arXiv:2512.24037v1 [cs.DS] 30 Dec 2025

肾脏交换：更快的参数化算法与更紧的下界

Aritra Banik*[1]、Sujoy Bhore†[2]、Palash Dey‡[3]和 Abhishek Sahu§[4]

[1,4]国家科学教育与研究学院，布巴内斯瓦尔[2]印度理工学院孟买分校[3]
印度理工学院卡拉格普尔分校

2026年1月1日

摘要

肾脏交换机制使许多彼此不相容的患者-捐赠者配对能够通过环进行肾脏交换。然而，由于基础设施和法律限制，实践中肾脏交换只能在较小的环中进行。实际上，还存在一些没有配对患者的利他捐赠者。这使得我们也可以沿着从某个利他捐赠者出发的路径进行肾脏交换。遗憾的是，这项计算任务是NP完全的。为了克服这一计算障碍，一条重要的研究方向致力于设计更快的算法，包括精确算法以及利用参数化复杂性框架的算法。

肾脏交换问题的标准参数是接受健康肾脏的患者数量 t。目前已知针对该问题、以 t 为参数的最快确定性固定参数可解算法，运行时间为 $\mathcal{O}^*(14^t)$。在本文中，我们通过提出一种运行时间为 $\mathcal{O}^*((4e)^t) \approx \mathcal{O}^*(10.88^t)$ 的确定性固定参数可解算法，改进了这一结果。已知该问题以底层无向图的树宽为参数时是 W[1]-难的。一个自然的问题是：以底层无向图的路径宽度为参数时，肾脏交换问题是否存在固定参数可解算法？本文通过证明该问题以底层无向图的路径宽度为参数时是 W[1]-难的，给出了否定答案。我们还提出了一些参数化难解性结果，在参数化复杂性的框架下加深了对该问题的认识。

1 引言

肾衰竭是一场全球性的健康危机，影响着全世界数百万人。急性肾衰竭患者通常有两种主要治疗选择：透析或肾移植。然而，透析会显著降低生活质量，接受透析的受者平均只能存活约10年。因此，肾移植是许多受者的首选。不幸的是，肾脏的需求与供应之间存在巨大缺口。在美国，每年约有4万人被列入肾移植等待名单，但只有约2万人能找到相容捐赠者 [Wal21]。这种供需失衡导致等待时间延长，目前等待已故捐赠者肾脏移植的中位等待时间平均为4.05年 [SMK23]。令人痛心的是，每年有数千名患者被移出等待名单，因为他们要么去世，要么病情严重到无法接受手术。

*aritra@niser.ac.in
†sujoy@cse.iitb.ac.in
‡palash.dey@cse.iitkgp.ac.in
§abhiksheksahu@niser.ac.in

在这一充满挑战的背景下，肾脏配对捐赠（KPD），又称肾脏交换计划，于2000年推出，旨在为不相容的供体-受体配对问题提供创新解决方案 [Rap86, Alv04]。在肾脏配对捐赠中，拥有不相容捐赠者的受者可以与另一对交换捐赠者，从而形成一个“以物易物市场” [Alv04, Alv07, ABS07] ，提高成功进行肾脏移植的可能性。该系统让参与者更容易找到相容捐赠者，通常还能促成质量更高的配型，从而有望获得更持久的肾脏 [SGW+05]。自推出以来，肾脏配对捐赠已在全球推广，美国、英国和印度等国家纷纷采用该计划，促成了数千例成功移植，并显著提高了匹配到质量更好的肾脏的机会 [BVdKM+21]。

任何肾脏配对捐赠系统的核心挑战都是肾脏交换问题，即如何分配肾脏以最大化移植数量。通常，这一问题被建模为一个有向图，其中每个顶点代表一个患者-供体配对。从顶点 u 指向顶点 v 的有向边表示，来自 u 的捐赠者与 v 的受者相容。

肾脏交换通常通过环进行，在环中，每位受者都从前一个顶点的捐赠者那里获得肾脏。由于捐赠者可能在与其配对的受者接受治疗后退出，因此环中的所有手术都必须同时进行，以防止有人违约。由于后勤限制（每次移植涉及两台手术），通常只允许较小的环 [Alv05b, ABS07, MO15, MH17, AR21, FBSA+20]。

除环之外，一些项目还允许由利他捐赠者（非定向供体，即 NDDs）发起链式交换；这些捐赠者没有与之配对的受者。在一条链中，一名捐赠者将肾脏捐给一位相容的受者，而该受者的配对捐赠者再向另一位受者捐赠，以此类推。与环不同，链可以非同时进行，因为链条中断不会使任何受者的处境变得更糟 [RAR15, DMP+16]。在最坏情况下，受影响的配对可以重新进入交换 [RAR15]。

在有利他捐赠者的情况下，问题变为寻找一组不相交的环和链，在遵守后勤限制的同时，最大化患者-捐赠者配对的覆盖数量。这构成了肾脏交换中的核心优化问题。

由于该计算问题是NP完全的，长期以来，研究者一直致力于设计在实践中表现良好的启发式算法。尽管现有的撮合算法在实践中表现出色，但理解其理论局限性，有助于了解是否可能设计出更快速或更具可扩展性的机制。Xiao 和 Wang [XW18] 率先为肾脏交换问题提出了一种能够保证输出最优解的精确算法。Maiti 和 Dey [MD22] 通过开启对肾脏交换问题参数化复杂性的研究，拓展了这一研究方向。这项工作提升了该研究领域当前的最佳水平。

1.1 我们的贡献

参数	肾脏交换
t	固定参数可 tractable ($\mathcal{O}^*(10.88^t)$) [定理 1]
$t + \ell_p + \ell_c$	不存在多项式核 [定理 2]
路径宽度	W[1]-困难 ($\ell_c = 0$) [定理 3]
路径宽度	W[1]-困难 ($\ell_p = 0$) [定理 4]
有向反馈顶点集 $+\ell_p+\ell_c$	Para-NP-困难 [推论 1]

表 1：结果总结。 t :接受肾脏的患者人数； $\ell_p(\ell_c)$: 肾脏交换路径（环）允许的最大长度；有向反馈顶点集：任意最小有向反馈顶点集的大小。

在这项工作中，我们针对参数 t（即获救患者数量），为肾脏交换问题提出了目前已知最快的确定性固定参数可解算法。Johnson

等人 [HJLSS24] 的算法运行时间分别为随机化时间 $O^\star(4^t)$ 和确定性时间 $O^\star(14^t)$[1]。我们的方法将确定性运行时间改进至 $O^\star((4e)^t) \approx O^\star(10.88^t)$。关键在于巧妙结合颜色编码（通过 t-完美哈希族实现去随机化）与基于子集的动态规划，系统地构造顶点不相交环和利他路径。通过改造用于检测指定颜色的环和（利他路径）的最快彩色编码子程序，我们得到了上述界。

定理 1。肾脏交换 问题 以 t（即能够获得帮助的患者人数）为参数的肾脏交换问题，存在一种确定性固定参数可解算法，其运行时间为 $\mathcal{O}^\star\big((4e)^t\big) \approx \mathcal{O}^\star\big(10。88^t\big)$。

接下来，我们考察针对同一参数 t 的多项式核前景。值得注意的是，探索肾脏交换这类具有实际重要性的问题是否存在多项式核，具有很强的现实意义，因为核化算法能够大幅缩减实践中常见问题实例的规模。虽然在不追求特定运行时间的情况下，为我们的问题设计 FPT 算法相对直接，但在标准复杂性理论假设 NP $\subseteq$ coNP/poly 下，获得多项式核似乎不太可能。具体而言，通过对 Bodlaender、Jansen 和 Kratsch [BJK13] 的 DIRECTED k-PATH 问题进行直接归约——已知除非 NP $\subseteq$ coNP/poly，否则该问题不存在多项式核或压缩——我们证明，即使将参数扩大为 $t + \ell_p + \ell_c + |\mathcal{B}|$，这种压缩仍然不可能。这就从自然的解规模参数角度，几乎完整地描绘了问题的全貌。

定理 2。 在 NP $\not\subseteq$ coNP/多项式的假设下，KIDNEY EXCHANGE 在以 $t + \ell_p + \ell_c + |\mathcal{B}|$ 为参数（其中 $\mathcal{B}$ 是利他顶点的集合）时，不存在多项式核（也不存在多项式压缩）。

我们进一步强化了 Johnson 等人 [HJLSS24], 所确立的困难性版图；他们证明了，当以底层图的树宽为参数时，该问题仍然是 W[1]-困难的。我们的结果表明，即使以严格更大的路径宽参数化，该问题仍然是 W[1]-困难的；此外，即使单独加入 ℓ_c 或 ℓ_p，也不会使该问题变得（固定参数）可处理。具体而言，我们针对肾脏交换问题给出了两个独立的困难性结果：一个针对有界路径宽有向无环图（其中 $\ell_c = 0$），另一个针对不含利他顶点的有界路径宽图（其中$\ell_p = 0$）。这些结果源于从具有一元编码权重的装箱问题 [JKMS13]进行的参数保持归约。

值得注意的是，当同时以这三个参数作为参数时，根据 Maiti 等人 [MD22], 关于以树宽 和 $\max \ell_p, \ell_c$ 作为参数时具有固定参数可处理性的结果，可推得该问题属于固定参数可 tractable。结合起来，这些结果不仅更精确地划定了可处理性的边界，也完整呈现了 KIDNEY EXCHANGE 关于路径宽度、 ℓ_p和 ℓ_c的参数化复杂性。

定理 3. 肾脏交换 交换 以输入图的无向路径宽度为参数时是 *W[1]*-困难，即使该图是无环的也成立。

定理 4. 肾脏交换 交换 以输入图的无向路径宽度为参数时是 *W[1]*-困难，即使不存在利他顶点也成立。

尽管定理 3 已经说明，以有向反馈顶点集（DFVS）的大小为参数时该问题是 W-困难的，我们通过证明即使对于更大的参数 DFVS $+ \ell_p + \ell_c$，该问题仍具有参数化 NP 困难性，从而强化了这一结果：即使 ℓ_p 有界，该问题在有向无环图上仍然是 NP-困难的。注意，由于关联图是有向无环图，因此不失一般性，可以假设 $\ell_c = 0$ 。我们的证明采用了精心设计的两步多项式归约，从 3-划分问题出发，其中给定权重的每个集合都对应于肾脏交换问题所得实例中的一条等价的利他路径，其长度与该权重成比例。

定理5。 即使将KIDNEY EXCHANGE 问题限制在具有固定常数路径长度上界 ℓ_p 的有向无环图实例上，该问题仍然是*NP*-困难的。

Co推论 1。 肾脏交换 问题 相对于有向反馈顶点集而言是 *para-NP-hard*$+\ell_p+\ell_c$.

[1] $\mathcal{O}^\star(\cdot)$ 省略了 n 中的多项式因子。

$\mathcal{B}$	利他顶点集合	t	接受肾脏的患者目标数量
ℓ_p	允许的最长路径长度	ℓ_c	允许的最长环长度
τ	底层无向图的树宽	θ	顶点类型数量
Δ	底层无向图的最大度数	ℓ	$\max\{\ell_p, \ell_c\}$

表 2：符号表。

1.2 相关工作

Rapaport 首次提出肾脏交换的理念 [Rap86]。截至 2005 年，UNOS 移植登记系统中列有超过 60,000 名患者 [SGW+05]，新英格兰肾脏移植监督委员会批准设立区域交换中心，以进行交换 2004 [Alv05b]。Roth 等人 [Alv05a] 介绍了适用于 0–1 偏好的策略无关、约束有效机制。一些研究将交换限制为¨环 [CKVR13, KAV14, SU14], , 另一些则允许环和链并存 [MO15, GvdKW14, XW18]。所有变体都可以表述为图打包问题；Jia 等人 [JTWZ17]探讨了其与以物易物市场和集合打包的联系。

即使环或链长度较短，该问题仍是 NP-困难 [KNS+07, ABS07, BHK+22]；当以环和路径长度为参数时，该问题甚至是 para-NP-困难。已有研究通过集合打包提出了近似算法 [KNS+07,JTWZ17]。

实际方法包括整数规划 [MO15], , 英国 NHS 将其用于全国捐赠者匹配。Dickerson 等人 [DMP+16] 强调，为确保可行性，需要限制链长度。Glo- rie 等人 [GvdKW14] 开发了一种支持多目标优化的分支定价算法。Li 等人 [LLHT14]提出了一种多项式时间算法，用于洛伦兹占优分数匹配；这种匹配公平、激励相容，并可通过抽签实施。Biro 等人 [BMR09], 提出了针对短环的近似方法，而 Riascos-Alvarez 等人 [KAV14] 则为大规模实例提出了一种分解方法，可在链与环之间进行优先级排序。

Dickerson 等人 [DMP+16] 还引入了顶点类型参数，以刻画真实图中的结构相似性。Xiao 和 Wang [XW18] 在此基础上，提出了一个复杂性为 $O\left(2^n n^3\right)$ 的精确算法，以及一个以顶点类型为参数的 FPT 算法，并假设链和环的长度不受限制。Maiti 和 Dey [MD22] 开启了对肾脏交换问题参数化复杂性的研究，并提出了一个运行时间为 $O^\star\left(2^{O(t)}\right)$ 的算法，其中 t 是获得肾脏的患者人数上限；他们还给出了一些其他算法结果和困难性结果。Hebert-Johnson 等人 [HLSS24] 改进了该运行时间，并提出了一个用于此问题的随机化算法，其运行时间为 $O^\star(4^t)$，还给出了一些困难性结果。

Lin 等人 [LWFF19] 研究了仅环情形，并提出了一种基于受者人数和最大环长度的随机化参数化算法。

2 预备知识

For 一个整数 k，我们分别用 $[k]_0$ 和 $[k]$ 表示集合 $\{0, 1, \ldots, k\}$ 和 $\{1, 2, \ldots, k\}$ ly.

肾脏交换问题可形式化表示为一个有向图 $G = (V, A)$，该图称为相容图。顶点的一个子集 $B \subseteq V$ 表示利他捐赠者（也称为非定向供体）；另一组 $V \setminus B$ 顶点表示希望参与肾脏交换计划的患者-供体配对。若顶点 $u \in V$ 的捐赠者拥有与顶点 $v \in V \setminus B$的患者相容的肾脏，则存在一条从 $(u, v) \in A$ 出发的有向边。肾脏交换可以通过以下两种方式进行：（i）沿着交易环 $u_1, u_2, \ldots, u_k$进行，其中对于每个 $2 \leqslant i \leqslant k$，顶点 $u_i \in V \setminus B$ 的患者从顶点 $u_{i-1} \in V \setminus B$ 的捐赠者处获得肾脏，而顶点 u_1 的患者从顶点 u_k的捐赠者处获得肾脏；或（ii）沿着交易链 $u_1, u_2, \ldots, u_k$ 进行，其中 $u_1 \in B, u_i \in V \setminus B$ 对于 $2 \leqslant i \leqslant k$，且顶点$u_j$ 的患者从顶点 u_{j-1} 的捐赠者处获得肾脏，对于 $2 \leqslant j \leqslant k$。出于运营方面的原因，所有这些

沿交易环或交易链进行的肾脏移植都应同时实施。这对可行交易环和交易链的长度 ℓ 设定了上限。我们将路径或环的长度定义为其中边的数量。肾脏交换清算问题旨在寻找一组可行的交易环和交易链，使获得肾脏的患者数量最大化。其形式化定义如下。

定义 1 (K肾脏 交换)。 给定一个 $\mathcal{G} = (\mathcal{V}, \mathcal{A})$ 无自环的有向图、一个利他顶点集 $\mathcal{B} \subset \mathcal{V}$、两个整数 ℓ_p 和 ℓ_c （分别表示允许的路径和环的最大长度），以及一个目标值 t，判断是否存在一个 $\mathcal{C}$由长度至多为 ℓ_c 的不相交环以及仅从利他顶点开始且每条长度至多为 ℓ_p 的路径组成的集合，使其至少覆盖 t 个非利他顶点。我们用 $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$表示 K肾脏 交换 的任意实例。

2.1 图论术语

在图 $\mathcal{G}$中， $\mathcal{V}[\mathcal{G}]$ 表示 $\mathcal{G}$ 中的顶点集， $\mathcal{E}[\mathcal{G}]$ 表示 $\mathcal{G}$中的边集。 $\mathcal{G}[\mathcal{V}']$ 表示 $\mathcal{V}'$ 上的诱导子图，其中 $\mathcal{V}' \subseteq \mathcal{V}[\mathcal{G}]$。在有向图 $\mathcal{G}$ 中，若两个顶点 u 和 v 具有相同的入邻居集和相同的出邻居集，则称它们为同类型顶点。如果 $\mathcal{G}$中不存在自环，则同类型顶点构成一个独立集。树宽用于衡量一个无向图的树状程度。关于树宽、树分解和良好树分解的详细描述，请参阅 [CFK+15] 。由于我们的图是有向图，因此每当提到图的树宽时，均指底层无向图的树宽；当且仅当 u 到 v 之间存在一条边，或 v 到 u之间存在一条边时，顶点 u 和 v 才是底层无向图中的邻居。另请参阅表 1 了解重要的符号。

2.2 参数化复杂性

元组 (x, k)，其中 k 是参数，是一个参数化问题的实例。固定参数可 *tractable*（FPT）指对于给定实例 (x, k)，可在时间 $f(k) \cdot p(|x|)$ 内求解，其中 p 是关于输入规模 $|x|$ 的多项式，而 f 是关于 k 的任意可计算函数。我们使用记号 $\mathcal{O}^*(f(k))$ 表示 $O(f(k)\mathrm{poly}(|x|))$。

如果一个参数化问题即使在参数取某些常数值时仍然是 NP-困难的，我们就称它为 para-NP-hard。

定义 2 （核化）。 *[CFK+15]* 对于参数化问题 $\Pi \subseteq \Gamma^* \times \mathbb{N}$，核化算法是指这样一种算法：给定 $(x, k) \in \Gamma^* \times \mathbb{N}$，在关于 $|x| + k$ 的多项式时间内输出一对 $(x', k') \in \Gamma^* \times \mathbb{N}$，使得 （*a*） $(x, k) \in \Pi$ 当且仅当 $(x', k') \in \Pi$，且 （*b*） $|x'|$， $k' \leqslant g(k)$，其中 g 是某个可计算函数。输出实例 x' 称为核，函数 g 称为核的大小。如果 $g(k) = k^{O(1)}$，则称 Π 存在多项式核。

众所周知，对于某些参数化问题，若其存在多项式核，则意味着多项式层级会坍缩到第三级（更准确地说，是 CoNP $\subseteq$ NP/Poly）。因此，这些问题不太可能存在多项式规模的核。我们使用多项式参数保持归约来证明核下界。

3 更快的确定性 固定参数可 tractable，参数为 t

在本节中，我们针对参数t设计目前已知最快的确定性固定参数可解算法，该算法由三个主要步骤组成。第一步，我们应用色彩编码过程，确保解中涉及的每个顶点都获得不同的颜色；这对第二步至关重要。在第二步中，我们设计一种动态规划（DP）算法，系统地检查是否存在这样一个解：恰好从每个颜色子集中选取一个顶点。在逐步构造对应于更大颜色集的条目时，我们将标准DP

算法 [CFK+15] 作为子程序，经过略微修改后，该算法可在 $2^{|S|}$ 时间内运行，以确定是否存在一个环或利他路径，使得 S 中的所有颜色恰好使用一次。形式化算法如下所示。

3.1 颜色编码

我们采用 Alon、Yuster 和 Zwick [AYZ95] 的颜色编码方法。在该技术中， G 中的每个顶点都会被均匀随机地赋予 t 种颜色之一。以至少 e^{-t} 的概率，构成所需解的 t 个顶点会获得互不相同的颜色。通过使用大小为 $e^t \cdot t^{O(\log t)}$ [NSS95] 的 t-完美哈希函数族，可以消除这种随机着色（使其确定化）。下文假设我们可以访问这样的 (n, t)-完美哈希族。通过遍历该族中的所有着色，不失一般性地假设，某种着色会使解中的顶点颜色互不相同。对于该族中的每种着色，我们都采用以下动态规划算法，以检查肾脏交换实例是否存在多彩解：

3.2 动态规划公式

令 $[t] = \{1, 2, \ldots, t\}$ 表示颜色集合。对于每个子集 $T' \subseteq [t]$，定义

$$DP(T') = \begin{cases} 1 \text{ 存在一组顶点不相交环和利他路径，其中恰好包含来自 } T' \text{ 中每种颜色的一个顶点。否} \\ \\ 0 \end{cases}$$

则

递推关系如下：

$$DP(T') = 1 \iff \exists T'' \subset T' \text{ such that } DP(T'') = 1 \text{ and either}$$

- 存在一个有向环，其中恰好包含来自 $T' \setminus T''$ 中每种颜色的一个顶点；或者
- 存在一条利他路径，其中恰好包含来自 $T' \setminus T''$ 中每种颜色的一个顶点。

为了在时间 $2^{|T' \setminus T''|}$ 内找到这样的环/利他路径，我们采用以下步骤。

3.3 检测指定颜色的环和利他路径

检查是否存在恰好使用颜色集合 $S \subseteq [t]$ 的环或利他路径，可以通过对用于检测多彩路径的标准彩色编码动态规划算法进行小幅修改来实现 [CFK+15]。标准动态规划算法在 $2^{|S|}$ 时间内运行，并确定是否存在一条恰好使用每种颜色一次的有向路径。对于利他路径，动态规划的构造受到限制，要求路径必须从利他顶点开始，而算法的其余部分保持不变。对于多彩环，可以猜测一条弧，然后在动态规划算法中搜索一条恰好使用每种颜色一次、且从所猜测弧的一个端点开始并在另一个端点结束的路径。因此，这些算法的运行时间为 $O^*(2^{|S|})$ ，可用于确定所需的多彩利他路径/环。

3.4 运行时间分析

给定一个包含 t 种颜色的彩色图，动态规划算法会计算所有子集 $T' \subseteq [t]$对应的动态规划表项。对于每个 T'，我们考虑所有划分 $T'' \subseteq T'$，在其中寻找一个必须使用 T''中的所有颜色的多彩解，并检查一个使用 $T' \setminus T''$ 中所有颜色的额外多彩环/利他路径（这需要 $2^{|T' \setminus T''|}$的时间）。因此，总运行时间的上界为

$$\sum_{T' \subseteq [t],} \sum_{T'' \subseteq T'} 2^{|T' \setminus T''|} \cdot n^{O(1)}$$

现在我们简化化简这个双重求和。对于每个 $i = |T'|$，有 $\binom{t}{i}$ 种 T'的选择，而对于每个这样的 T'：

$$\sum_{T'' \subseteq T'} 2^{|T' \setminus T''|} = \sum_{j=0}^{i} \binom{i}{j} \cdot 2^{i-j} = 3^i.$$

因此，计算动态规划表的总运行时间为

$$\sum_{i=0}^{t} \binom{t}{i} \cdot 3^i = (1+3)^t = 4^t.$$

因此，给定一个着色输入图，该算法会在$\mathcal{O}^\star(4^t)$ 时间内检查图是否存在大小为 t 的解。使用大小为 $e^t \cdot t^{\mathcal{O}(\log t)}$ [NSS95] 的 t-完美哈希函数族进行着色（对应这么多个彩色图实例），我们可以将算法的总运行时间界定为

$$\mathcal{O}^\star\left(e^t \cdot t^{\mathcal{O}(\log t)} \cdot 4^t\right).$$

定理 1. 肾脏交换 以 t（即能够得到帮助的患者人数）为参数，存在一个确定性固定参数可解算法，其运行时间为 $\mathcal{O}^\star\big((4e)^t\big) \approx \mathcal{O}^\star(10。88^t)$。

4 不存在以 $t + \ell_p + \ell_c(+|\mathcal{B}|)$为参数的多项式核

本节给出一个从有向 k-路径问题到肾脏交换的等价实例的多项式时间参数保持归约。有向 k-路径问题询问是否存在长度为 k 的有向路径；在标准复杂性理论假设下，该问题已知不存在多项式压缩（见下文命题1）。由此即可证明所需的困难性结果。

命题1。 *[BJK14]* DIRECTED k-PATH （以 k 为参数的长有向路径）除非 NP $\subseteq$coNP/poly，否则既不承认多项式核，也不承认多项式压缩。

归约： 给定 DIRECTED -PATH 的一个输入实例 $(G = (V, E), k)$，我们构造一个等价的肾脏交换实例 $(\mathcal{G} = (V \cup \{a\}, E \cup \{(a, v) \mid v \in V\}), \mathcal{B} = \{a\}, \ell_p = k+1, \ell_c = 0, t = k+1)$，即添加一个额外的利他顶点 a，并从 a 向每个顶点 $v \in V$ 添加弧。我们设定 $\ell_c = 0$、 $\ell_p = k+1$，并要求进行 $t = k+1$ 次移植。

引理1。 $(G = (V, E), k)$ DIRECTED k-PATH 是一个是实例，当且仅当 $(\mathcal{G} = (V \cup \{a\}, E \cup \{(a, v) \mid v \in V\})$, $\mathcal{B} = \{a\}$, $\ell_p = k+1$, $\ell_c = 0$, $t = k+1)$ 是肾脏交换的一个是实例。

证明。 正向而言，假设 (G, k) 是一个是实例，并包含一条经过 k 个顶点的有向简单路径 $P = v_1, v_2, \cdots, v_k$。那么在 $\mathcal{G}$, $P' = a, v_1, v_2, \cdots, v_k$ 中， $k+1$ 是一条长度为 $k+1$ 的利他路径，因此$(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$ 是一个肾脏交换的是实例。

反过来，假设构造出的肾脏交换实例是一个是实例。由于 $\ell_c = 0$，不允许出现环；又因为恰好有一个利他顶点 a，该解必须包含一条从 a 开始、长度为 $k+1$ 的利他路径，其形式必然为 $P' = a, v_1, v_2, \cdots, v_k$，其中 v_i 是 V 中互不相同的顶点。移除起始顶点 a 后，得到 G 中的有向简单路径 $P = v_1, v_2, \cdots, v_k$，因此$(G, k)$ 是一个是实例。 □

由于 $k \in \mathcal{O}^\star(t + \ell_p + \ell_c + |\mathcal{B}|)$，我们立即得到以下推论。

定理 2. 在假设 NP $\not\subseteq$ coNP/poly成立的情况下，对于参数 $t + \ell_p + \ell_c + |\mathcal{B}|$，肾脏交换不存在多项式核（也不存在多项式压缩），其中 $\mathcal{B}$ 是利他顶点集。

5 W[1]-难，参数为路径宽度

本节将给出我们所声称的困难性结果，证明以路径宽度+ℓ_c 或路径宽度+ℓ_p为参数时，肾脏交换仍然是 W[1]-困难的。具体而言，我们分别为肾脏交换给出以下两项困难性结果：一项针对有界路径宽度有向无环图（其中 $\ell_c = 0$），另一项针对不含利他顶点的有界路径宽图（其中 $\ell_p = 0$）。这些结果源自已知的结论：具有一元编码权重 [的装箱问题是 W[1]-困难的（JKMS13]）。请注意，Maiti 等人 [MD22] 证明，以树宽、ℓ_p和 ℓ_c的组合参数为参数时，肾脏交换属于固定参数可 tractable 类，因此，以路径宽度、 ℓ_p和 ℓ_c的组合参数为参数时，它也属于固定参数可 tractable 类。结合我们的结果，这就完整刻画了肾脏交换关于路径宽度、 ℓ_p和 ℓ_c的参数化复杂性。我们首先正式定义装箱问题，随后给出我们所声称的、针对肾脏交换的参数保持归约。

定义 3 (BIN PACKING)。 给定一个包含 $\mathcal{U}$ 个 n 物品的集合，其大小为正整数 w_1、.....、 w_n，以及 k 个箱子，每个箱子的容量为 $\frac{W}{k}$，其中 $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$，计算是否存在一种将这些物品划分为 k 个部分的划分，使得每个部分的总大小恰好为 $\frac{W}{k}$。我们用 $(\mathcal{U}, k)$表示装箱问题的任意实例。

我们知道，即使输入中的所有数字都以一元编码表示，装箱问题仍然是参数为 k的 W[1]-难问题 [JKMS13]。我们的归约思路概述如下。装箱问题中的每件物品都变为一条由捐赠者和受者组成的短链，而每个箱子都变为一条从利他捐赠者开始的较长链。我们以一种方式连接这些部分，使得决定哪些物品链连接到哪些利他链，恰好等价于决定哪些物品放入哪些箱子。如果物品能够均匀地装入箱子，那么相应的肾脏交换实例也具有一个由移植组成的完美匹配，反之亦然。由于我们的构造保持了图的无环性，且没有显著增加其结构复杂性，这证明了即使对于路径宽度较低的图，肾脏交换问题仍然具有挑战性。下面给出形式化证明。

定理 3。 肾脏交换 当以输入图的无向路径宽度为参数时是 *W[1]*-困难的，即使该图是无环图。

证明。 我们从以 k 为参数的装箱问题归约。设 $(\mathcal{U} = \{w_i : i \in [n]\}, k)$ 是装箱问题的任意实例。不失一般性，假设对于每个 $i \in [n]$ 都有 $w_i \geqslant 3k^2n^2$；若不满足，则对每个 $i \in [n]$，将 w_i 与 $3k^2n^2$ 相乘。现在我们构造一个肾脏交换实例 $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$。对于每个 $w_i \in \mathcal{U}$，都有一条从 $u_{i,\,s}$ 到 $u_{i,\,\lambda}$ 的有向路径 p_i，该路径由 w_i 个顶点组成。对于每个 $j \in [k]$，我们还有一条有向路径 $q_j = (a_{j,1}, ...a_{j,\,n})$。除上述路径中的边之外，我们还添加以下边。对于每个 $i \in [n]$，都有一条从 $a_{j,\,i}$ 到 $u_{i,\,s}$ 的边。对于每个 $i \in [n-1]$，我们还添加一条从 $u_{i,\,\lambda}$ 到 $a_{j,\,i+1}$ 的边。至此， $\mathcal{G}$ 的构造描述完毕。注意， $\mathcal{G}$ 是一个无环图，并具有如下拓扑序。

$$a_{1,1}, \ldots, a_{k,1}, \vec{\mathcal{V}}(p_1), a_{1,2}, \ldots, a_{k,2}, \vec{\mathcal{V}}(p_2), \ldots, \vec{\mathcal{V}}(p_n)$$

其中， $\vec{\mathcal{V}}(p_i)$ 是 p_i 中按从$u_{i,\,s}$ 到$u_{i,\,\lambda}$ 的顺序排列、构成有向路径 p_i 的顶点，适用于 $i \in [n]$。利他顶点的集合 $\mathcal{B}$ 为 $\{a_{j,1} : j \in [k]\}$。我们任意设定$\ell_p = \frac{W}{k} + n$，其中 $W = \sum_{i=1}^{n} w_i$ 且 ℓ_c —— ℓ_c的取值无关紧要，因为肾脏交换实例的图是无环的。我们定义 $t = |\mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{B}|$，也就是说，目标是覆盖 $\mathcal{G}$中的每个非利他顶点。现在我们声称这两个实例等价。

在一个方向上，假设装箱问题实例是一个是实例。令 $(X_1, \ldots, X_k)$ 为 $\mathcal{U}$ 的一个划分，使得对于每个 $j \in [k]$， X_j 中物品的总大小为 $\frac{W}{k}$。对于每个 $j \in [k]$，我们定义一条路径$\mathcal{P}_j$ 如下：

$$\mathcal{P}_j = a_{j,1}, Q_1, a_{j,2}, Q_2, \ldots, a_{j,n}, Q_n$$

其中，当 $w_i \in X_j$时， Q_i为 $\vec{\mathcal{V}}(p_i)$，否则为空集。我们首先注意到，由于 $(X_1, ..., X_k)$ 是 $\mathcal{U}$的一个划分；$(\mathcal{V}(\mathcal{P}_1), ..., \mathcal{V}(\mathcal{P}_k))$ 是 $\mathcal{V}[\mathcal{G}]$的一个划分。此外，由于 X_j 中物品的总大小为 $\frac{W}{k}$，每个 $\mathcal{P}_j$都包含 $\frac{W}{k} + n$个顶点，而这正是 ℓ_p。因此，该肾脏交换实例是一个是实例。

反过来，假设该肾脏交换实例是一个是实例。由于 $\ell_p = \frac{W}{k} + n$、$t = |\mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{B}|$ 以及 $|\mathcal{B}| = k$，存在不相交路径 $\mathcal{P}_1$、……、$\mathcal{P}_k$，它们的长度分别为 ℓ_p，并覆盖 $\mathcal{G}$的所有顶点。对于每个 $i \in [n]$，我们注意到，每条路径 $\mathcal{P}_j$、$j \in [k]$ 要么必须包含路径 p_i 的所有顶点，要么不包含其中任何顶点；这是因为 $\mathcal{P}_j$ 既不能在 p_i 内部结束，否则下一个顶点将无法被任何其他路径覆盖，也不能从 p_i 内部移动到 p_i 外部，因为 $\mathcal{G}$中不存在这样的边。现在，我们定义 $X_j = \{w_i : i \in [n], \mathcal{P}_j$ 包含路径 $p_i\}$，其中 $j \in [k]$。我们声称 $\sum_{x \in X_j} x = \frac{W}{k}$。事实上，否则 $\mathcal{P}_j$ 所覆盖的顶点数至多为 $\frac{W}{k} + n^2 - 3k^2n^2$ 个，或至少为 $\frac{W}{k} + n^2 + 3k^2n^2$ 个，因为对于每个 $i \in [n]$都有 $w_i \geqslant 3k^2n^2$。下面我们排除这两种可能性，从而证明该断言。路径$\mathcal{P}_j$ 不可能覆盖至少 $\frac{W}{k} + n^2 + 3k^2n^2$ 个顶点，因为 $\ell_p = \frac{W}{k} + n$。此外，路径 $\mathcal{P}_j$ 不可能覆盖至多$\frac{W}{k} + n^2 - 3k^2n^2$ 个顶点，因为这样一来，剩余的 $k-1$ 条路径每条长度至多为 ℓ_p，无法覆盖 $\mathcal{G}$中的所有非利他顶点。因此，该肾脏交换实例也 是一个是实例。

最后，我们注意到，$\mathcal{G}$ 的路径宽度至多为 $k-1$，因为下面这个序列的袋均包含至多 k 个顶点，并且是 $\mathcal{G}$的有效路径分解。

$$\{a_{1,1}, \ldots, a_{k,1}\}, \vec{\mathcal{V}}(p_1), \{a_{1,2}, \ldots, a_{k,2}\}, \vec{\mathcal{V}}(p_2), \ldots, \vec{\mathcal{V}}(p_n)$$

现在结论随即成立，因为装箱问题参数化于 k时是 W[1]-难的。 □

我们可以修改定理 3 中归约得到的实例，以证明即使不存在利他顶点，肾脏交换关于路径宽度仍是 W[1]-难的。我们从路径p_n 的最后一个顶点向每个利他顶点添加一条边。其他部分保持不变。下面给出详细证明。

定理 4。 肾脏交换 在输入图的无向路径宽度参数化下是 *W[1]*-难的，即使不存在利他顶点。

证明。 给定装箱问题的任意实例，我们完全按照定理 3 的证明构造一个肾脏交换实例，只是额外从$u_{n,\lambda}$（即路径 p_n的最后一个顶点）向$a_{j,1}$ 中的每个 $j \in [k]$添加一条边；不存在利他顶点，$\ell_c = \frac{W}{k} + n$、ℓ_p 可以是任意值（由于不存在利他顶点，ℓ_p 的值无关紧要），并且 $t = \mathcal{V}[\mathcal{G}]$。现在我们证明该肾脏交换实例与装箱问题实例等价。

一方面，假设装箱问题实例是一个是实例。令 $(X_1, \ldots, X_k)$ 为 $\mathcal{U}$ 的一个划分，使得对于每个 $j \in [k]$，X_j 中物品的总大小为 $\frac{W}{k}$。对于每个 $j \in [k]$，我们定义环 $\mathcal{C}_j$ 为

$$\mathcal{C}_j = a_{j,1}, Q_1, a_{j,2}, Q_2, \ldots, a_{j,n}, Q_n, a_{j,1}$$

其中，如果 $w_i \in X_j$，则 Q_i 为 $\vec{\mathcal{V}}(p_i)$，否则为空集。首先注意到，由于 $(X_1, \ldots, X_k)$ 是 $\mathcal{U}$的一个划分，$(\mathcal{V}(\mathcal{C}_1), \ldots, \mathcal{V}(\mathcal{C}_k))$ 是 $\mathcal{V}[\mathcal{G}]$的一个划分。此外，由于 X_j 中物品的总大小为 $\frac{W}{k}$，每个 $\mathcal{C}_j$都包含 $\frac{W}{k} + n$ 个顶点，也就是 ℓ_c—因此，肾脏交换实例是一个是实例。

另一方面，假设肾脏交换实例是一个是实例。由于 $\ell_c = \frac{W}{k} + n$、$t = |\mathcal{V}(\mathcal{G}) \setminus \mathcal{B}|$和 $|\mathcal{B}| = k$，在 $\mathcal{G}$ 中存在 k 个不相交环 $\mathcal{C}_1$、……、$\mathcal{C}_k$，每个环的长度为 $\ell_c = \frac{W}{k} + n$。对于每个 $i \in [n]$，我们注意到，每个环 $\mathcal{C}_j$、$j \in [k]$ 必须包含路径 p_i 的所有顶点，或者一个也不包含，因为 $\mathcal{C}_j$ 既不能在 p_i 内部结束（否则下一个顶点无法由其他路径覆盖），也不能从 p_i 内部移动到 p_i 外部（因为 $\mathcal{G}$中不存在这样的边）。现在我们定义 $X_j = \{w_i : i \in [n], \mathcal{C}_j$ 在 $j \in [k]$时包含路径 $p_i\}$。我们声称 $\sum_{x \in X_j} x = \frac{W}{k}$。事实上，否则 $\mathcal{P}_j$覆盖的顶点数至多为 $\frac{W}{k} + n^2 - 3k^2n^2$，或至少为 $\frac{W}{k} + n^2 + 3k^2n^2$，因为对于每个 $i \in [n]$，$w_i \geqslant 3k^2n^2$。我们现在逐一排除这两种可能，从而证明该主张。环 $\mathcal{C}_j$ 不可能覆盖至少 $\frac{W}{k} + n^2 + 3k^2n^2$ 个顶点，因为 $\ell_c = \frac{W}{k} + n$。此外，环 $\mathcal{C}_j$ 不可能覆盖至多 $\frac{W}{k} + n^2 - 3k^2n^2$ 个顶点，因为这样一来，其余的 $k-1$ 个环每个长度至多为 ℓ_c，无法覆盖 $\mathcal{G}$ 中所有非利他顶点。因此，肾脏交换实例也是一个是实例。

最后，我们注意到，$\mathcal{G}$的路径宽度至多为 $2k-1$，因为以下每个袋子都包含至多 k 个顶点的序列，是 $\mathcal{G}$的一个有效路径分解，其中 $\mathcal{A} = \{a_{1,1}, \ldots, a_{k,1}\}$以及 $\mathcal{A} \cup \vec{\mathcal{V}}(p_i) := \mathcal{A} \cup \{u_{i,s}\}, \ldots, \mathcal{A} \cup \{u_{i,\lambda}\}$，对于 $i \in [n]$。

$\{a_{1,1}, \ldots, a_{k,1}\}$, $\mathcal{A} \cup \vec{\mathcal{V}}(p_1)$, $\mathcal{A} \cup \{a_{1,2}, \ldots, a_{k,2}\}$, $\mathcal{A} \cup \vec{\mathcal{V}}(p_2)$,

$\ldots$, $\mathcal{A} \cup \vec{\mathcal{V}}(p_n)$

现在，由于装箱问题以 k为参数时是 W[1]-困难的，结论得证。 □

6 有向无环图上的 NP-困难性

为了证明我们所讨论的问题具有 NP-困难性，我们首先将一个经典的 3-划分问题实例归约为一个等价的固定大小 3-划分实例，其中每个可行组都必须恰好包含三个元素，且这些元素的和达到指定的目标和。这项归约对于我们随后归约到肾脏交换至关重要：在所构造的解中，长度固定的利他路径恰好对应于和达到目标和的组。

6.1 从 3-划分归约到固定大小 3-划分

在标准的 3-划分问题中，给定一个由正整数构成的多重集 $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ 以及一个目标值 B。任务是判断 A 能否被划分为恰好 m 个互不相交的三元组，且每个三元组中的元素之和均为 B。即使在 $B/4 < a_i < B/2$ 等强假设以及 B为常数值的条件下，这个问题仍然是 NP-困难的。我们的归约不依赖任何此类承诺；相反，我们通过加性偏移来强制每个组的三元组基数。

定义 4。 *(*FIXED-SIZE-3-PARTITION*)* 在此问题中，给定一个由正整数 $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$ 组成的多重集以及一个目标值 B，并且额外满足：任何元素子集的总和若为 B，则恰好包含三个元素。问题是，是否存在一个将 A 划分为 m 个互不相交的组的划分，使得每组的总和均等于 B。

下面，我们给出一个从 3-划分到固定大小 3-划分的多项式时间归约，从而证明后者问题是 NP-困难的。核心思想是对所有项目值统一施加加性偏移，强制每个可行组恰好包含三个元素。通过选取远大于任何原始值的常数C，少于三个元素的任何子集都无法达到新的目标和（该目标和大于 $3C$ 且小于 $4C$），而多于三个元素的任何子集则必然超过目标和。因此，只有大小为三的组才可能满足目标约束；而对于这些组，可行性仍取决于 a_i的具体大小。选定三个元素后，减去偏移量即可恢复原始总和，从而确保每个有效组都与原实例中的一个三元组精确对应。下面给出形式化构造及后续论证。

构造。 给定一个 3-划分 实例 (A, B)，其中 $A = \{a_1, \ldots, a_{3m}\}$，我们定义一个常数 $C := 10B$，并构造一个等价的固定大小 3-划分实例 $(A = \{a'_1, a'_2, \ldots a'_{3m}\}, B' = 3C + B)$，其中对于 $i \in [3m]$， $a'_i := a_i + C$。

引理 2。 (A, B) 是一个 *3*-划分 的是实例，当且仅当 (A', B') 是一个固定大小 *3*-划分的是实例。

证明。 在给出证明之前，我们注意到，由于所有 a_i 都是正整数，3-划分的输入实例中不可能包含任何元素 $a_i > B$。基于这一观察，考虑所构造的固定大小 3-划分实例中任意一个大小至多为 2 的组，其最大和为 $2B + 2C < 3C < B'$。另一方面，任何包含四个元素的组，其最小可能和为 $4C > B'$，这进一步意味着 $k_r \leqslant 3$。因此，任何达到目标和 B' 的组，其大小必定恰好为 3。

（若）。假设 (A, B) 是 3-划分的一个是实例，且 A 可划分为 m 个互不相交的三元组 $\{\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}\}_{r \in [m]}$，其中 $\sum_{j=1}^{3} a_{r_j} = B$。那么，对于每个这样的三元组，相应的三元组

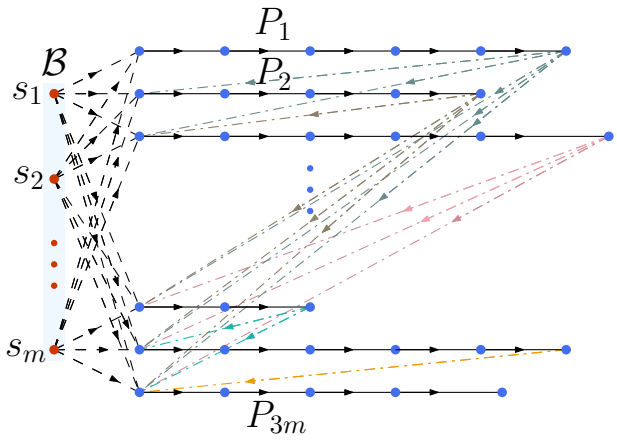

图 1：从固定大小 3-划分问题归约

$\{\{a'_{r_1}, a'_{r_2}, a'_{r_3}\}\}_{r\in[m]}$ 构成了 A'的一个有效划分，分为 m 个组，因为 $\sum_{j=1}^{3} a'_{r_j} = \sum_{j=1}^{3}(a_{r_j}+C) = B+3C = B'$，因此 (A', B') 是固定大小 3-划分的一个是实例。

（仅当）。反过来，假设 (A', B') 是固定大小 3-划分的一个是实例，并且如证明开头所述，A' 可以划分为 m 个组，每组大小为 3，$\{\{a'_{r_1}, a'_{r_2}, a'_{r_3}\}\}_{r\in[m]}$ 每组的和为 $B' = 3C + B$。但这样一来，$\{\{a_{r_1}, a_{r_2}, a_{r_3}\}\}_{r\in[m]}$ 就构成了 A 的一个有效划分，分为 m 个组，因为 $\sum_{j=1}^{3} a_{r_j} = \sum_{j=1}^{3}(a'_{r_j} - C) = B' - 3C = B$，因此 (A, B) 是 3-划分的一个是实例。 □

由于包括目标和 B' 在内的所有元素的大小最多增加B的线性倍数，因此该归约对于输入规模而言是多项式的。又由于 3-划分是 NP-困难的，立即得到以下结论。

定理 1。 固定大小-3-划分-问题 即使在 B'取常数值时仍是 *NP*-困难的。

6.2 从固定大小 3-划分到有向无环图上的肾脏交换 问题 的归约

接下来，我们证明有向无环图上的肾脏交换问题即使在 ℓ_p 取固定（常数）值时仍是 NP-困难的，方法是展示从固定大小 3-划分问题出发的多项式归约。**构造**。 设 $(A' = \{a'_1, \ldots, a'_{3m}\}, T')$ 是固定大小 3-划分的一个实例。我们按如下方式构造一个等价的肾脏交换实例 $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$。

- 对于每个 $a'_i \in A'$，创建一条包含 a'_i 个顶点的有向（元素）路径 P_i （见图 1）。
- 添加 m 个利他顶点 $\mathcal{B} = \{s_1, \ldots.. s_m\}$。从每个 s_j $j \in [m]$，向每个 P_i $i \in [3m]$的第一个顶点添加一条出边/弧。
- 将路径 P_1，……，P_{3m} 编号；对于每个 $i < j$，从 P_i 的最后一个顶点向 P_j 的第一个顶点添加一条出边/弧（连接弧）。这样既保持了无环性，也为路径拼接提供了可能。
- 设定 $\ell_p := B' + 1$ 和 $t = |V(\mathcal{G})| = \sum_{i\in[3m]} a'_i + m$。我们考虑长度至多为 ℓ_p 的顶点不相交的利他路径，并关注能够覆盖 $\mathcal{G}$ 的所有顶点的解。

引理 3。 (A', B') 是固定大小3-划分 的一个是实例，当且仅当 $(\mathcal{G}, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$ 是肾脏 交换的一个是实例。

证明。 **(若)**。 假设 (A', B') 是固定大小 3-划分的一个是实例，其中 A' 可以划分为m 个互不相交的三元组，$\{\{a'_{r_1}, a'_{r_2}, a'_{r_3}\}\}_{r\in[m]}$ 每个三元组的和均为 T'。对于每个三元组 $\{a'_{r_1}, a'_{r_2}, a'_{r_3}\}$（不失一般性，我们假设 $r_1 < r_2 < r_3$），我们构造一条长度恰为 ℓ_p 的利他路径作为解，该路径从 s_r出发，后接路径 P_{r_1}、 P_{r_2} 和 P_{r_3}。这些 m 条利他路径合起来覆盖所有顶点，且每条路径的长度恰为 ℓ_p。

（仅当）。反之，假设 $(G, \mathcal{B}, \ell_p, \ell_c, t)$ 是肾脏交换的一个是实例，其中存在一组 m 个顶点不相交的利他路径，并且这些路径共同覆盖 G的所有顶点。注意，为了覆盖图中的所有顶点，每条这样的利他路径的长度必须恰好为 ℓ_p 。此外，每条利他路径都从一个利他顶点 s_r 开始，并在其第一个顶点处立即进入某条元素路径 P_i，因为从利他顶点出发的唯一出边通向由元素构造的路径的首个／初始顶点。根据构造，每条元素路径 P_i 都是一条有向路径，其首个顶点只有入边，末个顶点只有出边。因此，利他路径只能遍历完整的元素路径；它不能从元素路径的内部顶点进入或离开。此外，任何利他路径都不能在除元素路径末个顶点以外的任何顶点处结束，因为内部顶点和末个顶点都不能由其他利他路径覆盖。特别地，这保证了元素路径被完整地分配给各条利他路径。最后，连接弧强制要求任何利他路径都按照索引递增的顺序遍历元素路径。元素路径向利他路径的完整分配，加上每条利他路径的长度恰好为 $\ell_p = 1 + B'$ 这一事实，保证了每条利他路径恰好包含 3 条元素路径。因此，利他路径在索引集 $\{1, \ldots, 3m\}$ 上诱导出一个划分，将其划分为恰好 m 个组（每条利他路径对应一个组）；与某条利他路径对应的组由该路径按递增顺序遍历的元素路径的索引组成。这意味着，任何这样大小为 3 的组中所有非利他顶点的总数恰好等于 B'。因此，对这些 $3m$ 索引的划分也给出了对 A' 的划分，将其划分为 m 个、每个总和为 B' 的组，从而使 (A', B') 成为固定大小 3-划分的一个是实例。

□

复杂性。 该归约引入了 $O(\sum_i a'_i)$ 个顶点和 $O((\sum_i a'_i)^2)$ 条边，二者的数量均为输入规模的多项式级别。而且， ℓ_p 是 $B' + 1$ 意味着以下结论。

定理5。 即使将实例限制为路径长度上界为固定常数 ℓ_p，肾脏交换 问题在有向无环图上仍是 *NP*-困难的。

Co推论1。 关于有向反馈顶点集，肾脏交换 问题是 *para-NP-hard*+ℓ_p+ℓ_c .

7 结论

在这项工作中，我们通过提出更快的参数化算法和更紧的下界，推进了对肾脏交换问题的理论认识。具体而言，我们给出了目前已知最快的确定性固定参数可处理（FPT）算法，该算法以获救患者数量为参数，将先前最优的运行时间从 $O^*(14^t)$ 改进至 $O^*((4e)^t) \approx O^*(10.88^t)$。我们的方法将彩色编码（通过 t-完美哈希族去随机化）与基于子集的动态规划框架相结合，系统地构造可行环和利他链。由此得到一种简洁、纯组合的算法，具有高效、透明的特点，并且在此类确定性方法中渐近最优。

除了改进算法之外，我们还证明了该问题在以 $t + \ell_p + \ell_c + |\mathcal{B}|$ 为参数时不存在多项式核，除非 $\mathrm{NP} \not\subseteq \mathrm{coNP/poly}$，从而排除了在标准复杂性假设下实现高效实例压缩的可能性。我们进一步加强了已知的困难性结果，证明即使在无环或不存在利他捐赠者等严格结构限制下，肾脏交换在以路径宽度为参数时仍是 W[1]-困难的。这解决了一个自然的开放问题，即该问题在有界路径宽度图上的可处理性。作为这些结果的补充，我们还

证明了相对于组合参数有向反馈顶点集、ℓ_p、ℓ_c 的 para-NP 困难性，从而近乎全面地描绘了该问题的参数化复杂性版图。

综合来看，我们的研究结果清晰地划定了在多种结构性与定量参数下，肾脏交换问题中可处理与不可处理情形之间的界限。从更广泛的视角来看，这些结果巩固了算法化肾脏交换的理论基础，阐明了通过参数化能够实现何种形式的效率，以及哪些障碍已被证明是固有的。

未来研究有几个值得探索的方向。首先，一个直接的方向是进一步改进FPT算法的运行时间，既可以收紧指数中的常数，也可以探索其他算法范式，例如代表集或基于容斥原理的方法。另一个方向是研究指数时间假设（ETH）或强 ETH 下的下界，这有助于厘清我们当前的算法在渐近意义上是否已达到最优。降低对输入规模的多项式依赖也很有价值 n，因为在实际应用中，这一项往往占据主导地位。

在建模方面，我们的工作聚焦于经典的环与链表述。将这些技术扩展到更丰富、更贴近现实的模型——包括加权交换或基于效用的交换、动态或在线表述，以及兼顾公平性或优先级的变体——仍是一项重要的开放挑战。此类扩展将弥合参数化理论与可扩展、符合价值目标的肾脏交换算法设计之间的差距，而这类算法应用于国家登记系统。最后，探索受核化启发的预处理启发式方法，或结合结构参数与解规模参数的混合参数化，或可为如何兼顾理论严谨性与现实效率带来新的见解。

致谢

Aritra Banik 感谢印度政府通过项目 MTR/2022/000253，借助 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）（前科学、教育与研究委员会（SERB））提供的支持。Palash Dey 感谢 Anusandhan 国家研究基金会（ANRF）（前科学、教育与研究委员会（SERB））通过编号为 CRG/2022/003294 的文件提供核心研究资助，以支持本项工作。

参考文献

[ABS07] David J. Abraham、Avrim Blum 和 Tuomas Sandholm。易货交换市场的撮合算法：推动全国范围的肾脏交换。在 Jeffrey K. MacKie-Mason、David C. Parkes 和 Paul Resnick（编），第八届 *ACM* 电子商务会议论文集（*EC-2007*），第 295–304 页。ACM，2007 年。.[Alv04] Alvin Roth、Tayfun S¨onmez、Utku Unver。肾脏交换。《经济学季刊》，119(2):457–488，2004 年。[Alv05a] Alvin Roth、Tayfun S¨onmez、Utku ¨Unver。新英格兰的肾脏交换清算中心。*Am.Econ.Rev*，95(2):376–380，2005 年。.[Alv05b] Alvin Roth、Tayfun S¨onmez、Utku Unver。两两肾脏交换。*J. Econ.Theory*，125(2):151–188，2005 年。[Alv07] Alvin Roth、Tayfun S¨onmez、Utku ¨Unver。高效的肾脏交换：基于相容性偏好的市场中需求巧合的作用。*Am. Econ.Rev*，第 828–851 页，2007 年。[AR 21] Itai Ashlagi 和 Alvin E Roth。肾脏交换：运筹学视角。《管理科学》，67(9):5455–5478，2021 年。[AYZ95] Noga Alon、Raphael Yuster 和 Uri Zwick。彩色编码。《*ACM* 杂志》，42(4):844–856，1995 年。

[BHK+22] R´emy Belmonte、Tesshu Hanaka、Masaaki Kanzaki、Masashi Kiyomi、Yasuaki Kobayashi、Yusuke Kobayashi、Michael Lampis、Hirotaka Ono 和 Yota Otachi。(a, l)-路径打包的参数化复杂性。Algorithmica，84(4):871–895，2022 年。[BJK13] Hans L. Bodlaender、Bart M. P. Jansen 和 Stefan Kratsch。路径与环问题的核界。《理论计算机科学》，511:117–136，2013 年。[BJK14] Hans L. Bodlaender、Bart M. P. Jansen 和 Stefan Kratsch。通过交叉组合证明的核化下界。《计算系统理论》，54(3):441–456，2014 年。[BMR09] P´eter Biro、David F Manlove 和 Romeo Rizzi。有向图中的最大权环打包及其在肾脏交换项目中的应用。《离散数学：算法与应用》，1(04):499–517，2009 年。[BVdKM+21] P´eter Bir´o、Joris Van de Klundert、David Manlove、William Pettersson、Tommy Andersson、Lisa Burnapp、Pavel Chromy、Pablo Delgado、Piotr Dworczak、Bernadette Haase 等。欧洲肾脏交换项目的建模与优化。《欧洲运筹学杂志》，291(2):447–456，2021 年。[CFK+15] Marek Cygan、Fedor V. Fomin、Lukasz Kowalik、Daniel Lokshtanov、D´aniel Marx、Marcin Pilipczuk、Michal Pilipczuk 和 Saket Saurabh。《参数化算法》。Springer，2015 年。[CKVR13] Miguel Constantino、Xenia Klimentova、Ana Viana 和 Abdur Rais。关于肾脏交换问题整数规划模型的新见解。《欧洲运筹学杂志》，231(1):57–68，2013 年。[DMP+16] John P Dickerson、David F Manlove、Benjamin Plaut、Tuomas Sandholm 和 James Trim[ble。肾脏交换的位置索引公式。在《2016年 ACM 经济学与计算会议论文集》，第 25–42 页，2016 年。[FBSA+20] Rachel Freedman、Jana Schaich Borg、Walter Sinnott-Armstrong、John P Dickerson 和 Vin[cent Conitzer。调整肾脏交换算法以符合人类价值观。《人工智能》，283:103261，2020 年。[GvdKW14] Kristiaan M Glorie、J Joris van de Klundert 和 Albert PM Wagelmans。长链肾脏交换：用于通过分支定价撮合易货交换的高效定价算法。《制造与服务运营管理》，16(4):498–512，2014 年。[HJLSS24] ´Ursula H´ebert-Johnson、Daniel Lokshtanov、Chinmay Sonar 和 Vaishali Surianarayanan。重新审视肾脏交换的参数化复杂性。在 Kate Larson（编）的《第三十三届国际人工智能联合会议论文集》，IJCAI-24，第 76–84 页。国际人工智能联合会议组织，2024 年 8 月。主会场。[HLSS24] ´Ursula H´ebert-Johnson、Daniel Lokshtanov、Chinmay Sonar 和 Vaishali Surianarayanan。重新审视肾脏交换的参数化复杂性。载于《第三十三届国际人工智能联合会议论文集》，IJCAI 2024，韩国济州，2024年8月3日至9日，第 76–84 页。ijcai.org，2024 年。[JKMS13] Klaus Jansen、Stefan Kratsch、D´aniel Marx 和 Ildik´o Schlotter。重新审视固定箱数的装箱问题。《计算机与系统科学杂志》，79(1):39–49，2013 年。[JTWZ17] Zhipeng Jia、Pingzhong Tang、Ruosong Wang 和 Hanrui Zhang。用于易货交换的高效近似最优算法。载于《第十六届自主智能体与多智能体系统会议论文集》，第 362–370 页，2017 年。

[KAV14] Xenia Klimentova、Filipe Alvelos 和 Ana Viana。《肾脏交换问题的新型分支定价法》。载于《国际计算科学及其应用会议论文集》，第237–252页。Springer，2014年。[KNS+07] Michael Krivelevich、Zeev Nutov、Mohammad R Salavatipour、Jacques Verstraete 和 Raphael Yuster。《环打包问题的近似算法与困难性结果》。ACM T Algorithms，3(4):48–es，2007年。[LLHT14] Jian Li、Yicheng Liu、Lingxiao Huang 和 Pingzhong Tang。《平等主义配对式肾脏交换：通过线性规划和参数流实现快速算法》。载于自主智能体与多智能体系统国际会议，第445–452页，2014年。[LWFF19] Mugang Lin、Jianxin Wang、Qilong Feng 和 Bin Fu。《肾脏交换问题的随机化参数化算法》。《算法》，12(2):50，2019年。[MD22] Arnab Maiti 和 Palash Dey。《肾脏交换的参数化算法》。载于 Luc De Raedt（编），《第三十一届国际人工智能联合会议论文集》，IJCAI 2022，奥地利维也纳，2022年7月23日至29日，第405–411页。ijcai.org，2022年。[MH17] Vicky Mak-Hau。《关于肾脏交换问题：有向图上带基数约束的环问题与链问题——整数规划方法综述》。《J Comb Optim》，33(1):35–59，2017年。[MO15] David F Manlove 和 Gregg O'Malley。《英国的配对式及利他性肾脏捐赠：算法与实验》。《J. Exp. Algorithmics》，19:1–21，2015年。[NSS95] Moni Naor、Leonard J. Schulman 和 Aravind Srinivasan。《分割器与近乎最优的去随机化》。载于《第二十七届 ACM 计算理论年度研讨会（计算理论研讨会）论文集》，第182–191页。ACM，1995年。[Rap86] Felix T Rapaport。《建立国际在世情感相关肾脏捐赠者交换登记系统的理由》。载于《移植学进展》，第18卷，第5页，1986年。[RAR15] David Gamarnik、Ross Anderson、Itai Ashlagi 和 Alvin E Roth。《利用旅行商问题在肾脏交换中寻找长链》。《美国国家科学院院刊》，112(3):663–668，2015年。[SGW+05] Dorry L Segev、Sommer E Gentry、Daniel S Warren、Brigitte Reeb 和 Robert A Montgomery。《肾脏配对捐赠与活体捐赠器官的优化利用》。《美国医学会杂志》，293(15):1883–1890，2005年。[SMK23] Darren Stewart、Tatenda Mupfudze 和 David Klassen。《真的有人知道（肾脏中位等待）时间是多少吗？》。《美国移植学杂志》，23(2):223–231，2023年。[S ¨U14] Tayfun S¨onmez 和 M Utku ¨Unver。《利他性不平衡肾脏交换》。《J. Econ. Theory》，152:105–129，2014年。[Wal21] Dylan Walsh。《一个巧妙的应用：运用经济学让肾脏交换更高效、更公平》。斯坦福大学商学院，2021年。[XW18] Mingyu Xiao 和 Xuanbei Wang。《肾脏交换的精确算法与复杂性》。载于 IJCAI，第555–561页，2018年。