,v)}} \mathscr{F}^0_{T(s,t)}(\mathscr{C}) \tag{6.17}$$

注 6.4. 为解释第一个映射上的符号 $(-1)^k$，请注意，一般而言，映射 $\Phi^{T^k(s_1,t_1)}_{T^k(s_0,t_0)}: \mathscr{F}^0_{T^k(s_0,t_0)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{T^k(s_1,t_1)}(\mathscr{C})$ 是通过将函子 $[-k]$ 应用于映射 $\Phi^{(s_1,t_1)}_{(s_0,t_0)}: \mathscr{F}^0_{(s_0,t_0)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(s_1,t_1)}(\mathscr{C})$ 得到的。一般而言，将移位函子的 k 重迭代应用于三角范畴中的一个可分三角，只有在将其中任意一个映射乘以 $(-1)^k$ 后，结果才是可分三角。（从链复形的角度看，这可以理解为 $\mathrm{Cone}(f)[-k]$ 是映射 $(-1)^k f$ 的（平移后的）锥。）这一注也表明，只需在 $k = 0$ 的情形下证明定理 6.3，即 $(s,t) \in S \cup L \cup A$ 的情形。

证明。 如注 6.4 所述，只需在 $k = 0$ 时证明该结果。我们构造链映射 f、g，使其满足图表

$$\begin{array}{ccccccc}
\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathscr{F}^0_{(u,t)}(\mathscr{C}) \oplus \mathscr{F}^0_{(s,v)}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathrm{Cone}\left(\Phi^{(u,t)}_{(s,t)}(\mathscr{C}) \oplus \Phi^{(s,v)}_{(s,t)}(\mathscr{C})\right) & \longrightarrow & \mathscr{F}^0_{T(s,t)}(\mathscr{C}) \\
\| & & \| & & \downarrow g \ \uparrow f & & \| \\
\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathscr{F}^0_{(u,t)}(\mathscr{C}) \oplus \mathscr{F}^0_{(s,v)}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C}) & \longrightarrow & \mathscr{F}^0_{T(s,t)}(\mathscr{C})
\end{array} \tag{6.18}$$

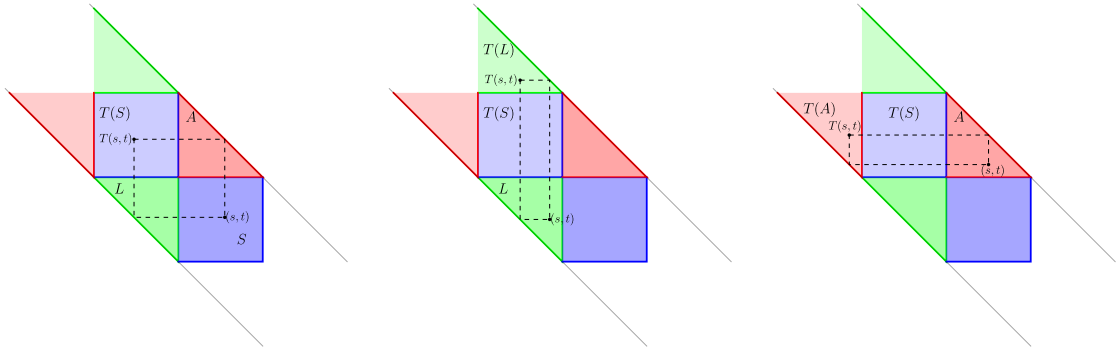


图7. 若 $(s,t)\in S\cup L\cup A$，则条件 $(s,t)\preceq(u,v)\preceq T(s,t)$ 等价于 (u,v) 落在上方所示的相应虚线矩形内。这得出了表 1 中列出的十种情形。

中的条件：二者互为同伦逆，并使图表在同伦意义下交换。第一行中的水平映射取自 (6.16)（其中 $\alpha=\Phi^{(u,t)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C})\oplus\Phi^{(s,v)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C})$），注意 $\mathscr{F}^0\mathrm{T(s,t)}(\mathscr{C})=\mathscr{F}^0_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C})[-1]$; 第二行中的映射则如 (6.17) 所示。总共有十种情形需要检验（见图7）。表 1 列出了每种情形下的映射 f 和 g，以及一个次数为−1的映射 h: $\mathrm{Cone}(\Phi^{(u,t)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C})\oplus\Phi^{(s,v)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C}))\to\mathrm{Cone}(\Phi^{(u,t)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C})\oplus\Phi^{(s,v)}_{(}\mathrm{s,t)}(\mathscr{C}))$，使得 $\partial\mathrm{h}+\mathrm{h}\partial=1-\mathrm{f\,g}$。每种情形下，另一个复合 g f 都等于恒等映射（甚至不必经过同伦），并且不难检验每种情形下图表在 $\mathrm{K}(\kappa)$ 中交换。

为了说明这些常规检验涉及哪些计算，也可能有助于阐明表 1 中分块矩阵的含义，我们以十种情形中的一种为例，给出更详尽的细节，即表 1 中的第六种情形，其中 $(s,t)\in L$ 且 $(u,v)\in T(S)$，并且仍有 $(s,t)\preceq(u,v)\preceq T(s,t)$。于是 $(u,t)\in L$ 且 $(s,v)\in T(S)$，因此我们有

$$\begin{aligned}
&\mathscr{F}^0_{(s,t)}(\mathscr{C})=\mathscr{L}^0_{s,t}(\mathscr{C})=\mathrm{Cone}(C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-s}\hookrightarrow C_{\uparrow}^{\leq t}),\\
&\mathscr{F}^0_{(u,t)}(\mathscr{C})=\mathrm{Cone}(C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-u}\hookrightarrow C_{\uparrow}^{\leq t}),\\
&\mathscr{F}^0_{(s,v)}(\mathscr{C})=\mathscr{S}^1_{2\Lambda-v,-2\Lambda-s}(\mathscr{C})=\mathrm{Cone}(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow}\colon C^{\downarrow}_{\geq2\Lambda-v}\oplus C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-s}\to D),\\
&\mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C})=\mathrm{Cone}(-\psi^{\downarrow}+\psi_{\uparrow}\colon C^{\downarrow}_{\geq2\Lambda-v}\oplus C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-u}\to D).
\end{aligned}$$

那么，在 (6.18) 的两行中都作为第一个映射出现的映射 $\Phi^{(u,t)}_{(}{}_{s,t)}\oplus\Phi^{(s,v)}_{(}{}_{)}{}_{s,t}$ 是

$$C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-s}[-1]\oplus C_{\uparrow}^{\leq t}\to C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-u}[-1]\oplus C_{\uparrow}^{\leq t}\oplus C^{\downarrow}_{\geq2\Lambda-v}[-1]\oplus C_{\uparrow}^{\leq-2\Lambda-s}[-1]\oplus D$$

给定 i n 块形式的矩阵（其中每个“1”都表示一个恒等映射或包含映射）

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \psi_\uparrow \end{pmatrix}.$$

$\mathrm{Cone}(\Phi^{(u,t)}_{(s,t)}(\mathscr{C}) \oplus \Phi^{(s,v)}_{(s,t)}(\mathscr{C}))$ 上的微分，相对于分解 $C_\uparrow^{\le -2\Lambda - s}[-2] \oplus C_\uparrow^{\le t}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le -2\Lambda - u}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le t} \oplus C^{\downarrow}_{\ge 2\Lambda - v}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le -2\Lambda - s}[-1] \oplus D$ 表示为

$$\begin{pmatrix} \partial_\uparrow^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -\partial_\uparrow^C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -\partial_\uparrow^C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \partial_\uparrow^C & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_C^{\downarrow} & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\partial_\uparrow^C & 0 \\ 0 & \psi_\uparrow & 0 & 0 & -\psi^{\downarrow} & \psi_\uparrow & \partial_D \end{pmatrix},$$

而 $\mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C})$ 上的微分，相对于分解 $C^{\downarrow}[-1] \oplus C_\uparrow[-1] \oplus D$ 表示为 $\begin{pmatrix} -\partial^{\downarrow}_C & 0 & 0 \\ 0 & \partial_\uparrow & 0 \\ -\psi^{\downarrow} & -\psi_\uparrow & \partial_D \end{pmatrix}$。通过矩阵相乘可验证，表 1 第六行中的映射 f 和 g 将这两个微分交织起来，gf 在 $\mathscr{F}_{(u,v)}(\mathscr{C})$ 上是恒等映射，并且表 1 第六行中的映射 h 给出了 fg 与恒等映射之间的同伦。还要注意，这个映射 h 作为 $\mathrm{Cone}(\Phi^{(u,t)}_{(s,t)}(\mathscr{C}) \oplus \Phi^{(s,v)}_{(s,t)}(\mathscr{C}))$ 上的一次映射是良定义的，因为它仅有的非零连通分支是恒等映射 $C_\uparrow^{\le -2\Lambda - s}[-1] \to C_\uparrow^{\le -2\Lambda - s}[-2]$ 和 $C_\uparrow^{\le t} \to C_\uparrow^{\le t}[-1]$（视为次数为一的映射）。

接下来只需检验 (6.18) 在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中交换。(6.18) 左侧的正方形交换是显然的，因为两行中的第一个映射相同。(6.18) 中有两个中间正方形和两个右侧正方形，取决于使用映射 f 还是 g。不过，既然我们已经看到 f 和 g 在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中互为逆映射，那么只要两个中间正方形中的一个在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中交换，另一个也会交换；两个右侧正方形亦然。

底行 (6.18) 中的映射 $\mathscr{F}^0_{(u,t)}(\mathscr{C}) \oplus \mathscr{F}^0_{(s,v)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C})$ 是一个映射 $C_\uparrow^{\le -2\Lambda - u}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le t} \oplus C^{\downarrow}_{\ge 2\Lambda - v}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le -2\Lambda - s}[-1] \oplus D \to C^{\downarrow}_{\ge 2\Lambda - v}[-1] \oplus C_\uparrow^{\le -2\Lambda - u}[-1] \oplus D$，由分块矩阵 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\psi_\uparrow & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ 给出。注意，这与表示 g 的矩阵的最后五列一致。

由于顶行 (6.18) 中的第二个映射是由映射锥对应的包含映射给出的，因此可知 (6.18) 中涉及 g 的中间正方形版本是交换的（在 $\mathsf{Ch}(\kappa)$ 和 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中均如此）。因此，(6.18) 中涉及 f 的中间正方形版本在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中也交换。

根据第 6.4 节开头的情形 (b)，底行 (6.18) 中的映射 $\mathscr{F}^0_{(u,v)}(\mathscr{C}) \to \mathscr{F}^0_{T(s,t)}(\mathscr{C})$ 是将映射 $\phi^{TL}{}_{TS}(\mathscr{C})$ 限制到 $\mathscr{S}^1_{2\Lambda-v,-2\Lambda-u}(\mathscr{C})$ 所得；因此，其分块形式为 $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$，从 $C^{\downarrow}_{\geq 2\Lambda-v}[-1] \oplus C^{\leq -2\Lambda-u}_{\uparrow}[-1] \oplus D \to C^{\leq -2\Lambda-s}_{\uparrow}[-2] \oplus C^{\leq t}_{\uparrow}[-1]$。由于顶行 (6.18) 中的最后一个映射是映射锥对应的投影，并且上述 2×3 矩阵与表 1 中表示 f 的矩阵的前两行一致，因此 (6.18) 中涉及 f 的右侧正方形版本是交换的；由此，涉及 g 的版本在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中交换，因为 f 和 g 在 $\mathsf{K}(\kappa)$ 中互为逆映射。

至此，便完成了对 (6.18) 是图表同构的验证，其中 $(s、t) \in L$ 以及 $(u、v) \in T(S)$。其余九种情形也可按照刚才给出的思路进行验证；在每种情形中，主要难点在于找到恰当的映射 f、g、h，这些映射列于表 1。

□

给定一个函子 $\mathscr{G}\colon \mathbb{M} \to \mathsf{K}(\kappa)$，通过与零次同调函子复合，可分别得到函子 $H_0(\mathscr{G})\colon \mathbb{M} \to \mathsf{Vect}_\kappa$ 和 $H^0(\mathscr{G})\colon \mathbb{M}^{op} \to \mathsf{Vect}_\kappa$，
分别通过与零次同调函子和上同调函子 $\mathsf{K}(\kappa) \to \mathsf{Vect}_\kappa$ 复合得到。

推论 6.5。对于 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的任意对象 $\mathscr{C}$，$\mathsf{Vect}^{\mathbb{M}}_\kappa$ 中的对象 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 和 $\mathsf{Vect}^{\mathbb{M}^{op}}_\kappa$ 中的对象 $H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 分别是 BBF21 第 3] 节意义下的同调函子和上同调函子；也就是说，对于任意满足 $(s、t) \preceq (u、v) \preceq T(s、t)$ 的 $(s、t)$、$(u、v) \in \mathbb{M}$，我们有正合序列

$$\cdots \xrightarrow{\quad} H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(T^{-1}(u,\ v)) \xrightarrow{\quad} H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(s,\ t) \xrightarrow{\quad} H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(u,\ t) \oplus H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(s,\ v) \xrightarrow{\quad} H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(\text{你},\ v)$$

$$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(T(s,t)) \xrightarrow{\quad} \cdots$$

and

$$\cdots \xrightarrow{\quad} H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(T(s,\ t)) \xrightarrow{\quad} H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(u,\ v) \xrightarrow{\quad} H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(u,\ t) \oplus H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(s,\ v) \xrightarrow{\quad} H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(s,t)$$

$$H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(T(u,\ v)) \xrightarrow{\quad} \cdots,$$

由（6.17）在（上）同调上诱导的映射。此外，两个函子 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 和 $H^0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 在边界 $\partial\mathbb{M} = \{(s,t) \in \mathbb{R}^2 | |s + t| = 2\Lambda\}$ 上的限制均为零。

表 1. 映射f和g 以及h之间的十种情形，其中$f\,g$ 与恒等映射之间的同伦见 (6.18)

$(s,\ t)$	$(u,\ v)$	f	g	h
L	L	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$
A	A	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$
S	S	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \psi^{\downarrow} & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$
S	L	$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & \psi_{\uparrow} \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$
S	A	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & \psi^{\downarrow} \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 1\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$
L	$T\,(S)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\psi_{\uparrow} & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0\,0\,1\,0\,0\,0 \\ \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0\ \ 0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0\,0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$(s,\ t)$	$(u,\ v)$	f	g	h
A	$T\,(S)$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & \psi^{\downarrow} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$
S	$T\,(S)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -\psi^{\downarrow} & 0 & \psi_{\uparrow} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$
L	$T\,(L)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & & \\ & & & & & & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & \\ 0 & & & & & & & & & & & & & \end{pmatrix}$
A	$T\,(A)$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 & 0 & & & \end{pmatrix}$

证明。如果 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\partial\mathbb{M}$，那么如果选择了 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathfrak{D}$，使得对于某个 $\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$有 $\mathrm{T}^{k}(\mathrm{x},\mathrm{y})=(\mathrm{s},\mathrm{t})$，则我们将有 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{L}$ 且 $\mathrm{y}=-2\Lambda-\mathrm{x}$，或者 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{A}$ 且 $\mathrm{x}=2\Lambda-\mathrm{y}$。在这两种情形下，对象 $\mathscr{F}(\mathrm{C})(\mathrm{s},\mathrm{t})$（属于 $\mathrm{K}(\kappa)$）都是恒等映射的锥（至多相差一个分次平移），因此它在 $\mathrm{K}(\kappa)$ 中同构于零，特别地，其零次同调和上同调都为零。

推论中的这些序列是正合的这一事实，直接由定理 6.4 以及以下一般事实得出（参见例如，[GM03，命题 IV.1.3]，，应用时令U 等于一个在零次给出、在所有其他次数均为 0 的复形）：对H_0 或H^0 应用于$\mathsf{K}(\kappa)$ 中的可分三角，会得到一个正合序列。□

6.6. **函子与标准初等直和项**。在第 3.3 节中，我们已经证明，满足容许性假设的域 κ 上的每个滤过余跨，在$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中都同构于标准初等直和项的直和，这些直和项列举于 (3.11) 和 (3.14) 中。若 $\mathscr{C}$ 是 Λ-有界的，那么 (3.11) 和 (3.14) 中出现的参数 a 和 b 都将位于开区间 $(-\Lambda,\Lambda)$内。相应地，[BBF21 定理 3.21] 断言，任何在 $\partial\mathbb{M}$ 上取值为Vect_{κ} 且在 $\partial\mathbb{M}$ 上为零并满足

“序列连续性”假设的同调函子可分解为“块”的直和B^ν。这里，若$\nu = (\nu_1, \nu_2)$，函子 $B^\nu\colon \mathbb{M} \to \mathsf{Vect}_\kappa$ 由下式给出：对于 $(w_1,w_2) \in \mathbb{M}$,

$$B^\nu(w_1,w_2) = \begin{cases} \kappa & \text{if } -2\Lambda - \nu_2 < w_1 \le \nu_1 \text{ and } \nu_2 \le w_2 < 2\Lambda - \nu_1 \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{6.19}$$

其结构映射 $B^\nu(w_1,w_2) \to B^\nu(w_1',w_2')$ 在定义域和陪域均等于 κ 时由恒等映射给出，否则为 0。

因此，我们作出如下定义：

定义 6.6。 设 $F \in \mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}$ 是一个在 $\partial\mathbb{M}$ 上消失且序列连续的同调函子。F 的**持久图** 记作 $\mathscr{D}(F)$，是具有性质 $F \cong \oplus_{\nu\in\mathscr{D}(F)} B^\nu$的 $\mathbb{M}$ 中元素构成的多重集。

不难验证，若 $\mathscr{C}$是一个温和过滤余跨，则$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 按照 [BBF21] 的意义是序列连续的。事实上，若 (s_n,t_n) 是$\mathbb{M}$ 中的一个递减序列，且收敛于 (s,t)，则根据 $\mathscr{F}$ 的定义以及 $\mathscr{C}$ 的可容许性，复形 $\mathscr{F}(\mathscr{C})(s_n,t_n)$和 $\mathscr{F}(\mathscr{C})(s,t)$最终彼此相等。此外，根据推论 6.5，$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$是同调的，且在 $\partial\mathbb{M}$上消失。因此，根据一般原理，$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$可分解为块$B^\nu$的直和。

因此，我们也可以类似地定义可容许滤过余跨的持久图：

定义 6.7。 设 $\mathscr{C}$ 是一个 Λ-有界的可容许滤过余跨图。$\mathscr{C}$ 的**持久图**记为 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$，即$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$的持久图（如定义 6.6 所定义）。

要了解如何根据第 3.3 节中的直和分解，确定一个 Λ-有界的可容许滤过余跨图的持久图，我们应当推导$H_0 \circ \mathscr{F}$ 对 (3.11) 和 (3.14) 中标准初等直和项的作用。（注意，函子 $H_0 \circ \mathscr{F}$ 显然是可加的，因此$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$ 中的分解会转化为$\mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}$ 中的分解。）

命题 6.8。 如果 Λ-有界滤过余跨 $\mathscr{C}$ 是 (3.11) 或 (3.14) 中的一个不可分解对象，那么 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 同构于块 $B^{\nu(\mathscr{C})}$，其中 $\nu(\mathscr{C}) \in \mathbb{M}$ 由下表给出：

$\mathscr{C}$	$\nu(\mathscr{C})$
~~$\left(\uparrow^b_a\right)_k$ （对于 $a < b < \Lambda$）~~	$T^{-k-1}(-2\Lambda - a,\ b)$
$\left(\uparrow^\infty_a\right)_k$	$T^{-k}(\Lambda, a)$
$\left(\nearrow_a\right)_k$	$T^{-k}(-\Lambda, a)$
~~$\left(\downarrow^a_b\right)_k$ （对于 $a > b > -\Lambda$）~~	$T^{-k-1}(b,\ 2\Lambda - a)$
$\left(\downarrow^a_{-\infty}\right)_k$	$T^{-k}(a,\ -\Lambda)$
$\left(\searrow^a\right)_k$	$T^{-k}(a,\ \Lambda)$
$\left(>^a_b\right)_k$	$T^{-k}(a,\ b)$
$\square_k$	$T^{-k+1}(\Lambda, -\Lambda)$

证明。 这些结论可通过常规计算得出；我们将讨论 $\left(\uparrow^b_a\right)_k$、$\left(\searrow^a\right)_k$、$\left(>^a_b\right)_k$ 和 $\square^k$ 这几种情形作为代表，其余情形留给读者。

情形 $\mathscr{C}=\square_k$。我们先讨论这种情形，因为它最简单。显然，当 $(x、y)\in L\cup A$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 时，$\mathscr{F}(\square_k)(T_j\ (x、y))=0$；而当 $(x、y)\in S$ 且 $j\in\mathbb{Z}$ 时，我们有

$$\mathscr{F}(\square_k)(T^j(x,y))=\mathrm{Cone}(0\to\kappa_k)[-j+1]=(\kappa_k)[-j+1],$$

因此，对于 $(x、y)\in S$,

$$H_0(\mathscr{F}(\square_k)(T^j(x,y)))=H_0((\kappa_k)[-j+1])=H_{-j+1}(\kappa_k)=\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k+1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

现在，$B^{T^{-k+1}(\Lambda,-\Lambda)}$ 同样由 κ 在 $T^{-k+1}(S)$ 上的取值给出，其他地方取 0。因此，由于 $T^{-k+1}(S)$ 中 $\mathscr{F}(\square_k)$ 的结构映射由子复形的包含映射给出（在此情形下，这只是 $\mathrm{Cone}(0\to\kappa_k)[k]$上的恒等映射），我们确实有 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))=B^{T^{-k+1}(\Lambda,-\Lambda)}$ 作为取值于 $\mathbb{M}\to\mathrm{Vect}_\kappa$ 的函子。

情形 $\mathscr{C}=\left(\uparrow^b\mathrm{a}\right)\mathrm{k}$，其中 $<\mathrm{b}<\Lambda$。在此情形下，复形 $\mathrm{C}_*^{\downarrow}$ 和 D_* 均为零，而 $\mathrm{C}_{\uparrow *}=\mathscr{E}_k(\mathrm{a},\mathrm{b})_{\uparrow}$。和之前一样，我们将考虑 $\mathscr{F}\left(\left(\uparrow^b\mathrm{a}\right)\mathrm{k}\right)$ 在 $\mathrm{T}^j(\mathrm{x},\mathrm{y})$ 上的取值，其中 $\mathrm{j}\in\mathbb{Z}$ 且 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathfrak{D}=\mathrm{S}\cup\mathrm{L}\cup\mathrm{A}$。显然，若 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{A}$，则 $\mathscr{F}\left(\left(\uparrow^b\mathrm{a}\right)\mathrm{k}\right)(\mathrm{T}\,\mathrm{j}\ (\mathrm{x},\mathrm{y}))=0$。若$(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{S}$，则有

$$\mathscr{F}\left(\left(\uparrow_a^b\right)_k\right)(T^j(x,y))=\mathrm{Cone}\left(\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le y}\to 0\right)[-j+1]=\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le y}[-j].$$

因此，对于 $(x、y)\in S$,

$$H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow_a^b\right)_k\right)(T^j(x,y))\right)=H_{-j}\left(\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le y}\right)=\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k \text{ and } a\le y<b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{6.20}$$

最后，若 $(x、y)\in L$（特别是 $-2\Lambda-x\le y<\Lambda$）则

$$H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow_a^b\right)_k\right)(T^j(x,y))\right)=H_{-j}\left(\mathrm{Cone}\left(\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le -2\Lambda-x}\hookrightarrow\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le y}\right)\right).\tag{6.21}$$

若 $a>-2\Lambda-x$，则 $\mathscr{E}_k(a、b)_{\uparrow}^{\le -2\Lambda-x}=0$，因此 (6.21) 为 $H_{-j}\left(\mathscr{E}_k(a、b)_{\uparrow}^{\le y}\right)$；当 κ if $j=-k$且 $a\le y<b$ 时取此值，否则为 0。

若 $b\le y$，则 $\mathscr{E}_k(a、b)_{\uparrow}^{\le y}$ 是无环的，因此 (6.21) 得到 $H_{-j}(\mathscr{E}_k(a、b)_{\uparrow}^{\le -2\Lambda-x}[-1])$；当$\kappa$ if $j=-k-1$ 且 $a\le -2\Lambda-x<b$ 时取此值，否则为 0。

在剩下的情形中，若$a\le -2\Lambda-x$ 且$b>y$，则包含映射 $\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le -2\Lambda-x}\hookrightarrow\mathscr{E}_k(a,b)_{\uparrow}^{\le y}$ 是一个同构，因此 (6.21) 为零。

Summing up, if $(x,y)\in L$ and $j\in\mathbb{Z}$,

$$H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow_a^b\right)_k\right)(T^j(x,y))\right)=\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k,\ a\le y<b,\ \text{and } x>-2\Lambda-a\\ \kappa & \text{if } j=-k-1,\ -2\Lambda-b<x\le -2\Lambda-a,\ \text{and } y\ge b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}\tag{6.22}$$

稍作重新参数化后，由 (6.20) 和 (6.22) 可得，对于 $(s,t)\in\mathbb{M}$,

$$H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow_a^b\right)_k\right)(T^{-k-1}(s,t))\right)=\begin{cases}\kappa & \text{if } (s,t)\in L,\ -2\Lambda-b<s\le -2\Lambda-a,\ \text{and } t\ge b\\ \kappa & \text{if } (s,t)\in T(S) \text{ and } -2\Lambda-b<s\le -2\Lambda-a\\ \kappa & \text{if } (s,t)\in T(L),\ -2\Lambda-b<s\le -2\Lambda-a,\ \text{and } t<4\Lambda+a\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

容易看出，上述结果与块 $B_{T^{-k-1}(-2\Lambda-a,b)}$ 的取值一致。此外，检查上述计算以及第 6.4 节中态射 $\Phi^{(s',t')}_{(s,t)}(\mathscr{C})$ 的定义情形 (a)、(b)、(d) 和 (f) 可知，只要定义域和陪域都非零，诱导映射 $H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow^b_a\right)_k\right)(T^{-k-1}(s,t))\right)\to H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow^b_a\right)_k\right)(T^{-k-1}(s',t'))\right)$ 都是同构。因此，$H_0\left(\mathscr{F}\left(\left(\uparrow^b_a\right)_k\right)\right)$ 确实与 $B_{T^{-k-1}(-2\Lambda-a,b)}$ 同构。

情形 $\mathscr{C}=(\searrow^a)_k$。在此情形下 $C_{\uparrow *}=0$，因此 $\mathscr{F}((\searrow^a)_k)(T^j(x,y))=0$ 当且仅当 $(x,y)\in L$。如果 $(x,y)\in A$，那么

$$H_0\left(\mathscr{F}((\searrow^a)_k)(T^j(x,y))\right)=H_{-j}\left(\mathrm{Cone}(\mathscr{E}_k(a,-\infty)^{\downarrow}_{\geq 2\Lambda-y}\hookrightarrow\mathscr{E}_k(a,-\infty)^{\downarrow}_{\geq x})\right)$$
$$=\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k \text{ and } 2\Lambda-y>a\geq x\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

反之，如果 $(x,y)\in S$，那么 $H_0\left(\mathscr{F}((\searrow^a)_k)(T^j(x,y))\right)$ 是映射 $\psi_x\colon \mathscr{E}_k(a,-\infty)^{\downarrow}_{\geq x}\to\kappa_k$ 的锥在次数 $-j+1$ 上的同调。ψ_x 的定义域在 $x>a$ 时为零（因此在此情形下 $H_0\left(\mathscr{F}((\searrow^a)_k)(T^j(x,y))\right)$ 与 $H_{-j+1}(\kappa_k)$ 一致）；而当 $x\leq a$ 时，$\mathscr{E}_k(a,-\infty)^{\downarrow}_{\geq x}=\kappa_k$，且 ψ_x 是乘以 -1，其映射锥是无环的。利用重新参数化 $(s,t)=T(x,y)=(-2\Lambda-y,2\Lambda-x)\in T(S)$，我们看到，如果 $(s,t)\in T(S)$，那么

$$H_0\left(\mathscr{F}((\searrow^a)_k)(T^j(s,t))\right)=\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k \text{ and } t<2\Lambda-a\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

现在，块 $B_{T^{-k}(a,\Lambda)}$ 仅在形如 $T^{-k}(s,t)$ 的点处非平凡，其中要么 $(s,t)\in A$，且 $s\leq a$、$t<2\Lambda-a$；要么 $(s,t)\in T(S)$，且 $t<2\Lambda-a$。因此，$B_{T^{-k}(a,\Lambda)}$ 逐点与 $H_0(\mathscr{F}((\searrow^a)_k))$ 一致，而第 6.3 节中 $\phi^{T^{-k+1}(S)}_{-k}T A$ 的定义表明，结构映射也一致。

情形 $\mathscr{C}=(>^a_b)_k$。这里，$C_{\uparrow *}$、$C^{\downarrow}_{*}$ 和 D_* 除k次以外的所有次数上均为零，并且在k次时维数为一，其中$C_{\uparrow *}$ 和$C^{\downarrow}_{*}$ 的生成元的过滤层级分别为b 和a 。因此，若 $(x,y)\in L$，则包含映射 $C^{\leq -2\Lambda-x}_{\uparrow}\hookrightarrow C^{\leq y}_{\uparrow}$ 是同构，除非$-2\Lambda-x<b\leq y$；在这种情况下，它是从 0 到 κ_k 的映射；因此

$$\text{for } (x,y)\in L,\ H_0\left(\mathscr{F}((>^a_b)_k)(T^j(x,y))\right)=\begin{cases}\kappa & j=-k,\ x>-2\Lambda-b,\ \text{and } y\geq b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

对包含映射 $C^{\downarrow}_{\geq 2\Lambda-y}\hookrightarrow C^{\downarrow}_{\geq x}$ 作类似考察可得

$$\text{for } (x,y)\in A,\ H_0\left(\mathscr{F}((>^a_b)_k)(T^j(x,y))\right)=\begin{cases}\kappa & j=-k,\ x\leq a,\ \text{and } y<2\Lambda-a\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

现在，如果 $(x,y)\in S$、$\mathscr{F}((>^a_b)_k)(T_j(x,y))$ 是映射 $\psi_{x,y}\colon C^{\downarrow}_{\geq x}\oplus C^{\leq y}_{\uparrow}\to D_*$ 的锥的一个平移，且当$a\geq x$ 和$b\leq y$时，该映射是满射，其核在次数k 处为一维；当$a<x$ 和$b>y$时，该映射是单射，其余核在次数k 处为一维；并且.....

其他情况下则为同构。因此，对于 $(x、y)\in S$,

$$H_0\left(\mathscr{F}((>_b^a)_k)(T^j(x,y))\right)=H_{-j+1}(\mathrm{Cone}(\psi_{x,y}))\cong\begin{cases}\kappa & \text{if } j=-k,\ x\le a,\ \text{and } y\ge b\\ \kappa & \text{if } j=-k+1,\ x>a,\ \text{and } y<b\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}.$$

现在，由于 a 和 b 介于 $-\Lambda$ 与 Λ 之间，点 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathbb{M}$ 位于矩形 $(-2\Lambda-\mathrm{b},\mathrm{a}]\times[\mathrm{b},2\Lambda-\mathrm{a})$ 中，当且仅当以下情况之一成立：$(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{S}$，且 $\mathrm{s}\le\mathrm{a}$、$\mathrm{t}\ge\mathrm{b}$；或者 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{L}$，且 $\mathrm{s}>-2\Lambda-\mathrm{b}$、$\mathrm{y}\ge\mathrm{b}$；或者 $(\mathrm{s},\mathrm{t})\in\mathrm{A}$，且 $\mathrm{s}\le\mathrm{a}$、$\mathrm{t}<2\Lambda-\mathrm{a}$；或者 $(\mathrm{s},\mathrm{t})=\mathrm{T}(\mathrm{x},\mathrm{y})$，其中 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{S}$，且 $\mathrm{x}>\mathrm{a}$、$\mathrm{y}<\mathrm{b}$。因此，上述计算表明，$\mathrm{H}_0\left(\mathscr{F}((>^a\mathrm{b})_k)\right)$ 恰好在与块 $\mathrm{B}^{r-k}(\mathrm{a},\mathrm{b})$ 相同的点上非零。此外，第 6.4 节中定义的结构映射在 $\mathrm{H}_0\left(\mathscr{F}((>^a\mathrm{b})_k)(\mathrm{s},\mathrm{t})\right)$ 与 $\mathrm{H}_0\left(\mathscr{F}((>^a\mathrm{b})_k)(\mathrm{s}',\mathrm{t}')\right)$ 之间诱导同构，只要二者都非平凡，从而完成了此情形下的证明。

命题 6.8 中其余情形 $(\uparrow^{\infty}{}_a)_k$, $(\nearrow_a)_k$, $(\downarrow^a{}_b)_k$ 和 $(\downarrow^a_{-\infty})_k$，可用与上述情形相同的方法证明，因此省略细节。

□

由命题 6.8 可知，$H_0\circ\mathscr{F}$ 在 (3.11) 和 (3.14) 中的标准初等直和项与块 B^v of [BBF 24] 之间建立了一个双射，其中 v 遍历 $\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$；该双射的逆映射见图 8。

这使我们能够快速证明第 3.3 节分解的以下唯一性结果。

推论 6.9。设 $\mathscr{C}$ 是一个 Λ-有界滤过余跨，在 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中其分解在同构意义下为 $\bigoplus(\mathscr{C}_\alpha)^{\oplus n(\mathscr{C}_\alpha)}$，其中 $\mathscr{C}_\alpha$ 是 (3.11) 和 (3.14) 中互不相同的块，且 $n(\mathscr{C}_\alpha)\in\mathbb{N}$。那么，数值 $n(\mathscr{C}_\alpha)$ 由 $\mathscr{C}$ 唯一确定。

证明。 根据命题 6.8，$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))\cong\bigoplus(B^{v(\mathscr{C}_\alpha)})^{\oplus n(\mathscr{C}_\alpha)}$ 对于某些$v(\mathscr{C}_\alpha)\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$成立，其中赋值 $\mathscr{C}_\alpha\mapsto v(\mathscr{C}_\alpha)$ 是一一对应的，因此和式中出现的各个$v(\mathscr{C}_\alpha)$ 彼此不同。但是，正如 [BBF24 第 2 节2], 所指出的，重数$n(\mathscr{C}_\alpha)$ 由$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$（因而也由 $\mathscr{C}$）唯一确定，因为它等于$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(v(\mathscr{C}_\alpha))$ 对$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(v(\mathscr{C}_\alpha))$ 中各个$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))(v)$ 在相应结构映射下的像之和取商空间后的维数，其中$v\preceq v(\mathscr{C}_\alpha)$。□

7. 相对层间集同调的同构

称连续函数 $\mathrm{f}:\mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$ 为温和函数，如果对于每个 $\mathrm{y}\in(-\Lambda,\Lambda)$，都存在一个数 $\epsilon=\epsilon(\mathrm{y})$ 满足 $0<\epsilon<\Lambda-\mathrm{y}$，并且存在从 $\mathrm{f}^{-1}([-\Lambda,\mathrm{y}+\epsilon))$ 到 $\mathrm{f}^{-1}([-\Lambda,\mathrm{y}])$的强变形收缩。（例如，如果 f 是带边界光滑流形上的 Morse函数，且 $\partial\mathbb{X}$ 是正则水平集 $\mathrm{f}^{-1}(\{-\Lambda\})$ 和 $\mathrm{f}^{-1}(\{\Lambda\})$ 的并，如例 1.9 所示；或者如果 f 是定义在单纯复形上的逐单形线性函数，则上述条件成立。）按照 [BBF24],，对于任意温和函数 $\mathrm{f}:\mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$，都可以关联一个对象 $\mathrm{h}(\mathrm{f})\in\mathrm{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}$，称为 f 的相对层间集同调。[11] 在

[11]由于f的温和性以及对象$h(f)$都只取决于f在$f^{-1}((-\Lambda,\Lambda))$上的限制，因此也可以将其记作$h(f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}})$，其中$\partial\mathbb{X}:=f^{-1}(\{-\Lambda,\Lambda\})$。（当然也允许情形 $\partial\mathbb{X}=\varnothing$，而且这正是 [BBF24] 中所考虑的情形。）为了更准确地与 [BBF24], 比较，他们的输入是一个

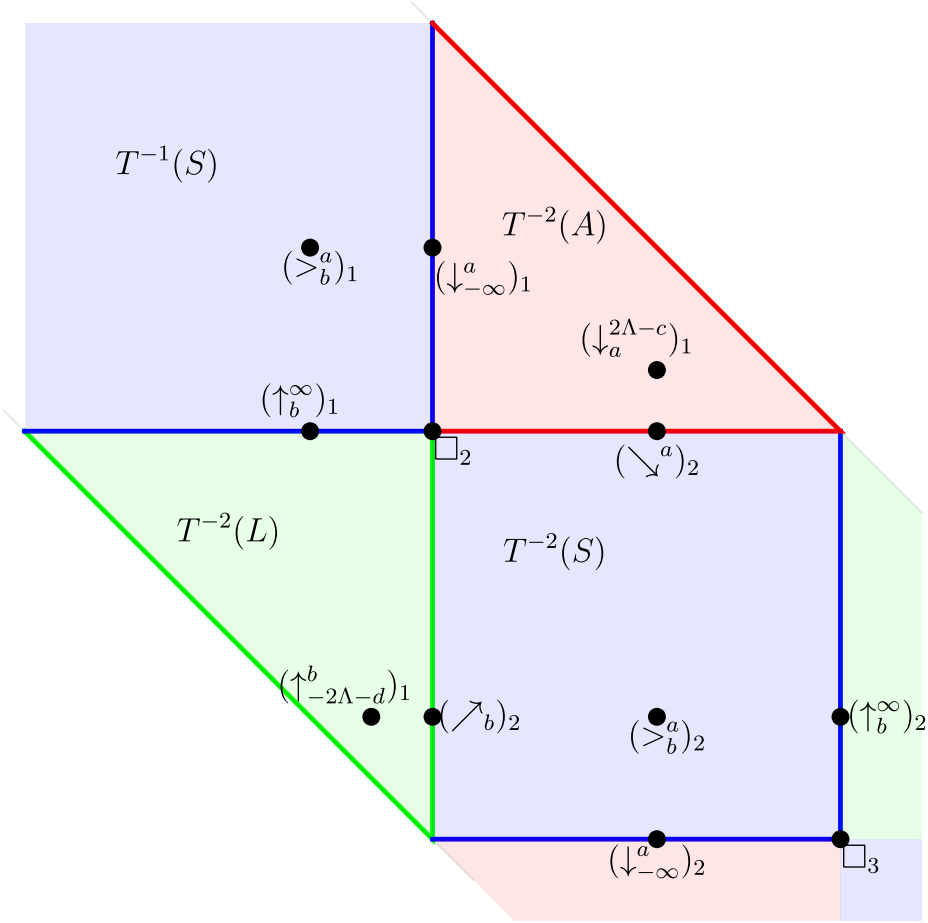


图 8. $\mathbb{M}$中由标准初等和式标记的各点 v，以及在 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中满足 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{C}))$ 与块 B^v同构的 $\mathscr{C}$，依据命题 6.8。标记为 $(>^a b)_2$、$(\uparrow^b_{-2\Lambda-d})_1$ 和 $(\downarrow^{2\Lambda-c} a)_1$ 的点分别等于 $T^{-2}(a,b)$、$T^{-2}(d,b)$ 和 $T^{-2}(a,c)$，其中 $(a,b)\in S$、$(d,b)\in L$ 且 $(a,c)\in A$。

与此同时，我们有一个钉扎奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa)$，如例 1.7 所示。将函子 $\mathscr{F}$ 应用于 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中的这个对象，得到 $\mathrm{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$中的一个对象；再与零阶同调函子 $\mathrm{K}(\kappa)\to \mathrm{Vect}_\kappa$ 复合，便得到对象 $H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa))$。回顾 $h(f)$的定义后，本节将证明：

定理 7.1。对于任意温和函数 $f\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$，存在一个同构 $h(f)\cong H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa))$。

函数 $g\colon \mathbb{X}\to\mathbb{R}$，随后将其与反正切函数复合，以获得一个取值于$(-\Lambda,\Lambda)$且具有 $\Lambda=\frac{\pi}{2}$ 的函数；因此，我们的f应当对应于他们记号中的 $\arctan\circ g$，而我们记作 $h(f)$的函数，在他们的记号中则是 $h(\tan\circ g)$。

下面将较为具体地构造这个同构；从适当意义上说，它自然地取决于这一对 $(\mathbb{X}, f)$，其精确定式留给读者表述。

在开始证明定理 7.1 之前，我们先明确温和函数 $h(f)$ 的定义 $f\colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$。首先，回顾 $S = (-\Lambda, \Lambda] \times [-\Lambda, \Lambda)$，令

$$S^+ = \{(x,y) \in S | y \geq x\} \quad \text{and} \quad S^- = \{(x,y) \in (x,y) \in S | y < x\}.$$

于是，对于 $(x、y) \in \mathfrak{D} = S^+ \sqcup S^- \sqcup L \sqcup A$ 以及 $k \in \mathbb{Z}$，定义：

$$h(f)_{T^{-k}(x,y)} = \begin{cases} H_k(f^{-1}([x,y];\kappa)) & \text{if } (x,y) \in S^+ \\ H_{k+1}(\mathbb{X}, \mathbb{X} \setminus f^{-1}((y,x));\kappa) & \text{if } (x,y) \in S^- \\ H_k(f^{-1}([-\Lambda, y]), f^{-1}([-\Lambda, -2\Lambda - x]);\kappa) & \text{if } (x,y) \in L \\ H_k(f^{-1}([x,\Lambda]), f^{-1}([2\Lambda - y, \Lambda]);\kappa) & \text{if } (x,y) \in A \end{cases}$$

为了描述 $\mathbb{M}$-指标持久性模 $h(f)_{(s,t)} \to h(f)_{(s',t')}$ 的结构映射（对于 $(s、t) \preceq (s'、t')$），只需考虑以下情形，因为任意结构映射必然都可表示为其中一种情形所对应映射的复合：

(7.0.1) (s, t) 和 (s', t') 同属于 $T^{-k}(S^+)$、$T^{-k}(S^-)$、$T^{-k}(L)$ 或 $T^{-k}(A)$ 中的一个；
(7.0.2) $(s, t) \in T^{-k}(S^+)$ 和 $(s', t') \in T^{-k}(L)$；*(7.0.3)* $(s, t) \in T^{-k}(S^+)$ 和 $(s', t') \in T^{-k}(A)$；*(7.0.4)* $(s, t) \in T^{-k}(L)$ 和 $(s', t') \in T^{-k+1}(S^-)$；*(7.0.5)* $(s, t) \in T^{-k}(A)$ 和 $(s', t') \in T^{-k+1}(S^-)$；*(7.0.6)* $(s, t) \in T^{-k}(S^-)$ 和 $(s', t') \in T^{-k}(S^+)$

在情形 (7.0.1)-(7.0.5) 中，每种情形下的假设 $(s, t) \preceq (s', t')$ 意味着，$h(f)_{(s,t)}$ 和 $h(f)_{(s', t')}$ 分别可表示为相对同调群 $H_k(A, B;\ \kappa)$ 和 $H_k(A', B';\ \kappa)$ 其中 A、B、A′、B′ 是 $\mathbb{X}$ 的某些子集，且 $A \subset A'$、$B \subset B'$，因此映射 $h(f)_{(s,t)} \to h(f)_{(s',t')}$ 就取为由对的包含映射 $(A, B) \subset (A', B')$ 所诱导的同调映射。在情形 (vi) 中，令 $(s, t) = T^{-k}(x, y)$ 和 $(s', t') = T^{-k}(x', y')$，其中 $x \geq x'$、$y \leq y'$、$y < x$，且 $y' \geq x'$，则有

$$h(f)_{(s,t)} = H_{k+1}(\mathbb{X}, \mathbb{X} \setminus f^{-1}((y,x));\kappa), \qquad h(f)_{(s',t')} = H_k(f^{-1}([x', y']);\kappa).$$

在此情形下，映射 $h(f)_{(s,t)} \to h(f)_{(s',t')}$ 取为 Mayer-Vietoris 序列中的连接同态；该序列与 [tD08, Section 10.7] 中所述的切除三元组 $\left(\mathbb{X} \setminus f^{-1}((y, x)); f^{-1}([-\Lambda, y]), f^{-1}([x, \Lambda])\right)$ 以及 $\left(\mathbb{X}; f^{-1}([-\Lambda, y']), f^{-1}([x', \Lambda])\right)$ 相关联。（f 的温和性保证第二个三元组对于奇异同调总是切除的，包括 $x' = y'$ 的情形。）

这个连接同态 δ 可表述如下。继续假设 $x' \leq y'$，令 $S_*^{sm\,x'}(\mathbb{X}), _y$ 表示由像落在 $f^{-1}([-\Lambda, y' + \epsilon(y')))$ 或 $f^{-1}([x', \Lambda])$ 中的奇异单形生成的子复形。（这里的小正参数 $\epsilon(y')$ 与温和性的定义中相同。）根据小链定理（[Ha02，命题 2.21]），包含映射 $S_*^{sm\,x'}(\mathbb{X}, , _y; \kappa) \to S_*(\mathbb{X}; \kappa)$ 是一个链同伦

等价。于是我们有一个交换图

(7.1)

$$\begin{array}{ccccc}
S_*(f^{-1}([x',y']);\kappa) & \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} & \frac{S_*(f^{-1}([x',\Lambda]);\kappa)}{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y']);\kappa)}{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)} & \xrightarrow{[-1\ 1]} & \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\mathbb{X}\setminus f^{-1}((y,x));\kappa)} \\
\downarrow & & \downarrow & & \uparrow \\
S_*(f^{-1}([x',y'+\epsilon(y')]);\kappa) & \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix}} & \frac{S_*(f^{-1}([x',\Lambda]);\kappa)}{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y'+\epsilon(y')]);\kappa)}{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)} & \xrightarrow{[-1\ 1]} & \frac{S_*^{sm,x',y'}(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\mathbb{X}\setminus f^{-1}((y,x));\kappa)}
\end{array}$$

其中我们用“1”表示由包含映射诱导的映射。这里的竖直箭头是包含映射，且它们都是链同伦等价；底行是短正合列。因此，与底行相关的同调长正合列中的连接同态，经由上述同伦等价，诱导出连接同态$\delta\colon H_{k+1}(\mathbb{X},\mathbb{X}\setminus f^{-1}((y,\ x));\ \kappa)\to H_k(f^{-1}([x',\ y']);\ \kappa)$我们将其用作$h(f\ )$的结构映射。

下面的代数引理将帮助我们把$h(f\ )$与 $\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\ \kappa))$中出现的各种复形联系起来。

引理 7.2。 (i) 设 $\phi\colon C_*\to D_*$ 是两个链复形之间的单射链映射。那么，映射$\alpha_\phi\colon \mathrm{Cone}(\phi)\to\mathrm{coker}(\phi)$定义为 $\alpha_\phi(c,d)=(d \bmod \mathrm{Im}(\phi))$，是一个拟同构。(ii) 设 $\phi'\colon C'_*\to D_*$ 是两个链复形之间的满射映射。那么，映射 $\beta_{\phi'}\colon\ker(\phi')\to\mathrm{Cone}(\phi')[1]$定义为 $\beta_{\phi'}(c')=(c',0)$，是一个拟同构。(iii) 假设 C_* 是 C'_* 的子复形，且满射链映射$\phi'\colon C'_*\to D_*$在其上限制为单射链映射 $\phi=\phi'|_{C_*}\colon C_*\to D_*$，从而诱导出链复形的一个短正合列

$$0\longrightarrow\ker(\phi')\longrightarrow\frac{C'_*}{C_*}\xrightarrow{\phi'}\mathrm{coker}(\phi)\longrightarrow 0. \tag{7.2}$$

那么，对于每个 $j\in\mathbb{Z}$，都有一个交换图

$$\begin{array}{ccc}
H_j(\mathrm{Cone}(\phi)) & \longrightarrow & H_j(\mathrm{Cone}(\phi'))=H_{j-1}(\mathrm{Cone}(\phi')[1]) \\
\downarrow{\scriptstyle\alpha_\phi} & & \uparrow{\scriptstyle\beta_{\phi'}} \\
H_j(\mathrm{coker}(\phi)) & \xrightarrow{\Delta} & H_{j-1}(\ker(\phi'))
\end{array}$$

其中 Δ 是与 (7.2) 相关联的长正合列的连接同态，而上方的箭头由包含映射诱导。

证明。 (i) 和 (ii) 是众所周知的，可以从交换图出发

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & 0 & \longrightarrow & D_* & \longrightarrow & \mathrm{Cone}(\phi) & \longrightarrow & C_*[-1] & \longrightarrow & 0 \\
 & & & & \| & & \downarrow{\scriptstyle\alpha_\phi} & & & & \\
0 & \longrightarrow & C_* & \xrightarrow{\phi} & D_* & \longrightarrow & \mathrm{coker}(\phi) & \longrightarrow & 0 & &
\end{array}$$

and

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & \longrightarrow & \text{核}(\phi') & \longrightarrow & C'_* & \xrightarrow{D} & {}_* & \longrightarrow & 0 \\ & & \downarrow{\scriptstyle \beta_{\phi'}} & & \| & & & & \\ 0 & \longrightarrow & D_*[1] & \longrightarrow & \text{锥}(\phi')[1] & \longrightarrow & C'_* & \longrightarrow & 0 \end{array}$$

并对由此得到的长正合列图表应用五引理（这些图表在相差一个符号的意义下交换）。

对于 (iii)，如果 (c, d) 是 $\mathrm{Cone}(\phi)_j$ 中的一个循环（因此必有 $\partial c = 0$ 和 $\partial d = -\phi(c)$），那么 (c, d) 的同调类经由 $\beta_{\phi'} \circ \Delta \circ \alpha_\phi$ 映射到元素 $(c + \partial c', 0) \in \mathrm{Cone}(\phi')_j$ 的同调类，其中 $c' \in C'j$ 可任意选取，只要满足 $\phi'(c') = d$。由于 $(c', 0)$ 在 $\mathrm{Cone}(\phi')$ 中的边界于是为 $(-\partial c', d)$，元素 (c, d) 和 $(c + \partial c', 0)$ 在 $\mathrm{Cone}(\phi')_j$ 中是同调等价的，因此 $\beta_{\phi'} \circ \Delta \circ \alpha_\phi : \mathrm{H}\,j(\mathrm{Cone}(\phi)) \to \mathrm{H}_j(\mathrm{Cone}(\phi'))$ 确实与包含映射诱导的映射一致。□

根据第 6.2 节和第 6.4 节中的构造，并采用例 1.6 中的记号，显然，引理 7.2(i) 中相应的拟同构 α_ϕ 在 $(s, t) = \mathrm{T}^{-k}(x, y) \text{for} (x, y) \in \mathrm{S}^- \cup \mathrm{L} \cup \mathrm{A}$ 的情形下诱导出同构 $\mathrm{H}_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)(s, t))) \cong h(f)_{(s,t)}$。例如，如果 $(x, y) \in S^-$，那么 $\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)(s, t))$ 是

$$\mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} \xrightarrow{[-1\ 1]} \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}, \right)[k+1]$$

这是一个单射的锥，因为 $y < x$，并且 $\partial\mathbb{X}$ 是 $\partial^-\mathbb{X}$ 与 $\partial^+\mathbb{X}$ 的不交并。因此，引理 7.2(i) 将 $H_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}(\mathbb{X}, f; \kappa)(s, t)))$ 识别为

$$\begin{aligned} H_0(\mathrm{coker}([-1\ 1])[k+1]) &= H_{k+1}\left(\frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]\cup[x,\Lambda]);\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)} \right) \\ &\cong H_{k+1}\left(\frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]\cup[x,\Lambda]);\kappa)} \right) = h(f)_{(s,t)}. \end{aligned}$$

对于 $(x, y) \in S^+$ 的情形，或许需要多作一些解释，特别是当 $y = x$ 时，这种情况下需要对 f 作出驯性假设。在下一个命题中，请注意，若 $(x, y) \in S^+$，则 x 和 y 都位于开区间 $(-\Lambda, \Lambda)$ 内（因为 $x > -\Lambda$、$y < \Lambda$，且 $y \geq x$），因此 $S_*(f^{-1}([x, y]; \kappa))$ 可以视为子复形，既是 $S_*(f^{-1}([x,\Lambda]); \kappa) S_*(\partial^+\mathbb{X}; \kappa)$ 的子复形，也是 $S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]); \kappa) S_*(\partial^-\mathbb{X}; \kappa)$ 的子复形。

命题 7.3. 对于 $(x, y) \in S^+$，存在一个拟同构

$$S_*(f^{-1}([x,y]);\kappa) \xrightarrow{\beta^{x,y}} \mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} \xrightarrow{[-1\ 1]} \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)} \right)[1]$$

由 $c \mapsto (i_1 c, i_2 c, 0)$ 定义，其中 i_1 和 i_2 分别是从 $S_*(f^{-1}([x, y]); \kappa)$ 到 $S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa) S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)$ 和 $S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa) S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)$ 的包含映射。

证明。 根据f的驯性假设，存在 $\epsilon = \epsilon(y) \in (0, \Lambda - y)$ 以及一个同伦H： $[0,1] \times f^{-1}([-\Lambda, y + \epsilon)) \to f^{-1}([-\Lambda, y + \epsilon))$，从恒等映射到一个像包含在$f^{-1}([-\Lambda, y])$中的映射$r$，使得对于每个$t$，$H(t,\cdot)$ 在$f^{-1}(([-\Lambda, y])$ 上的限制为恒等映射。

令 $\iota\colon S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\ \kappa)\to S_*(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\ \kappa)$ 表示包含映射，则 $r_*\circ\iota$ 为恒等映射；此外，存在一个映射 $K\colon S_*(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\ \kappa)\to S_{*+1}(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\ \kappa)$，它可通过例如 [Ha02, p. 112], 中所述的过程构造，使得 $\partial K+K\partial=1_{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\kappa)}-\iota\circ r_*$。鉴于我们的同伦 H 在 $F^{-1}([-\Lambda,y])$ 上保持不动，链同伦 K 具有以下与后文相关的性质：对于任意奇异单形 $\sigma\colon\ \Delta^k\to f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon))$，若其像包含在 $f^{-1}([-\Lambda,y])$ 中，则奇异 $(k+1)$-链 $K\sigma$ 是退化奇异单形的线性组合，且每个单形的像都与 σ 相同。（回忆一下，奇异 $k+1$-单形 $\tau\colon\ \Delta^{k+1}\to Z$ 是退化的，是指它可分解为复合 $\Delta^{k+1}\to\Delta^k\to Z$，其中第一个映射是某个标准退化映射；对于某个 i，该映射在重心坐标下由 $(t_0,\dots,t_{k+1})\mapsto(t_0,\dots,t_{i-1},t_i+t_{i+1},t_{i+2},\dots,t_{k+1})$ 给出。）

这个链同伦 K 在商空间上诱导出一个映射 $S_*(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\kappa)/S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)\to S_{*+1}(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\kappa)/S_{*+1}(\partial^-\mathbb{X};\kappa)$，我们仍将其记为 K。此外，在证明余下部分中，我们经常用“1”表示包含映射或商投影，或者省略包含映射或商投影与其他映射复合时的记号。

与 (7.1) 中一样，令 $S_*^{sm,x,y}(\mathbb{X},,;\kappa)$ 表示由满足以下条件的单形生成的 $S_*(\mathbb{X};\kappa)$ 的子复形：每个单形的像要么落在 $f^{-1}([x,\Lambda])$ 中，要么落在 $f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon))$; 因此，包含映射 $S_*^{sm,x,y}(\mathbb{X},,;\kappa)\to S_*(\mathbb{X};\kappa)$ 是链同伦等价，它下降为商空间之间的链同伦等价：$S_*^{sm,x,y}(\mathbb{X},,;\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)$ 与 $S_*(\mathbb{X};\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)$。于是我们得到一个图表

(7.3)
$$\begin{array}{ccc}
\frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)}\oplus\frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} & \xrightarrow{[-1\ 1]} & \frac{S_*^{sm,x,y}(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}\\
\left[\begin{smallmatrix}1&0\\0&r_*\end{smallmatrix}\right]\downarrow & & \downarrow 1\\
\frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)}\oplus\frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} & \xrightarrow{[-1\ 1]} & \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}
\end{array}$$

该图表在同伦意义下交换，而同伦由（包含映射与）在第二因子上作用为 K 的映射给出。将（7.3）中的上方水平箭头记为 p_ϵ，下方水平箭头记为 p。由于（7.3）的两条垂直箭头都是拟同构，图表的同伦交换性意味着我们有一个拟同构

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r_*&0\\0&K&1\end{bmatrix}:\ \mathrm{Cone}(p_\epsilon)\xrightarrow{\simeq}\mathrm{Cone}(p).$$

现在，对角包含映射 $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\end{smallmatrix}\right]\colon S_*(f^{-1}([x,y+\epsilon));\kappa)\to S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)\oplus S_*(S_*(\partial^+\mathbb{X};f^{-1}([-\Lambda,y+\epsilon));\kappa)S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)$ 是一个单射，其像为 $\ker(p_\epsilon)$，因此由引理 7.2 可知，$S_*(f^{-1}([x,y+\epsilon));\kappa)\to\mathrm{Cone}(p_\epsilon)[1]$ 是拟同构，可表示为块形式 $\left[\begin{smallmatrix}1\\1\\0\end{smallmatrix}\right]$。此外，我们的强变形收缩 H 限制在 $f^{-1}([x,y+\epsilon))$ 上时，是到 $f^{-1}([x,y])$ 的一个变形收缩，因此后者到前者的包含映射在同调上诱导一个同构。综合以上结果，我们得到一列拟同构

$$S_*(f^{-1}([x,y]);\kappa) \xrightarrow{1} S_*(f^{-1}([x,y+\epsilon));\kappa) \xrightarrow{\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}} \mathrm{Cone}(p_\epsilon)[1] \xrightarrow{\begin{bmatrix}1&0&0\\0&r_*&0\\0&K&1\end{bmatrix}} Cone(p)[1]..$$

由于映射 r 限制在 f $^{-1}$([x, y])上是恒等映射，这个复合可表示为βx,y + j ◦ K，其中 β x,y 是命题陈述中的映射，j : S$_*$(𝕏;κ) S$_*$(∂𝕏;κ)$^{[1]}$ →C one(p)[1]是包含映射（当然它是一个链映射），而 K : S$_*$(f $^{-1}$([x, y]); κ) →S$_*$(𝕏;κ) S$_*$(∂𝕏;κ)$^{[1]}$是先前讨论的链同伦与适当的包含映射和投影的复合。由于这里将 K 限制在 f^{-1}([x, y])中的链上，而收缩 r 在这些链上作用为恒等映射，这个受限的 K 与奇异边界算子反交换，因此当视为一个映射 S$_*$(f $^{-1}$([x, y]); κ) → S$_*$(𝕏;κ) S$_*$(∂𝕏;κ)$^{[1]}$时，它是一个链映射（因为陪域上的边界算子的符号会因次数平移而反转）。事实上，根据证明开头的观察，这个链映射在同调上作用为零，因为它的像由 𝕏 中的退化奇异单形组成，而 𝕏 中的退化单形复形是无环的（见 [EZ50, (10.6)] 或 [We94, 定理 8.3 的证明。8]）。

由此我们证明了，$\beta_{x,y}+j\circ K$是一个拟同构，并且K（因而$j\circ K$也）在同调上作用为零。因此，$\beta^{x,y}$是一个拟同构，正如所需。□

上述讨论表明，对于任意的 $(s,t)=T^{-k}(x,y)\in\mathbb{M}$（其中 $(x,y)\in\mathfrak{D}$），我们有一个同构

$$h(F)_{(s,t)} \cong H_0\left(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa))(s,t)\right),$$

由引理 7.2(ii) 中的映射 α 在同调上诱导，如果 (x, y) ∈ S$^-$ ∪ L ∪A；若 (x, y) ∈ S$^+$，则由命题 7.3 的映射 $\beta^{x,y}$ 诱导。为完成定理 7.1 的证明，我们需要验证这些同构与本节开头回顾的结构映射 h(f)$_{(s,t)}$ →h(f)$_{(s',t')}$ 以及第 6.4 节定义的结构映射 $\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa))(s,t)\to\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa))(s',t')$ 相容。由于这些结构映射关于各对 (s, t)具有函子性，只需在情形 (7.0.1) 至 (7.0.6) 中逐一验证。情形 (7.0.1) 显然成立，因为映射 α 和 $\beta^{x,y}$ 关于包含映射是自然的。对于情形 (7.0.2)，其中 (x, y) ∈S$^+$且 (x′, y′) ∈L，注意复合 $\phi^{T^{-k}}_{-k}$L T S ◦ βx,y 将 S$_*$(f $^{-1}$([x, y]); κ)[k]通过包含映射送到 Cone $\left(S_*(f^{-1}([-\Lambda,-2\Lambda-x'])\kappa)S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa) \to S_*(f^{-1}([-\Lambda,y'])\kappa)\right)$[; S$_*$($\partial^-$𝕏; k]的第二因子，因此此映射与 α 复合后，在 H$_0$ 上诱导包含映射诱导映射 H$_k$(F^{-1}([x, y]); κ) →H$_k$(F^{-1}((−∞, y′]), F $^{-1}$((−∞, −2Λ − x′]); κ)，正如所需。情形 (7.0.3) 与情形 (7.0.2) 完全类似。情形 (7.0.4) 和 (7.0.5) 本质上也相同；后者由图表的交换性得出

$$\begin{array}{ccc}
\mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(f^{-1}([2\Lambda-y,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \to \frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)}\right) & \xrightarrow{[0\ 1]} & \frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda];\kappa)/S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)}{S_*(f^{-1}([2\Lambda-y,\Lambda]);\kappa)/S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \\
\phi^{T^{-k+1}S}_{T^{-k}A}=\begin{bmatrix}-1&0\\0&0\\0&1\end{bmatrix}\downarrow & & \downarrow 1 \\
\mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(F^{-1}([x',\Lambda];\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y']);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} \to \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}\right) & \xrightarrow{[0\ 0\ 1]} & \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\mathbb{X}\backslash f^{-1}((y',x'));\kappa)/S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}
\end{array}$$

其中 我们仍将各种包含映射与投影的组合统称为“1”。

最后，我们考虑剩余的情形 (7.0.6)，其中 $\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa))$的结构映射是包含映射

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} \to \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}\right)[k+1]\\ &\hookrightarrow \mathrm{Cone}\left(\frac{S_*(f^{-1}([x',\Lambda]);\kappa)}{S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa)} \oplus \frac{S_*(f^{-1}([-\Lambda,y']);\kappa)}{S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa)} \to \frac{S_*(\mathbb{X};\kappa)}{S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)}\right)[k+1]\end{aligned}$$

而 h(f) 的结构映射是 Mayer-Vietoris 序列中的连接同态。它们之间的关系由引理 7.2(iii) 给出。事实上，将该引理应用于满足以下条件的映射： ϕ'等于诱导 (7.1) 底行的映射 $S_*(f^{-1}([x',\Lambda])\kappa) \oplus S_*(;\, S_*(\partial^+\mathbb{X};\, f^{-1}([=\Lambda, y'+\epsilon(y'))); \kappa)\, S_*(\partial^-\mathbb{X};\kappa) \longrightarrow S^{sm}, x', y'(\mathbb{X};\kappa)\, S_*(\partial\mathbb{X};\kappa)$，且 ϕ 等于 ϕ' 在 $\kappa)\, S_*(f^{-1}([x,\Lambda]);\kappa)\, S_*(\partial^+\mathbb{X};\kappa) \quad \oplus S_*(f^{-1}([-\Lambda,y]));\kappa)\, S_*(\partial=\mathbb{X};\kappa)$ 上的限制，我们得到一个交换图

$$\begin{array}{ccccc} H_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa))(s,t)) & \longrightarrow & H_{k+1}(\mathrm{Cone}(\phi')) & \longleftarrow & H_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa)(s',t')) \\ \downarrow{\scriptstyle \alpha_\phi} & & \uparrow{\scriptstyle \begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}_*} & & \uparrow{\scriptstyle \beta^{x',y'}} \\ h(f)_{s,t} & \xrightarrow{\Delta} & H_k(f^{-1}([x',y'+\epsilon(y'))];\kappa) & \longleftarrow & h(f)_{s',t'} \end{array}$$

其中，未标记的水平箭头均由包含映射诱导，两个向左的箭头则因f的温和性而都是同构。结构映射$H_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa))(s,t)) \to H_0(\mathscr{F}(\mathscr{S}_\partial(X,f;\kappa)(s',t'))$ 以及$h(f)_{s,t} \to h(f)_{s',t'}$分别由反转上述图表中的两个向左箭头，再复合顶行和底行的映射得到；因此，这些结构映射在同构α_ϕ 和$\beta^{x',y'}$下确实一致。定理 7.1 的证明至此完成。

7.1. 与水平集条形码的关系。正如 [BBF21 第 3.2 节所讨论的（其中以上同调代替同调），1], 如果温和函数 f : $\mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 的相对层间集同调 h(f) 分解为块 B^ν 的直和，其中这些块如式 (6.19) 所定义，那么 $f|_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}$ 的 [CdSM09] 水平集条形码可按如下方式读出：对于 $\mathbb{M}$内部的任意 v，都存在唯一的整数 j(v)，使得 B^ν的支撑与线段 T $^{-}$j({(t, t)|$-\Lambda <$ t $< \Lambda$}) 相交于一个非空区间 I(v)；于是，B^ν 对水平集条形码的贡献恰好是次数 j(v)上的区间 I(v) 。区间 I(v) 的性质（例如它是开区间、半开区间还是闭区间，以及其端点是否包含 $-\Lambda$ 和/或 Λ）取决于 v 相对于区域 T k (S$^+$)、T k (S$^-$)、T k (L)和 T^k(A)的位置；逐一考察命题 6.8 中的各种情形，可由该命题和定理 7.1 推得以下结论：

命题 7.4。 设$f : \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 是一个温和函数， κ 是一个域，并假设钉扎奇异过滤余跨图 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X}, f; \kappa)$ 同构于标准初等直和项的直和。那么$f|_{\mathbb{X}\setminus\partial X}$的水平集条形码（系数取自 κ）由这些标准初等直和项各对应一个区间组成，具体对应关系见下表（其中，我们用I_j表示分次j 中的区间I ）：

$\mathscr{C}$	$I(v(\mathscr{C}))_{j(v(\mathscr{C}))}$
$(\uparrow^b a)_k$ 对于 $a < b < \Lambda$	$[a,\ b)_k$
$(\uparrow^\infty)_{a\ k}$	$[a,\ \Lambda)_k$
$(\downarrow^a b)_k$ 对 $-\Lambda < b < a$	$(-\Lambda, a)_{k-1}$
$(\nearrow^a)_k$	$(b,\ a]_k$
$\left(\downarrow^a_{-\infty}\right)_k$	$(-\Lambda, a]_k$
$(\searrow^a)_k$	$(a,\ \Lambda)_{k-1}$
$(>^a b)_k$ 对于 $-\Lambda < b \le a < \Lambda$	$[b,\ a]_k$
$(>^a b)_k$ 对于 $-\Lambda < a < b < \Lambda$	$(a,\ b)_{k-1}$
$\square_k$	$(-\Lambda, \Lambda)_{k-1}$

8. 交错与稳定性

在我们的启发性示例中，输入是固定值 Λ下的函数$f\colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$，相应条形码中的元素因此是 $(-\Lambda, \Lambda)$的子区间。由于平移的作用不会保持区间 $[-\Lambda, \Lambda]$不变，因此在建立关于交错和稳定性的常规考量时需要格外谨慎。不过，基于这样的原则：函数f可视为复合 $\varphi \circ g$，其中$g\colon \mathbb{X} \to [-\infty, \infty]$ 且$\varphi\colon [-\infty, \infty] \to [-\Lambda, \Lambda]$是一个递增同胚，我们可以预期$f$ 具有某种稳定性，这种稳定性源自$g = \varphi^{-1} \circ f$ 的标准类型稳定性结果。

无需明确调用任何此类结果，我们可以改编 [dSMS18] 中带流范畴的交错语言，直接处理取值于 $[-\Lambda, \Lambda]$ 的函数、与之相关的 Λ-有界滤过余跨，以及相应的图表（其取值于条带 $\mathbb{M}$ 中；取有限的固定值 Λ 有助于构造和解释该条带）。

令我们在下文中选定并固定一个递增同胚 $\varphi\colon [-\infty, \infty] \to [-\Lambda, \Lambda]$。对于任意 $s \in \mathbb{R}$，它都确定了一个在区间 $[-\Lambda, \Lambda]$ 上充当“平移 s”之版本的映射，即映射 $\rho^{\varphi}{}_s\colon [-\Lambda, \Lambda] \to [-\Lambda, \Lambda]$，定义如下：

$$\rho_s^{\varphi}(t) = \varphi\left(s + \varphi^{-1}(t)\right).$$

（这里显然，$s + \infty = \infty$ 且 $s + (-\infty) = -\infty$，因此 $\rho^{\varphi}{}_s\ (\pm\Lambda) = \pm\Lambda$。）显然

$$\rho_{s+t}^{\varphi} = \rho_s^{\varphi} \circ \rho_t^{\varphi}, \qquad \rho_0^{\varphi} = \mathbf{1}_{[-\Lambda,\Lambda]}, \tag{8.1}$$

and

$$\text{if } s \le s', \text{ then } \rho_s^{\varphi}(t) \le \rho_{s'}^{\varphi}(t) \text{ for all } t. \tag{8.2}$$

8.1. **流**。 Following [dSMS18], a **严格流**定义为从偏序集范畴 $[0, \infty)$（其幺半结构由加法给出）到范畴 **End**(C)（即 C 上自函子的范畴）的幺半函子 $\mathscr{T}\colon \epsilon \mapsto \mathscr{T}_\epsilon$。因此，$\mathscr{T}_0$ 是 C 的恒等自函子，我们有 $\mathscr{T}_{s+t} = \mathscr{T}_s \circ \mathscr{T}_t$；对于 $s \le t$，我们有一个自然变换 $\mathscr{T}_{(s\le t)}\colon \mathscr{T}_s \Rightarrow \mathscr{T}_t$。若 X和 Y是 C 中的两个对象，且 $\epsilon \ge 0$，那么 X 和 Y 的一个 ϵ-**交错** (α, β) 由以下态射组成： $\alpha\colon X \to \mathscr{T}_\epsilon Y$ 和 $\beta\colon Y \to \mathscr{T}_\epsilon X$，并满足

$$(\mathscr{T}_\epsilon \beta) \circ \alpha = \mathscr{T}_{(0\le 2\epsilon),X}, \qquad (\mathscr{T}_\epsilon \beta) \circ \alpha = \mathscr{T}_{(0\le 2\epsilon),Y}. \tag{8.3}$$

这在 C 上诱导出一个交错距离：对于 C 中的对象 X、Y，定义

$$d_{\mathrm{int}}^{\mathscr{T}}(X,Y)=\inf\{\epsilon>0|\text{there is an } \epsilon\text{-interleaving between } X \text{ and } Y\} \tag{8.4}$$

其中空集的下确界为 ∞。

我们还借用了 [U22] 中的以下术语

定义 8.1。设范畴 C 上有一个严格流 $\mathscr{T}$，且有 C 中的两个对象 X 和 Y，以及 $\epsilon>0$。从 Y 到 X 的 ϵ-**嵌入** 由态射 $\alpha\colon X\to\mathscr{T}_\epsilon Y$ 和 $\beta\colon Y\to\mathscr{T}_\epsilon X$ 组成，并满足 $(\mathscr{T}_\epsilon\beta)\circ\alpha=\mathscr{T}_{(0\le 2\epsilon),X}$。

因此，我们省略 (8.3) 中的第二个条件。ϵ-交错是 X 与Y之间的一种近似同构，而 ϵ-嵌入则表示X 近似为Y的一个收缩。

现在我们来说明，与递增同胚 $\varphi\colon[-\infty,\infty]\to[-\Lambda,\Lambda]$ 相关联的 $[-\Lambda,\Lambda]$ 的平移系统 $\rho^{\varphi}{}_s$，如何在本文涉及的各种范畴上诱导出严格流。

8.1.1. 滤过余跨上的流。首先，在滤过余跨同伦范畴$\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$上，通过在对象上取 $\mathscr{T}^{\varphi}$，我们得到一个严格流

$$\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}\left((C\uparrow_*,\ \partial C\uparrow,\ \ell_{\uparrow}^{C},\ \begin{matrix}C\\ \downarrow\\ *\end{matrix},\partial_C^{\downarrow},\ell_C^{\downarrow}),(D_*,\partial_D),\psi_\uparrow,\psi^\downarrow\right)=\left((C_{\uparrow *},\partial_\uparrow^C,\rho_{-\epsilon}^{\varphi}\circ\ell_\uparrow^C),(C_*^\downarrow,\partial_C^\downarrow,\rho_\epsilon^{\varphi}\circ\ell_C^\downarrow),(D_*,\partial_D),\psi_\uparrow,\psi^\downarrow\right.$$

（因此，$\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}$ 唯一的作用就是将升滤过函数“平移” $-\epsilon$，并将降滤过函数平移 ϵ），并令 $\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}$ 在态射上作用为恒等映射。注意，对于一个元组 $(\alpha^\downarrow,\alpha_\uparrow,\alpha,K^\downarrow,K_\uparrow)$，定义态射 $\mathscr{C}\to\mathscr{X}$的条件 (2.1) 和 (2.2)，在将 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{X}$同时替换为 $\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}\mathscr{C}$和 $\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}\mathscr{X}$时保持不变。自然变换$\mathscr{T}^{\varphi}_{(\le st)}$作用于上述一般对象 $\mathscr{C}$时，可通过在$C\uparrow_*$、$C_*^\downarrow$、D_*上取恒等映射，并令 (2.1) 中的映射$K\uparrow$和$K^\downarrow$为零来给出。（由于 (8.2)，(2.2) 得以满足。）

例 8.2. 我们将其应用于例 1.7 中的带钉奇异过滤余跨 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},f;\kappa)$。因此，固定一个拓扑空间 $\mathbb{X}$及其子集 $\partial\mathbb{X}=\partial^-\mathbb{X}\sqcup\partial^+\mathbb{X}$，并考虑满足$f\colon\mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$且要求$f^{-1}(\{\pm\Lambda\})=\partial^\pm\mathbb{X}$的函数。

若 f、$\mathrm{g}\colon\mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$是两个这样的函数，则例 1.7 规定的复形 $\mathrm{C}\uparrow_*$、$\mathrm{C}_*^\downarrow$、D_*对 f 和 g 相同，而滤过函数 $\ell_\uparrow$ 和 $\ell^\downarrow$ 则不同。容易验证，若 $\sup_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}|\varphi^{-1}\circ\mathrm{f}-\varphi^{-1}\circ\mathrm{g}|\le\epsilon$，则恒等映射在 $\mathrm{C}\uparrow_*$、$\mathrm{C}_*^\downarrow$、D_*上的行为相对于这些滤过而言，会使它们在 $\mathrm{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中诱导从 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{f};\kappa)$到 $\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{g};\kappa)$以及从 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{g};\kappa)$到 $\mathscr{T}_\epsilon^{\varphi}\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{f};\kappa)$的态射（两种情况下的链同伦映射 $\mathrm{K}\uparrow$ 和 $\mathrm{K}^\downarrow$ 均取为零）。由于 $\mathscr{C}$ 中的自然变换 $\mathscr{T}^{\varphi}_{(0\le 2\epsilon)}$ 同样由各个链复形上的恒等映射给出，因此我们得出，若 $\sup_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}|\varphi^{-1}\circ\mathrm{f}-\varphi^{-1}\circ\mathrm{g}|\le\epsilon$，则 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{f};\kappa)$与 $\mathscr{S}_\partial(\mathbb{X},\mathrm{g};\kappa)$之间存在一个$\epsilon$-交错。（参见 [BBF21，定理 4.4]。）

8.1.2. 上的流 $\mathbb{M}$。我们的同胚 $\varphi\colon[-\infty,\infty]\to[-\Lambda,\Lambda]$ 也通过以下规定在条带 $\mathbb{M}$（视为偏序集范畴）上诱导出一个严格流 $\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi}$，其中

相对于 (6.2) 中 $\mathbb{M}$ 的分解：对于 $(x、y)\in\mathfrak{D}=S\sqcup L\sqcup A$，对于 $k\in\mathbb{Z}$，以及对于 $\epsilon\geq 0$，我们定义：

$$(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}\left(T^{k}(x,y)\right)=\begin{cases}T^{k}\left(\rho_{-\epsilon}^{\varphi}(x),\rho_{\epsilon}^{\varphi}(y)\right) & \text{if } (x,y)\in S\\ T^{k}\left(-2\Lambda-\rho_{\epsilon}^{\varphi}(-2\Lambda-x),\rho_{\epsilon}^{\varphi}(y)\right) & \text{if } (x,y)\in L\\ T^{k}\left(\rho_{-\epsilon}^{\varphi}(x),2\Lambda-\rho_{-\epsilon}^{\varphi}(2\Lambda-y)\right) & \text{if } (x,y)\in A\end{cases}\tag{8.5}$$

（由于 $\mathbb{M}$ 的任意两个对象之间至多存在一个态射，因此，$(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}$ 在态射上的作用由其在对象上的作用决定。）

注意，映射 $(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}\colon\ \mathbb{M}\to\mathbb{M}$ 与平移 T 交换。此外，每个子定义域 $T^{k}S$、$T^{k}L$、$T^{k}A$ 都在 $(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}$ 下保持不变；同样，每条边 $T^{k}(\{\pm\Lambda\}\times(-\Lambda,\Lambda))$ 和 $T^{k}((-\Lambda,\Lambda)\times\{\pm\Lambda\})$，以及正方形 $T^{k}S$ 的角 $T^{k}(\{(\pm\Lambda,\pm\Lambda)\})$ 也都保持不变。

8.1.3. *C 上的流$\mathsf{C}^{\mathbb{M}}$。* 若 C 为任意范畴，则上述严格流 $\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi}$ 在 $\mathbb{M}$ 上诱导出，如 [dSMS18 第 3], 节中所述，在函子范畴 $\mathsf{C}^{\mathbb{M}}$ 上的严格流 $\mathscr{T}^{\varphi}{}_{\mathsf{C}^{\mathbb{M}}}$：对于任意函子 $f\colon\ \mathbb{M}\to\mathsf{C}$ 和 $\epsilon\geq 0$，令

$$(\mathscr{T}_{\mathsf{C}^{\mathbb{M}}}^{\varphi})_{\epsilon}f=f\circ(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}$$

并对自然变换采用显而易见的对应作用。

展开定义后可知，对于每个 $(s、t)\in\mathbb{M}$，在式（6.3）中定义的函子 $\mathscr{F}^{0}_{(s,t)}\colon\mathsf{CO}^{\Lambda}(\mathbb{R})\to\mathsf{Ch}(\kappa)$ 满足 $\mathscr{F}^{0}_{(s,t)}(\mathscr{T}_{\epsilon}^{\varphi}(\mathscr{C}))=\mathscr{F}^{0}_{(\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^{\varphi})_{\epsilon}(s,t)}(\mathscr{C})$，每个 $\epsilon\in[0,\infty)$ 以及 $\mathsf{CO}^{\Lambda}(\kappa)$ 的每个对象 $\mathscr{C}$ 均成立。因此：

命题 8.3. 定义6.2中的函子 $\mathscr{F}\colon\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}$ 满足 $\mathscr{F}\circ\mathscr{T}_{\epsilon}^{\varphi}=(\mathscr{T}^{\varphi}{}_{\mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}})_{\epsilon}\circ\mathscr{F}$。

也就是说，$\mathscr{F}$ 是严格的 $[0,\infty)$-等变函子，符合 [dSMS18 第 4] 节中的定义。由此可立即得出，$H0\circ\mathscr{F}\colon\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)\to\mathsf{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}$ 同样是严格的 $[0,\infty)$-等变函子，其所对应的流分别为作用在 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 上的 $\mathscr{T}^{\varphi}$ 和作用在 $\mathsf{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}$ 上的 $\mathscr{T}^{\varphi}{}_{\mathsf{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}}$。

8.2. **度量。**

8.2.1. *嵌入与匹配。* 设 (X,d_X) 为一个广义伪度量空间[12]，并设 $\Delta\subset X$。给定 X 的两个多重集[13] S 和 T，以及 $\epsilon\geq 0$，一个相对于 Δ 的 **ϵ-匹配 S 与 T 之间** 由以下数据构成：

- 子多重集 $S'\subset S$ 和 $T'\subset T$ 满足：对于所有 $x\in(S\setminus S')\cup(T\setminus T')$，存在 $y\in\Delta$ 使得 $d_X(x,y)\leq\epsilon$；并且
- 一个双射 $f\colon S'\to T'$，满足 $d_X(x,f(x))\leq\epsilon$ 对所有 $x\in S'$ 均成立。

我们定义一个相对于 Δ 的**S 到 T 的 ϵ-嵌入**，其数据包括：

- 一个子多重集 $S'\subset S$，使得对于所有 $x\in S\setminus S'$，都存在 $y\in\Delta$ 满足 $d_X(x,y)\leq\epsilon$；并且

[12] 在 X 上的广义伪度量是一个函数 $d_X\colon X\times X\to[0,\infty]$，它具有对称性，满足三角不等式，并且对所有 x 满足性质 $d(x,x)=0$。“广义”一词指的是 d 可以取值 ∞ 这一事实。[13] 形式上，X 中元素的一个多重集可以定义为一个集合 S 以及一个函数 $\pi\colon S\to X$；我们的记号会将 S 中的元素与其在该映射下的像混同。对于 $x\in X$，元素 x 在多重集 S 中的重数是 $\pi^{-1}\{x\}$ 的基数。

- 一个单射$f: S' \to T$，使得$d_X(x, f(x)) \leq \epsilon$ 对于所有$x \in S'$。

熟知的**瓶颈距离**是多重集S 和T 中元素之间相对于 Δ定义的距离：

$$d_{\Delta, d_\infty}{}^{X}(S,T) = \inf\{\epsilon \geq 0 | \text{存在一个相对于 } \Delta\text{的 } \epsilon\text{-匹配，使得} S \text{与} T \text{之间满足条件}\}。$$

（关于持久图语境下的原始表述，参见 [CEH07] ；关于一般性讨论，参见 [CGGM24] 。）我们将**S**到**T** 相对于 Δ的瓶颈半距离定义为

$$\delta^{\Delta, d_X}_{\infty}(S,T) = \inf\{\epsilon \geq 0 | \text{存在一个相对于 } \Delta\text{的 } \epsilon\text{-嵌入，将} S \text{嵌入} T\}。 \tag{8.6}$$

显然，$\delta^{\Delta, d_X}_{\infty}$并非对称的，因此称为半距离。

命题 8.4. 对于元素S 和T 这两个多重集，其中元素取自X，有

$$d_\infty^{\Delta, d_X}(S,T) = \max\{\delta_\infty^{\Delta, d_X}(S,T), \delta_\infty^{\Delta, d_X}(T,S)\}.$$

证明。 显然，一个S 与T 之间的 ϵ-匹配会产生从S到T 以及从T 到S的 ϵ-嵌入，因此不等式“$\geq$”显然成立。为证明反向不等式，我们将说明：给定 ϵ-嵌入$f: S' \to T$和$g: T' \to S$，可以构造一个S 与T之间的 ϵ-匹配。

这可以通过改编施罗德–伯恩斯坦定理的标准证明来实现（该定理指出，如果两个集合各自都能单射到对方，那么它们之间就存在一个双射）。令$B_0 = T \setminus \mathrm{Im}(f)$，并对$n \geq 1$归纳定义$A_n = g(T' \cap B_{n-1}) \subset S$ 以及$B_n = f(S' \cap A_n) \subset T$。令$S'' = S' \cup \left(\cup_{n=1}^{\infty} A_n\right)$，并定义$h: S'' \to T$为

$$h(a) = \begin{cases} g^{-1}(a) & \text{if } a \in A_n \text{ for some } n \geq 1 \\ f(a) & \text{if } x \in S' \setminus \cup_{n=1}^{\infty} A_n \end{cases}.$$

（这是定义良好的，因为 g 是单射，并且每个 A_n 都包含于 Im g 中。）如果 $x_1 \in A_n$且 $x_2 \in S' \setminus (\cup_n A_n)$，则元素 $h(x_1) = g^{-1}(x_1) \in B_{n-1}$ 不可能等于 $f(x_2)$：事实上，如果 $n = 1$，则这是因为 $B_0 \cap \mathrm{Im}(f) = 0$；而如果 $n > 1$，则这是因为 $B_{n-1} \subset f(A_{n-1})$，同时 $x_2 \notin A_{n-1}$ 且 f 是单射。再结合 h 在 $\cup_n A_n$ 和 $S'' \setminus (\cup_n A_n)$ 上的限制显然分别都是单射这一事实，即可得到 h 是单射。

我们来证明 h 的像包含 T'。给定 $y \in T'$，如果对于某个 $n \geq 0$有 $y \in B_n$，那么 $g(y) \in A_{n+1}$，且 $y = h(g(y))$。反之，如果 $y \in T' \setminus \cup_{n \geq 0} B_n$，则 $y \notin B_0$ 这一事实意味着 $y \in \mathrm{Im}(f)$；而 $y \notin \cup_{n \geq 1} B_n$ 这一事实意味着，对于任意 n，$y \notin f(S' \cap A_n)$。因此，满足 $f(x) = y$ 的 S' 中的元素 x 不属于任何一个 A_n，从而 $h(x) = y$。于是确实有 $T' \subset \mathrm{Im}(h)$。

令 $T'' = \mathrm{Im}(h)$，由此可得一个双射 $h: S'' \to T''$，其中 $S' \subset S'' \subset S$ 且 $T' \subset T'' \subset T$，并且具有以下附加性质：若 $y = h(x)$，则要么 $y = f(x)$，要么 $x = g(y)$。由 $f: S' \to T$ 和 $g: T' \to S$ 是相对于 Δ 的 ϵ- 嵌入这一事实，可立即推出 h 是相对于 Δ 的 ϵ- 匹配。□

8.2.2. 流导出的度量。 现在设 $(P, \preceq)$ 是任意偏序集，并令 $\Delta \subset P$。就本节而言，可以设想我们有某种持久图的概念，即由$P \setminus \Delta$ 中元素构成的多重集。（与本文最相关的情形是 $P = \mathbb{M}$ 和 $\Delta = \partial\mathbb{M}$，对应于命题 6.8；不过我们也会提到一些

较简单的例子以作说明。）按通常的方式将P 视为一个范畴，假设我们有一个严格流 $\mathscr{T}\colon [0,\infty)\to \mathrm{End}(P)$。根据一般规则 (8.4)，这会在$P$ 上诱导一个交错距离$d^{\mathscr{T}}\,\mathrm{int}$；在当前情境下，该距离定义为

$$d_{\mathrm{int}}^{\mathscr{T}}(x,y)=\inf\{\epsilon>0 | x\preceq \mathscr{T}_\epsilon y \text{ and } y\preceq \mathscr{T}_\epsilon x\}.$$

例如，若 $P = \mathbb{R}^n$ 带有其标准偏序，且若 $\mathscr{T}_\epsilon\colon P \to P$ 由$(x_1,\dots,x_n)\mapsto(x_1+\epsilon,\dots,x_n+\epsilon)$给出，那么，正如 [dSMS18 的定理 3.9]，$d^{\mathscr{T}}$所指出的，它与通常定义在 $\mathbb{R}^n$上的 ℓ^∞ 距离一致。

现在将 P 视为关于距离 $d^{\mathscr{T}}\,\mathrm{int}$ 的广义伪度量空间，我们便得到一个瓶颈距离

$$d_{B,\mathscr{T}}^{P,\Delta}:=d_\infty^{\Delta,d_{\mathrm{int}}^{\mathscr{T}}}$$

P中元素的多重集上的距离。例如，可以取

$$P=\{(a,b)\in(-\infty,\infty)\times(-\infty,\infty] | a\le b\} \text{ and } \Delta=\{(a,b)\in P | a=b\},$$

对于流 $\mathscr{T}_\epsilon(a、b)=(a+\epsilon、b+\epsilon)$，由此可从 [CEH07]得到持久图上的通常瓶颈距离。同样，也可得到瓶颈半距离（见 (8.6)） $\delta^{P,\Delta}_{B,\mathscr{T}}:=\delta^{\Delta,d^{\mathscr{T}}_{\mathrm{int}}\infty}$。

本文中的持久图是 $\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$ 中元素的多重集，因此我们关注的瓶颈距离将是 $d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}$，它由定义在 $\mathbb{M}$ 上的广义伪度量$d^{\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}\,\mathrm{int}\,.$ 导出。下面描述$d^{\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}\,\mathrm{int}\,.$ 的一些特性。

分别用 S°、L° 和 A° 表示子集 S、L 和 A 的内部（相对于 $\mathbb{R}^2$ 上的通常拓扑，因此例如 $S^\circ=(-\Lambda,\Lambda)\times(-\Lambda,\Lambda)$）。设 R 是基本域 $\mathfrak{D}$ 的以下任意一个子集（它们的并集为整个 $\mathfrak{D}$）：

$$\begin{aligned}&S^\circ,\ L^\circ,\ A^\circ,\ (-\Lambda,\Lambda)\times\{-\Lambda\},\ (-\Lambda,\Lambda)\times\{\Lambda\},\\ &\{-\Lambda\}\times(-\Lambda,\Lambda),\ \{\Lambda\}\times(-\Lambda,\Lambda),\ \{(\Lambda,-\Lambda)\},\ \text{and } \mathfrak{D}\cap\partial\mathbb{M}.\end{aligned}\tag{8.7}$$

然后可以由 (8.5) 验证，对于每个 $\mathrm{k}\in\mathbb{Z}$和每个 $\epsilon\ge 0$, $(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon(\mathrm{T}^k\mathrm{R})=\mathrm{T}\,\mathrm{kR}$。此外，除 L°、A° 和 $\mathfrak{D}\cap\partial\mathbb{M}$ 外，(8.7) 中的每个区域 R 都具有如下性质：若 $\mathrm{v},\mathrm{w}\in\mathrm{T}^k\mathrm{R}$ 且 $\mathrm{v}\preceq\mathrm{w}$，则整个区间 $[\mathrm{v},\mathrm{w}]=\{\mathrm{u}\in\mathbb{M}\colon \mathrm{v}\preceq\mathrm{u}\preceq\mathrm{w}\}$ 都包含在 $\mathrm{T}^k\mathrm{R}$ 中。由此可得：

命题 8.5。 若$v\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$且$w\in\mathbb{M}$满足$d^{\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}\,\mathrm{v},w)<\infty$，并且$v\in T^kR$，其中$R$是 (8.7) 中的某个区域，那么$w\in T^kR$，或者$R$ 等于L° 或A° 且$w\in\partial\mathbb{M}$。

证明。 这意味着存在 $\epsilon>0$，使得$v\preceq(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon w$ 且$w\preceq(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon v$，因此 $(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon w\in[v,(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}v]$。由于我们已假设$v\notin\partial\mathbb{M}$，若$R$既不是$L^\circ$，也不是$A^\circ$，那么命题之前的说明便意味着 $(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon w\in T^kR$，进而也有$w\in T^kR$。

若改为 $\mathrm{v}\in\mathrm{T}\,\mathrm{k}\,\mathrm{L}^\circ$，则区间 $[\mathrm{v},(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}]$（它是 $\mathbb{M}$ 与一个轴对齐矩形的交集，该矩形的相对角为 v 和 $(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}$，且两者均位于 $\mathrm{T}\,\mathrm{k}\,\mathrm{L}^\circ$ 中）包含于 $\mathrm{T}^k\mathrm{L}^\circ\cup\partial\mathbb{M}$，因此 $(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon$ w，进而 w 也位于 $\mathrm{T}\,\mathrm{k}\,\mathrm{L}^\circ\cup\partial\mathbb{M}$ 中。类似地，若 $\mathrm{v}\in\mathrm{T}\,\mathrm{kA}^\circ$，则 $[\mathrm{v},(\mathscr{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}]\subset\mathrm{T}\,\mathrm{kA}^\circ\cup\partial\mathbb{M}$，由此可得 $\mathrm{w}\in\mathrm{T}\,\mathrm{kA}^\circ\cup\partial\mathbb{M}$。□

对于瓶颈距离 $d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}B}$，$\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}$ 理解 $d^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}$ 如何度量 $\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$ 中一点到边界 $\partial\mathbb{M}$ 的距离尤为重要。以下判据很有帮助。

命题 8.6。设 $v\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$ 且 $0<\epsilon<\infty$。那么存在 $w\in\partial\mathbb{M}$，使得$d^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(v,\ w)<\epsilon$ 当且仅当我们有 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}v\not\preceq Tv$。

证明。若 v 属于 (8.7) 中除 L°、A° 和 $\mathfrak{D}\cap\partial\mathbb{M}$ 以外任一区域 R 的 $\mathrm{T}^k\mathrm{R}$，则命题 8.5 表明，对于所有 $\mathrm{w}\in\partial\mathbb{M}$，都有 $\mathrm{d}^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(\mathrm{v},\mathrm{w})=\infty$，因此在这种情形下，当前命题等价于如下陈述：对于所有（有限的）ϵ，$(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}\preceq\mathrm{T}\,\mathrm{v}$。但对于这些区域 R 中的每一个，都可以直接验证，$\mathrm{T}^k\mathrm{R}$ 中的每个元素都小于（按照 $\preceq$）$\mathrm{T}\,\mathrm{k}^{+1}\mathrm{R}$ 中的每个元素。因此，既然 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}\in\mathrm{T}\,\mathrm{kR}$ 且 $\mathrm{T}\,\mathrm{v}\in\mathrm{T}\,\mathrm{k}^{+1}\mathrm{R}$，结论便得证。

由于我们假设 $v\notin\partial\mathbb{M}$，因此只剩下这样的情形：$v\in T^kL^\circ$，以及这样的情形：$v\in T^kA^\circ$（对某个$k\in\mathbb{Z}$）。

假设 $\mathrm{v}=\mathrm{T}^k(\mathrm{x},\mathrm{y})$，其中 $(\mathrm{x},\mathrm{y})\in\mathrm{L}^\circ$，因此 $\mathrm{x}<-\Lambda$、$\mathrm{y}<\Lambda$，且 $\mathrm{x}+\mathrm{y}>-2\Lambda$。于是 $-\Lambda<-2\Lambda-\mathrm{x}<\mathrm{y}$。我们有 $\mathrm{T}\,\mathrm{v}=\mathrm{T}\,\mathrm{k}\ (-2\Lambda-\mathrm{y},\,2\Lambda-\mathrm{x})$，而 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}=\mathrm{T}\,\mathrm{k}\left(-2\Lambda-\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(-2\Lambda-\mathrm{x}),\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(\mathrm{y})\right)$。由于 $\mathrm{T}\,\mathrm{k}$ 保持 $\preceq$（即 $\mathrm{v}_1\preceq\mathrm{v}_2\iff\mathrm{T}\,\mathrm{k}\,\mathrm{v}_1\preceq\mathrm{T}\,\mathrm{k}\,\mathrm{v}_2$），且 $\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(\mathrm{y})<\Lambda<3\Lambda<2\Lambda-\mathrm{x}$，因此 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}(\mathrm{v})\not\preceq\mathrm{T}\,\mathrm{v}$ 这一条件等价于 $-2\Lambda-\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(-2\Lambda-\mathrm{x})<-2\Lambda-\mathrm{y}$，即 $\mathrm{y}<\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(-2\Lambda-\mathrm{x})$。如果存在 $\mathrm{w}\in\partial\mathbb{M}$，使得 $\mathrm{d}^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(\mathrm{v},\mathrm{w})<\epsilon$，那么 $\mathrm{w}\in[\mathrm{v},(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}\mathrm{v}],$，而这包含于 $\mathrm{T}^k\mathrm{L}$ 中，因此 $\mathrm{w}\in\mathrm{T}\,\mathrm{k}\ (\mathrm{L}\cap\partial\mathbb{M})$，我们可以写作 $\mathrm{w}=\mathrm{T}\,\mathrm{k}\ (\mathrm{x}',-2\Lambda-\mathrm{x}')$，其中 $-3\Lambda<\mathrm{x}'\leq-\Lambda$。此外，对于某个 $\epsilon'<\epsilon$，我们将有 $\mathrm{v}\preceq(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'}\mathrm{w}$ 且 $\mathrm{w}\preceq(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'}\mathrm{v}$；前一个不等式意味着

$$y<\rho^{\varphi}_{\epsilon}(-2\Lambda-x')$$

而后者意味着 $x'>-2\Lambda-\rho^{\varphi}_{\epsilon}(-2\Lambda-x)$，即 $-2\Lambda-x'<\rho_{\epsilon}(-2\Lambda-x)$，从而意味着

$$\rho^{\varphi}_{\epsilon}(-2\Lambda-x')<\rho_{2\epsilon}(-2\Lambda-x).$$

因此，如果 $v=T^k(x,\ y)$ 其中 $(x,\ y)\in L$，并且存在 $w\in\partial\mathbb{M}$，满足 $d^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(v,\ w)<\epsilon$，我们便可推出 $y<\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(-2\Lambda-x)$。如前所述，当 $v\in T^kL^\circ$ 时，这等价于以下陈述：$(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}(v)\not\preceq Tv$。

反之，假设 $\mathrm{v}=\mathrm{T}^k(\mathrm{x},\ \mathrm{y})$ 满足 $(\mathrm{x},\ \mathrm{y})\in\mathrm{L}^\circ$，且有 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{2\epsilon}(\mathrm{v})\not\preceq\mathrm{T}\,\mathrm{v}$。于是$-2\Lambda-\mathrm{x}<\mathrm{y}<\rho^{\varphi}_{2\epsilon}(-2\Lambda-\mathrm{x})$，因此对于某个 δ，满足 $0<\delta<\epsilon$，有 $\mathrm{y}=\rho^{\varphi}_{2\delta}(-2\Lambda-\mathrm{x})$。令 $\mathrm{y}'=\rho^{\varphi}_{\delta}(-2\Lambda-\mathrm{x})=\rho^{\varphi}_{-\delta}(\mathrm{y})$，并令 $\mathrm{x}'=-2\Lambda-\mathrm{y}'$，于是 $-2\Lambda-\mathrm{x}'=\rho^{\varphi}_{\delta}(-2\Lambda-\mathrm{x})$。

由此可得

$$(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\delta}(T^k(x',y'))=T^k\left(-2\Lambda-\rho^{\varphi}_{2\delta}(-2\Lambda-x),y\right)\succeq T^k(x,y)=v$$

and

$$(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\delta}(v)=(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\delta}(T^k(x,y))=T^k(x',\rho^{\varphi}_{2\delta}(y'))\succeq T^k(x',y').$$

因此，令$w=T^k(x',\ y')$，我们有$w\in\partial\mathbb{M}$满足$d^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(v,\ w)\leq\delta<\epsilon$。

这就完成了所需等价性的证明，适用于$v \in T^k L^\circ$的情形。唯一剩下的情形是$v \in T^k A^\circ$；这与刚才分析的情形互为镜像，留给读者完成。□

8.3. **逆稳定性**。 持久同调中的稳定性定理通常表达持久图相对于其几何或代数输入的连续性。在代数情形下，我们通常还可以证明一个反向不等式，参见例如, [BL15，第 8] 节。在我们的情形中，有：

命题 8.7。 设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 是可容许的 Λ-有界滤过余跨，其持久图分别为 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ 和 $\mathscr{D}(\mathscr{X})$。则

$$d_{\mathrm{int}}^{\mathscr{T}^\varphi}(\mathscr{X},\mathscr{C}) \le d_{B,\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^\varphi}^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C})).$$

证明。 假设 $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ 与 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$之间存在一个 ϵ-匹配，其中 $0<\epsilon<\infty$。在$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$中模同构后，我们便有 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 分解为标准初等直和项：

$$\mathscr{C} = \left(\bigoplus_{i\in I}\mathscr{C}_i\right)\oplus\left(\bigoplus_{j\in J_1}\mathscr{C}'_j\right), \qquad \mathscr{X} = \left(\bigoplus_{i\in I}\mathscr{X}_i\right)\oplus\left(\bigoplus_{j\in J_2}\mathscr{X}'_j\right)$$

其中：

- 对于每个 $\mathrm{i}\in\mathrm{I}$，$\mathrm{H0}\circ\mathscr{F}(\mathscr{C}\mathrm{i})\cong\mathrm{Bci}$ 和 $\mathrm{H0}\circ\mathscr{F}(\mathscr{X}\mathrm{i})\cong\mathrm{Bxi}$，其中 $\mathrm{ci}、\mathrm{xi}\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$满足 $\mathrm{d}^{\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^\varphi}\mathrm{int}(\mathrm{ci},\mathrm{xi})\le\epsilon$。（这里的块模 Bci、Bxi 按照（6.19）定义。）
- 每个 $H0\circ\mathscr{F}(\mathscr{C}\prime j)$ 以及每个 $H0\circ\mathscr{F}(\mathscr{X}\prime j)$ 都同构于某个块模 B_{yj}，并且对于某个 $z_j\in\partial\mathbb{M}$，有 $d^{\mathscr{T}_{\mathbb{M}}^\varphi}\mathrm{int}(y_j、z_j)\le\epsilon$。

标准初等直和项 $\mathscr{C}_i,\mathscr{X}_i,\mathscr{C}\prime j$、$\mathscr{X}\prime j$ 可以通过命题 6.8 中的表，根据相应的c_i、x_i、y_j和z_j 直接读出。

我们希望证明 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{C}$之间存在一个 ϵ-交错。由于函子$\mathscr{T}_\epsilon\colon \mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)\to\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$是可加的，$\epsilon$-交错的直和也是一个 ϵ-交错，因此只需证明 $\mathscr{C}'j$ 和 $\mathscr{X}\prime j$ 各自与$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$的零对象（具有 $C\uparrow_*=C_*^\downarrow=D_*=\{0\}$） ϵ-交错，并且每个 $\mathscr{X}_i$ 都与 $\mathscr{C}_i$ ϵ-交错。

首先，令 $\mathscr{Y}$为任意一个 $\mathscr{C}\prime j$或 $\mathscr{X}\prime j$，其中 $H0\circ\mathscr{F}(\mathscr{Y})\cong B_{y\ j}$，且 $d^{\mathscr{T}_\epsilon^\varphi}\ \mathrm{int}(y_j,\ z_j)\le\epsilon$，对某个$z_j\in\partial\mathbb{M}$成立。为证明 $\mathscr{Y}$与零对象 ϵ-交错，只需证明自然变换 $\mathscr{T}_{(0\le2\epsilon)}$ 在 $\mathscr{Y}$上的作用是零映射 $\mathscr{Y}\to\mathscr{T}_{2\epsilon}^\varphi\mathscr{Y}$；这样，从零对象出发及到零对象的唯一映射便会给出一个 ϵ-交错。

命题 8.5 意味着，对于某个 k，要么 $\mathrm{y}_j\in\mathrm{T}^k\mathrm{L}^\circ$，要么 $\mathrm{y}_j\in\mathrm{T}^k\mathrm{A}^\circ$。这两种情形类似；不妨假设 $\mathrm{y}_j\in\mathrm{T}\,k\mathrm{A}^\circ$，于是 $\mathrm{y}_j=\mathrm{T}^k(\mathrm{b},\,2\Lambda-\mathrm{a})$，其中 $\Lambda>\mathrm{a}\ >\mathrm{b}\ >-\Lambda$。根据命题 6.8，$\mathscr{Y}$必定是 $(\downarrow^a\mathrm{b})_{-k-1}$。我们有 $\mathrm{T}(\mathrm{b},\,2\Lambda-\mathrm{a})=(-4\Lambda+\mathrm{a},\,2\Lambda-\mathrm{b})$，并且对任意 $\delta>0$，$(\mathscr{T}_{\mathscr{M}}^\varphi)_\delta(\mathrm{b},\,2\Lambda-\mathrm{a})=(\rho_{-\delta}^\varphi(\mathrm{b}),2\Lambda-\rho_{-\delta}^\varphi(\mathrm{a}))$，所以，若存在一个点距 y_j 不超过 ϵ 的 $\partial\mathbb{M}$，则由命题 8.6 可知，对所有 $\delta>2\epsilon$，$2\Lambda-\rho_{-\delta}^\varphi(\mathrm{a})>2\Lambda-\mathrm{b}$，因此

$$a\le\rho_{2\epsilon}^\varphi(b).$$

现在，$\mathscr{T}^{\varphi}_{(0\le 2\epsilon),(\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}}$ 是 $\mathrm{HCO}^{\wedge}_{\kappa}$ 中元素 $\mathrm{I} \in \mathrm{Hom}^0\,\mathrm{CO}^{\wedge(\kappa)}\big((\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}, \mathscr{T}^{\varphi}_{2\epsilon}(\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}\big)$ 的上同调类；该元素由 $(\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}$ 的底层链复形上的恒等映射给出，其唯一非平凡的连通分支是初等下降链复形 $(\mathscr{E}_{-k-1}(\mathrm{a},\mathrm{b})^{\downarrow})$ 的底层链复形上的恒等映射。这个恒等映射与映射 $\mathrm{K}^{\downarrow}$ 同伦于 0；K 将次数为 $-\mathrm{k}-1$（过滤层级为 a）的生成元映到次数为 $-\mathrm{k}$（过滤层级为 b）的生成元。由于 $\mathrm{a} \le \rho^{\varphi}_{2\epsilon}(\mathrm{b})$，$(-\mathrm{K}^{\downarrow}, 0, 0, 0, 0)$ 可良定义为 $\mathrm{Hom}^{-1}\mathrm{CO}^{\wedge(\kappa)}\big((\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}, \mathscr{T}^{\varphi}_{2\epsilon}(\downarrow^a \mathrm{b})_{-k-1}\big)$ 的元素；显然，根据式 (2.4) 的定义，该元素的微分等于 I。因此，I 的上同调类为零。

因此，$\mathscr{T}^{\varphi}_{(0\le 2\epsilon),\mathscr{Y}} = 0$ 在 $\mathscr{Y}$ 为 $\mathscr{C}\prime_j$ 或 $\mathscr{X}\prime_j$ 且 $y_j \in T^k A^{\circ}$ 的情形下成立。类似地，在 $y_j \in T^k L^{\circ}$ 的情形下，可以发现 $\mathscr{Y} = (\uparrow^b a)_{-k-1}$ 且 $\rho^{\varphi}_{-2\epsilon}(b) \le a$，这再次意味着 $\mathscr{T}^{\varphi}_{(0\le 2\epsilon),\mathscr{Y}} = 0$。因此，直和项 $\mathscr{C}'_j$ 和 $\mathscr{X}\prime_j$ 分别与 $\mathrm{HCO}^{\wedge}(\kappa)$ 中的零对象 ϵ-交错。

现在我们转而讨论直和项 $\mathscr{C}_i$ 和 $\mathscr{X}_i$，其中 $\mathrm{H}_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{C}_i) \cong \mathrm{B}^{c_i}$ 且 $\mathrm{H}_0 \circ \mathscr{F}(\mathscr{X}_i) \cong \mathrm{B}^{x_i}$，其中 $\mathrm{c}_i, \mathrm{x}_i \in \mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$ 且 $\mathrm{d}^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}\,(\mathrm{c}_i, \mathrm{x}_i) \le \epsilon$。固定指标 $\mathrm{i} \in \mathrm{I}$。根据命题 8.5，元素 c_i 和 x_i 都属于同一个 $\mathrm{T}^k\mathrm{R}$，其中 R 是 (8.7) 中八个区域之一：S°、L°、A°、$(-\Lambda, \Lambda) \times \{-\Lambda\}$、$(-\Lambda, \Lambda) \times \{\Lambda\}$、$\{-\Lambda\} \times (-\Lambda, \Lambda)$、$\{\Lambda\} \times (-\Lambda, \Lambda)$或$\{(\Lambda, -\Lambda)\}$；它们分别对应命题 6.8 中表格里的八条直线。特别是，$\mathscr{C}_i$ 和 $\mathscr{X}_i$ 的底层链复形彼此相等，尽管滤过不同。利用命题 6.8 和 (8.5)，容易看出，在这八种情形下，$\mathrm{d}^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}\mathrm{int}\,(\mathrm{c}_i, \mathrm{x}_i) \le \epsilon$这一事实，即 $\mathrm{c}_i \preceq (\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon}\mathrm{x}_i$且 $\mathrm{x}_i \preceq (\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon}\mathrm{c}_i$，都意味着底层链复形上的恒等映射保持滤过，从而在 $\mathrm{HCO}^{\wedge}(\kappa)$ 中分别得到从 $\mathscr{C}_i$ 到 $\mathscr{T}^{\varphi}_{\epsilon}\mathscr{X}_i$ 以及从 $\mathscr{X}_i$ 到 $\mathscr{T}^{\varphi}_{\epsilon}\mathscr{C}_i$的良定义态射。由于自然变换 $\mathscr{T}_{(0\le 2\epsilon)}$ 也由底层链复形上的恒等映射给出，因此这就在 $\mathscr{C}_i$ 和 $\mathscr{X}_i$之间建立了一个 ϵ-交错。

将标准初等直和项之间的这些 ϵ-交错结合起来，我们得出：ϵ-匹配 $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ 与 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ 意味着 $\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{C}$之间存在 ϵ-交错，由此命题立即成立。□

8.4. **相对层间集同调的局部稳定性**。回顾一下，按照 [BBF24],[BBF21] 的定义（系数取自域 κ），相对层间集同调的输出是一个函子 $\mathbb{M} \to \mathrm{Vect}_{\kappa}$，它在 $\partial\mathbb{M}$ 上消失，并且在 [BBF21，定义 C.3] 的意义下是同调的 。当这样的函子 F 序列连续时（[BBF21，定义 2.4]），[BBF21，定理 3.21] 断言，F 可分解为块模 B^v 的直和（见 (6.19)），其中每个 $v \in \mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$；我们将持久图 $\mathscr{D}(F)$ 定义为该分解中出现的 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$ 元素构成的多重集。随后可以比较这类函子及其对应持久图之间的交错距离与瓶颈距离。虽然我们没有在此背景下证明完整的稳定性结果，但确实证明了以下局部结论。

命题 8.8. 设 $F \in \mathrm{Vect}^{\mathbb{M}}_{\kappa}$ 是一个在 $\partial\mathbb{M}$ 上消失的序列连续同调函子，其持久图 $\mathscr{D}(F)$ 仅对 $\mathbb{M} \setminus \partial\mathbb{M}$中的有限多个点赋予非零重数。那么存在 $\delta_F > 0$，使得对于任意序列连续的

同调函子$G\colon \mathbb{M}\to \mathsf{Vect}_\kappa$，它在$\partial\mathbb{M}$上消失且满足$d_{\mathcal{T}^\varphi \mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}}\mathrm{int}(G,F)<\delta_F$，我们有

$$d_{B,\mathcal{T}^\varphi_{\mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}}}^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}(\mathscr{D}(G),\mathscr{D}(F))\le d_{\mathrm{int}}^{\mathcal{T}^\varphi_{\mathsf{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}}}(G,F).$$

证明。我们首先指出，定义映射$(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon$的公式：$\mathbb{M}\to\mathbb{M}$由（8.5）给出，对于所有$\epsilon\in\mathbb{R}$都是有意义的，而不仅仅是$\epsilon\in[0,\infty)$；下文中我们将对所有$\epsilon\in\mathbb{R}$使用这些映射$(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\epsilon$。

回顾一下，$\mathbb{M}$上的偏序定义为：$(s、t)\preceq(s',t')$当且仅当$s\ge s'$且$t\le t'$。我们引入记号$(s、t)\ll(s'、t')$，表示这样一个更强的条件：$s>s'$且$t<t'$。

在此基础上，对于$v\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$，式（6.19）中的块模$B^v$具有如下性质：对于$w\preceq w'$，有

$$\mathrm{rank}(B^v(w)\to B^v(w'))=\begin{cases}1 & \text{if } v\preceq w\preceq w'\ll T(v)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}. \tag{8.8}$$

对于任意函子$G\colon \mathbb{M}\to\mathsf{Vect}_\kappa$，以及任意$w\in\mathbb{M}$，$G$的结构映射使$\{G(v)|v\ll w\}$成为一个有向系统。因此我们定义

$$\underline{G}(w)=\varinjlim_{v\ll w}G(v).$$

因此，只要$v\ll w$，我们就有一个典范映射$\underline{G}(v)\to G(w)$。在特殊情形$G=B^v$下，对于$w\ll w'$，(8.8)给出

$$\mathrm{rank}(B^v(w)\to \underline{B}^v(w'))=\begin{cases}1 & \text{if } v\preceq w\ll w'\preceq T(v)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}. \tag{8.9}$$

给定$w\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$和一个正数$\delta$，使得$(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\delta}w\ll Tw$，再给定任意函子$G\colon \mathbb{M}\to\mathsf{Vect}_\kappa$，它在$\partial\mathbb{M}$上取零，令

$$n_\delta(w,G)=\mathrm{rank}\left(G\left((\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\delta w\right)\to\underline{G}\left((\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{-\delta}Tw\right)\right).$$

（关于δ的条件，根据命题8.6，只要$\inf\{d^{\mathcal{T}_{\mathbb{M}^\varphi}}\mathrm{int}(w,w')|w'\in\partial\mathbb{M}\}>\delta$成立就会满足；该条件确保映射$G\left((\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\delta w\right)\to G\left((\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{-\delta}Tw\right)$定义良好。）

假设G可分解为块模的直和$G=\oplus_{i\in I}B^{w_i}$，由(8.9)可知（继续假设$(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{2\delta}w\ll Tw$）

$$\begin{aligned}n_\delta(w,G)&=\#\{i\in I|w_i\preceq(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\delta w\ll(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_{-\delta}Tw\preceq Tw_i\}\\&=\#\{i\in I|w_i\preceq(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\delta w\text{ and }w\preceq(\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}})_\delta w_i\}\\&=\#\left\{i\in I\,\middle|\,d_{\mathrm{int}}^{\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}(w,w_i)\le\delta\right\}\end{aligned} \tag{8.10}$$

设F满足命题的假设，并取$\delta_F>0$足够小，使得在$\mathscr{D}(F)$中以非零重数出现的每个点，与$\partial\mathbb{M}$之间的距离（按$d^{\mathcal{T}^\varphi_{\mathbb{M}}}$ int度量）大于$2\delta_F$；同时，$\mathscr{D}(F)$中以非零重数出现的任意两个不同点之间的距离也大于$2\delta_F$。对于任意$v\in\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$，令$m(v,F)$表示$F$的持久图中$v$的重数。那么

根据命题 8.6，持久图中出现的每个v都满足 $(\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{4\delta_F} v \preceq Tv$，因此，对于任意 $\delta < 2\delta_F$ 以及任意函子$G\colon \mathbb{M} \to \mathrm{Vect}_\kappa$，$n_\delta(v, G)$均有定义，而 (8.10) 表明

$$m(v,F) = n_\delta(v,F) \text{ whenever } m(v,F) \neq 0 \text{ and } 0 < \delta < 2\delta_F.$$

现在假设 G（如命题假设中所述）具有 $d_{\mathrm{Vect}_\kappa^{\mathbb{M}}}^{\mathscr{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(G, F) < \delta_F$，因此对于某个 $\epsilon < \delta_F$，F 与G 之间存在 ϵ-交错。对于任意满足$\epsilon < \epsilon' < \delta_F$的 ϵ'，以及在 $\mathscr{D}(F)$ 中以非零重数出现的任意v，此 ϵ-交错会导出分解

$$F((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'-\epsilon} v) \to G((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'} v) \to \underline{G}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{-\epsilon'} Tv) \to \underline{F}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon-\epsilon'} Tv)$$

and

$$G((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'} v) \to F((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'+\epsilon} v) \to \underline{F}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{-\epsilon'-\epsilon} Tv) \to \underline{G}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{-\epsilon'} Tv),$$

由此可共同推出

$$n_{\epsilon'-\epsilon}(v,F) \leq n_{\epsilon'}(v,G) \leq n_{\epsilon'+\epsilon}(v,F)$$

只要 $m(v, F) \neq 0$, $\epsilon < \epsilon' < \delta$，且$F$ 与G 是 ϵ-交错的。但在这种情况下$n_{\epsilon'-\epsilon}(v, F) = n_{\epsilon'+\epsilon}(v, F) = m(v, F)$。因此，将$G$ 分解为$G = \oplus_{i\in I} B^{w_i}$，由 (8.10) 可知，若$G$ 与F 是 ϵ-交错的且 $\epsilon < \epsilon' < \delta_F$,

$$\#\left\{ i \in I \,\middle|\, d_{\mathrm{int}}^{\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(v, w_i) \leq \epsilon' \right\} = m(v,F) \text{ whenever } m(v,F) \neq 0.$$

同时，如果点 $w \in \mathbb{M}$ 与 $\partial\mathbb{M}$ 的所有点以及 $\mathscr{D}(F)$ 中所有具有非零重数的点之间的距离都大于 ϵ'，那么该 ϵ-交错会导出一个分解

$$G((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'-\epsilon} w) \to F((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon'} w) \to \underline{F}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{-\epsilon'} Tw) \to \underline{G}((\mathscr{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}})_{\epsilon-\epsilon'} Tv)$$

其中，根据 (8.10)，中间映射为零；这表明 $n_{\epsilon'-\epsilon}(w,G) = 0$，因此 w 不会出现在 G 的持久图中。

我们得出结论：当 F 和 G 是 ϵ-交错的且 $\epsilon < \epsilon' < \delta_F$ 时，$\mathscr{D}(\mathrm{G})$ 中恰有 $\mathrm{m}(\mathrm{v}, \mathrm{F})$ 个点（按重数计）位于距任意满足 $\mathrm{m}(\mathrm{v}, \mathrm{F}) \neq 0$ 的点 v 不超过 ϵ' 的范围内；而 $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ 中任何与 $\mathscr{D}(\mathrm{F})$ 的所有点的距离都不在 ϵ' 以内的点，必定距某个 $\partial\mathbb{M}$ 不超过 ϵ'。我们的假设是，$\mathscr{D}(\mathrm{F})$ 中不同点彼此间的距离大于 $2\delta_F$，这意味着 $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ 中的一个点不可能同时距 $\mathscr{D}(\mathrm{F})$ 中两个不同的点都在 ϵ' 以内；而假设 $\mathscr{D}(\mathrm{F})$ 中的点距 $\partial\mathbb{M}$ 都大于 $2\delta_F$，则意味着 $\mathscr{D}(\mathrm{G})$ 中的一个点不可能同时距 $\mathscr{D}(\mathrm{F})$ 中的一个点和 $\partial\mathbb{M}$ 都在 ϵ' 以内。

因此，通过将 $\mathscr{D}(G)$ 中不在 ϵ' 内任何 $\partial\mathbb{M}$ 点附近的每个点 w，对应到 $\mathscr{D}(F)$ 中距离 w 不超过 ϵ' 的唯一点 v（即 $\mathscr{D}(\mathscr{G})$与 $\mathscr{D}(F)$之间的 ϵ'-匹配中，每个点对应的 $\partial\mathbb{M}$ 中的一点），我们便得到了相对于 $\partial\mathbb{M}$的 ϵ'-匹配。

由此我们证明了：如果 $0 < \epsilon < \delta_F$，且 F 与G 之间存在 ϵ-交错，那么对于所有 $\epsilon' > \epsilon$，$\mathscr{D}(G)$ 与 $\mathscr{D}(F)$ 之间都存在相对于 $\partial\mathbb{M}$的 ϵ'-匹配。取 ϵ' 任意接近于 ϵ，即可得到该命题。□

这便迅速得出了以下关于滤过余跨的局部稳定性结果，稍后我们将借此证明完整的稳定性结果。

推论 8.9. 设 $\mathscr{C}$ 是一个可容许过滤余跨图，且持久图$\mathscr{D}(\mathscr{C})$仅对有限多个点赋予非零重数 $\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$。那么存在$\delta_{\mathscr{C}}>0$，使得对于任意其他可容许过滤余跨图 $\mathscr{X}$，只要 $d^{\mathcal{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})<\delta_{\mathscr{C}}$，就有

$$d_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C}))\leq d_{\mathrm{int}}^{\mathcal{T}^{\varphi}}(\mathscr{X},\mathscr{C}).$$

证明。回顾一下，根据定义，$\mathscr{D}(\mathscr{C})=\mathscr{D}(H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{C}))$，同理，$\mathscr{D}(\mathscr{X})=\mathscr{D}(H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{X}))$。鉴于命题 8.3 以及函子$H_0\colon \mathsf{K}(\kappa)^{\mathbb{M}}\to\mathsf{Vect}_{\kappa}^{\mathbb{M}}$的显然类似结论，$\epsilon$与 $\mathscr{C}$之间的交错经由$H_0\circ\mathscr{F}$映射为一个 ϵ-$H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{C})$与$H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{X})$之间的交错。因此$d_{\mathbb{M}}^{\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathsf{Vect}^{\kappa}}}\mathrm{int}(H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{X}),H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{C}))\leq d^{\mathcal{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})$(参见 [dSMS18，定理 4.3])。由命题 8.8 取 $\delta_{\mathscr{C}}=\delta_{H_0\circ\mathscr{F}(\mathscr{C})}$，推论便显而易见。□

8.5. **稳定性定理**。称一个 a Λ-有界滤过余跨 $\mathscr{C}=\left((C\uparrow_*,\partial_C\uparrow,\ell^C_{\uparrow}),(C^{\downarrow}_*,\partial^{\downarrow}{}_C,\ell^{\downarrow}{}_C),(D_*,\partial_D),\psi_{\uparrow},\psi^{\downarrow}\right)$是有限生成的，如果链复形$C\uparrow_*$、$C^{\downarrow}_*$、$D_*$各自都是有限生成的 κ-向量空间；如果 $\mathscr{C}$ 在$\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$中同构于一个有限生成的滤过余跨，则称 $\mathscr{C}$为有限型。这意味着持久图 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$定义良好，它是$\mathbb{M}\setminus\partial\mathbb{M}$中元素构成的有限多重集。

以下是我们的主要稳定性定理:

定理 8.10。设 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 是两个 Λ-有界且为有限型的滤过余跨。则 $d^{\mathbb{M}}_{\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}},{}^{\partial\mathbb{M}B},(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C}))\leq d^{\mathcal{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})$。

推论 8.11. 在例 1.7 的背景下，设f、$g\colon \mathbb{X}\to[-\Lambda,\Lambda]$满足$f^{-1}(\{\pm\Lambda\})=g^{-1}(\{\pm\Lambda\})=\partial^{\pm}\mathbb{X}$，且带钉奇异过滤余跨 $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},f;\kappa)$和 $\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},g;\kappa)$均为有限型。那么

$$d_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}(\mathscr{D}(\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},f;\kappa)),\mathscr{D}(\mathscr{S}_{\partial}(\mathbb{X},g;\kappa)))\leq\sup_{\mathbb{X}\setminus\partial\mathbb{X}}\left|\varphi^{-1}\circ f-\varphi^{-1}\circ g\right|.$$

例如，若f、g是紧致流形上的莫尔斯函数，或有限单纯复形上的逐单形线性函数，则有限型条件成立。

证明 *of* 推论 *8.11.* 这由定理 8.10 和例 8.2 立即得出 . □

定理 8.10 的证明主要基于局部结果推论 8.9 以及即将给出的**插值引理**。这遵循了持久同调中证明稳定性结果的一种常用策略，即将局部稳定性定理与适当插值的存在性相结合，参见例如，[CEH07，第 3 节。3], [CdSGO16，第 5 节。6],[UZ16，第 9] 节。我们的具体方法改编自 [UZ16], 中的一个论证，并在命题 8.4 的帮助下作了补充。[14] 回顾定义 8.1，将 ϵ- 植入定义为 ϵ- 交错的一种较弱且非对称的版本。

[14]事实上，通过像下文那样使用命题 8.4，可以将稳定性结果[UZ16，定理 1.4(i)] 加强为等距定理，从而去掉其中出现的因子 2。

引理 8.12（插值引理）：设 $\epsilon > 0$，令 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$ 为 Λ-有界的滤过余跨，并假设在 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中存在从 $\mathscr{C}$ 到 $\mathscr{X}$的 ϵ-植入。那么存在一个单参数族$\{\mathscr{Y}_t\}_{t\in[0,1]}$ 有限型 Λ-有界滤过余跨，使得：

> (i) 对任意 s、$t \in [0,1]$ 满足 $s \leq t$ 的情形，$\mathscr{Y}_s$ 和 $\mathscr{Y}_t$ 是 $\epsilon(t-s)$-交错的；(ii) $\mathscr{Y}_0$ 在 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中与 $\mathscr{X}$同构；且 (iii) 对某个有限型 Λ-有界滤过余跨 $\mathscr{B}$，$\mathscr{Y}_1$ 在 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$中与 $\mathscr{B}\oplus\mathscr{C}$同构。

定理 8.10 的证明（假设引理 8.12）。给定定理陈述中的 $\mathscr{C}$、$\mathscr{X}$，对于任意接近 $d^{\mathcal{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})$ 的 ϵ，$\mathscr{C}$ 与 $\mathscr{X}$ 之间存在一个 ϵ-交错。这个 ϵ-交错既可解释为将 $\mathscr{C}$ 嵌入 $\mathscr{X}$ 的 ϵ-植入，也可解释为将 $\mathscr{X}$嵌入 $\mathscr{C}$ 的ϵ-植入。先将其视为将 $\mathscr{C}$嵌入 $\mathscr{X}$ 的 ϵ-植入，令 $\mathscr{Y}_t$ 为引理 8.12 所给出的对象。对 $t \in [0,1]$，记 δ_t 为推论 8.9 中用 $\delta_{\mathscr{Y}_t}$ 表示的数。通过从覆盖 $\{(t-\delta_t, t+\delta_t)\}_{t\in[[0,1]}$ 中取有限子覆盖，我们找到数 $t_0,\ldots,t_m$，满足 $0=t_0<\cdots<t_i<t_{i+1}<\cdots<t_m=1$，使得 $\epsilon(t_{i+1}-t_i)<\delta_{t_i}$。因此，由于 $\mathscr{Y}_{t_i}$ 和 $\mathscr{Y}_{t_{i+1}}$ 是 $\epsilon(t_{i+1}-t_i)$-交错的，推论 8.9 表明，对于 $i=0,\ldots,m-1$，$d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}B}_{\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{Y}_{i+1}),\mathscr{D}(\mathscr{Y}_i))\leq\epsilon(t_{i+1}-t_i)$。于是，根据瓶颈距离的三角不等式，$d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}B}_{\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{Y}_1),\mathscr{D}(\mathscr{Y}_0))\leq\epsilon$，即，

$$d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{B}\oplus\mathscr{C}),\mathscr{D}(\mathscr{X}))\leq\epsilon,$$

其中，$\mathscr{B}$ 与引理 8.12(iii)中所述相同。现在，$\mathscr{B}\oplus\mathscr{C}$ 的持久图是不相交并集，其组成部分分别是 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{B}$的持久图，因此，相对于$\partial\mathbb{M}$，$\mathscr{D}(\mathscr{B}\oplus\mathscr{C})$ 与 $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ 之间的 ϵ-匹配限制为相对于 $\partial\mathbb{M}$将 $\mathscr{D}(\mathscr{C})$ ϵ-嵌入到 $\mathscr{D}(\mathscr{X})$ 中的映射。于是，按照第 8.2.2 节中的记号，$\delta^{M}_{\partial\mathbb{M}B,\mathcal{T}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{C}),\mathscr{D}(\mathscr{X}))\leq\epsilon$。

但是，由于我们的 ϵ-交错也构成了将 $\mathscr{X}$ 植入 $\mathscr{C}$的 ϵ-植入，我们可以在上述论证中交换 $\mathscr{C}$和 $\mathscr{X}$的角色，从而同样得到 $\delta^{\mathbb{M}}_{\partial\mathbb{M}B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C}))\leq\epsilon$。
由于 ϵ 与 $d^{\mathcal{T}^{\varphi}}\mathrm{int}(\mathscr{X},\mathscr{C})$ 任意接近，因此由命题 8.4 可得

$$d^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C}))=\max\left\{\delta^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{X}),\mathscr{D}(\mathscr{C})),\delta^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{C}),\mathscr{D}(\mathscr{X}))\right\}\leq d^{\mathcal{T}^{\varphi}}_{\mathrm{int}}(\mathscr{X},\mathscr{C}).$$

□

备注 8.13。若忽略上述证明的最后一段，那么它也可作为如下结论的证明：对于有限型 Λ-有界滤过余跨 $\mathscr{C}$ 和 $\mathscr{X}$，

$$\delta^{\mathbb{M},\partial\mathbb{M}}_{B,\mathcal{T}^{\varphi}_{\mathbb{M}}}(\mathscr{D}(\mathscr{C}),\mathscr{D}(\mathscr{X}))\leq\delta^{\mathcal{T}^{\varphi}}_{\mathrm{int}}(\mathscr{C},\mathscr{X}):=\inf\{\epsilon|\exists\text{ an }\epsilon\text{-implantation of }\mathscr{C}\text{ into }\mathscr{X}\}.$$

因此，粗略来说，如果 $\mathscr{C}$ 近似为 $\mathscr{X}$ 的一个收缩，那么 $\mathscr{C}$ 的持久图近似为 $\mathscr{X}$ 的一个子集。

本小节余下内容将用于证明引理 8.12。令 $\mathscr{C}=\left((C^{\uparrow},*,\partial C^{\uparrow},\ell^{C}_{\uparrow}),(C^{\downarrow}_{*},\partial^{\downarrow}C,\ell^{\downarrow}C),(D_{*},\partial_D),\psi_{\uparrow},\psi^{\downarrow}\right)$和 $\mathscr{X}=\left((X^{\uparrow},*,\partial X^{\uparrow},\ell^{X}_{\uparrow}),(X^{\downarrow}_{*},\partial^{\downarrow}X,\ell^{\downarrow}X),(Y_{*},\partial_Y),\phi_{\uparrow},\phi^{\downarrow}\right)$

允许将 $\mathscr{C}$ 嵌入 $\mathscr{X}$ 中的 ϵ-植入，且位于 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}_{\kappa}$ 中。因此存在态射

$$\mathfrak{a} = (\alpha^{\downarrow}, \alpha_{\uparrow}, \alpha, K^{\downarrow}, K_{\uparrow})\colon\ \mathscr{C} \to \mathscr{T}^{\epsilon}\mathscr{X}$$

and

$$\mathfrak{b} = (\beta^{\downarrow}, \beta_{\uparrow}, \beta, L^{\downarrow}, L_{\uparrow})\colon\ \mathscr{T}^{\epsilon}\mathscr{X} \to \mathscr{T}^{2\epsilon}\mathscr{C}$$

使得 $\mathfrak{b}\circ\mathfrak{a}$ 在 $\mathsf{HCO}^{\Lambda}(\kappa)$ 中等于映射 $(1_{C^{\downarrow}_{*}}, 1_{C_{\uparrow *}}, 1_{D_{*}}, 0, 0)\colon\ \mathscr{C} \to \mathscr{T}^{2\epsilon}\mathscr{C}$。因此，特别是链映射 $\alpha^{\downarrow}\colon : C^{\downarrow}_{*} \to X^{\downarrow}_{*}$, $\alpha_{\uparrow}\colon C_{\uparrow *} \to X_{\uparrow *}$, $\beta^{\downarrow}\colon X^{\downarrow}_{*} \to C^{\downarrow}_{*}$, and $\beta_{\uparrow}\colon X_{\uparrow *} \to C_{\uparrow *}$满足

$$\ell^{\downarrow}_{X}\circ\alpha^{\downarrow} \geq \rho^{\varphi}_{-\epsilon}\circ\ell^{\downarrow}_{C},\quad \ell^{X}_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow} \leq \rho^{\varphi}_{\epsilon}\circ\ell^{C}_{\uparrow},\quad \ell^{\downarrow}_{C}\circ\beta^{\downarrow} \geq \rho^{\varphi}_{-\epsilon}\circ\ell^{\downarrow}_{X},\quad \ell^{C}_{\uparrow}\circ\beta_{\uparrow} \leq \rho^{\varphi}_{\epsilon}\circ\ell^{X}_{\uparrow},$$

并且存在映射 $H^{\downarrow}\colon C^{\downarrow}_{*} \to C^{\downarrow}_{*+1}$, $H_{\uparrow}\colon C_{\uparrow *} \to C_{\uparrow *+1}$ 使得

$$1_{C^{\downarrow}_{*}} - \beta^{\downarrow}\alpha^{\downarrow} = \partial^{\downarrow}_{C}H^{\downarrow} + H^{\downarrow}\partial^{\downarrow}_{C},\quad 1_{C_{\uparrow *}} - \beta_{\uparrow}\alpha_{\uparrow} = \partial^{C}_{\uparrow}H_{\uparrow} + H_{\uparrow}\partial^{C}_{\uparrow},$$

and

$$\ell^{\downarrow}_{C}\circ H^{\downarrow} \geq \rho^{\varphi}_{-2\epsilon}\circ\ell^{\downarrow}_{C},\quad \ell^{C}_{\uparrow}\circ H_{\uparrow} \leq \rho^{\varphi}_{2\epsilon}\circ\ell^{C}_{\uparrow}.$$

我们将利用 $\alpha^{\downarrow}$ 和$\alpha_{\uparrow}$的**映射柱** 构造插值族 $\mathscr{Y}_{t}$。一般而言，若 $f\colon\ (A_{*}, \partial_{A}) \to (B_{*}, \partial_{B})$ 是两个链复形之间的链映射，则 f的映射柱定义为链复形 $(\mathrm{Cyl}(f)_{*}, \partial_{\mathrm{Cyl}})$，其中 $\mathrm{Cyl}(f)_{k} = A_{k-1} \oplus B_{k} \oplus A_{k+1}$，且 ∂_{Cyl} 相对于该直和分解以块形式给出如下：

$$\partial_{\mathrm{Cyl}} = \begin{pmatrix} -\partial_{A} & 0 & 0 \\ f & \partial_{B} & 0 \\ -1_{A} & 0 & \partial_{A} \end{pmatrix}.$$

因此，作为第二个和第三个直和项的包含映射 $j_{B}\colon B_{*} \to \mathrm{Cyl}(f)_{*}$和 $j_{A}\colon A_{*} \to \mathrm{Cyl}(f)_{*}$都是链映射。此外，映射

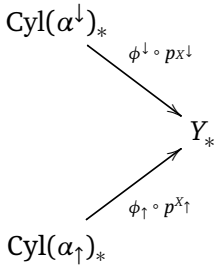
$$p_{B}\colon\ \mathrm{Cyl}(f)_{*} \to B_{*} \qquad p_{B}(a, b, c) = b + f(c) \tag{8.11}$$

是 j_{B} 的链同伦逆：显然有 $p_{B}j_{B} = 1_{B_{*}}$，而映射 $G\colon \mathrm{Cyl}(f)_{*} \to \mathrm{Cyl}(f)_{*+1}$ 定义如下：

$$G(a, b, c) = (-c, 0, 0) \text{ satisfies } 1_{B_{*}} - j_{B}p_{B} = \partial_{\mathrm{Cyl}}G + G\partial_{\mathrm{Cyl}}. \tag{8.12}$$

我们这一族中的每个成员 $\mathscr{Y}_{t}$ 都将以如下数据作为其底层链复形图表

(8.13)



鉴于此，为了完成 $\mathscr{Y}_{t}$ 的定义，我们需要定义递增和递减的滤过函数 $\ell^{t}_{\uparrow}\colon \mathrm{Cyl}(\alpha_{\uparrow})_{*} \to \mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ 以及 $\ell^{\downarrow t}\colon \mathrm{Cyl}(\alpha^{\downarrow})_{*} \to \mathbb{R}\cup\{\infty\}$，用于

$t \in [0,1]$。我们将这两个函数分别定义为把 0 映射到 $-\infty$ 和 ∞，并在 $\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_* \backslash \{0\}$ 和 $\mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_* \backslash \{0\}$ 上按如下方式作用（回想我们的递增同胚 $\varphi\colon [-\infty,\infty] \to [-\Lambda,\Lambda]$）（8.14）

$$\ell_\uparrow^t = \varphi \circ \Big((1-t)(\varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^0) + t(\varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^1)\Big), \qquad \ell_t^\downarrow = \varphi \circ \Big((1-t)(\varphi^{-1}\circ \ell_0^\downarrow) + t\varphi^{-1}\circ \ell_1^\downarrow\Big)$$

其中

$$\ell_\uparrow^0(a,b,c) = \max\left\{\rho_\epsilon(\ell_\uparrow^C(a)), \ell_\uparrow^X(b), \rho_\epsilon^\varphi(\ell_\uparrow^C(c))\right\}, \qquad \ell_\uparrow^1(a,b,c) = \max\left\{\rho_{2\epsilon}(\ell_\uparrow^C(a)), \rho_\epsilon(\ell_\uparrow^X(b)), \ell_\uparrow^C(c)\right\}$$

对于$a \in C\uparrow k-1$、$b \in X\uparrow k$、$c \in C\uparrow k$，情况也类似

$$\ell_0^\downarrow(\mathrm{a}、\mathrm{b}、\mathrm{c}) = \min\left\{\rho_{-\epsilon}(\ell^\downarrow \mathrm{C(a)}),\ \ell^\downarrow \mathrm{X(b)},\ \rho_{-\epsilon}^\varphi(\ell^\downarrow \mathrm{C(c)})\right\}, \qquad \ell_1^\downarrow(\mathrm{a}、\mathrm{b}、\mathrm{c}) = \min\left\{\rho_{-2\epsilon}(\ell^\downarrow \mathrm{C(a)}),\right.$$

$\left.\rho_{-\epsilon}(\ell^\downarrow \mathrm{X(b)}),\ \ell^\downarrow \mathrm{C(c)}\right\}$对于 $\mathrm{a} \in \mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k}-1$、$\mathrm{b} \in \mathrm{X}^\downarrow \mathrm{k}$、$\mathrm{c} \in \mathrm{C}^\downarrow \mathrm{k}$。

事实 $\ell_\uparrow^X \circ \alpha_\uparrow \le \rho_\epsilon^\varphi \circ \ell_\uparrow^C$ 和 $\ell^\downarrow{}_X \circ \alpha^\downarrow \ge \rho_{-\epsilon}^\varphi \circ \ell^\downarrow{}_C$ 表明，对于$i = 0 = 1$ 两种情况，我们都有 $\ell_\uparrow^i \circ \partial_{\mathrm{Cyl}} \le \ell_\uparrow^i$ 在 $\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)$ 上成立，且 $\ell^\downarrow{}_i \circ \partial_{\mathrm{Cyl}} \ge \ell^\downarrow{}_i$ 在 $\mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)$上成立。因此，将 $\ell_\uparrow^i$ 和 $\ell^\downarrow{}_i$ 替换为式 (8.14) 中其凸组合的共轭版本后，相同关系仍然成立。因此，对每个$t \in [0,1]$，我们都有一个上升链复形 $(\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_*、\ \ell_\uparrow^t)$和一个下降链复形 $(\mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_*、\ \ell^\downarrow{}_t)$；滤过余跨 $\mathscr{Y}_t$定义为图表 (8.13)，其中 $\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_*$ 和 $\mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_*$上带有这些上升链复形和下降链复形结构。

根据构造，我们有

$$\rho_{-\epsilon}^\varphi \circ \ell_\uparrow^0 \le \ell_\uparrow^1 \le \rho_\epsilon^\varphi \circ \ell_\uparrow^0, \qquad \rho_\epsilon^\varphi \circ \ell_0^\downarrow \ge \ell_1^\downarrow \ge \rho_{-\epsilon}^\varphi \circ \ell_0^\downarrow;$$

等价地

$$-\epsilon + \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^0 \le \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^1 \le \epsilon + \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^0, \qquad \epsilon + \varphi^{-1}\circ \ell_0^\downarrow \ge \varphi^{-1}\circ \ell_1^\downarrow \ge -\epsilon + \varphi^{-1}\circ \ell_0^\downarrow.$$

若 s，$t \in [0,1]$ 且 $s \le t$，则有

$$\left|\varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^t - \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^s\right| = \left|(t-s)(\varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^1 - \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^0)\right| \le \epsilon|t-s|.$$

因此

$$\varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^s \ge \epsilon(s-t) + \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^t, \qquad \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^t \ge \epsilon(s-t) + \varphi^{-1}\circ \ell_\uparrow^s.$$

然后将这些不等式两边复合以递增映射 φ，得到

$$\ell_\uparrow^s \ge \rho_{\epsilon(s-t)}^\varphi \circ \ell_\uparrow^t, \qquad \ell_\uparrow^t \ge \rho_{\epsilon(s-t)}^\varphi \circ \ell_\uparrow^s.$$

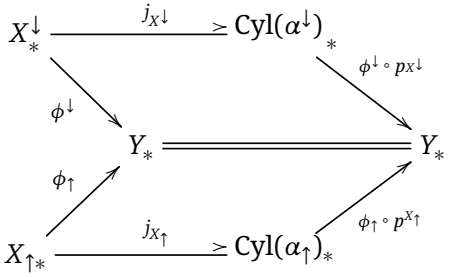
同样的分析也得出

$$\ell_s^\downarrow \le \rho_{\epsilon(t-s)}^\varphi \circ \ell_t^\downarrow, \qquad \ell_t^\downarrow \le \rho_{\epsilon(t-s)}^\varphi \circ \ell_s^\downarrow$$

由此可知，$\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_*$、$\mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_*$、$Y_*$上的恒等映射在$\mathsf{HCO}^\Lambda(\kappa)$中分别给出从 $\mathscr{Y}_s$ 到 $\mathscr{T}_{\epsilon(t-s)}\mathscr{Y}_t$ 以及从 from $\mathscr{Y}_t$ 到 $\mathscr{T}_{\epsilon(t-s)}\mathscr{Y}_s$的态射。这显然给出了 $\mathscr{Y}_s$ 与 $\mathscr{Y}_t$之间的$\epsilon(t-s)$-交错，从而证明了引理 8.12 中的性质（i）。

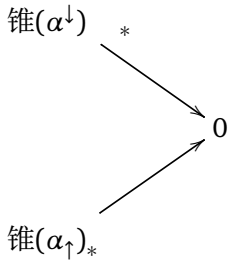
现在证明性质 (ii)，即 $\mathscr{Y}_0 \cong \mathscr{X}$。我们有包含映射 $j^{X\uparrow}\colon X\uparrow_* \to \mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_*$ 和$j_{X\downarrow}\colon \mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_*$，以及回缩映射 $p^{X\uparrow}\colon \mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_* \to X\uparrow_*$和 $p_{X\downarrow}\colon \mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_* \to X_*^\downarrow$，如 (8.11) 所示；它们保持由 $\ell_\uparrow^0$ 和 $\ell_0^\downarrow$ 给出的递增与递减滤过，因为 $\ell_\uparrow^X \circ \alpha_\uparrow \le$

$\rho^{\varphi}_{\epsilon}\circ \ell^{C}_{\uparrow}$和 $\ell^{\downarrow}\mathrm{X}\circ \alpha^{\downarrow}\geq \rho^{\varphi}_{-\epsilon}\circ \ell^{\downarrow}\mathrm{C}$。此外，$\mathrm{p}^{X_{\uparrow}}\circ \mathrm{j}^{X_{\uparrow}}$和 $\mathrm{p}_{X\downarrow}\circ \mathrm{j}_{X\downarrow}$分别是恒等映射，而 $\mathrm{j}^{X_{\uparrow}}\circ \mathrm{p}^{X_{\uparrow}}$和 $\mathrm{j}^{X^{\downarrow}}\circ \mathrm{p}_{X\downarrow}$分别同伦于恒等映射；相应映射如 (8.12) 所示，并且也保持由 $\ell^{0}_{\uparrow}$ 和 $\ell^{\downarrow}_{0}$ 给出的滤过。因此，将 $\mathrm{Cyl}(\alpha_{\uparrow})_{*}$ 和 $\mathrm{Cyl}(\alpha^{\downarrow})_{*}$分别视为使用 $\ell^{0}_{\uparrow}$ 和 $\ell^{\downarrow}_{0}$ 的递增与递减链复形时，映射 $\mathrm{j}^{X_{\uparrow}}$ 和 $\mathrm{j}_{X\downarrow}$ 是过滤同伦等价。由此我们在 $\mathrm{HCO}^{\wedge}(\kappa)$中得到一个同构，



介于 $\mathscr{X}$ 和 $\mathscr{Y}_{0}$之间，从而证明 (ii)。

第 (iii) 部分中的滤过余跨 $\mathscr{B}$ 定义为



其过滤函数为

$$\ell_{\uparrow}(c,x)=\max\{\rho_{2\epsilon}(\ell^{C}_{\uparrow}(x)),\rho_{\epsilon}(\ell^{X}_{\uparrow}(x))\},\qquad \ell^{\downarrow}(c,x)=\max\{\rho_{-2\epsilon}(\ell^{\downarrow}_{C}(x)),\rho_{-\epsilon}(\ell^{\downarrow}_{X}(x))\}$$

分别在 $\mathrm{Cone}(\alpha_{\uparrow})_{*}$ 和 $\mathrm{Cone}(\alpha^{\downarrow})_{*}$ 上。因此，作为一个滤过向量空间，$\mathrm{Cone}(\alpha_{\uparrow})_{*}\oplus C_{\uparrow *}$ 与 $\mathrm{Cyl}(\alpha)_{*}$（带有滤过 $\ell^{\partial}_{\uparrow}$）相同，但 $\mathrm{Cone}(\alpha_{\uparrow})\oplus C_{\uparrow *}$ 上的边界算子为块形式 $\begin{pmatrix} -\partial & 0 & 0 \\ C\,\alpha_{\uparrow} & \partial & X\,0 \\ 0 & 0 & \partial\ C_{\uparrow} \end{pmatrix}$，而 $\mathrm{Cyl}(\alpha)_{*}$ 上的边界算子为 $\begin{pmatrix} -\partial & 0 & 0 \\ C\,\alpha_{\uparrow} & \partial & X\,-1_{C_{\uparrow *}} \\ 0 & 0 & \partial\ C_{\uparrow} \end{pmatrix}$。对 $\mathrm{Cone}(\alpha^{\downarrow})\oplus C^{\downarrow}_{*}$ 和 $\mathrm{Cyl}(\alpha^{\downarrow})_{*}$ 也有类似的结论。

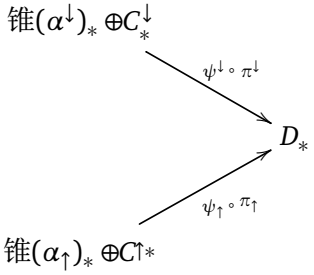
由于同伦 $H_{\uparrow}$ 满足 $\beta_{\uparrow}\circ\alpha_{\uparrow}$ 与 $1_{C_{\uparrow *}}$ 之间的关系 $\ell^{C}_{\uparrow}\circ H_{\uparrow}\leq \rho^{\varphi}_{2\epsilon}\circ \ell^{C}_{\uparrow}$，且由于 $\ell^{C}_{\uparrow}\circ \beta_{\uparrow}\leq \rho^{\varphi}_{\epsilon}\circ \ell^{X}_{\uparrow}$，由下述块形式给出的映射

$$A_{\uparrow}=\begin{pmatrix} 1_{C_{\uparrow *-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X_{\uparrow *}} & 0 \\ -H_{\uparrow} & \beta_{\uparrow} & 1_{C_{\uparrow *}} \end{pmatrix}$$

保持由 $\ell^1_\uparrow$ 给出的滤过，并且可以看出，它与边界算子相容，从而得到链映射 $\mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_* \to \mathrm{Cone}(\alpha_\uparrow)_* \oplus C\uparrow_*$。此外，$A\uparrow$ 可逆，其逆 $A_\uparrow^{-1} = \begin{pmatrix} 1_{C_{\uparrow *-1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X_{\uparrow *}} & 0 \\ H_\uparrow & -\beta_\uparrow & 1_{C_{\uparrow *}} \end{pmatrix}$ 同样给出一个滤过链映射 $\mathrm{Cone}(\alpha_\uparrow)_* \oplus C\uparrow_* \to \mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_*$。因此，$A\uparrow\colon \mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_* \to \mathrm{Cone}(\alpha_\uparrow)_* \oplus C\uparrow_*$ 是关于 $\mathrm{Cyl}(\alpha_{\uparrow *})$ 上的滤过 $\ell^1_\uparrow$ 及 $\mathrm{Cone}(\alpha_\uparrow)_*$ 上述滤过 $\ell_\uparrow$ 的滤过链同构。同理，也有一个滤过链同构

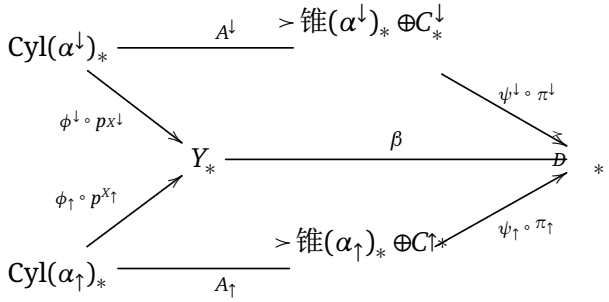
$$A^\downarrow = \begin{pmatrix} 1_{C^\downarrow_{*+1}} & 0 & 0 \\ 0 & 1_{X^\downarrow_*} & 0 \\ -H^\downarrow & \beta^\downarrow & 1_{C^\downarrow_*} \end{pmatrix} : \mathrm{Cyl}(\alpha^\downarrow)_* \to \mathrm{Cone}(\alpha^\downarrow)_* \oplus C^\downarrow_*.$$

令 $\pi^\downarrow\colon \text{锥}(\alpha^\downarrow)_* \oplus C^\downarrow_* \to C^\downarrow_*$ 和 $\pi\uparrow\colon \text{锥}(\alpha_\uparrow)_* \oplus C\uparrow_* \to C\uparrow_*$ 表示投影，则滤过余跨 $\mathscr{B} \oplus \mathscr{C}$ 定义为



我们断言图表

(8.15)



延拓为同构 $\mathscr{Y}_1 \to \mathscr{B} \oplus \mathscr{C}$。由于 $\mathrm{A}^\downarrow$ 和 $\mathrm{A}\uparrow$ 是滤过同伦等价，且 β 是同伦等价，根据推论 2.6，只要该图在未滤过的链同伦意义下交换，结论便成立。为此，首先注意到，由 $\mathrm{K}_\uparrow(\mathrm{a}, \mathrm{b}, \mathrm{c}) = \mathrm{H}\uparrow\mathrm{c}$ 定义的映射 $\mathrm{K}\uparrow\colon \mathrm{Cyl}(\alpha_\uparrow)_* \to \mathrm{C}\uparrow_{*+1}$ 满足 $\partial\mathrm{C}\uparrow\mathrm{K}_\uparrow + \mathrm{K}_\uparrow\partial_{\mathrm{Cyl}} = \pi\uparrow \circ \mathrm{A}_\uparrow - \beta_\uparrow \circ \mathrm{p}^{X_\uparrow}$。因此，$\psi_\uparrow \circ \pi\uparrow \circ \mathrm{A}\uparrow$ 与 $\psi_\uparrow \circ \beta_\uparrow \circ \mathrm{p}^{X\uparrow}$ 链同伦。然而，由于 $\mathfrak{b} = (\beta^\downarrow, \beta_\uparrow, \beta, \mathrm{L}^\downarrow, \mathrm{L}_\uparrow)$ 是 $\mathscr{T}^\epsilon\mathscr{X}$ 与 $\mathscr{T}^{2\epsilon}\mathscr{C}$ 之间的态射，$\psi_\uparrow \circ \beta_\uparrow$ 与 $\beta \circ \phi_\uparrow$ 链同伦。因此，$\psi_\uparrow \circ \pi\uparrow \circ \mathrm{A}\uparrow$ 与 $\beta \circ \phi_\uparrow \circ \mathrm{p}^{X_\uparrow}$ 链同伦，而 (8.15) 的下方平行四边形在同伦意义下交换。用同样的论证可知，上方平行四边形也在同伦意义下交换。因此，推论 2.6 可用于得到所需的同构 $\mathscr{Y}_1 \cong \mathscr{B} \oplus \mathscr{C}$，从而完成引理 8.12 的证明，进而完成定理 8.10 的证明。

□

参考文献

[Ba94] S. Barannikov. 框架化 Morse 复形及其不变量。奇点与分岔，93–115，Adv. Soviet Math., 21，美国数学会，普罗维登斯，RI，1994.[BBF24] U. Bauer, M. Botnan, and B. Fluhr. 扩展持久性的泛距离。J. Appl. Comput. Topol 8 (2024)，第 3 期，475–530.[BBF21] U. Bauer, M. Botnan, and B. Fluhr. 相对层间集上同调的结构与交错。arXiv:2108.09298.[BF22] U. Bauer and B. Fluhr. 相对层间集上同调对扩展持久图的范畴化。arXiv:2205.15275.[BL15] U. Bauer and M. Lesnick. 持久模的诱导匹配与代数稳定性。J. Comput. Geom. 6 (2015)，第 2 期，162–191.[BEMP13] P. Bendich, H. Edelsbrunner, D. Morozov, and A. Patel. 水平集与层间集的同调及鲁棒性。同调与同伦应用 15 (2013)，第 1 期，51–72.[BGO19] N. Berkouk, G. Ginot, and S. Oudot. 水平集持久性与层论。arXiv:1907.09759[BCZ23] P. Biran, O.Cornea, and J. Zhang. 三角剖分、持久性与 Fukaya 范畴。arXiv:2304.01785.[BK91] A. Bondal and M. Kapranov. 框架化三角范畴。Mat. Sb. 181 (1990)，第 5 期，669-683.[Bre93] G. Bredon. 拓扑与几何。Grad. Texts Math. 139，Springer，柏林，1993.[BH17] D. Burghelea and S. Haller. 角度值映射的拓扑、条形码与约当块。J. Appl. Comput. Topol. 1 (2017)，第 1 期，121–197.[CdSM09] G. Carlsson, V. de Silva, and D. Morozov. 之字形持久同调与实值函数，载于第 25 届 ACM 计算几何研讨会（SoCG）论文集，2009 年，第 247–256 页。[CdSGO16] F. Chazal, V. de Silva, M. Glisse, S. Oudot. 持久模的结构与稳定性，Springer 数学简明读物。Springer，2016.[CGGM24] M. Che, F. Galaz-García, L. Guijarro, and I. Membrillo Solis. 持久图空间的度量几何。J. Appl. Comput. Topol 8 (2024)，2197–2246.[dSMS18] V. de Silva, E. Munch, and A. Stefanou. 带流范畴上的交错理论。Theory Appl. Categ. 33 (2018)，第 21 期，583–607.[CEH07] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. 持久图的稳定性。离散与计算几何 37 (2007)，103–120.[CEH09] D. Cohen-Steiner, H. Edelsbrunner, and J. Harer. 利用庞加莱对偶与 Lefschetz 对偶扩展持久性。Found. Comput. Math. 9 (2009)，第 1 期，79—103。勘误见 Found. Comput. Math. 9 (2009)，第 1 期，133–134.[C-B15] W. Crawley-Boevey. 逐点有限维持久模的分解。J. Algebra Appl. 14 (2015)，第 5 期，1550066.[Dri04] V. Drinfeld. DG 范畴的 DG 商。J. Algebra. 272 (2004)，第 2 期，643–691.[ELZ02] H. Edelsbrunner, D. Letscher, and A. Zomorodian. 拓扑持久性与简化。离散与计算几何 28 (2002)，第 4 期，511–533.[EH10] H. Edelsbrunner and J. Harer. 计算拓扑学：导论。AMS，普罗维登斯，2010.[EZ50] S. Eilenberg and J. Zilber. 半单纯复形与奇异同调。Ann. Math. 51 (1950)，第 3 期，499–513.[GM03] S. Gelfand and Y. Manin. 同调代数方法，第 2 版。Springer，柏林，2003.[Ha02] A. Hatcher. 代数拓扑。剑桥大学出版社，2002.[Mil63] J. Milnor. Morse 理论。数学研究年刊，51，Princeton University Press，普林斯顿，新泽西州，1963.[Mil65] J. Milnor. h-余边界定理讲义。Princeton University Press，普林斯顿，新泽西州，1965.[P06] A. V. Pajitnov. 圆值 Morse 理论。de Gruyter 数学研究丛书 32，柏林，2006.[Rol76] D. Rolfsen. 纽结与链环。AMS Chelsea Publishing 346，1976.[tD08] T. tom Dieck. 代数拓扑。欧洲数学会，苏黎世，2008.[U22] M. Usher. ℂ"开子集之间的辛 Banach-Mazur 距离。拓扑分析杂志 14 (2022)，第 1 期，231–286。

[U23] M. Usher。《*Morse–Novikov* 与 *Floer* 理论的抽象层间持久性》。arXiv:2302.14342。[UZ16] M. Usher 和 J. Zhang。《持久同调与 *Floer-Novikov* 理论》。Geom. Topol.**20** (2016), 3333– 3430。[We94] C. Weibel。《同调代数导论》。剑桥大学出版社，1994。[ZC05] A. Zomorodian 和 G. Carlsson。《计算持久同调》。离散与计算几何**33** (2005), 249–274。

附录 A. MORSE-奇异等价

本附录旨在证明引理 4.6，该引理涉及从 [P06] 得到的 Morse 链复形与奇异链复形之间的同伦等价相对于自然滤过的行为。首先需要详细回顾这一同伦等价的构造过程。

给定域 κ 以及带边界的紧致光滑流形 $\mathbb{Y}$，令 $h\colon \mathbb{Y} \to [a, b]$ 为 Morse函数，其中 a 和 b 是正则值；再令 w 为 h 的一个类梯度向量场，其流为 Morse-Smale。为确定 Morse复形中的符号，还需为 h 的各临界点的下降圆盘 $d_p(w)$ 选定定向。 [P06]给出了一个同伦等价 $\mathscr{E}(h, w)\colon C M_*(h, v; \kappa) \to S_*(\mathbb{Y}, h^{-1}(\{a\}); \kappa)$；构造 $\mathscr{E}(h, w)$ 时涉及各种辅助选择，我们将在下文回顾这些选择，并且 [P06] 证明，不同选择会导出链同伦映射。在例 1.9 的情形中，我们有一个 Morse函数 $f : \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$；我们将分别令 h 等于 f，以及令 h 等于 f 在各种次水平集上的限制，并在这两种情况下应用上述结果。主要的微妙之处在于确保辅助选择的方式能够使 $\mathscr{E}(h, w)$ 的不同版本彼此一致（而不只是相差一个同伦）。

构造 $\mathscr{E}(h, w)$ 时，首先要选择一个 Morse-Smale 过滤 $\mathscr{W} = \left(W^{(-1)} \subset W^{(0)} \subset \ldots \subset W^{(n)}\right)$，如 [P06, 第 4.3 节8] 所述。为此，要使用一个 Morse函数 $\phi\colon \mathbb{Y} \to \mathbb{R}$，使得 w 仍是梯度类的；但与 h 通常不同的是，该函数是“有序的”，也就是说，如果 ϕ 的临界点 p 和 q 满足 $\mathrm{ind}(p) < \mathrm{ind}(q)$，那么$\phi(p) < \phi(q)$。接着取正则值 $a = a_0 < a_1 < \cdots < a_n = b$，其中 $n = \dim \mathbb{Y}$，使得对于 $k = 0, \ldots, n$，h 的指标为 k 的临界点（等价地，ϕ 的临界点）都位于 $\phi^{-1}((a_k, a_{k+1}))$ 中，并定义 $W^{(k)} = \phi^{-1}([a, a_{k+1}])$。于是 $W^{(-1)} = h^{-1}(\{a\})$, $W^{(n)} = \mathbb{Y}$，且 $H_i(W^{(k)}, W^{(k-1)}; \kappa)) = 0$如果 $i \neq k$，则 $H_k(W^{(k)}, W^{(k-1)}; \kappa)$ 是一个 κ-向量空间，其基由相对同调类 $[d_p(w)]$ 构成，这些类对应于 h 的指标为 k 的临界点 p 的下降圆盘，并按照 Morse复形输入中任意选取的定向进行定向。

记 $P_*(\mathscr{W})$ 为链复形[15]（类似于 CW复形的胞腔链复形），它作为分次 κ-向量空间定义为 $P_k(\mathscr{W}) = H_k(W^{(k)}, W^{(k-1)}; \kappa)$ 其微分 $\delta\colon P_{k+1}(\mathscr{W}) \to P_k(\mathscr{W})$ 由三元组 $(W^{(k+1)}, W^{(k)}, W^{(k-1)})$的长正合列中的连接同态给出。于是存在一个显然的分次向量空间同构 I_h, $\mathscr{W}\colon C M_*(h, w; \kappa) \to P_*(\mathscr{W})$，它将临界点 p 映到其下降圆盘的相对同调类 $[d_p(w)]$，并且 [P06, 命题 6.1.8] 断言这是

[15][P06] 将这个复形记作 $C_*(\phi, w)$；不过，就我们后续的讨论而言，采用能强调滤过 $\mathscr{W}$作用的记法似乎更为合适。对于 $i \notin \{0, 1, \ldots, n\}$，应将 $P_i(\mathscr{W})$视为零；与此一致，$W^{(i)}$应视为在 $i < -1$ 时等于 $W^{(-1)}$，在 $i >$ 时等于 $W^{(n)}$。

一个链复形同构。回顾 $W^{(-1)}=h^{-1}(\{a\})$ 和 $W^{(n)}=\mathbb{Y}$，映射 $\mathscr{E}(h,w)\colon C M_*(h,w;\kappa)\to S_*(\mathbb{Y},h^{-1}(\{a\});\kappa)$ 是该同构 $I_{h,\mathscr{W}}$ 与链同伦等价 $\chi\colon P_*(\mathscr{W})\to S_*(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)$ 的复合，该等价按如下方式构造，其依据是 [P06, 定理 6.3.6]的证明。

给定 $k\geq 0$，我们归纳地假设[16], 对于所有 $i<k$，我们都已构造出向量空间同态 $\chi_i\colon P_i(\mathscr{W})=H_i(W^{(i)},W^{(i-1)};\kappa)\to S_i(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)$，使得：

(χ.1) χ_i 的像包含于子空间 $S_i(W^{(i)},W^{(-1)};\kappa)$，该子空间属于 $S_i(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa).\partial_i\circ$

(χ.2) $\chi_{i-1}\circ\delta_i$，其中 $\partial_i\colon S_i(W^{(i)},W^{(-1)};\kappa)\to S_{i-1}(W^{(i)},W^{(-1)};\kappa)$ 和 $\delta_i\colon P_i(\mathscr{W})\to P_{i-1}(\mathscr{W})$ 分别是相应复形上的微分；(χ.3)：给定任意 $x\in P_i(\mathscr{W})$，元素 $\chi_i(x)\in S_i(W^{(i)},W^{(-1)};\kappa)$ 满足 $\partial_i\chi_i(x)\in S_{i-1}(W^{(i-1)},W^{(-1)};\kappa)$，由 (($\chi$.1)) 和 (($\chi$.2)) 可知，它投影到 $H_i\left(\frac{S_*(W^{(i)},W^{(-1)};\kappa)}{S_*(W^{(i-1)},W^{(-1)};\kappa)}\right)$，作为类 $x\in H_i(W^{(i)},W^{(i-1)};\kappa)$ 的一个代表元。

在此归纳假设下，我们说明如何构造 $\chi_k\colon P_k(\mathscr{W})\to S_k(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)$，使得当 $i=k$ 时，((χ.1))、((χ.2)) 和 ((χ.3)) 继续成立。对于 $P_k(\mathscr{W})$ 的每个标准生成元 $[d_p(w)]$，我们首先选取一个链 $c_p\in S_k(W^{(k)},W^{(-1)};\kappa)$，它投影到 $S_k(W^{(k)},W^{(k-1)};\kappa)$ 中的一个相对循环，并在同调中表示 $[d_p(w)]$。于是，$\partial_k c_p\in S_{k-1}(W^{(k-1)},W^{(-1)};\kappa)$ 是一个循环，它投影为类 $\delta_k[d_p(w)]\in H_{k-1}(W^{(k-1)},W^{(k-2)};\kappa)$ 的一个代表。因此，根据归纳假设，$\chi_{k-1}\delta_k[d_p(w)]$ 和 $\partial_k c_p$ 投影到 $S_{k-1}(W^{(k-1)},W^{(k-2)};\kappa)$，作为同一个相对同调类的代表；由此存在 $b_p\in S_k(W^{(k-1)},W^{(-1)};\kappa)$ 和 $a_p\in S_{k-1}(W^{(k-2)},W^{(-1)};\kappa)$，使得

$$\chi_{k-1}\delta_k[d_p(w)]=\partial_k c_p+\partial_k b_p+a_p.$$

现在由归纳法可得 $\partial_{k-1}\chi_{k-1}\delta_k[d_p(w)]=\chi_{k-2}\delta_{k-1}\delta_k[d_p(w)]=0$，因此 $\partial_{k-1}a_p=0$。但 $H_{k-1}(W^{(k-2)},W^{(-1)};\kappa)=0$（这可由如下事实简单归纳得出：$H_i(W^{(j)},W^{(j-1)};\kappa)=0$ 只要 $i>j$），因此对于某个 $b'_p\in S_k(W^{(k-2)},W^{(-1)};\kappa)$，有 $a_p=\partial_k b'_p$。所以，若令 $\chi_k[d_p(w)]=c_p+b_p+b'_p\in S_k(W^{(k)},W^{(-1)};\kappa)$，那么 $\chi_k[d_p(w)]$ 与 c_p 之差由包含在 $W^{(k-1)}$ 中的链构成，因此与 c_p 一样，代表 $H_k(W^{(k)},W^{(k-1)};\kappa)$ 中的 $[d_p(w)]$。此外，按构造，$\chi_{k-1}\partial_k[d_p(w)]=\partial_k\chi_k[d_p(w)]$。

对每个指标为 k 的临界点 p 重复这一构造，然后将其线性扩展到各个 $[d_p(w)]$ 所张成的空间 $P_k(\mathscr{W})$，我们便得到一个映射 $\chi_k\colon P_k(\mathscr{W}))\to S_k(W^{(k)},W^{(-1)};\kappa)\subset S_k(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)$，使得 (($\chi$.1))、(($\chi$.2)) 和 (($\chi$.3)) 对所有 $i\leq k$ 均成立，从而完成链映射 $\chi\colon P_*(\mathscr{W})\to S_*(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)$ 的归纳构造。

备注A.1. c_p、b_p 和 b'_p 的选取（因而 $\chi_k[d_p(w)]$ 的定义）是针对不同的指标为 k 的临界点分别独立进行的；先前选择中，只有在构造 $\chi_{k-1}\delta_k[d_p(w)]$ 的过程中所作的选择会影响 $\chi_k[d_p(w)]$ 的定义。

注记 A.2。如果 z 是函数 $h\colon \mathbb{Y}\to[a,b]$, 的最大临界值，那么在每个阶段，链 $\chi_k[d_p(w)]$ 都可以取为位于子空间 $S_k(h^{-1}([a,z])\cap W^{(k)},W^{(-1)};\kappa)$ 的 $S_k(W^{(k)},W^{(-1)};\kappa)$ 中；这显然由以下事实得出：$-w$ 的流可以用来

[16]作为基础情形，由于 $P_i(\mathscr{W})=S_i(W^{(n)},W^{(-1)};\kappa)=0$ 对于 $i<0$，取 $\chi_i=0$ 即可使我们的条件显然成立，适用于 $i<0$。

构造从$W^{(k)}$到$h^{-1}([a,\ z])\cap W^{(k)}$的变形收缩（[Mil63，注记 3.4]），从而可以修改链c_p、b_p和b_p，使其像位于$h^{-1}([a,\ z])$中。

注记 A.3. 通过如下方式定义 $P_*(\mathscr{W})$ 和 $S_*(W^{(n)}, W^{(-1)}$ 上的升滤过 $\mathbb{N}$：对 $m \in \mathbb{N}$,

$$P_k^{(m)} = \begin{cases} P_k(\mathscr{W}) & \text{if } k \le m \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \quad \text{and} \quad S_k^{(m)} = S_k(W^{(m)}, W^{(-1)}; \kappa).$$

于是 ((χ.1)) 表明 χ 是过滤链复形的映射，而 ((χ.3)) 表明 χ 诱导同构 $\mathrm{H}_*(\mathrm{P}_*^{(0)}) \to \mathrm{H}_*(\mathrm{S}_*^{(0)})$ 和 $\mathrm{H}_*\left(\mathrm{P}_*^{(m+1)}\mathrm{P}_*^{(m)}\right) \to \mathrm{H}_*\left(S_*^{(m+1)}\mathrm{S}_*^{(m)}\right)$。如 [P06, 推论 6.3 的证明.8], , 由此利用五引理归纳可知 χ 是拟同构，因而也是同伦等价，因为 $\mathrm{P}_*(\mathscr{W})$ 和 $\mathrm{S}_*(\mathrm{W}^{(\mathrm{n})}, \mathrm{W}^{(-1)}; \kappa)$ 是下有界的 κ-向量空间链复形。因此，按照上述规定构造的任意映射 $\mathscr{E}(\mathrm{h}, \mathrm{w}) = \chi \circ \mathrm{I}_{h,\mathscr{W}}$: $\mathrm{C}\,\mathrm{M}_*(\mathrm{h}, \mathrm{w}) \to \mathrm{S}_*(\mathbb{Y},\mathrm{h}^{-1}; \{\mathrm{a}\}; \kappa)$ 总是同伦等价。

准备就绪后，我们将记号改为例 1.9 和引理 4.6 中使用的记号：设 κ 是一个域，$\mathbb{X}$ 是一个带边界紧致光滑流形，并设 $f\colon \mathbb{X} \to [-\Lambda, \Lambda]$ 是 Morse 函数，其中 $-\Lambda$ 和 Λ 是正则值，其原像为 $\partial^{\pm}\mathbb{X} = f^{-1}(\{\pm\Lambda\})$。于是可得到一个上升链复形，即 Morse复形 $CM_*(f, v; \kappa)$。该复形借助于一个关于 f 的类梯度向量场 v（其流为 Morse-Smale 流）以及对临界点的下降圆盘任意选取的定向来定义，并满足：对每个 $t \in [-\Lambda, \Lambda)$，滤子子复形 $CM_*^{\le t}(f, v; \kappa)$ 在次数 k 上由 f 的临界点 p 生成，这些临界点的指标为 k，且满足 $f(p) \le t$；其边界算子由连接指标相差 1 的临界点的 $-v$ 的梯度流线计数构造而成。

与此同时，相对奇异链复形 $S_*(\mathbb{X}\backslash\partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}; \kappa)$ 是一个递增复形，其中 $S_*^{\le t}(\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}; \kappa) = S_*(f^{-1}([-\Lambda, t]), \partial^-\mathbb{X}; \kappa)$，而引理 4.6 断言，在构造映射 $\mathscr{E}(f, v)$: $CM(f, v; \kappa) \to S_*(\mathbb{X}\backslash\partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}; \kappa)$时所涉及的选择可以作出安排，使得 $\mathscr{E}(f, v)$ 是一个滤过拟同构。

引理 *4.6* 的证明。设 f 的临界值（均位于区间 $(-\Lambda, \Lambda)$ 内）为 $t_1 < t_2 < \cdots < \mathrm{tr}$，并选取（必然是正则的）值 $\mathrm{a}_0 < \mathrm{a}_1 < \cdots < \mathrm{ar}$，使得 $\mathrm{a}_0 = -\Lambda, \mathrm{ar} = \Lambda$，且对于 $\mathrm{i} \in \{1, \ldots, \mathrm{r}-1\}$，$\mathrm{ti} < \mathrm{ai} < \mathrm{ti}+1$。对于 $\mathrm{m} \in \{1, \ldots, \mathrm{r}\}$，定义 $\mathbb{X}\mathrm{m} = \mathrm{f}^{-1}([\mathrm{a}0, \mathrm{am}])$。注意，$\mathrm{C}\,\mathrm{M}_*(\mathrm{f}\,|_{\mathbb{X}}\mathrm{m}, \mathrm{v}|_{\mathbb{X}}\mathrm{m}) = \mathrm{C}\,\mathrm{M}^{\le}\mathrm{tm}_*\ (\mathrm{f}, \mathrm{v}; \kappa)$。因此，对于任意 $\mathrm{m} \in \{1, \ldots, \mathrm{r}\}$，上述构造给出一个同伦等价 $\mathscr{E}(\mathrm{f}\,|_{\mathbb{X}}\mathrm{m}, \mathrm{v}|_{\mathbb{X}}\mathrm{m})$: $\mathrm{C}\,\mathrm{M}^{\le}\mathrm{tm}_*\ (\mathrm{f}, \mathrm{v}; \kappa) \to \mathrm{S}_*(\mathbb{X}\mathrm{m}, \partial^-\mathbb{X})$；特别地，当 $\mathrm{m} = \mathrm{r}$ 时，便得到命题陈述中的 $\mathscr{E}(\mathrm{f}, \mathrm{v})$的一个版本。关键在于确保，如果在构造中作出适当选择，那么 $\mathscr{E}(\mathrm{f}, \mathrm{v})$ 在 $\mathrm{C}\,\mathrm{M}^{\le}\mathrm{tm}_*\ (\mathrm{f}, \mathrm{v}; \kappa)$ 上的限制等于 $\mathscr{E}(\mathrm{f}\,|_{\mathbb{X}}\mathrm{m}, \mathrm{v}|_{\mathbb{X}}\mathrm{m})$。

The 每个 $\mathscr{E}(f\,|_{\mathbb{X}_m}, v|_{\mathbb{X}_m})$的构造都涉及选择一个 Morse-Smale 滤过

$$\mathscr{W}_m = \left(\partial^-\mathbb{X} = W_m^{(-1)} \subset W_m^{(0)} \subset \cdots \subset W_m^{(n)} = \mathbb{X}_m\right)$$

对于$n =$维 $\mathbb{X}_m =$维 $\mathbb{X}$，由此得到复形$P_*(\mathscr{W}_m)$，其中$P_k(\mathscr{W}_m) = H_k(W^{(k)}{}_m,\ W^{(k-1)}{}_m;\ \kappa)$如本节开头所述。利用 [P06，定理 4.3。58], 我们可以并且确实选择这些滤过，使得$W^{(k)}{}_m \subset W^{(k)}{}_{m+1}$对所有$k$和$m$均成立。因此，若 $1 \le$

$m < m' \le r$，则存在一个链映射$i_{m,m'}\colon P_*(\mathscr{W}_m) \to P_*(\mathscr{W}_{m'})$，由包含映射$W^{(k)}{}_m \hookrightarrow W^{(k)}{}_{m'}$诱导。如 [P06，命题 6.2.4 和 6.2.1],的证明中一样，可以得到一个交换图表

(A.1)
$$\begin{array}{ccc} CM_*^{\le t_m}(f,v;\kappa) & \xrightarrow{I_{f|_{\mathbb{X}_m},\mathscr{W}_m}} & P_*(\mathscr{W}_m) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle i_{m,m'}} \\ CM_*^{\le t_{m'}}(f,v;\kappa) & \xrightarrow[I_{f|_{\mathbb{X}_{m'}},\mathscr{W}_{m'}}]{} & P_*(\mathscr{W}_{m'}) \end{array}$$

其中左侧的垂直映射是包含映射。特别地，如果 p 是 f 的一个临界点，且 $f(p) < t_m$，那么包含诱导映射 $i_{m,m'}\colon H_k(W^{(k)}m, W^{(k-1)}m; \kappa) \to H_k(W^{(k)}m', W^{(k-1)}m'; \kappa)$将 $P_k(\mathscr{W}_m) = H_k(W^{(k)}m, W^{(k-1)}m; \kappa)$ 的标准基元素 $[d_p(v|_{\mathbb{X}_m})] = I_{f|_{\mathbb{X}_m},\mathscr{W}_m}(p)$（对应于 p 的下降圆盘）映射到 $P_k(\mathscr{W}_{m'})$ 的标准基元素 $[d_p(v|_{\mathbb{X}_{m'}})]$。

现在我们声称，可以构造同伦等价 $\chi^m\colon P_*(\mathscr{W}_m) \to S_*(\mathbb{X}_m, \partial^-\mathbb{X};\kappa)$，使其对于 $m = 1, \ldots, r$ 都成立，并且与本节开头的描述一致；构造方式使得对每个 m，我们都有一个交换图

(A.2)
$$\begin{array}{ccc} P_*(\mathscr{W}_m) & \xrightarrow{\chi^m} & S_*(\mathbb{X}_m, \partial^-\mathbb{X};\kappa) \\ \downarrow{\scriptstyle i_{m,r}} & & \downarrow \\ P_*(\mathscr{W}_r) & \xrightarrow[\chi^r]{} & S_*(\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\kappa) \end{array}$$

其中右侧的垂直映射是包含映射。

为实现这一点，我们同时对$m = 1$、……、r应用前文所述的归纳过程，从而对每个指标k得到交换图表

(A.3)
$$\begin{array}{ccc} P_k(\mathscr{W}_m) & \xrightarrow{\chi_k^m} & S_k(W_m^{(k)}, \partial^-\mathbb{X};\kappa) \\ \downarrow{\scriptstyle i_{m,m'}} & & \downarrow \\ P_k(\mathscr{W}_{m'}) & \xrightarrow[\chi_k^r]{} & S_k(W_{m'}^{(k)}, \partial^-\mathbb{X};\kappa) \end{array}$$

每当 $m < m'$。（这里的归纳是对 k 进行的。）在归纳步骤中，若 p 是一个指标为 k 的临界点，我们令 m 为满足 $p \in \mathbb{X}_m$ 的最小数，并选择链$\chi m\, k[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})] \in S_k(W^{(k)}m, W^{(-1)}m;\ \kappa)$以满足 χ^m 的归纳构造要求：$P_*(\mathscr{W}_m) \to S_*(\mathbb{X}_m, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$。（因此，$\partial_k \chi^m k[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$coincides with $\chi m\, k-1 \delta_k [d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$，后者已在之前的归纳过程中构造出来，而 $\chi^m k[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$ represents $[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$ in $H_k(W^{(k)}m, W^{(k-1)}m;\ \kappa)$。）由于对于 $m < m'$，包含诱导映射 $i_{m,m'}\colon P_*(\mathscr{W}_m) \to \mathscr{P}_*(\mathscr{W}_{m'})$ 是保持由下降圆盘类 $[d_p(w)]$ 给出的基的链映射，因而 $\chi^m k[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$ 在包含映射 $W^{(k)}m \hookrightarrow W^{(k)}m'$ 下的像将满足 $\chi^{m'} k[d_p(w|_{\mathbb{X}_{m'}})]$ 定义中所要求的性质。由此，我们得到了对所有

满足 m 且具有 $p \in \mathbb{X}_m$这一性质的选择。在线性延拓到所有指标为k 的临界点后，得到映射 $\chi^m{}_k\colon P_k(\mathscr{W}_m) \to S_k(W^{(k)}{}_m;\ \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$，使得根据定义 (A.3) 可交换，并且所需的性质（$((\chi.1))$、$((\chi.2))$、$((\chi.3))$）均得到满足。随后对k进行归纳，便得到与 [P06] 中的构造一致的同伦等价 χ^m，使得 (A.2) 可交换。

此外，与注 A.2 一致，如果 p 是 h的临界点，并且 m 是满足 $p \in \mathbb{X}_m$的最小值，那么 $\chi^m[d_p(w|_{\mathbb{X}_m})]$ 可以取为支撑在 $f^{-1}([-\Lambda, t_m])$中的对象，因为 t_m 是 $f|_{\mathbb{X}_m}$的最大临界值。因此，我们还可以安排使同伦等价 χ^m 分解为

$$\chi^m\colon P_*(\mathscr{W}_m) \to S_*(f^{-1}([-\Lambda, t_m]), \partial^-\mathbb{X}) \to S_*(\mathbb{X}_m, \partial^-\mathbb{X}; \kappa)$$

其中第二个映射由包含映射给出。由于上面的复合和第二个映射都是同伦等价，第一个映射也是同伦等价。因此，与来自 (A.1) 的同构$I_{f|_{\mathbb{X}_m},\mathscr{W}_m}$ 复合，我们得到同伦等价

$$\mathscr{E}(f, v) = \chi^r \circ I_{f,\mathscr{W}_r}\colon CM_*(f, v; \kappa) \to S_*(\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X}; \kappa)$$

其像包含于 $S_*(f^{-1}([-\Lambda, t_r]$中；$\partial^-\mathbb{X};\ \kappa) \subset S_*(\mathbb{X} \setminus \partial^+\mathbb{X}, \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$并且对于 t_m 这一 f的每个临界值，将其限制为同伦等价

$$CM_*^{\le t_m}(f, v; \kappa) \to S_*(f^{-1}([-\Lambda, t_m]), \partial^-\mathbb{X}; \kappa).$$

我们要证明，对于每个 $t \in [-\Lambda, \Lambda)$, $\mathscr{E}(f, v)$限制为拟同构 $CM_*^{\le t}(f, v; \kappa) \to S_*(f^{-1}([-\Lambda, t]), \partial^-\mathbb{X};\ \kappa)$；我们刚刚在 t 是某个临界值 t_m 的情形下证明了这一点。但这很快就能推出所有 t 的所需结果，因为若 $t < t_1$，则 $CM_*^{\le t}(f, v;\ \kappa) = 0$，而 $f^{-1}([-\Lambda, t])$变形收缩到 $\partial^-\mathbb{X}$；否则，若 $m \in \{1, \dots, r\}$ 是满足 $t_m \le t$ 的最大值，则 $CM_*^{\le t}(f, v; \kappa) = CM^{\le t_m}_*(f, v;\ \kappa)$，并且 $f^{-1}([-\Lambda, t])$ 变形收缩到 $f^{-1}([-\Lambda, t_m])$。□

数学系数学，佐治亚大学佐治亚州，雅典，佐治亚州 30602电子邮箱：
usher@uga.edu