图的支配

Julian A.D. Allagan[1], **Benkam Bobga**[2]

[1]数学系、计算机科学与工程技术系 伊丽莎白城州立大学 美国北卡罗来纳州伊丽莎白城

[2]数学系 北乔治亚大学 美国佐治亚州盖恩斯维尔

电子邮件：adallagan@ecsu.edu, benkam.bobga@ung.edu

（2021年1月28日）

arXiv:2512.24115v1 [math.CO] 30 Dec 2025

摘要

给定一个图 $G = (V, E)$，若子集 $S \subseteq V$ 中的每个顶点都与 S 中的某个顶点相邻，则称 $S \subseteq V$ 为支配集。基数最小的支配集 γ称为 γ-集，通常称为最小支配集。图 G的支配数记为 $\zeta(G)$，表示其 γ-集的数量。本文建立了这两个看似不同的参数之间的一些关系。特别地，我们给出了路径、某些圈以及任意两个图的联的支配数。

1 引言

图 $G = (V, E)$ 的支配集是一个子集 $S \subseteq V$，使得每个顶点 $v \in V$要么属于 S，要么有一个邻点 $u \in S$。如果 $u = v$ 或 $uv \in E$，则称顶点 $u \in S$ 覆盖顶点 $v \in V$。若支配集 S 没有真子集 $S' \subset S$ 也是支配集，则称其为极小支配集。图 G 的支配数 $\gamma(G)$是图 G所有支配集中基数的最小值。显然，图 G 可以有多个最小支配集。为简单起见，我们将这些集合称为 γ**-集**。

关键词与短语：支配、支配数、图。**1AMS（MOS）主题分类**：05C30

支配集，尤其是 γ-集，已得到广泛研究。我们建议读者阅读 Haynes 等人 的著作 [8] 以及其他几篇关于支配集变体和应用的研究作品 [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9] 。在这些文献中，我们发现了多种形式的 γ-集，例如完美支配集、双重支配集、强支配集和受限支配集。一般而言，每种此类 γ-集都有一些特定性质。这里，我们列出五种最常研究的 γ-集及其性质。稍后在例 1.1 中，我们将逐一展示这类γ-集。

1. 完美 γ集要求一个 γ集中任意两个顶点都不能覆盖同一个顶点（该 γ 集之外的顶点）。2. 连通 γ集要求由 γ集诱导的图是连通的。3. 全 γ集禁止由γ集诱导的子图中出现孤立顶点。4. 独立 γ集要求 γ集中的所有顶点在其诱导的子图中都是孤立顶点。5. 团 γ 集要求 γ集中的顶点诱导出一个团。

由于给定的图可能有多个 γ集，本文探讨一个自然却基础的问题：给定的图有多少个 γ集？为回答这一问题，我们引入**支配数**的概念。

图 $G = (V, E)$的支配数，记为 $\zeta(G)$，是其 γ集的数量。换言之，

$\zeta(G) := |\{S : S$ 是 G 中的支配集，且 $|S| = \gamma\}|$。例如，给定一个完全图 $G = K_n$，显然每个 $v \in V(G)$都覆盖 G中其余的 $n-1$ 个顶点。因此， $\zeta(G) = n$ ，而 $\gamma(G) = 1$。此外，对于一个阶为 $n+1 \geq 3$的星图$G = K_{1,\ n}$，容易看出 $\gamma(G) = 1 = \zeta(G)$，因为只有中心顶点能够覆盖其余所有 $n \geq 2$ 个顶点。

例 1.1。

这里，我们说明单圈图 G 的 γ-集（见图 1）。

考虑图 1 所示的单圈图 G。容易看出 $\gamma(G) = 3$。我们列出所有满足性质的 γ-集，这些性质属于前文提到的五种常见性质。

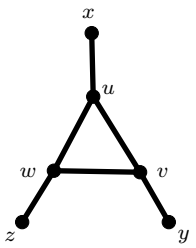

图 1：太阳图 G 含有 $\gamma(G) = 3$ 和 $\zeta(G) = 8$

- $\{u、\ v、\ w\}$ 是一个完美 γ-集、连通 γ-集、全 γ-集和团 γ-集。

- $\{x, y, z\}$ 是一个完美的 γ-集，也是一个独立的 γ-集。

- $\{u, y, z\}$, $\{v, x, z\}$ 和 $\{w, x, y\}$ 是独立的 γ-集，但不是完美、连通、团或全体集。

- $\{u, v, z\}$, $\{u, w, y\}$ 和 $\{v, w, x\}$ 是 γ-集，不具备我们先前列出的 5 种特殊性质中的任何一种。

我们有 $\zeta(G) = \sum_{i=0}^{3} \binom{3}{i} = 8$，即 G 的 γ-集数量。我们将前一个例子推广到这类单圈图，它们通常称为太阳图。

命题 1.2。 如果 G 是一个有 $2n \geq 6$ 个顶点的太阳图，那么 $\zeta(G) = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} = 2^n$.

证明。 对于圈上的每个顶点，以及每个支配集 $S \subseteq V(G)$，该顶点或其叶邻点必须属于 S。因此，我们可以通过从 G 中的 n 个叶子以及未选叶子的圈邻点的集合中选取子集，构造所有的 γ-集 S。这给出 $\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}$。反之，对于每个叶子，通过选择圈上的顶点或该叶子所组装的每个 S，都是一个关于 G 的 γ-集。这给出 $\zeta(G) = 2^n$。 □

2 某些图的支配数

设 $P_n := v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} - v_n$ 表示一个具有 $n \geq 2$ 个顶点的路径。我们将证明以下每一项断言：

命题 2.1。 不存在同时包含顶点 v_{n-1}, v_n 的 γ-集合。

证明。 假设 $n = 3k+1$。容易看出 $\gamma(P_{3k+1}) = k+1$，不妨假设存在一个 γ-集合 S，其中有 $|S| = k+1$，并且同时包含 v_{3k}，v_{3k+1}。由于 v_{3k-1} 被 v_{3k} 覆盖（反之亦然），因此还剩下 $3k-2$ 个 P_{3k+1} 的顶点，需要使用 S 的其余 $k-1$ 个顶点来覆盖。因为 S 的每个顶点至多覆盖 P_{3k+1} 中另外 2 个顶点，所以 $k-1$ 个顶点至多能覆盖该路径上的 $3(k-1)$ 个顶点，以及 $3(k-1) < 3k-2$。当 $n = 3k+2$ 时可用类似论证处理，而当 $n = 3k$ 时，则可由鸽巢原理得出，因为 $\gamma(P_{3k}) = k$。 □

命题 2.2。 不存在排除顶点 v_{n-1}、v_n 的 γ-集合。

证明。 假设 S 是 P_n 的一个 γ-集合，且排除了两个连续顶点 v_{n-1}，v_n。由此可知，$v_n \in V$（P_n）未被覆盖。因此，S 不是 P_n 的 γ-集合。 □

命题 2.3。 每个 γ-集合都包含 v_{n-1} 或 v_n 中的一个，但不会同时包含二者。

命题 2.4。 当 $n = 3k$、$k \geq 1$、ζ（P_n）$= 1$ 时，P_n 中唯一的 γ-集合包含 v_{n-1}。此外，当 $n = 3k+2$、$k \geq 1$ 时，P_n 中仅有一个包含 v_n 的 γ-集合。

证明。当 $n = 3k$、$k \geq 1$ 时，我们有 ζ（P_n）$= k$，结论由命题 2.1 中提到的鸽巢原理论证得出。由 3 个连续顶点组成的每个集合 $\{v_{3r+1}$、v_{3r+2}、$v_{3r+3}\}$、$r = 0$、...、$k-1$ 都必须包含任意 γ-集合 S 的至少一个顶点；又由于 $\gamma = k$，这些集合中的每一个都必须恰好包含 S 的一个元素。由于 S 是支配的，$\{v_1$、v_2、$v_3\}$ 中属于 S 的元素必须是 v_1 或 v_2。如果 v_1，那么 S 的“下一个”元素必须是 v_4，这迫使 $S =$ 包含 $\{v_1$、v_4、.....、$v_{3k-2}\}$，从而使 v_{3k} 未被覆盖。因此，S 的第一个元素必须是 v_2，这迫使 $S =$ 包含 $\{v_2$、v_5、.....、v_{3k-1}、$v_{3k+2}\}$。

假设 $n = 3k+2$，并令 S 为 $V(P_n)$ 中的一个 γ-集。则 $|S| = k+1$。假设 $v_n \in S$。则 $v_{n-1} \notin S$，因此 $S - \{v_n\}$ 必须是 $P_n - \{v_n, v_{n-1}\} = P_{3k}$ 中的一个支配集。由于 $|S - \{v_n\}| = k = \gamma(P_{3k})$，根据前面的论证可得 $S = \{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}, v_{3k+2}\}$。

□

定理 2.5。 若 G 是一条包含 n 个顶点的路径，则其支配数为

$$\zeta(G) = \begin{cases} 1, & if\ n \equiv 0 \pmod 3 \quad (i) \\ \frac{(n+2)(n+11)}{18} - 1, & if\ n \equiv 1 \pmod 3 \quad (ii) \\ \lceil \frac{n}{3} \rceil + 1, & if\ n \equiv 2 \pmod 3. \quad (iii) \end{cases}$$

证明。 （i）部分。这可由命题 2.4 直接推出。

（iii）部分。假设 $n = 3k+2, k \geq 1$ 和 $G = P_n$。我们有 $\gamma(G) = k+1$，并且每个 γ-元集合 $S \subseteq V(G)$ 恰好包含 v_n, v_{n-1} 中的一个。由命题 2.4 可知，这样的 S 中恰好有一个包含 v_n，因此我们的任务是证明恰好有 $\lceil \frac{n}{3} \rceil = k+1$ 个这样的 S 包含 v_{n-1}。假设 S 是一个 γ-元集合， G 中包含 v_{n-1}。根据命题 2.4 的证明中的推理，每个 3- 元集合 $T_r = \{v_{3r+1}, v_{3r+2}, v_{3r+3}\}$， $r = 0$，……， $k-1$ 都恰好包含 S 的一个顶点。

若 $0 \leq r < k-1$ 且 $S \cap T_r = \{v_{3r+1}\}$，那么由于 S 在G中是支配的，$S \cap T_{r+1} = \{v_{3r+4}\}$；因此，若 $S \cap T_r = \{v_{3r+1}\}$，则 $S \cap T_s = \{v_{3s+1}\}, r \leq s \leq k-1$。

另一方面，如果 $S \cap T_r = \{v_{3r+2}\}$，那么 $S \cap T_{r+1}$ 要么是 $\{v_{3r+4}\}$，要么是 $\{v_{3r+5}\}$。由于 $S \cap T_0$ 要么是 $\{v_1\}$，要么是 $\{v_2\}$（因为 v_3 不覆盖 v_1），因此，包含 v_{n-1} 的 $G = P_n, n = 3k+2$ 的 γ- 集如下：

$$\begin{aligned} S_0 &= \{v_1, v_4, \ldots, v_{n-4}, v_{n-1}\}, \\ S_1 &= \{v_2, v_4, \ldots, v_{n-4}, v_{n-1}\}, \\ &\vdots \\ S_r &= \{v_2, v_5, \ldots, v_{3r-1}, v_{3r+1}, \ldots, v_{n-4}, v_{n-1}\}, \\ &\vdots \\ S_k &= \{v_2, v_5, \ldots, v_{n-3}, v_{n-1}\}, \end{aligned}$$

这类集合恰好有 $k+1$ 个。

第 (ii) 部分 我们递归地求得 $G_k = P_{3k+1} := v_1 - v_2 - \ldots - v_{3k} - v_{3k+1}$ 的 ζ 值，同时增大 $k \geq 1$ 的值。为简单起见，令 $\zeta(G_k) = \zeta_k, k \geq 1$。

当 $k = 1$ 时，很容易验证 G_1 的 γ-集为 $\{v_1, v_3\}$、$\{v_1, v_4\}$、$\{v_2, v_3\}$、$\{v_2, v_4\}$。因此 $\zeta_1 = 4$。

当 $k = 2$ 时，显然 $\gamma(G_2) = 3$。由于 v_6 覆盖了 v_5 和 v_7，我们将 v_6 添加到 G_1 的每个 γ-集合中，得到 $\{v_1, v_3, v_6\}$、$\{v_1, v_4, v_6\}$、$\{v_2, v_3, v_6\}$、$\{v_2, v_4, v_6\}$。此外，由于 v_4 覆盖了 v_5，且 v_7 覆盖了 v_6，我们将 v_7 添加到 G_1 中包含 v_4 的每个 γ-集合中。这为 G_2生成了另外两个 γ-集合，即 $\{v_1, v_4, v_7\}$、$\{v_2, v_4, v_7\}$。最后，利用新的唯一集合 $\{v_2, v_5\}$

它覆盖了除 v_7以外的所有其他顶点，我们用 v_6 生成 G_2 的另外两个 γ-集合，一个用 v_6，另一个用 v_7。显然， v_6 覆盖了 v_7 （反之亦然），得到 $\{v_2, v_5, v_6\}$，$\{v_2, v_5, v_7\}$。因此 $\zeta_2 = 8$。

当 $k = 3$ 时，显然 $\gamma(G_3) = 4$。我们采用与 $k = 2$ 情形下非常相似的构造。由于 v_9 覆盖 v_8 和 v_{10}，我们将 v_9 加入 G_2 的每个 8 γ-集合中，得到 $\{v_1, v_3, v_6, v_9\}$, $\{v_1, v_4, v_6, v_9\}$, $\{v_2, v_3, v_6, v_9\}$, $\{v_2, v_4, v_6, v_9\}$, $\{v_1, v_4, v_7, v_9\}$, $\{v_2, v_4, v_7, v_9\}$, $\{v_2, v_5, v_6, v_9\}$, $\{v_2, v_5, v_7, v_9\}$。此外，我们将 v_{10} 加入 G_2 中包含 v_7 的每个 γ-集合，因为 v_7 覆盖 v_8，且 v_{10} 覆盖 v_9。这样便为 G_3 额外生成了三个 γ-集合，即 $\{v_1, v_4, v_7, v_{10}\}$, $\{v_2, v_4, v_7, v_{10}\}$, $\{v_2, v_5, v_7, v_{10}\}$。最后，利用唯一的集合 $\{v_2, v_5, v_8\}$（它覆盖除 v_{10} 以外的所有其他顶点），我们分别使用 v_9 和 v_{10}，为 G_3 再生成两个 γ-集合。因此， v_9 覆盖 v_{10} （反之亦然），得到 $\{v_2, v_5, v_8, v_9\}$, $\{v_2, v_5, v_8, v_{10}\}$。因此， $\zeta_3 = 13$。现在，我们将先前的构造推广到所有 $k \geq 2$。

显然， $\gamma(G_k) = k + 1$。因此，对于 $k \geq 2$，我们通过以下方式扩展 G_{k-1} 的 G_k 的γ-集合，并反复构造 G_k 的γ-集合：

(a) 由于 v_{3k} 覆盖了 v_{3k-1} 和 v_{3k+1}，我们将 v_{3k} 加入 G_{k-1}的每个 γ-集合中。(b) 由于 v_{3k-2} 覆盖v_{3k-1}，且 v_{3k+1} 覆盖 v_{3k}，我们将 v_{3k+1} 加入 G_{k-1} 中包含 v_{3k-2} 的每个 γ-集合。(c) 已知唯一的集合$\{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}\}$覆盖了 G_k 中除 v_{3k+1}以外的所有顶点，我们用 v_{3k} 生成 G_k 的另外两个 γ-集合之一，用 v_{3k+1} 生成另一个。显然， v_{3k} 覆盖 v_{3k+1} （反之亦然），于是得到$\{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}, v_{3k}\}$和$\{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}, v_{3k+1}\}$。

根据步骤 (a)–(c)，我们生成一个 ζ_k 值序列，其中 $k \geq 1$，得到

$$4, 8, 13, 19, 26, 34, 43, \ldots$$

对于 $k \geq 1$ 令 $A_k = \{S \subseteq V(G_k) \mid S$ 为 $\gamma-$ 中的一个集合，且 G_k 和 $v_{3k+1} \in S\}$，$B_k = \{S \subseteq V(G_k) \mid S$为 $\gamma-$ 中的一个集合，且 G_k和 $v_{3k+1} \notin S\}$，以及 $a_k = |A_k|$，$b_k = |B_k|$。那么 $\zeta(G_k) = a_k + b_k$。注意， $S \in B_k \implies v_{3k} \in S$。如果 $S \in B_k$，则有 3 种可能；如果 $k \geq 2$:

1. v_{3k-1}， $v_{3k-2} \notin S$，在这种情况下 $S \setminus \{v_{3k}\} \in B_{k-1}$.
2. $v_{3k-1} \in S$.
3. $v_{3k-2} \in S$.

不可能出现 $\{v_{3k-2}、\ v_{3k-1}、\ v_{3k} \subseteq S \in B_k\}$，因为这一包含关系意味着 $S \setminus \{v_{3k-1}、\ v_{3k}\}$ 是 G_{k-1} 中的一个支配集，这是不可能的，因为 $|S \setminus \{v_{3k-1}、\ v_{3k}\}| = k-1 < \gamma(G_{k-1}) = k$。因此，对于 $S \in B_k$，2 和 3 是互不相交的可能情况。

在情形 2 中，我们看到 $S' = S \setminus \{v_{3k-1},\ v_{3k}\}$ 是 $P_{3(k-1)}$ 中的一个支配集，其中有 $k-1 = \gamma(P_{3(k-1)})$ 个顶点，并且我们知道这样的集合只有一个，$S' = \{v_j \mid j \equiv 2 \pmod 3$ $2 \le j \le 3k-4\}$。

在情形 3 中，$S \setminus \{v_{3k}\} \in A_{k-1}$。此外，如果 $S' \in A_{k-1}$，那么 $S' \cup \{v_{3k}\} \in B_k$。情形 1 和 2 也有类似的逆命题：在情形 2 中，如果 S' 是 $P_{3(k-1)}$ 中唯一的 γ-集，那么 $S' \cup \{v_{3k-1},\ v_{3k}\} \in B_k$；在情形 1 中，如果 $S' \in B_{k-1}$，那么 $S \cup \{v_{3k}\} \in B_k$。综合这些观察，我们得到 $b_k = a_{k-1} + b_{k-1} + 1$ $(*)$。

若 $S \in A_k$，则 $|S \setminus \{v_{3k+1}\}| = k$；由于每个集合 T_r, $r = 0,\ldots,k-1$ 都必须包含 $S \setminus \{v_{3k+1}\}$ 的至少一个顶点，因此每个 T_r 恰好包含 S 的一个顶点。由此可得 $v_{3r+3} \notin S$, $r = o \ldots k-1$；因为如果 $v_{3r+3} \in S$，那么由于 S 的相邻元素之间不能有超过 2 个顶点，便可推出 $v_{3s+3} \in S$, $0 \le s \le r$。但此时 v_3 是 T_0 中 S 的唯一代表，这与前提 S 是 G_k 中的一个 γ-集合相矛盾。

因此，$S \in A_k$ 意味着 $v_{3k} \notin S$，所以 $S \cap T_{k-1}$ 中唯一的顶点要么是 v_{3k-1}，要么是 $v_{3k-2} = v_{3(k-1)+1}$。如果 $v_{3k-1} \in S$，那么 $S \setminus \{v_{3k+1}\}$ 是 P_{3k} 中的一个 -集合，所以 $S = \{v_t \mid t = 2 \pmod 3$ $2 \le t \le 3k-1\} \cup \{v_{3k+1}\}$。如果 $v_{3k-2} \in S$，那么 $S \setminus \{v_{3k+1}\} \in A_{k-1}$；反过来，如果 $S' \in A_{k-1}$，那么 $v_{3k-2} \in S'$ 且 $S' \cup \{v_{3k-2}\} \in A_k$。

由前一段可得，对于 $k \ge 2$, $a_k = 1 + a_{k-1}$。由于 $a_1 = 2$，因此 $a_k = k+1$, $k = 1, 2,\ldots$.

由（$*$）可得，对于 $k \ge 2$,

$$\begin{aligned} b_k &= a_{k-1} + b_{k-1} + 1 = b_{k-1} + k + 1 \\ &= b_1 + [(k+1) + k + \ldots + 3] \\ &= 2 + \frac{(k+2)(k+1)}{2} - 3 \\ &= \frac{k^2 + 3k}{2}. \end{aligned}$$

因此，对于 $k \ge 2$,

$$\begin{aligned} \zeta(G_k) &= a_k + b_k = k + 1 + \frac{k^2 + 3k}{2} \\ &= \frac{k^2 + 5k + 2}{2} = \frac{(n+2)(n+11)}{18} - 1 \end{aligned}$$

若 $n = 3k+1$。

□

引理 2.6。 若 $n = 3k + 2$，则当$n = 3k + 2$时，没有 P_n 的 γ-集包含顶点 v_3。

证明。 假设 $k \geq 1$ 和 $n = 3k + 2$。与任何路径或圈一样，如果 $S \subseteq V(P_n)$是支配的，那么 $V(P_n) \setminus S$ 不能包含 3 个“连续”的顶点，v_{i-1}、 v_i、 v_{i+1}。因此，对于每个这样的 S，每个集合 $T_r = \{v_{3r+1}, v_{3r+2}, v_{3r+3}\}$、$r = 0, \ldots\ldots, k - 1$都至少包含 S中的一个顶点。

现在假设 S 是 P_n中的一个 γ-集。那么， v_{3k+1}, v_{3k+2} 中有一个属于 S；否则，v_{3k+2}就不会被覆盖。由于 $|S| = 3k+1$，每个T_r 必定恰好包含 S中的一个元素。因此，如果 $v_3 \in S$，那么 v_3 就是 T_r中 S 的唯一代表。但这样一来， v_1 就没有被 S覆盖。

□

推论 2.7. 若 G 是一个以 $n = 3k$ 个顶点构成的圈，则其支配数为$\zeta(G) = 3$。

证明。 在整个证明中，我们通过将 v_1与 v_n相连，即 $C_n := v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} - v_n - v_1$，从路径 $P_n := v_1 - v_2 - \ldots - v_{n-1} - v_n$得到 $G := C_n$。

断言 2.8。 如果 $n = 3k$，那么 P_n 的每个 γ-集都是 C_n的一个 γ-集。

证明。 由 $\gamma(P_{3k}) = \gamma(C_{3k}) = k$这一事实，以及 P_n 中的任何支配集在 C_n中也会是支配集这一事实，该断言显然成立。 □

命题 2.9. $\zeta(C_{3k}) = \zeta(P_{3k}) + 2 = 3$ 对所有 $k \geq 1$。

证明。 在 P_{3k} 中的 γ 唯一的集合， $S = \{v_2, v_5, \ldots\ldots, v_{3k-1}\}$，也是 C_{3k} 的一个 γ-集。因此，将这个集合分别顺时针旋转 1 格和 2 格所得的两个集合，也都是 C_{3k} 中的 γ-集，并且是 $\{v_1, \ldots\ldots, v_{3k}\}$ 的不同子集。继续旋转只会重复已经找到的这 3 个集合。因此， $\gamma(C_{3k}) \geq 3$ ，要证明等号成立，只需证明 C_{3k} 的任意一个由顶点构成的 γ-集 S 必定是这 3 个集合之一：

若 S 是 C_{3k} 中的一个 γ-集，则 $|S| = k$。那么至少有两个连续顶点u, $w \in V(C_{3k}) \setminus S$。将圈上的顶点重新命名，使得$u = v_{3k}$ 且 $w = v_1$。由于 v_1, v_{3k} 均不在 S中，但 S 是C_{3k}中的支配集，因此 S 必定是路径 $P_{3k} := v_1 - \ldots - v_{3k}$ 中的支配集。因此 $S = \{v_2, v_5, \ldots, v_{3k-1}\}$；相对于 C_{3k}上连续顶点的任何其他命名方式，这都是此前已发现的 C_{3k} 中的那些 3 γ-集之一。

□

该结果由定理 2.5 和命题 2.9 得出。

□

注 2.10。

证明 $n = 3k + 1$ 和 $n = 3k + 2$ 的情形似乎更加困难，或许需要一种新颖的方法。不过，我们利用一些较早出现的 ζ 值进行拉格朗日插值，提出一个猜想。

猜想 2.1。 如果 G 是一个有 $n \geq 3$ 个顶点的圈，那么它的支配数为

$$\zeta(G) = \begin{cases} \frac{n^2+5n}{6}, & if\ n \equiv 1 \pmod 3 \\ n, & if\ n \equiv 2 \pmod 3. \end{cases}$$

3 图的联图的统治数

由于前者决定最小支配集的大小，而后者计算这类集合的数量，因此 $\gamma(G)$ 与 $\zeta(G)$ 之间并不存在显而易见的比较界。不过，借助接下来的几个结果，我们将建立这两个参数之间的一些关系，尤其是利用联运算。回顾一下，G_1 和 G_2 的联通常记作 $G = G_1 \vee G_2$，它是由 G_1 和 G_2 的不交并，再添加 $V(G_1)$ 与 $V(G_2)$ 之间的所有边而得到的图。

命题 3.1. 对于任意具有 n 个顶点的连通图 G，$1 \leq \zeta(G) \leq \big(\gamma^{n}_{G}()\big)$。

这些显然的界来自这样一个事实：任意 γ-集都是从 $V(G)$ 中选取的，而 ζ 统计了大小为 $\gamma(G)$ 的此类集合。下界在星图的情形下取等号，而上界在完全图的情形下取等号。

定理 3.2. 设 G_1 和 G_2 是两个连通图，且满足 $2 \leq \gamma(G_1) \leq \gamma(G_2)$。则 $\zeta(G_1 \vee G_2) \geq |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|$。

证明。 设 $G = G_1 \vee G_2$ 满足 $2 \leq \gamma(G_1) \leq \gamma(G_2)$。考虑任意一对 $\{u, v\}$，其中 $u \in V(G_1)$，$v \in V(G_2)$。由此可知，它是 G 的一个 γ-集，因为 u 覆盖了 $V(G_2)$，且 v 覆盖了 $V(G_1)$，从而得到该界。 □

前面的论证还证明了，对于任意两个图 G_1、G_2，$1 \leq \gamma(G_1 \vee G_2) \leq 2$。

定理 3.3。设 G_1 和 G_2 是两个连通图，且满足 $\gamma(G_1) \leq G_2$ 。那么 $\gamma(\quad)$

$$\gamma(G_1 \vee G_2) = \begin{cases} 1 & if\ \gamma(G_1) = 1 \\ 2 & if\ \gamma(G_1) \geq 2. \end{cases}$$

M 此外 ，

$$\zeta(G_1 \vee G_2) = \begin{cases} \zeta(G_1) + \zeta(G_2) + \begin{cases} 0 & if\ \gamma(G_1) = 1 = \gamma(G_2) \\ |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|, & if\ \gamma(G_1) = 2 = \gamma(G_2) \end{cases} \\ \zeta(G_1) \quad\quad + \begin{cases} 0 & if\ \gamma(G_1) = 1 < \gamma(G_2) \\ |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|, & if\ \gamma(G_1) = 2 < \gamma(G_2) \end{cases} \\ |V(G_1)| \cdot |V(G_2)|, \quad\quad if\ 2 < \gamma(G_1) \leq \gamma(G_2). \end{cases}$$

证明。关于 $\gamma(G_1 \vee G_2)$ 的取值，命题的第一部分显然成立。

因此，我们继续证明命题第二部分的结果。全文中，我们分别用 S_1 和 S_2 表示 G_1 和 G_2 的任意 γ-集。

(a)
设 $\gamma(G_1) = 1 = \gamma(G_2)$。根据联运算，任意顶点 $v_1 \in S_1$ 也覆盖任意其他顶点 $v_2 \in V(G_2)$。同样，任意顶点 $v_2 \in S_2$ 也覆盖任意其他顶点 $v_1 \in V(G_1)$。由于 S_1 和 S_2 分别是 G_1 和 G_2 的任意 γ-集，结论得证。

(b)
设 $\gamma(G_1) = 2 = \gamma(G_2)$。显然，每个 γ-集 S_i, $i = 1,2,$ 也是 $G_1 \vee G_2$ 的一个 γ-集，这由 (a) 可知。结论可由定理 3.2 的证明中所给出的论证得出。

(c)
假设 $\gamma(G_1) < \gamma(G_2)$ 且 $\gamma(G_1) \in \{1, 2\}$。由此可得 $\gamma(G_1 \vee G_2) = \gamma(G_1)$。此外，若 $\gamma(G_1) = 1$，则 S_1 也是 $G_1 \vee G_2$ 的一个 γ-集，而 S_2 不是，因为其大小大于 1。类似地，若 $\gamma(G_1) = 2$，则 S_1 是 $G_1 \vee G_2$ 的一个 γ-集，但不是 S_2 的。该结果可由定理 3.2 的证明中给出的论证得出。

(d)
最后，假设 $2 < \gamma(G_1) \leq \gamma(G_2)$。则必有 $\gamma(G_1 \vee G_2) = 2$。在这种情况下， S_1 和 S_2 都不是 γ- $G_1 \vee G_2$ 集。该结论可由定理 3.2 的证明中所给出的论证得到。

□

推论 3.4。 对于任意连通图 G，其中 $\gamma(G) = 1$， $\zeta(G \vee \ldots \vee G$·„„„

[2] Razika Boutrig 和 Mustapha Chellali, 《关于图的弱支配数与强支配数之间关系的注记》, 《Opuscula Mathematica》, 32:235-238, 2012年。[3] Ernest J Cockayne、RM Dawes 和 Stephen T Hedetniemi, 《图的全支配》, 《网络》, 10(3):211-219, 1980年。[4] Gayla S Domke、Johannes H Hattingh、Michael A Henning 和 Lisa R Markus, 《树中的限制支配》, 《离散数学》, 211(1):1-9, 2000年。[5] Michael A Henning, 《图的全支配近期部分研究成果综述》, 《离散数学》, 309(1):32-63, 2009年。[6] Frank Harary 和 Teresa W Haynes, 《图的双重支配》, 《组合艺术》, 55:201-214, 2000年。[7] Teresa W Haynes、Stephen Hedetniemi 和 Peter Slater, 《图的支配：高级主题》, 1997年。[8] Teresa W Haynes、Stephen Hedetniemi 和 Peter Slater, 《图支配基础》, CRC出版社, 1998年。[9] Marilynn Livingston 和 Quentin F. Stout, 《完美支配集》, 密歇根大学计算机科学与工程部, 电气工程与计算机科学系, 1990年。