arXiv:2512.24136v1 [math.GT] 30 Dec 2025

¨通过稳定立方区间为映射类群与 Teichmüller 空间构造双向测地线族

MATTHEW GENTRY DURHAM

摘要。本文主要是一篇综述性文章，我们重新阐述了我们与 Minsky 和 Sisto 证明映射类群及 Teichmüller 空间存在双向测地线族的工作。更一般地，我们说明，在任意可着色的分层双曲空间中，一对点的层次包拟等距于一个维数有界的有限 CAT(0) 立方复形，并且还具有这样一项性质：扰动这对点只会导致立方结构发生一致有界的变化。我们的研究方法在许多方面都更加简洁，也有新的进展。

1. 引言

近年来，立方复形技术被引入有限型曲面的映射类群研究，并带来了显著影响，包括帮助我们控制最高维的拟等距嵌入平坦 [BHS21], 构造双向测地线族 [DMS20，HHP23], 并理解它们无穷远处的几何结构 [DZ22，Ham21，Dur23], 等 [ABD17，Pet21，DZ22，Zal25]。

推动上述大部分工作的核心成果是 *Behrstock–Hagen–Sisto* 的立方模型定理 [BHS21]。该定理大致表明，映射类群中一个有限点集的粗凸包可以由一个 CAT(0) 立方复形进行拟等距逼近；对于双曲空间而言，这相当于 Gromov 的树逼近定理的高维类比。随后，Bowditch [Bow19] 将立方模型定理推广到某些粗中值空间，而作者 [Dur23]则将其推广为允许无穷远点。所有这些版本都成立于更广泛的分层双曲空间背景下 [BHS17b],；分层双曲空间是一个用于研究各种具有负曲率与正曲率混合特征的空间的框架，例如 Teichm¨uller 空间 [Bro02、Raf14、Dur16], ，其建立在 Masur–Minsky 的奠基性工作之上 [MM99、MM00b] ；该工作研究了映射类群，详见第 3 节。

立方逼近定理使我们能够从一对点的凸包的立方模型中引入任意数量的、由立方结构定义（且层次行为良好）的路径。这一观察是最近两个证明的核心：它们证明了映射类群可双向测地化[1]。这两个证明分别由 Haettel–Hoda–Petyt [HHP23] 以及 Minsky、Sisto 和本文作者 [DMS20], 提出，方法截然不同，但都极其依赖立方模型工具。另请参阅 Petyt–Zalloum [PZS24]近期利用墙空间技巧给出的一个优雅的双梳性证明。

本文旨在通过 [DMS20] 中的工具，阐述其主要技术结果的两点版本的一种新证明。我们在此非正式地陈述该结果（参见定理9.9）：

定理 A。 可着色层次双曲空间中一对点的层次包可由一个 CAT(0) 立方复形稳定地逼近。

有了这一工具，双梳性就可通过立方技术直接得到，本质上沿用 [DMS20第 5 节及 6]中的论证：

推论 B. 设 S 为有限型曲面。那么，其映射类群和配备 Teichm¨üller 度量的 Teichm¨üller 空间都存在由层级路径构成的双向测地线族。

注记 1.1。 在适当的群作用下，可以将这两个结论都加强，以确保粗等变性。特别是，在 [DMS20] 中，我们证明了推论B中的双向测地线族相对于映射类群作用是粗等变的，并且映射类群

[1]粗略地说，度量空间上的双向测地线族是由拟测地线路径构成的传递族，并且在端点发生小扰动时保持稳定；参见定义 2.16。

是 半双曲的，其意义见 [AB95]。一旦有了双向测地线族，这种等变性加强就相对直接了，不过我们省略了这一点，因为它会给这项本已技术性很强的构造中的陈述和证明再添一层复杂度。关于这种构造中的等变性如何发挥作用，请参阅 [DMS20，注记2]。

我们撰写本文有几个动机。首先，我们希望以较不一般的形式，简化介绍 [DMS20、DMS25] 中的立方模型结果。粗略地说， F BHS [中关于层次双曲空间的有限子集的立方模型，是由一个墙空间构造出来的；该墙空间定义在一族树上，而这族树则通过投影到层级中的每个双曲空间得到。 21] DMS F 中关于双梳性的证明采用了双曲几何技术——最终通过稳定树定理 [DMS2020]，定理 3， [——构造出一族在2]的有界扰动下粗稳定的树。F在本文中，我们通过将研究范围限制为仅对一对点进行建模，而非对任意点集和射线进行建模，简化了这一论证初始部分的若干方面。

第二个动机是解释如何将 [DMS20] 中的稳定性技术与 [Dur23][2] 提出的新立方模型构造结合起来。这涉及对区间的关键稳定树定理给出一种新的、更初等的证明；见下文第 8 节。值得注意的是，最近我们与 Minsky 和 Sisto 合作， [DMS25] 利用 [DMS20] 中的技术，并在 [Dur23][3] 的框架下实现了这些技术的重要扩展。这使我们能够在任意可着色层次双曲空间上构造渐近 CAT(0) 度量 [Kar 11] ，为任意可着色层次双曲群构造 Z-边界（按 [Bes96、Dra06] 的意义；关于映射类群另见 [Ham25] ），并为许多层次双曲群建立 Farrell–Jones 猜想 [FJ93] ，其中包括超大类型阿廷群。本文可以看作对 [DMS25] 中主要技术构造的最简单情形的解释。

不出所料，结合 [DMS20] 与 [Dur23]的工作需要对两者都进行阐述，不过我们主要关注它们的交汇之处。我们将这篇（主要是）阐述性论文的主要特点概述如下：

- 我们阐述了 [Dur23], 的基本立方模型构造，并将其大幅简化，不再采用其中更一般的设定（即允许对无穷远点进行建模）。• 我们说明了如何将 [DMS20] 中的稳定性技术与 [Dur23]的立方模型构造结合起来。具体而言，这涉及定义一种经过细化的稳定分解概念（定义 8.12），并为区间的稳定树定理 8.14 给出新的证明。值得注意的是，这些稳定分解也出现在 [DMS25]中。
- 我们利用上述内容，通过 [DMS20], 的稳定立方化技术证明映射类群（以及层次双曲空间）的双梳性，同时将讨论限定在针对点对的简化立方模型设定中。值得一提的是， [HHP23]的双向测地线族构造也依赖于立方模型（来自 [BHS21]），因此也可以将本文视为对其构造所依赖的部分基础技术的阐述。• 通过聚焦于双向测地线族结果（推论 B），我们得以大幅简化路径构造的收尾阶段。具体来说，我们在立方模型中使用 [NR98] 的 Niblo–Reeves 路径，而不是我们与 Minsky 和 Sisto 合作的工作 [DMS20 第 5]节中更复杂的 Niblo–Reeves 收缩版本。

1.1. **背景阅读。** 本文的重点是说明如何将 [DMS20] 中的稳定立方化技术应用到 [Dur23], 的立方模型设置中；值得指出的是， [DMS25]在更加一般的设置中完成了这一工作。因此，读者将受益于了解立方复形和层次双曲空间相关的背景知识与研究动机。下面列出一些建议阅读的资料：

[2]与 [BHS21]中的构造相比，这种构造有许多额外的优点。我们建议感兴趣的读者参阅 [Dur23]引言中的深入讨论。[3]本文的初版介绍性文章发表于 [DMS25], 之前，但随后我们对其进行了修改，以纳入该论文的相关内容。

• 关于层次双曲空间的入门介绍，可参阅 Sisto 的讲义 [Sis17] 以及 Casals-Ruiz–Hagen–Kazachkov [CRHK21]中的背景材料。我们确实会在推论 6.11 中证明距离公式中较难的界，但希望读者熟悉其一般框架。• 关于映射类群的入门介绍，可参阅 Farb–Margalit [FM11]；关于其分层双曲结构，可参阅 [BHS19, Section11] 及其中的参考文献（特别是 Masur–Minsky 的工作 [MM99, MM00b]）。类似地，关于 Teichmüller 空间及其 Teichmüller 度量上的分层结构，可参阅 Rafi [Raf07,Raf14] 以及作者的著作 [Dur16]。• 关于双向测地线族和半双曲性的入门介绍，可参阅 Alonso–Bridson [AB95]。• 关于立方复形的背景知识，可参阅 Sageev 的讲义 [Sag14] 和 Schwer 的著作 [Sch]。• 关于层次双曲空间及相关对象中的立方技术，可参阅 Zalloum 的综述文章 [Zal23]。

1.2. **论文结构**。 本文首先从宏观层面讨论如何运用立方近似技术，为双向测地线族的构造完成收尾工作。具体而言，在第 2 节中，我们将提炼出关于可着色分层双曲空间的关键事实，即稳定立方体定理 9.9 和稳定移动定理 2.13，并据此在任何具备前一定理所述性质的度量空间上构造双向测地线族。这包括在第 2.3 小节中，通过 Niblo–Reeves 路径以大幅简化的方式构造双向测地线路径本身。

以此设置为动机，我们接着描述层次双曲空间的立方模型构造。第 4 至 6 节阐释了 [Dur23] 中立方模型定理的区间版本。本文的核心内容位于第 7 和 8 节，其中我们说明如何构造作为输入的稳定化区间族；此外，第 9 节则介绍如何将这一稳定化输入接入立方化机制。

1.3. **致谢**。 本研究部分由美国国家科学基金会资助，项目编号为 DMS-1906487 和美国国家科学基金会 CAREER 项目 DMS-2441982。首先要感谢 Yair Minsky 和 Alessandro Sisto，因为我们的论文[DMS20，DMS25] 是本文的核心。感谢 Thomas Koberda 为共同组织首届河滨几何群论研讨会所付出的努力[4] 。该研讨会于 2023 年举行（之后又举办了数届），并得到美国国家科学基金会项目 DMS-2234299 的资助。也感谢 Harry Petyt 提出了许多详细意见，大大改进了本文。本文为会议论文集而撰写；在完成本文的过程中，我很感谢 Thomas 的耐心与鼓励。也感谢其他几位演讲者——Anne Lonjou、Marissa Kawehi Loving 和 Jean-Pierre Mutanguha——带来的精彩短期课程。最后，感谢 RivGGT23 的与会者；我在会上讲授的短期课程涉及本文的部分内容，也感谢参加我关于 [Dur23] 的构造的专题课程的加州大学河滨分校研究生。

2. 从终点开始

本节旨在证明本文其余部分将要建立的技术结果所带来的主要推论。具体来说，我们首先说明，稳定立方区间定理A （定理9.9）足以证明映射类群以及更一般的可着色分层双曲空间具有双梳性。

我们先简要介绍 CAT(0) 立方复形，并讨论 Niblo–Reeves 路径及其在超平面删除下的稳定性。在小节2.2中，我们给出稳定立方化结果的精确表述，以及与之相关的路径构造。在小节2.4中，我们定义并讨论双向测地线族。在小节2.5中，我们说明如何将这些部分组合起来，为任何满足某种稳定立方化设置的度量空间构造双向测地线族。

2.1. **墙空间、立方复形与超平面删除**。 本小节为不熟悉 CAT(0) 立方复形的读者简要介绍一些定义并列出参考文献。

我们在此采用的方法最接近 Roller 的方法 [Rol16] 以及 Sageev 立方化机制[Sag95], 该机制使用了 Haglund-Paulin 引入的墙空间概念 [HP98]。另见 Sageev 的

[4] https://sites.google.com/view/riggthew-2023/home

笔记 [Sag14], 以及 Hruska-Wise 的笔记 [HW14], 其中对这一主题进行了出色的阐述。我们注意到，稍后将在第6节采用一种使用中位数的方法。

一个立方复形 是通过一组（欧几里得）等距映射沿面粘合一族不同维数的单位欧几里得立方体而得到的 CW 复形。若立方复形 Σ 满足 Gromov链接条件，则称其非正曲率；每个非正曲率的单连通立方复形都存在唯一的 CAT(0)度量。

CAT(0) 立方复形中的 超平面 Σ 是一个连通子空间，它与每个立方体的交 $\sigma = [0,\ 1]^n$ 要么是 $\varnothing$，要么是将恰好一个坐标限制为 $_{1\,2}$ 所得到的子空间。特别地，每个超平面都会划分 Σ。这引出了半空间和偏序补集的定义，沿用 Roller 的做法 [Rol16]。

定义 2.1 （偏序补集）。 设 $(\Sigma,\ <)$ 是一个偏序集。 Σ 上的偏序补集 结构还具有一个满足以下条件的反序对合 $A \mapsto A^*$

(1) $A \neq A^*$ 与 $A,\ A^*$ 彼此不可比较；(2) $A < B \implies B^* < A^*$。• 给定 $A < B,\ A$ 与 B 之间的区间 为 $[A,\ B] = \{C | A < C < B\}$。• 若每个区间都是有限的，则偏序集 $(\Sigma,\ <)$ 称为局部有限 。• 给定 $A,\ B \in \Sigma$，若 A 与 B 横截，即 $A < B,\ A < B^*,\ A^* < B,\ A^* < B^*$均不成立。若偏序集 $(\Sigma,\ <)$ 中两两横截的子集的最大大小有限，则称其具有有限宽度 。

在 CAT(0) 立方复形中，每个顶点恰好包含于与每个超平面相关联的一个半空间中。以下概念抽象了这样一族半空间的组合结构：

定义 2.2 （超滤子与下降链条件）。 给定一个局部有限偏序集 $(\Sigma, <),\ \alpha$ 上的一个超滤子 是满足以下条件的 Σ 的子集：

(1)（选择性）每一对 $\{A, A^*\}$ 中恰有一个元素属于 α；(2)（一致性） $A \in \alpha$ 和 $A < B \implies B \in \alpha$。• 若超滤子 α 满足下降链条件 （DCC），则每条下降元素链都会终止。

We 现在可以定义局部有限、离散、有限宽偏序集的对偶立方复形：

定义 2.3 （对偶立方复形）。 给定局部有限、离散、有限宽的偏序集 $(\Sigma, <)$，我们按如下方式定义一个 CW 复形 $X(\Sigma)$：

(1) X 的 0-胞腔 $X^{(0)}$ 是 $(\Sigma, <)$上的 DCC 超滤子。(2) 若且唯若 $|\alpha \triangle \beta| = 2$，即对于某个 $A \in \Sigma$ 有 $\alpha = (\beta - \{A\}) \cup \{A^*\}$，两个 0-胞腔 α, β 才由 $X^{(1)}$ 中的一条边连接。(3) 通过归纳定义 $X^{(n)}$ ：每当某个 $X^{(n-1)}$-骨架中出现一个边界时，就添加一个 n-立方体。

以下是 Roller 的一个定理 [Rol16], 基于 Sageev [Sag95]提出：

定理 2.4 (Sageev 机器)。 给定一个局部有限、有限宽偏序集 $(\Sigma, <)$，*CW* 复形$X(\Sigma)$ 是一个有限维 *CAT(0)* 立方复形，其维数等于 $(\Sigma, <)$ 的宽度。

- 我们称 $X(\Sigma)$ 为 对偶立方复形，对应于 $(\Sigma,\ <)$。

注意，由 CAT(0) 立方复形的超平面所得到的偏序集，其对偶立方复形（同构于）该立方复形。

下面的引理有助于建立立方复形之间的同构，这些复形的墙空间可以直接进行比较。其证明是 CAT(0) 立方复形基础知识的一道练习，我们将其留给读者。

引理 2.5。设 W、W' 是墙空间，且 $\iota : H_{\mathcal{W}} \to H_{\mathcal{W}'}$ 是它们半空间之间的双射，并且保持补集与不相交性。那么 ι 诱导出相应对偶 *CAT(0)* 立方复形之间的立方同构 $h{:}D(W) \to D(W')$。

最后，在稳定立方化定理中，我们希望将某些立方复形之间的映射实现为对其组合数据中某个受控部分的一种塌缩。这里合适的概念是超平面删除。一个启发性的例子是：给定某个墙集合 H 上的墙空间 W(H)，删除墙 H –G 的某个子集，从而得到一个限制映射 D(W(H)) → D(W(H –G))，它按照 [CS11] 的意义，将两个对偶立方复形联系起来。这个映射会塌缩 G 中超平面的载体（回忆一下，超平面 h 的载体自然同构于 h × [0, 1]）。

2.2. **稳定立方体与稳定移动。** 我们将在一个表面上比（可着色的）层次双曲空间更一般的框架中证明推论 B 。[5]也就是说，我们只需要一个满足以下定义的度量空间。第一个定义实际上是层次双曲空间立方模型性质的弱两点版本，该性质见 [BHS21], ，并已在本文的定理 6.4 中得到证明。

定义 2.6（弱局部准立方性）。设 X 为一个度量空间。对于一对a，$b \in X$，一个 B_0-立方模型 是一个维数至多为 B_0 的 CAT(0) 立方复形 $\mathcal{Q}$，满足以下条件：

(1) 存在一个 (B_0, B_0)-拟等距嵌入 $\Omega : \mathcal{Q} \to X$（即立方模型映射），(2) 存在两个指定顶点 $\hat{a}$，$b \in \mathcal{Q}$，使得它们之间的任意 ℓ^∞-测地线 $\gamma \subset \mathcal{Q}$ 都会被映射为连接 a，b的 (B_0, B_0)-拟测地线 $\Omega(\gamma) \subset X$。• 若存在 $B_0 > 0$，使得任意一对a，$b \in X$ 都存在一个 B_0-立方模型，则称 X 为 B_0-弱局部准立方（wLQC）。

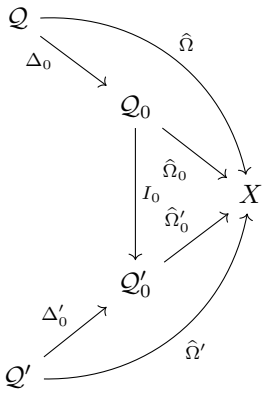
尽管 CAT(0) 立方复形具有许多标准度量（它们全都拟等距），但对我们而言最方便的是 ℓ^∞度量；对于同一个单位立方体中的顶点，它恰好就是上确界度量。

下一个定义摘自下文的定理9.9 。这一性质对于可着色的分层双曲空间成立，例如映射类群和 Teichm¨uller 空间；原始的、更一般的版本见 [DMS20，定理 4。1] 关于当前最先进的结果，见 [DMS25，定理 9。1] 我们在此将其从 HHS 情形中提取出来，部分目的在于凸显收尾阶段的结构。

定义 2.7（稳定弱局部拟立方性）。 我们称度量空间 X 是 B_0-稳定弱局部准立方的，如果存在一个 B_0 使得下列条件成立：

•对于任意 $a, b, a', b' \in X$，若满足 $d_X(a, a') \leqslant 1$且 $d_X(b, b') \leqslant 1$，则存在 B_0-立方模型 $\mathcal{Q}, \mathcal{Q}_0$ 以及$\mathcal{Q}', \mathcal{Q}'_0$，分别对应 a, b和 a', b'，使得下图在加性误差 B_0范围内交换：

(1)



• 在上述内容中，(1) Ω，Ω_0,Ω', Ω'_0 是立方模型映射，因此是 (B_0, B_0)-拟等距嵌入；(2) 映射 I_0 是立方同构，

[5]事实上，我们猜想，满足定义 2.7 中某种形式的性质的粗中值空间将是层次双曲空间，不过我们不清楚究竟什么才是恰当的性质。例如，它可能是 [BHS17b]所说的因子系统。

(3) 映射 Δ_0，Δ_0' 是通过删除至多 B_0个超平面诱导得到的；(4) Δ_0，Δ_0' 分别将与$\mathcal{Q}$，$\mathcal{Q}'$ 中的 a，b和 a'，b' 相关联的指定顶点映射到$\mathcal{Q}_0$,$\mathcal{Q}_0'$, 中的相应指定顶点。

要求（4）指出，立方复形 $\mathcal{Q}$、$\mathcal{Q}_0$ 模型 a，b彼此对齐，对于 $\mathcal{Q}'$,$\mathcal{Q}_0'$ 和 a'，b'也是如此。注意，若 X 满足定义 2.7 ，则它也满足定义 2.6。

注 2.8。 定理 6.4 和9.9 实际上提供了关于这些立方模型的更多信息。特别地，若 $\mathcal{X}$是一个层次双曲空间，且 a，$b\in\mathcal{X}$，那么上文的立方复形 $\mathcal{Q}$和 $\mathcal{Q}_0$刻画了其层次包 （ a，b 定义 3.12），它是一个粗凸子空间，编码了 a与 b之间的层次几何。此外，立方复形的组合几何几乎编码了全部这些层次数据。详见 [Dur23] 的引言。

2.3. **稳定移动**。 本小节将建立双向测地线族构造中构造路径的关键部分，即稳定移动定理2.13。这需要证明 Niblo–Reeves 提出的一类在立方复形中经过深入研究的路径 [NR98] 在超平面删除下表现良好。这些路径是他们在 CAT(0) 立方群上构造双自动结构的核心，因此，它们在我们为这类拟立方空间构造双向测地线族时发挥核心作用，实在令人欣慰。尽管我们保留了与 Minsky 和 Sisto 合作的论文 [DMS20第 5], 节中的部分结构和术语，但我们所处的有限情形使得路径构造简单得多。

设 X是一个有限的 CAT(0) 立方复形，其 $X=$凸包$_X(a,\ b)$即[6]的立方包 $a,\ b\in X^0$。令$\mathcal{H}=\mathcal{H}(a,\ b)$为 X中分隔 a与 b的超平面集合，从而 $X=\mathcal{X}(\mathcal{H})$是$\mathcal{H}$的对偶立方复形。回顾一下，我们可以将 X 的顶点视为中超平面的相容定向。

De定义 2.9。设 $p\in X^0$。超平面$\mathbf{h}\in\mathcal{H}$称为过渡的，记作$\mathbf{h}\in T(p,\ \mathcal{H})$，若

(1) $\mathbf{h}$ 将 p 与 b分隔开，并且 (2) p 与$\mathbf{h}$相邻，即$\mathbf{h}$ 与某个立方体相交，

且 p 是该立方体的一个顶点。

注意，在$\mathcal{H}$上有一个自然的偏序 $\prec$，其中$\mathbf{h}\prec\mathbf{h}'$当$\mathbf{h}$ 将$\mathbf{h}'$ 与 a分隔开时成立，等价地说，当$\mathbf{h}$ 将$\mathbf{h}'$与 b分隔开时也成立。在我们这个特殊情形中，$X=$凸包$_X(a,\ b)$每个顶点 $p\in X^0$都出现在从 a到 b的一条 ℓ^1-测地线上。对于$\mathbf{h}\in T(p,\ \mathcal{H})$而言，过渡性这一性质表示$\mathbf{h}$ 在$\mathcal{H}(p,\ b)\subset\mathcal{H}$上的偏序中是极小元。

下面的引理表明，偏序中的极小元素必定相交：

引理2.10。 若$\mathbf{h}_1,\mathbf{h}_2\in T(p,\ H)$，则$\mathbf{h}_1$与$\mathbf{h}_2$相交。

证明。 若$\mathbf{h}_1$ 与$\mathbf{h}_2$ 不相交，则不失一般性，存在$\mathbf{h}_2$ 的一个半空间包含a，$\mathbf{h}_1$。另一方面， p与$\mathbf{h}_2$相邻。这意味着 p， a 位于$\mathbf{h}_1$,的不同半空间中，矛盾。□

借助这条 引理，我们可以如下定义我们的 *Niblo–Reeves*路径 $p_0=a,\ p_1,\ \ldots,\ p_n=b$ [NR98]:

- 令 $p_0=a$。
- 根据引理2.10， p_0 是唯一一个立方体 C_0 的顶点，该立方体中与 C_0相交的超平面集合恰为 $T(p,\ \mathrm{H})$。令 p_1为 C_0的对角相对顶点。等价地，p_1可由 p_0通过翻转 $T(p,\ \mathrm{H})$中的超平面的定向得到。
- 递归地定义 $i\geqslant 1$ 对应的 p_i ，其中以 p_0替代 p_i 。

因此，在每一步 $p_i\mapsto p_{i+1}$，路径都会穿过$\mathcal{H}(p_i$中 $\prec$的极小超平面集合，$b)$。下面的命题陈述了 Niblo–Reeves 路径的基本性质：

命题2.11。 沿用上述记号，有以下结论：

(1) 存在某个 n ，使得 $p_n=b$。(2) 对于所有 $0\leqslant i\leqslant n$，都有 $d_X^\infty(p_i,p_{i+1})=1$。(3) 对于 $0\leqslant i<n$ ，在 p_i,p_{i+1} 之间拼接 ℓ^1-测地线得到的任意路径都是一条 ℓ^1-测地线。

[6]假设 $X=$凸包$_X(a,\ b)$ 并非必要，但对我们的目的而言很方便。

证明。 对于 (1)，注意到序列 p_i 只穿过将 a 与 b分隔开的超平面。序列的每一步$p_i \mapsto p_{i+1}$ 都会穿过 $\mathcal{H}(p_i, b) \subset \mathcal{H}$ 中的 $\prec$- 极小超平面集合。现在，(1) 等价于断言 $\mathcal{H} = \bigcup_i \mathcal{H}(p_i, b)$，也就是说，这个过程穷尽了分隔 a和 b的超平面集合；这显然成立，因为 $\mathcal{H}$ 是有限的。

（2）是由构造直接得出的，因为 p_i 和 p_{i+1} 是一个立方体的相对顶点。

最后，（3）由以下事实得出：$\mathcal{H}(p_i, b) \subset \mathcal{H}(p_{i+1}, b)$，其中 $\mathcal{H}(p_{i+1}, b) - \mathcal{H}(p_i, b) = \mathcal{H}(p_i, p_{i+1})$。因此，若 $\mathbf{h} \in T(p_i, b)$，则对 $j < i$，$\mathbf{h}$ 不会将 p_i 与 p_j 分隔开。这说明序列 $\{p_i\}$ 不会两次穿过任何超平面，因此，将这些ℓ^1-测地线段首尾相连后也不会两次穿过任何超平面，从而得到一条 ℓ^1-测地线。□

下面是关于这一构造的一个有用观察：

命题 2.12。 设 $\Phi : Q \to Q'$ 是立方复形之间的一个同构。若 γ 是 Q^0，中 a 与 $b \in$ 之间的 *Niblo–Reeves* 路径，那么 $\Phi(\gamma)$ 就是 $Q')^0$ 中 $\Phi(a)$ 与 $\Phi(b) \in$ (之间的 *Niblo–Reeves* 路径。

现在我们可以陈述本小节的主要结果。

定理 2.13 (稳定移动)。 设 $\mathbf{h} \in H$ 是超平面，并令 $\Delta_{\mathbf{h}} : D(H) \to D(H - \{\mathbf{h}\})$表示超平面压缩映射。令 $\Delta_{\mathbf{h}}(a) = a'$和 $\Delta_{\mathbf{h}}(b) = b'$。令 $p_0, \dots, p_n$ 表示 $X = D(H)$ 中连接 a, b 的 *Niblo–Reeves* 路径，令 $p'_0, \dots, p'_m$ 表示 $D(H - \{\mathbf{h}\})$ 中连接 a', b' 的路径。则有以下结论：

(1) 我们有 $n \leqslant m + 1$。(2) 对于所有 $1 \leqslant i \leqslant n$，我们有 $d^{\infty}_{\mathcal{D}(\mathcal{H}-\{\mathbf{h}\})}(\Delta_{\mathbf{h}}(p_i), p'_i) \leqslant 1$。

换言之，Niblo–Reeves 路径在超平面删除映射下保持稳定。以下记号对我们很有用：

定义 2.14. 设 $\mathbf{h}' \in \mathcal{H}$。我们将 $t_{\mathbf{h}'}(a, \mathcal{H})$ 称为 $\mathbf{h}'$，的转移指标，其值为 i，即 $\mathbf{h}' \in \mathcal{H}(p_i, p_{i+1})$ 时对应的指标。类似地，若 $\mathbf{h}' \in \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\}$，我们定义 $t_{\mathbf{h}'}(a', \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\})$ 为指标 i，使得$\mathbf{h}' \in \mathcal{H}(p'_i, p'_{i+1})$。

引理 2.15. 若 $\mathbf{h}' \in \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\}$，则 $t_{\mathbf{h}'}(a, \mathcal{H}) = t_{\mathbf{h}'}(a', \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\}) + \delta$ 对于 $\delta \in \{0, 1\}$。

证明。 这本质上是 [DMS20，引理 5.12]，，不过在我们的情形下，证明基本上是显然的。注意转移指标 $t_{\mathbf{h}} = d_{\infty}(a, \mathbf{h}) + \frac{1}{2}$。由于 ℓ^{∞} 与 a' 以及 $\mathbf{h}'$ 之间的距离，衡量的是将它们分隔开的超平面链的最大长度（加上1 2），因此该距离至多比 $d_{\infty}(a, \mathbf{h})$ 大 1。证明完毕。□

稳定移动定理的证明 *2.13*。 假设 $\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2$ 分离 $\Delta_{\mathbf{h}}(p_i)$ 和 p'_i 在 $X' = \mathcal{D}(\mathcal{H} - \{\mathbf{h}\})$但不相交，因为如果所有此类超平面都相交，我们就已经证明了结论。

不失一般性，我们可以假设$\mathbf{h}_1$ 将 $\Delta_{\mathbf{h}}(p_i)$ 与$\mathbf{h}_2$分隔开。令$j = t_{\mathbf{h}_1}(a', \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\})$。于是 $j < t_{\mathbf{h}_2}(a', \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\}) < i$，后一个不等式成立是因为 p'_{i+1} 已经穿过了$\mathbf{h}_2$ （以及$\mathbf{h}_1$）。因此 $j + 1 < i$。

但是这样一来 $t_{\mathbf{h}_1}(a, \mathcal{H}) \leqslant t_{\mathbf{h}_1}(a', \mathcal{H} - \{\mathbf{h}\}) + 1 = j + 1 < i$，这意味着$\mathbf{h}_1$ 将 p_i 与 a分隔开，矛盾。□

2.4. **双向测地线族**。 我们的最终目标是证明，映射类群和 Teichm¨uller 空间存在双向测地线族（定理A）。粗略地说，空间 X 上的双向测地线族是由一族一致拟测地路径构成的，它具有传递性（即连接 X中的任意一对点）；并且，当端点对彼此接近时，族中连接这些端点的路径会以带参数的方式一致地伴随前行。Thurston 最初在群的算法问题背景下引入了双向测地线族这一概念。一个直接但很有启发性的练习是证明，双曲空间和 CAT(0) 空间中的测地线满足这一性质，而这正是该定义旨在推广的情形。

以下定义基本上源自 [AB95]，，其表述见 [DMS20，定义 6。4]：

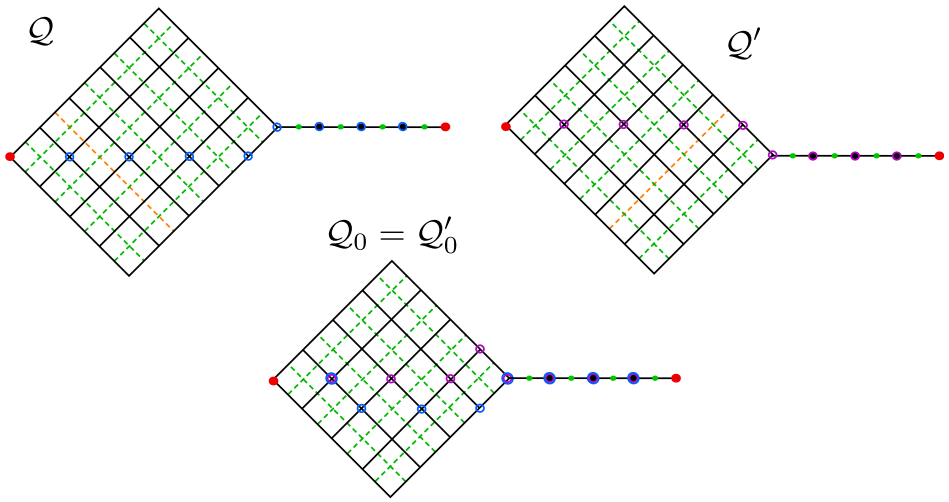


图 1. 稳定移动：一个简单示例，展示了 Niblo–Reeves 路径在超平面坍缩下的表现。在每个立方复形中，红色顶点对应于 a，b。橙色超平面在映射到 $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{Q}'_0$ 时发生塌缩。连接 $\mathcal{Q}_0$ 中的 a，b 的 Niblo–Reeves 路径沿红色顶点之间的直线行进。$\mathcal{Q}$（蓝色）和 $\mathcal{Q}'$（紫色）中的 Niblo–Reeves 路径投影后得到的路径与 $\mathcal{Q}_0$, 中的 Niblo–Reeves 路径接近，因此彼此也接近。此示例改编自 [DMS20，图 25]。

定义 2.16（双向测地线族）。度量空间 X 上的一个离散、有界的拟测地线双向测地线族由一族离散路径 $\{\Gamma_{x,\,y}\}_{x,\,y\in X}$ 以及一个常数 $\zeta > 0$ 组成，并满足以下条件：

(1) 拟测地线：对于任意 $x, y \in X$，若满足 $d = d_X(x, y)$，则存在 $n_{x,y} \leqslant d\zeta + \zeta$，使得路径 $\Gamma_{x,y}\colon \{0, \ldots, n_{x,y}\} \to X$ 是一个 (ζ, ζ)- 拟等距嵌入，且满足 $\Gamma_{x,y}(0) = x$ 和 $\Gamma_{x,y}(n_{x,y}) = y$；以及 **(2)** 伴行：若 $x', y' \in X$ 且 $d_X(x, x'), d_X(y, y') \leqslant 1$，则对于所有 $t \in \{0, \ldots, \max\{n_{x,y}, n_{x',y'}\}\}$，我们有

$$d_X(\Gamma_{x,y}(t), \Gamma_{x',y'}(t)) \leqslant \zeta.$$

对我们而言，第（2）项中的伴行条件是关键挑战。目前，在映射类群中已经有许多构造一致拟测地线的方法。

2.5. **构造双向测地线族**。现在我们可以定义双向测地线族了。设 X 是 B_0-稳定弱局部准立方（定义 2.7）。对于任意 a，$b \in X$，令 $\mathcal{Q}$ 为定义 2.7所给出的 CAT(0) 立方复形，且 $\hat{a}$ 和 $\hat{a}$，$b \in \mathcal{Q}$ 为与 a，b相关联的指定顶点。

我们可以定义一族路径 $\{\Gamma_{a,\,b}\}_{a,\,b\in X}$ 方法是令 $\Gamma_{a,\,b}$ 为 Niblo–Reeves 路径在拟等距映射 $\hat{\Omega}\colon \mathcal{Q} \to X$ 下的像，该 Niblo–Reeves 路径连接 $\hat{a}$，$\hat{b}$。根据定义 2.6，这是一条一致的 (B_0, B_0)-拟测地线，连接 a，b。

定理 2.17. 路径族 $\{\Gamma_{a,\,b}\}_{a,\,b\in X}$ 在 X 上构成一个离散有界拟测地线双向测地线族。

证明。我们需要确认定义2.16中的各项性质。显然，这些路径是离散的，并且根据假设是(B_0, B_0)拟测地线。因此，我们需要证明它们满足该定义第 (2) 项中的伴行性质。这可直接由定义2.7和定理2.13中的性质推出。

设 $\hat{a}, \hat{b} \in \mathcal{Q}_0$ 是与 a, b相关联的指定顶点，$\hat{a}', \hat{b}' \in \mathcal{Q}'$ 和 $\hat{a}'_0, \hat{b}'_0 \in \mathcal{Q}'_0$ 与 a', b'相关联的指定顶点也依此类推。注意，根据定义 2.7 的第 (4) 项，$\Delta_0(\hat{a}) = \hat{a}_0$，等等。

2.7. 令 $\Lambda, \Lambda_0, \Lambda', \Lambda'_0$ 为 Q、Q_0, Q', Q'_0 中的 Niblo–Reeves 路径，它们分别连接相应立方复形 Q、Q_0, Q', Q'_0 中的顶点对$(\hat{a}, \hat{b}), (\hat{a}_0, \hat{b}_0), (\hat{a}', \hat{b}'), (\hat{a}'_0, \hat{b}'_0)$。因此，用我们的记号表示，$\Gamma_{a,b} = \Omega(\Lambda)$ 以及 $\Gamma_{a',b'} = \Omega'(\Lambda')$。我们有以下估计

$$
\begin{aligned}
(2) \qquad d_X(\Gamma_{a,b}(i), \Gamma_{a',b'}(i)) &= d_X(\widehat{\Omega}(\Lambda(i)), \widehat{\Omega}'(\Lambda'(i))) \\
(3) &\leqslant d_X(\widehat{\Omega}_0 \circ \Delta_0(\Lambda(i)), \widehat{\Omega}'_0 \circ \Delta'_0(\Lambda'(i))) + 2B_0 \\
(4) &\leqslant d_X(\widehat{\Omega}_0(\Lambda_0(i)), \widehat{\Omega}'_0(\Lambda'_0(i))) + 4B_0 \\
(5) &\leqslant d_X(\widehat{\Omega}'_0 \circ I_0(\Lambda_0(i)), \widehat{\Omega}'_0(\Lambda'_0(i))) + 5B_0 \\
(6) &= d_X(\widehat{\Omega}'_0(\Lambda'_0(i)), \widehat{\Omega}'_0(\Lambda'_0(i))) \\
(7) &= 5B_0.
\end{aligned}
$$

上述内容中，(3) 来自图1中上、下两个三角形的交换性；(4) 来自定理2.13；(5) 来自图1中间三角形的交换性；(6) 则来自立方同构 $I_0 : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}'_0$ 将路径 Λ_0 和 Λ'_0对应起来这一事实，即$\Lambda_0(i) = \Lambda'_0(i)$ 对每个 i (命题2.12）。证明至此完成。

□

有了这些结果，我们就可以证明双向测地线族的结论：

推论*B*的证明。 有限型曲面的映射类群和 Teichm¨uller 空间是可着色层次双曲空间（参考文献见第 3 节），因此根据定理9.9，它们稳定弱局部拟立方。于是定理2.17 通过将适当立方模型中的 Niblo–Reeves 路径推前至相应空间，给出了一个双向测地线族。任意这样的 ℓ^∞-测地线都可以通过如命题 ℓ^1-测地线将顶点连接起来，从而补全为一条 ℓ^1-测地线段2.11所述。但命题6.9 指出，这些路径的像是层级路径（定义3.9）。证明至此完成。□

注记 2.18。 同时熟悉 [BHS21] 和 [DMS20] 的读者会注意到，通常会利用立方模型映射是拟中位 映射这一事实来得到最后这个层次路径性质。不过，本文没有讨论中位数结构，因为这对我们的目的并非必需。关于我们的立方模型构造如何处理中位数，请参见 [Dur23，第 15]节。

3. 层次双曲空间简要入门

层次双曲空间由 Behrstock–Hagen–Sisto 于 [BHS17b，BHS19],中提出，其建立在 Masur–Minsky 关于映射类群的研究基础之上 [MM99，MM00b] 等工作之上[Bro02、Raf07、Raf14、Dur16、EMR17]。

就我们的目的而言，我们将介绍所需的基本基础概念。事实证明，立方模型构造属于基础层面的构造，因为可以用它证明距离公式等关键事实 3.8；参见 Bowditch [Bow19] 和 [Dur23]。

以下是目前已知具有层级双曲结构的空间的完整列表（截至本文撰写时）。除了一些立方体复形例子之外，它们全都是可着色的（定义7.1），因此我们的主要结果定理A 和推论B 均适用：

- 双曲空间。•映射类群 [MM99, MM00b,Aou13, BHS17b] 以及 Teichm¨uller 空间，其度量包括 Teichm¨uller [Raf07, Dur16] 度量和魏尔–彼得森度量 [Bro02]。• 许多 [HS20]，（但并非全部） [She25], CAT(0) 立方群，包括所有右角 Artin 群和 Coxeter 群 [BHS17b]。• 不含 Nil 或 Sol因子的闭3维流形的基本群 [BHS19, HRSS22]。• 由 Dehn扭转 [BHMS24a] 和伪 Anosov 映射 [BHS17a]的大幂次得到的映射类群的商群。• Veech 群的曲面群扩张 [DDLS23,DDLS24,Bon24] 以及映射类群的多曲线稳定子[Rus21]。• 亏格2把手体群 [Che22]。

• 超大型型 Artin 群 [HMS24]。• 许多自由循环群 [BGGH25]。• 可容许曲线图 [CR24]。• 层次双曲空间在直积和适当的组合下封闭 [BHS19], 包括图乘积 [BR22]以及图辫群 [Ber21]。

我们注意到，存在不可着色的立方分层双曲空间 [Hag23] 以及非层次双曲空间的立方群 [She25]。CAT(0) 立方复形显然在局部上由立方复形建模，而且还是双可数的 [NR98], ，因此无论如何都不是本文所关注的对象。

3.1. **层次双曲空间的基本设置**。粗略地说，一个层次双曲 结构是一对 $(\mathcal{X}\ \mathfrak{S})$，其中$\mathcal{X}$ 是一致拟测地度量空间，而 $\mathfrak{S}$是由一致双曲空间 $\{\mathcal{C}(U)\}_{U\in\mathfrak{S}}$组成的一个族的指标集。环境空间 $\mathcal{X}$ 具有一族一致粗利普希茨投影$\pi_U:\ \mathcal{X}\ \to\mathcal{C}(U)$，这些投影连同该族 $\mathfrak{S}$上的某些关系，在很大程度上控制着$\mathcal{X}$的粗几何。

下面摘录了我们从公理化框架中所需的一些性质 [BHS19], ，参见 [Sis17]以了解相关讨论。

(1) 对于每个 $U\ \in\ \mathfrak{S}$ ，都存在一个 $E_{\mathfrak{S}}$-双曲空间 $\mathsf{C}(U)$ ，以及一个 $E_{\mathfrak{S}}$-粗满射、$E_{\mathfrak{S}}$)-粗 Lipschitz 映射 $\pi_U\colon \mathsf{X}\ \to\mathsf{C}(U)$，其中 $E_{\mathfrak{S}}$ 与 U无关。(2) 集合 $\mathfrak{S}$ 具有以下关系：• 它带有一个称为嵌套的偏序 $\sqsubset$。如果 $\mathfrak{S}\neq\varnothing$，集合 $\mathfrak{S}$ 包含唯一的 $\sqsubset$-极大元素 S.• 它还带有一个称为正交的对称、反自反关系 $\perp$。如果 $U\sqsubset V$，那么 U、V之间不存在 $\perp$关系。此外，域具有正交容器：如果 $U\in\mathfrak{S}$ ，且存在一个与 U 正交的域，那么就存在一个域 W ，使得只要$V\perp U$，就有 $V\sqsubset W$ • 对于任意不同的 U、$V\in\mathfrak{S}$，若它们之间不存在 $\perp$关系，则称 U、V横截，并记作$U\pitchfork V$。(3) 存在一个称为 X 的复杂度、记作 $\xi(\mathfrak{S})$ 的整数，使得当U_1、U_2时，任意一组两两非横截的域 $\cdots U_n$ 均满足 $n\leqslant\xi(\mathfrak{S})$。(4) 如果 $U\sqsubset V$或 $U\pitchfork V$，那么就存在一个集合 ρ_V^U，其在 $\mathsf{C}(V)$中的直径至多为 $E_{\mathfrak{S}}$ 。(5) 如果 $U\sqsubset V$，则存在一个映射 $\rho_U^V\colon \mathsf{C}(V)\to\mathsf{C}(U)$，称为 U到 V的相对投影，并满足以下条件：对于满足 $d_V(\pi_V(x)$、$\rho_V^U)>E_{\mathfrak{S}}$的 $x\in\mathsf{X}$，有 $\pi_U(x)\asymp_{E_{\mathfrak{S}}}\rho_U^V(\pi_V(x))$.

对于两个点 x、$y\in\mathcal{X}$，通常用 $d_U(x$、$y)$表示 $d_{\mathcal{C}(U)}(\pi_U(x)$、$\pi_U(y))$，对于 $\mathcal{X}$ 的子集也类似。对于子集 X，我们还用 $\mathrm{diam}_U(A)$表示集合$\pi_U(A)\subset\mathcal{C}(U)$的直径。

3.2. **层次双曲空间的基本事实**。现在我们汇集一些来自不同文献的层次双曲空间的有用事实.

以下定义出自 [Beh06，BKMM12，BHS19], ，对我们而言十分重要。这里的思路是，我们想将每个 $\pi_U:\ \mathcal{X}\ \to\mathcal{C}(U)$ 的投影合并为一个全局投影$\Pi:\ \mathcal{X}\ \to\prod_U\mathcal{C}(U)$。以下定义利用 $\mathfrak{S}$ 上的关系来约束 $\prod_U\mathcal{C}(U)$ 中的元组。

定义 3.1 （一致元组）。设 $\kappa\geqslant 0$ 且令 $(b_U)\in\prod_{U\in\mathfrak{S}}2^{\mathcal{C}(U)}$ 为一个元组，使得对于每个$U\in\mathfrak{S}$，U–坐标 b_U的直径为 $\leqslant\kappa$。那么 (b_U)是 κ–一致的，若对于所有 V，$W\in\mathfrak{S}$，都有

$$\min\{\mathbf{d}_V(b_V,\rho_V^W),\mathbf{d}_W(b_W,\rho_W^V)\}\leqslant\kappa$$

每当 $V\pitchfork W$ 并且

$$\min\{\mathbf{d}_W(x,\rho_W^V),\mathrm{diam}_V(b_V\cup\rho_V^W)\}\leqslant\kappa$$

每当 $V\sqsubset W$。

• 我们将上述不等式称为一致性不等式。

以下是一个关键事实。它说明 $\Pi:\ \mathcal{X}\ \to\prod_U\mathcal{C}(U)$ 的像由一致性一致的元组组成:

引理 3.2. 存在 $\theta = \theta(\mathfrak{S}) > 0$，使得如果 $x \in X$，那么元组 $(\pi_U(x)) \in \prod_{U\in\mathfrak{S}} C(U)$ 是 θ-一致的。

另一方面，我们希望知道 $\prod_U \mathcal{C}(U)$ 中的所有相容元组是否基本上都来自 $\mathcal{X}$。这就是下面实现定理的内容。特别地，该定理说明，任何满足定义 3.1 的元组都可以通过 $\mathcal{X}$中的一个点粗略实现。关于映射类群，见 [BKMM12，定理 4。3]；关于映射类群，见 [EMR17，定理 3。2] ；关于配备 Teichm¨uller 度量的 Teichm¨uller 空间，见 [BHS19，定理 3。1]；一般层次双曲空间情形见：

定理 3.3 (实现)。 对于每个 $\kappa \geqslant 1$，都存在 θ_e、 $\theta_u \geqslant 0$，使得下述结论成立。设$\mathbf{b} = (b_U)_{U\in\mathfrak{S}} \in \prod_{U\in\mathfrak{S}} 2^{\mathcal{C}(U)}$ 是 κ-一致的。
那么存在 $x \in X$，使得对所有 $U \in \mathfrak{S}$，都有 $d_U(b_U、\ \pi_W(x)) \leqslant \theta_e$。此外， x 是粗唯一的，具体来说，

$$\operatorname{diam}_{\mathcal{X}}\{x \in \mathcal{X} | d_W(b_W, \pi_W(x)) \leqslant \theta_e \text{ for all } U \in \mathfrak{S}\} < \theta_u.$$

备注 3.4。 值得注意的是，定理 3.3 在 [BHS19] 的证明并未涉及相关空间的双曲性 $\{\mathcal{C}(U)\}_{U\in\mathfrak{S}}$，事实上，它可由一种较弱的形式推出，而该形式已公理化地纳入层次双曲空间的设置中。从这个意义上说，实现纯粹是一种层次事实，在 Bowditch 的分析中，它发挥着类似于粗中位数存在性的作用 [Bow19]。

层次双曲空间中的主要技巧，或许是从环境空间$\mathcal{X}$ 中取出一个对象，将其投影到所有双曲空间中，运用双曲几何，再通过实现定理 3.3等层次工具重新拼合各部分。为此，鉴于层次双曲空间本质上是粗空间，我们通常希望将范围限制在那些对象在其中具有足够大投影的双曲空间的 相关 集合内。

定义 3.5 （相关域）。 给定一个子集 $A \subset \mathcal{X}$ 和 $K > 0$，我们称 $U \in \mathfrak{S}$ 对K-相关 于 A，若 diam $_U(A) \geqslant K$。我们将 A 的 K-相关域集合记为 $\mathrm{Rel}_K(A)$。

下面的上推引理是关于层次双曲空间的一项基础事实；事实上，它可以被视为一条公理 [Dur23，命题 4。15]大致而言，上推引理指出，如果 x， $y \in \mathcal{X}$拥有大量较低复杂度的相关域，那么必定存在某个较高复杂度的相关域，其中至少包含其中一个，从而允许我们沿着 $\sqsubset$-格“向上推”。

引理 3.6 （上推）。 设 X 是常数为 $E_{\mathfrak{S}}$ 的层次双曲空间。对于每个 $D > 0$，存在一个整数$PU = PU(D) > 0$，使得若 $V \in \mathfrak{S}$ 且 x， $y \in X$ 满足 $d_{U_i}(x,\ y) > E_{\mathfrak{S}}$ 对于一组区域$\{U_i\}_{i=1}^{PU}$，其中每个 $U_i \in \mathfrak{S}_V$，则存在 $W \in \mathfrak{S}_V$ 和 i，使得 $U_i \sqsubsetneq W$，从而 $d_W(x,\ y) > D$.

作为该引理具有基础性作用的一个例子，我们注意到以下推论。原始证明包含在 BHS19 中定理 [3.3 的证明中，即定理 3。1], 但并未明确陈述。为完整起见，我们给出证明：

推论 3.7。 对于任意 $x, y \in X$，集合 $\mathrm{Rel}_{E_{\mathfrak{S}}}(x, y)$ 是有限的。

证明。 令 C 为所有投影的粗 Lipschitz 常数 π_U 对于 $U \in \mathfrak{S}$，并设 $D > Cd_{\mathcal{X}}(x, y) + C$。若 #Rel $_{E_{\mathfrak{S}}}(x, y) > P(D)$，则上推引理 3.6 给出一个区域 $W \in \mathfrak{S}$满足 $d_W(x, y) > D$，这不可能。 □

层次双曲空间的另一个基本事实是以下距离公式。该公式最初源于 Masur-Minsky 的工作 [MM00b],，并在其他地方有多种后续发展 [Bro02, Raf07, Dur16, KK14]，之后在 [BHS19]中推广至所有层次双曲空间。关于采用现今标准层次双曲空间设置的证明，参见 [BHS19，定理 4。5] 此外，还可参见 [Bow19，定理 1。2] 以及 [Dur23，推论 C] ，这些证明使用了立方模型技术；我们也将在下文的推论 6.11中重新得到该结果。

定理 3.8 (距离公式)。 存在 $K_0 = K_0(\mathfrak{S}) > 0$，使得如果 $K > K_0$ 和 x， $y \in X$，那么

$$d_{\mathcal{X}}(x, y) \asymp \sum_{U\in\mathfrak{S}} [d_U(x, y)]_K$$

其中粗等式 $\asymp$ 仅取决于 $\mathfrak{S}$和 K。

从理念上来说（就本文的目的而言），距离公式表明，如果我们想了解如何在层次双曲空间中从一个点移动到另一个点，那么只需关注它们之间的相关域即可。

下面给出层次双曲空间中的一种特殊路径的定义。证明这类路径存在，通常与证明更困难的距离公式上界密不可分；本文第 6.4 小节也是如此。除此之外，我们不会用到这一概念。

定义 3.9. 层次双曲空间 $(\mathcal{X}\ \mathfrak{S})$ 中的路径 $\gamma\colon I\to\mathcal{X}$称为 L-层次路径，如果对每个 $U\in\mathfrak{S}$，其投影 $\pi_U(\gamma)\subset\mathcal{C}(U)$ 都是一个无参数化的 (L,L)-拟测地线。

我们以一个基本观察结束本小节。这个观察推广了如下事实：如果两个子曲面 U,V 不横截，那么它们的边界曲线在同痕意义下必定不相交。

引理 3.10. 设 $U,V,W\in\mathrm{Rel}_{K_0}(a,b)$ 对于 $a,b\in X$。

(1) 如果 $U,V\sqsubset W$与 U,V不横截，那么 $d_W(\rho_W^U,\rho_W^V)<E_{\mathfrak{S}}$。(2) 如果 $U\pitchfork V$与 $W\sqsubset V$满足 W,U不正交，那么 $d_U(\rho_W^V,\rho_U^W)<E_{\mathfrak{S}}$。

最后，我们以一个关键的层次双曲空间公理作为结尾，该公理最初是在映射类群中由 [MM00a，定理 31]证明的：

公理 3.11 （有界测地像）。如果 $U\sqsubset V$和 $\gamma\in\mathcal{C}(V)$ 是一条测地线，且 $d_V(\rho_V^U,\gamma)>E_{\mathfrak{S}}$，那么 $\mathit{diam}_U(\rho_U^V(\gamma))\leqslant E_{\mathfrak{S}}$. 此外，对于任意 $x,y\in X$ 以及连接 $\pi_V(x)$、$\pi_V(y)$ 的任意测地线 γ，如果 $d_V(\rho_V^U,\gamma)>E_{\mathfrak{S}}$，那么 $d(\pi_U(x),\pi_U(y))\leqslant E_{\mathfrak{S}}$.

3.3. **层次凸包及相关基本事实。** 在我们的层次双曲空间设置中，我们将要考虑的基本对象是下面这种粗凸包的层次概念。这些层次凸包 由一致元组构成，这些元组的点的坐标包含在每个区域中的双曲凸包内。更具体地说，给定一对点 $x,\ y\in\mathcal{X}$，对于每个 $U\in\mathfrak{S}$，我们令 $H_U=\mathrm{hull}_U(\pi_U(\{x,\ y\}))$，其中 hull_U 表示 $\mathcal{C}(U)$ 中的双曲凸包。

定义 3.12 （层次凸包）。**给定常数** $\theta>0$-凸包 $x,\ y$ 定义为所有满足以下条件的$\mathcal{X}$：$d_U(z,\ H_U)<\theta$对所有 $U\in\mathfrak{S}$ 均成立。

- 我们将 $x,\ y$ 的 θ-凸包记为 $H_\theta=$ 凸包$_\theta(x,\ y)$。

关于层次凸包，一个关键事实是它们是层次拟凸 [BHS19，引理 6。2]，关于层次双曲空间中凸性的更多内容，参见 [RST23] 。本讨论无需用到这个定义，但需要用到以下推论：

引理 3.13。对于任意 $\theta>0$，存在一个 (J,J)-粗利普希茨收缩 $\mathfrak{g}_{H_\theta}:X\to H_\theta$，其中$J=J(\theta,\mathfrak{S})>0$。

在上述引理中，映射 $\mathfrak{g}_{H_\theta}:\mathcal{X}\to H_\theta$ 是立方门映射的一种层次类比。当$z\in\mathcal{X}$时，点 $\mathfrak{g}_{H_\theta}(z)\in H_\theta$ 由对 $\pi_U(z)$ 进行逐坐标最近点投影到 H_U上，再应用实现定理 3.3得到；详见 [BHS19，命题 6。3]及其上下文。

3.4. **上推引理的推论 3.6.** 以下陈述对于我们证明立方模型定理时所需的、与距离公式相关的层次记账很有用。第一条指出，对于一对 $x,y\in\mathcal{X}$，给定的任何相关域只能嵌套于有限多个其他相关域中。该结论最初见于 x,y。另见 [DMS20，引理 2。15]；不同的证明见 [CRHK21，引理 11。13] ；而允许 [Dur23，引理 4。8] 给出了一个允许x,y 取无穷远值的版本。

引理 3.14 (覆盖)。 对于任意层次双曲空间 $(X\ \mathfrak{S})$，存在 $N=N(\mathfrak{S})>0$ 使得以下结论成立。对于任意 $x,y\in X$ 和所有 $U\in\mathrm{Rel}_{50E_{\mathfrak{S}}}(x,y)$，至多有 N个域 $V\in\mathrm{Rel}_{50E_{\mathfrak{S}}}(x,y)$ 使得 $U\sqsubset V$。

引理 3.6 的另一个推论是以下距离公式类型的陈述，它是 [Dur23命题 4 的一个较不一般的版本。14]。粗略地说，它指出，对于一对 x，y 中等大小相关域的数量，可以通过层级中更高位置的大型域，以一种精确的方式加以计算（即根据域投影）。

命题 3.15（界定大容器）。设 $K_1 > 50E_{\mathfrak{S}}$, $K_2 \geqslant K_1 + 47E_{\mathfrak{S}}$ 和 $x, y \in X$，且 $U_1 = \mathrm{Rel}_{K_1}(x, y)$，$U_2 = \mathrm{Rel}_{K_2}(x, y)$，并且 $V = U_1 - U_2$。则有以下结论：

（1）除 $PU(K_2) - 1$ 个域 $V \in V$ 外，对每个域都存在 $W \in U_2$，使得 $V \sqsubset W$。（2）对于任意 $W \in U_2,$，若 $W = \{V \in V | V \sqsubset W\}$，则有 $\#W \prec d_W(x, y)$，其常数仅取决于 $\mathfrak{S}$ 和 K_2。

上述命题有助于证明距离公式3.8的一个小幅推广。在某些情形下，这一推广很有用，例如第 5.1节中，我们希望进行距离公式型论证，而其中的被加项仅与标准距离公式项粗略相等。一个关键例子可能是，我们希望将 $d_U(x, y)$ 替换为 $d_{T_U}(x, y)$，其中每个 T_U 都是 $\mathcal{C}(U)$ 中连接 $\pi_U(x)$ 与 $\pi_U(y)$之间的一条一致拟测地线。这个结果最初针对映射类群发表于 [Min10，引理 9。6] 有关层次双曲空间情形的证明，参见 [BHMS24b，定理 2。9]（该证明依赖距离公式）以及 [Dur23，推论 4。17]（该证明不依赖距离公式）。

推论 3.16。设 $x, y \in X$。假设 $\sigma\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ 是一个满足以下条件的函数

$$\sigma(d_U(x, y)) \asymp d_U(x, y)$$

对每个 $U \in \mathfrak{S}$，其中 $\asymp$ 中的常数与 U无关。那么对于任意 $K_1 > 50E_{\mathfrak{S}}$，有

$$\sum_{U \in \mathcal{U}} [d_U(x, y)]_{K_1} \asymp \sum_{U \in \mathcal{U}} [\sigma(d_U(x, y))]_{K_1}$$

其中 $\asymp$ 中的常数仅取决于 $\mathfrak{S}$、K_1和 σ。

4. 从层次凸包到压缩区间系统

接下来的三节中，我们将概述 HHS 中一对点的层次凸包的立方模型构造，该构造来自 [Dur23]。这一构造最初由 Behrstock-Hagen-Sisto 提出 [BHS21]，，另请参见 Bowditch [Bow19]，其中给出了适用于满足类 HHS 公理的更一般粗中位数空间的版本。

本节的主要目标是说明，如何在层次双曲空间（HHS）$(\mathrm{X}\ \mathfrak{S})$ 中取一对点 $a, b \in \mathrm{X}$，并构造一族区间，以相当高效的方式编码相关的层次数据。^粗略地说，这一过程的结果是一组区间 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$，配备一族满足某些类似 HHS 的性质的相对投影，其中指标集 $\mathrm{U} = \mathrm{Rel}_K(a, b)$ 是相对于 a, b 的 K-相关域集合（定义 3.5）。对于任何这样的一组区间，都可以定义 0-一致性的概念（定义 3.1 的精确形式），从而确定直积 $\prod_{U \in \mathrm{U}} T_U$的一个特殊 0-相容子集^Q。下文第 5 节将解释为什么集合 Q 与 X 中 a, b的层次包拟等距。最后，在第 6 节，我们将公理化任何这样一族区间所满足的性质，解释它如何具有自然的墙空间结构，并证明相应的 0-一致集 Q 与该墙空间的立方对偶等距。

4.1. **本节的基本设置**。在本节余下部分，我们固定一个常数 $K \geqslant K_0$，其中$K_0 = K_0(\mathfrak{S}) > 0$ 是距离公式 3.8中的常数。在本节中，我们可以允许 K 尽可能大。

另固定 $a, b \in \mathcal{X}$。令 $\mathcal{U} = \mathrm{Rel}_K(a、b) = \{U \in \mathfrak{S} | d_U(a、b) > K\}$ 表示它们的 K-相关集合。对于每个 $U \in \mathcal{U}$，令 $\phi_U\colon T_U \to \mathcal{C}(U)$ 表示一个区间的 (C, C)-拟等距嵌入，该区间连接a_U 与 b_U，使得 $\phi_U(a_U) = \pi_U(a)$ 和 $\phi_U(b_U) = \pi_U(b)$。这里可以假设，$C = C(\mathfrak{S}) > 0$仅依赖于环境 HHS。注意，我们只取拟等距嵌入，而不是测地线，因为这是我们之后所需的一般性层次。

我们还为 a_U，b_U 设定了一些术语，因为它们将在下文中扮演特殊角色。

定义 4.1（区间上的标记点）。对于每个 $U \in \mathcal{U}$，点 a_U，$b_U \in T_U$ 称为标记点。

我们注意到，在本节所述的基本构造中，标记点始终是区间的端点 T_U。我们在小节9.2中定义的坍缩稳定树也具有这一性质，不过稳定区间本身未必如此。

本节的讨论主要遵循 [Dur23第 6 节和 7]。鉴于这一部分内容的技术性，我们大多只陈述定义和重要性质，并在适当之处给出证明概要，具体细节留待读者验证。

4.2. **约化区间系统**。我们的首要目标是将与 a, b 相关的层次数据转移到区间族 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 上。这需要为这些区间构造相对投影的概念，并验证它们具有某些类似 HHS 的性质。

这些区间投影的定义很简单：将$(\mathcal{X}\ \mathfrak{S})$的相对投影投到 $\phi_U(T_U) \subset \mathcal{C}(U)$的像上，再通过 T_U拉回到 ϕ_U^{-1}。我们用 δ_U^V而不用ρ_U^V来表示 T_U之间的相对区间投影。这些区间投影是区间版本的“树投影”，详见 [Dur23第 6]节。

下面的引理概括了我们所需的基本性质，它说明 δ_U^V 与 ρ_U^V的行为基本相同。其证明是对层次双曲空间的定义和基本性质的练习；参见 [Dur23，引理 6。13]。

Le引理 4.2。对于任意 $C > 0$，存在 $R_C = R_C(C, \mathfrak{S}) > 0$，使得以下结论成立：

(1) 若 $U \pitchfork V \in \boldsymbol{U}$，则 $\delta_U^V \subset T_U$ 和 $\delta_V^U \subset T_V$ 都是直径至多为 R_C 、且与 T_U, T_V中相应标记点的距离至多为R_C的集合。此外，$d_U(\phi_U(\delta_U^V), \rho_U^V) < R_C$，$\delta_V^U$的情形也类似。(2) 若 $U \sqsubset V \in \boldsymbol{U}$，则 $\delta_V^U \subset T_V$的直径有界于 R_C。此外，$d_V(\phi_V(\delta_V^U), \rho_V^U) < R_C$。(3) 若 $U, V \sqsubset W \in \boldsymbol{U}$，且 U, V不横截，则 直径$_{T_W}(\delta_W^U \cup \delta_W^V) < R_C$。(4) 若 $U \pitchfork V$和 $W \sqsubset V$，且 W, U不正交，则 直径$_{T_U}(\delta_U^V \cup \delta_U^W) < R_C$。(5)（有界测地像）若 $U \sqsubset V \in \boldsymbol{U}$，则任意连通分支 $C \subset T_V - \boldsymbol{N}_{R_C}(\delta_V^U)$ 都满足直径$_{T_U}(\delta_U^V(C)) < R_C$。

将上一小节中针对区间 T_U 所得到的性质抽象出来会很有用。这样做是为了之后能够将稳定区间定理8.14所产生的区间直接代入这一设置。

定义 4.3（区间系统）。给定 $R > 0$，一个针对 a、$b \in \mathcal{X}$和$\mathcal{U} = \mathrm{Rel}_K(a, b)$的 R-区间系统由以下数据组成：

（1）对于每个 $U \in \mathcal{U}$，都有一个区间 T_U 以及一个 (R, R)-拟等距嵌入 $\phi_U : T_U \to \mathcal{C}(U)$，使得 $d_U^{Haus}(\phi_U(T_U), \text{凸包}_U(a, b)) < R$。（2）对于每个 $U \in \mathcal{U}$，都存在一个标记点 $a_U \in T_U$满足 $d_{\mathcal{C}(U)}(\phi_U(a_U), \pi_U(a)) < R$，对于 b也类似。（3）存在 δ_U^V 满足引理4.2结论的集合。

备注 4.4：在第 9 节中稳定化立方模型的构造时，我们将希望使用定理 8.14 所提供的稳定区间。为此，我们将通过比直接使用 Gromov 树更为仔细的构造来赋予其区间系统结构；例如，在这种设置下，定义 4.3 中的项目（2）是显然的。但其结果是相同的：本节的其余内容同样适用于该设置。

4.3. **区间一致性**。本小节的目标是定义一个映射 Ψ：$\mathrm{hull}_{\mathcal{X}}(a, b) \to \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$，并证明其像满足在此设置下对定义 3.1的适当类比。为此，对于任意 $\alpha > 0$，我们令 $\mathcal{Z}_\alpha \subset \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$ 为 α-一致元组的集合。

现在我们可以定义映射 Ψ：$H \to \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$，其值为 $H = \text{凸包}_{\mathcal{X}}(a, b)$。令 $x \in H$，并且对每个 $U \in \mathcal{U}$，令 x_U表示在 $\psi_U(x) = \phi_U^{-1}(p_U(\pi_U(x))) \subset T_U$ 中选择的一个点，其中 p_U：$\mathcal{C}(U) \to \phi_U(T_U)$是最近点投影。对每个 $x \in H$，这定义了一个元组$(\psi_U(x)) = (x_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$。也就是说，逐坐标映射 ψ_U：$H \to T_U$ 组合成一个全局映射 Ψ：$H \to \prod_U T_U$。

引理 4.5。对于任意 $R > 0$，存在 $\alpha_0 = \alpha_0(\mathfrak{S}, R) > 0$，使得如果 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 是 $a, b \in X$ 的一个 R-区间系统，且 $x \in$凸包$_{\mathcal{X}}(a, b)$，那么 $\Psi(x) = (x_U)$ 是 α_0-一致的。

证明。设 $x \in \mathsf{hull}_{\mathcal{X}}(a, b)$。相应的元组 $(\pi_U(x_U))$ 根据引理 3.2 是 $O(\theta, \mathfrak{S})$-一致的。此外，根据 $H = \mathsf{hull}_{\mathcal{X}}(a, b)$ 的定义（定义 3.12），我们有 $d_U(\pi_U(x_U), H_U) < \theta$，其中 $H_U = \mathsf{hull}_{\mathcal{C}(U)}(a, b)$ 且 $\theta = \theta(\mathfrak{S}) > 0$。因此，对于某个 $\theta' = \theta'(\mathfrak{S}, \theta) > 0$，有 $d_U(\pi_U(x_U), \phi_U(T_U)) < \theta'$。此时，利用引理 4.2 中的性质进行直接推导，即可得到所需的一致性常数 $\alpha_0 = \alpha_0(\mathfrak{S}, R)$。细节留给读者。□

4.4. **区间加厚**。我们的下一个目标是定义一种方法，将区间系统中与区间相关的相对投影数据 T_U（即 δ_U^V）压缩，以消除设置中的粗糙性。定义 4.3 大致上将投影数据编码到一个受控误差范围内。具体而言，注意到每个区间 T_U 都包含 δ_U^V 关于 $V \sqsubset U$ 的相对投影。我们希望将彼此接近的相对投影归并到称为 簇分量的单个区间中，以便之后将它们压缩。一个难点是，δ_U^V 未必是 T_U的子区间，因此我们需要几个常数：一个用于确定相对投影达到何种程度才算“接近”，另一个则用于保证彼此不接近的簇分量之间满足最小距离界。

我们将采用以下稍微更抽象的设置，因为这将在之后的稳定化过程中派上用场：

定义 4.6（加厚）。设 T 是一个区间，并有一个分解 $T = A \cup B$，将其分解为若干线段的集合。给定 r_1, $r_2 > 0$，(r_1, r_2)-加厚 T沿着 B定义了一个分解 $T = \mathbb{T}_e \cup \mathbb{T}_c$，分为边 $\mathbb{T}_e$ 和簇 $\mathbb{T}_c$ 连通分支，如下所述：

(1) 首先，在 T 中取 B各连通分支的 r_1-邻域。将这些邻域的集合称为$\mathcal{B}$，其补集称为 $T - \mathcal{B} = \mathcal{A}$。(2) 其次，用连接任意两个在 T 中彼此距离小于 r_2 的$\mathcal{B}$ 子区间的测地线，将它们连接起来。将所得的子区间集合称为 $\mathbb{T}_c$，并令 $\mathbb{T}_e = T - \mathbb{T}_c$。

在我们当前的语境中，可以将 B 取为以下对象的集合：$\delta_U^V \subset T_U$ 用于 $V \sqsubset U$ 的线段，以及标记点 a_U，b_U在 T_U上（定义 4.1）。因此，沿着这组对象对 T_U进行加厚B会扩展 δ_U^V线段和 a_U，b_U并合并彼此邻近的扩展。对于每个 $U \in \mathcal{U}$，我们用 $T_U = \mathbb{T}_U^e \cup \mathbb{T}_U^c$表示加厚区间所得的分解。对区间系统中的每个区间进行 (r_1, r_2)-加厚后，我们将所得的加厚区间集合称为区间系统的 (r_1, r_2)-加厚。

注记 4.7。在我们的情形中，我们能够用环境 HHS 控制常数 r_1，$r_2 > 0$ 而且重要的是，我们可以选择大常数 K 使其与这些常数无关。

4.5. **折叠区间与 0-一致性**。设 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$是一个 R-区间系统，定义在 a，$b \in \mathcal{X}$上。固定 $r_i = r_i(R, \mathfrak{S}) > 0$对于 $i = 1$，其中 2 将很快确定。对每个 $U \in \mathcal{U}$，令 $T_U = \mathbb{T}_U^e \cup \mathbb{T}_U^c$表示其 (r_1, r_2)-加厚，如定义 4.6所述。

令 $q_U : T_U \to T_U$ 表示将 $\mathbb{T}_U^c$ 的每个连通分支塌缩为一个点的映射，我们将中的每个这样的点称为塌缩点。所得对象 T_U 是一个区间。注意，根据构造，对于每个 $U \in \mathcal{U}$，都有 a_U，$b_U \in \mathbb{T}_U^c$。因此，a_U，b_U中的每一个都确定一个标记点 $\hat{a}_U$，$b_U \in T_U$，而这些 标记点 $\hat{a}_U$，b_U将作为（折叠后的）区间 T_U的端点。此外，分解 $T_U = \mathbb{T}_U^e \cup \mathbb{T}_U^c$下降为一个分解 $T_U = T_U^e \cup T_U^c$，其中 T_U^c的连通分支是对应于 $\mathbb{T}_U^c$的连通分支的塌缩点，而 T_U^e的连通分支是 $\mathbb{T}_U^e$的连通分支的等距像。

将这些 q_U 映射与我们的逐坐标投影 $\psi_U : H \to T_U$结合起来，我们得到按坐标的映射 $\psi_U : H \to T_U$，其目标为压缩区间；进而将这些映射结合起来，便得到一个全局映射 $\Psi : H \to \prod_U T_U$。

我们可以用显而易见的方式定义塌缩相对投影 δ_U^V，即与商映射 q_U复合。类似地，此情形下的一致性是定义3.1的恰当类比，只不过现在所有粗糙性都已去除：

定义 4.8。元组 $(\hat{x}_U) \in \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$ 是 0-一致的，若满足以下条件：

(1) 对于任意 $U \pitchfork V \in \mathcal{U}$，要么 $\hat{x}_U = \hat{\delta}_U^V$，要么 $\hat{x}_V = \hat{\delta}_V^U$。
(2) 对于任意 $U \sqsubset V \in \mathcal{U}$，要么 $\hat{x}_V = \hat{\delta}_V^U$，要么 $\hat{x}_U \in \hat{\delta}_U^V(\hat{x}_V) \subset \hat{T}_U$。

• 我们用 $\mathcal{Q}$ 表示 $\prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$ 中的 0-相容元组集合。

我们可以证明，Ψ 的像包含于 $\mathcal{Q}$ 中：

命题 4.9。对于任意 $R > 0$，存在 $R_1 = R_1(R, \mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $r_1 > R_1$ 和 $r_2 > 0$，若 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 是与某个 (r_1, r_2)-加厚的 R-区间系统对应的折叠区间，且对于 $a, b \in X$ 和 $x \in$ 凸包$_{\mathcal{X}}(a\,b)$，则 $\Psi(x) = (\hat{x}_U) \in \mathcal{Q}$。

证明。我们需要证明 $\Psi(x)$ 满足定义4.8中的 0-一致性。

首先假设 $U \pitchfork V \in \mathcal{U}$。由于 $\Psi(x) = (x_V)$ 根据引理 α_0满足 4.5 中的 $\alpha_0 = \alpha_0(R, \theta, \mathfrak{S}) > 0$，不妨设 $d_{T_U}(x_U, \delta_U^V) < \alpha_0$。因此，只要 $q_U(x_U) = \hat{\delta}_U^V$，就有 $r_1 > \alpha_0$。

接下来假设 $U \sqsubset V \in \mathbf{U}$。如果 $d_{T_V}(x_V, \delta_V^U) < \alpha_0 < r_1$，那么 $q_V(x_V) = \hat{\delta}_V^U$，结论成立。否则，我们有 $\mathrm{diam}_{T_U}(x_U \cup \delta_U^V(x_V)) < \alpha_0$，同时 $d_{T_V}(x_V, \delta_V^U) > \alpha_0$。取 $\alpha_0 > R$，由定义 4.3 第 (4) 项中的 BGI 性质可知，对于某些 $f \in \{a, b\}$，有 $\mathrm{diam}_{T_U}(\delta_U^V(x_V) \cup f_U) < R$。特别地，令 $r_1 > \alpha_0 + R$，则 x_U和 $\delta_U^V(x_V)$ 都在 $\alpha_0 + R < r_1$ 的 f_U以内，因此 $q_U(x_U) = q_V(\delta_U^V(x_V))$。最后注意到，$q_V^{-1}(q_V(x_V))$ 包含于 $T_V - \mathbf{N}_R(\delta_V^U)$ 中包含 x_V的连通分支内，因此 $q_V(\delta_U^V(x_V)) = \hat{\delta}_U^V(q_V(x_V))$。证明完毕。□

4.6. **控制折叠区间**。在本小节中，我们记录以下技术引理。它部分是引理 4.2 的折叠版本，同时也包含命题 4.9 的结论。其陈述和证明基本上见 [Dur23，引理 7。13]。

引理 4.10 (折叠区间控制)。设 $R > 0$和 $r_1 > R_1$如命题 $R_1 = R_1(R, \theta, \mathfrak{S}) > 0$ 中的 4.9。存在 $R_2 = R_2(R, \mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $r_2 > R_2$，以下结论对任意(r_1, r_2)-加厚的 R-区间系统都成立，其中 $a, b \in \mathcal{X}$：

(1) 对任意 $x \in H =$ 凸包$_{\mathcal{X}}(a, b)$，元组 $\Psi(x) \in \mathcal{Q}$ 是 *0*-相容的。*(2)* 若 $U \pitchfork V \in \mathbf{U}$，则 $\hat{\delta}_U^V \in \hat{T}_U$和 $\hat{\delta}_V^U \in \hat{T}_V$都属于 $\{\hat{a}_U, \hat{b}_U\}$。*(3)* 若 $U \sqsubset V \in \mathbf{U}$，则 $\hat{\delta}_V^U$与某个塌缩点重合。*(4)* 对任意 $U \in \mathbf{U}$ 以及任意 $x, y \in H$，有 $d_U(x, y) \asymp d_{T_U}(x_w, y_U) \geqslant d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U)$，其中 $\asymp$ 中的常数仅依赖于 $\mathfrak{S}$ 和 R。*(5)* 若 $x, y \in H$ 且 $U \in \mathbf{U}$，并且 $\hat{\psi}_U(x)$、$\hat{\psi}_U(y)$ 是不同的塌缩点，则 $d_U(x, y) > 50E_{\mathfrak{S}}$。*(6)* 若 $U \in \mathbf{U}$ 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，则 $d_{\hat{T}_U}(\hat{a}_U, \hat{b}_U) > K - 2r_1$，其中 $>$ 中的常数仅依赖于 $\mathfrak{S}$，且 $K = K(\mathfrak{S}) > 0$ 的选取与设置无关。*(7)*（有界测地像）假设 $V \sqsubset U$，$C \subset \hat{T}_U - \hat{\delta}_U^V$ 是一个连通分支，则 $\hat{\delta}_V^U(C)$ 是一个点。特别地，若 $f \in \{a, b\}$ 且 $\hat{f}_U$ 包含于 C，则 $\hat{\delta}_V^U(C) = \hat{f}_V$。*(8)* 若 $\hat{x} \in \mathcal{Q}$，则 $\{U \in \mathbf{U} | \hat{x}_U \notin \{\hat{a}_U, \hat{b}_U\}\}$ 两两非横截，因此其基数有一个仅依赖于 $\mathfrak{S}$ 的上界。*(9)* 若 $\hat{x} \in \mathcal{Q}$，则 $E(\hat{x}) = \{U \in \mathbf{U} | \hat{x}_U \in T_U^e\}$ 两两正交。

注记 4.11。第 (5) 项显著地首次表明，定义 4.6 中的常数 r_2 发挥了实质性作用。这对于后续证明映射 Ψ: $H \to$Q（其中 Q 是 0-相容集）到层次包 $H =$ 凸包$_{\mathcal{X}}(a, b)$ 是拟等距映射至关重要。另一项值得注意的陈述是第 (6) 项，它讨论的是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域，即不存在任何 $V \in$U 满足 $V \sqsubset U$ 的域 U。此处大常数 K 发挥了关键作用。具体而言，由于没有任何东西嵌套进一个$\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域 U，映射 q_U: $T_U \to T_U$ 只会塌缩每个端点的 r_1- 邻域，因此 T_U 的直径有一个粗略的下界 K。这对于确认 映射 Ψ : $H \to$Q 是拟等距映射同样重要；见下文第 5 节。

P顶。 第 (1) 项是命题 4.9。第 (2) 项由定义 4.3 的第 (2) 项得出，方法是选择 $r_1 > 2R$。
S类似地，条目 (3) 可由定义 4.3 （即引理 4.2 的条目 (1)）通过选取 $r_1 > 2R$ 得出。
条目 (4) 直接由构造和定义 4.3 的条目 (3) 得出。

条目 (4) 是凸包定义的直接推论 H （定义 3.12）以及本小节中的构造。特别地，根据假设 ϕ_U：$T_U \to \mathcal{C}(U)$ 是一个 $(R,\ R)$- 准测地线，连接 $\pi_U(a)$，$\pi_U(b)$，从而得到粗等式；而不等式则是因为 q_U：$\curvearrowright T_U \to T_U$ 塌缩子区间，因此距离不增。

对于条目 (5)，若 $\hat{}\,\psi_U(x)$，$\hat{}\psi_U(y)$ 属于不同的簇，则 $d_{T_U}(x,\ y) > r_2$，因此根据条目 (4)，$d_U(x,\ y) > r_2$。所以，取足够大的 r_2 即可得到所需的下界。

$\hat{}$对于第（6）项：当 $U \in \mathcal{U}$ 相对于 $\mathcal{U}$ 为 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小时，则 q_U：$T_U \to T_U$ 仅塌缩 r_1-邻域中的 a_U，b_U在 T_U 中。由于 $d_U(a,\ b) > K$根据假设可知，$d_{T_U}(a_U,\ b_U) > K$，$\hat{}$而映射 q_U：$T_U \to T_U$仅塌缩 r_1-邻域中的 a_U，b_U。因此，只要 $K - 2r_1 > r_2$ （我们可以对此作出安排），结论即得。

$\hat{}\,\hat{}\hat{}$对于第（7）项：根据第（1）项，如果 f_U 是一个标记点，那么 $(f_V) = \Psi(f)$ 的 0-一致性蕴含 $\hat{}\delta_V^U(\hat{}f_U) = \hat{}f_V$，因为 $d_{T_U}(\delta_U^V(f_U)、\ f_V) < \alpha_0 < r_1$，其中注意到，根据引理 4.5，$\alpha_0 = \alpha_0(R、\mathfrak{S}) > 0$。另一方面，由于 $C \cap \hat{}\delta_U^V = \varnothing$，我们有 $d_{T_U}(q_U^{-1}(C)、\ \delta_U^V) > R$。因此，定义 4.3 的第（4）项说明 $\mathrm{diam}_{T_V}(\delta_V^U(C)) < R$，同时 $\delta_V^U(f_U) \subset \delta_U^V(C)$。于是 $d_{T_V}(\delta_V^U(C)、\ f_V) < \alpha_0 + R < r_1$，其中通过在必要时增大 r_1，我们可以保证最后一个不等式成立。于是得到 $\hat{}\ \delta_V^U(C) = \hat{}f_V$，如所断言。

对于第（8）项：假设 U、V横截，且 $\hat{}x_U \notin \{\hat{a}_U,\ \hat{}b_U\}$。由于 $\hat{}\ \delta_U^V \in \{\hat{a}_U,\ \hat{}b_U\}$根据第（2）项成立，因此 $\hat{}x_U \neq \hat{}\delta_U^V$，由 $\hat{}x$ 的 0-一致性可知，$x_V = \hat{}\delta_V^U$。因此 $\hat{}x_V \in \{\hat{a}_V,\ \hat{}b_V\}$，所以第（8）项陈述中的集合两两非横截，故根据第 3.1 小节中的第（2）项，该集合具有有界复杂度3.1。

$\hat{}\qquad\hat{}\qquad\hat{}\qquad\qquad\hat{}$最后，对于第（9）项：回顾 $T_U^e = T_U - T_U^c$，其中 T_U^c是坍缩点。因此 $E(\hat{}x)$是 $\hat{}x_U$ 不是坍缩点的区域集合。假设 U、V 既不正交，也（根据第（8）项）不横截。当 $V \sqsubset U$ 且 $\hat{}x_U = \hat{}\delta_U^V$时，根据第（1）项和第（3）项即可得证。当 $V \sqsubset U$且 $\hat{}x_U \neq \hat{}\delta_U^V$时，第（7）项推出存在某个 $f \in \{a、\ b\}$，使得 $\hat{}\ \delta_V^U(\hat{}x_U) = \hat{}f_V$；而 0-一致性表明 $\hat{}x_V = \hat{}\delta_V^U(\hat{}x_U)$，从而得到 $\hat{}x_V = \hat{}f_V$。因此，如果 U和 V不正交，那么 $\hat{}x_U$或 $\hat{}x_V$必有一个是坍缩点，这就证明了本项。证明完毕。

□

$\hat{}$5. $\Psi : H \to \mathcal{Q}$ 是拟等距映射

$\hat{}$本节将说明，为什么映射 Ψ：$H \to \mathcal{Q}$ (命题 4.9) 是从一对点 $H =$ 凸包$_{\mathcal{X}}(a,b)$ 的层次包 $a, b \in \mathcal{X}$ 到与某个充分宽的(r_1, r_2)-加厚对应的 0-相容区间系统相关联的 0-一致集 R 的映射，其中该区间系统是 a, b，并且是拟等距映射。证明分为两个主要部分：

$\hat{}$(1) 证明 $\Psi : H \to \mathcal{Q}$ 是拟等距嵌入；以及

$\hat{}\qquad\qquad\qquad

在本节余下部分，固定 $a,b\in\mathbf{X}$，并令 $H=\mathbf{hull}_{\mathcal{X}}(a,b)$ 表示它们的层次包。固定一个大常数 K，我们可以控制它相对于所有其他相关常数的大小，并^令 $\mathbf{U}=\mathbf{Rel}_K(a,b)$。最后，固定 $R>0$ 以及一个用于 a,b 的 R-区间系统 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$。令 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 表示与一个 (r_1,r_2)-加厚相对应的压缩区间族，其中 $r_i=r_i(R,\theta,\mathfrak{S})>0$ 由命题 4.9 和引理 4.10 给出。

^5.1. $\Psi:\ H\to\mathcal{Q}$ **是拟等距嵌入。** 本小节的内容大致包含于 [Dur23，第 8]节。

在陈述结果之前，我们先引入一些额外的记号：对于数 A，B，记号 $[A]_B$在 $A<B$ 时表示 0，在 $A\geqslant B$ 时表示 A。对于 $x\in H$ 和 $U\in\mathcal{U}$，我们记作

- $x=\pi_U(x)\in\mathcal{C}(U)$;
- $x_U=\psi_U(x)\in T_U$;• ^ $x_U=\hat{}\psi_U(x)\in\widehat{T}_U$.

定理 5.1. 存在 $K_1=K_1(\mathfrak{S})>0$，使得对于任意 $K_2\geqslant K_1$ 和任意 $x,\ y\in H$，都有

$$d_{\mathcal{X}}(a,b)\asymp\sum_{U\in\mathfrak{S}}[d_U(x,y)]_{K_2}\asymp\sum_{U\in\mathcal{U}}d_{\widehat{T}_U}(\hat{x}_U,\hat{y}_U)$$

其中 $\asymp$ 中的常数仅取决于 $\mathfrak{S}$ 以及 K_2 的选择性。

我们注意到，上述陈述左侧的粗等式正是距离公式 3.8，因此其内容在于右侧的粗等式。事实上，将上述定理与通过立方模型构造层级路径相结合，可以得到距离公式中（更困难的）下界，正如我们在推论 6.11中所做的那样。

在正式开始讨论证明之前，我们先作几点简化性的观察；它们基本上都是距离公式型变换。

首先，注意如果 $x,\ y\in H$且 $V\in\mathbf{Rel}_K(x,\ y)$，但 $V\notin\mathcal{U}$，那么 $d_V(x,\ y)<K+\epsilon$，其中某个 $\epsilon=\epsilon(\mathfrak{S})>0$成立。这是因为 $\pi_V(x),\ \pi_V(y)\in\mathcal{N}_\theta($凸包$_V(a,\ b))$。因此，取 $K_2\geqslant K_1>K+\epsilon$后，我们可以提高阈值以去除任何多余的域。也就是说：

$$\sum_{U\in\mathfrak{S}}[d_U(x,y)]_{K_2}=\sum_{U\in\mathcal{U}}[d_U(x,y)]_{K_2}.$$

接下来我们注意到，对于任意 $x,\ y\in H$，引理 4.10的第 **(4)** 项蕴含 $d_U(x,\ y)\asymp d_{T_U}(x_U,\ y_U)$，其中常数仅取决于 $\mathfrak{S}$。因此，我们可以利用推论 3.16 在求和中用 $d_U(x,\ y)$替换 $d_{T_U}(x_U,\ y_U)$，即：

$$\sum_{U\in\mathcal{U}}[d_U(x,y)]_{K_2}\asymp\sum_{U\in\mathcal{U}}[d_{T_U}(x_U,y_U)]_{K_2}.$$

定理 5.1中的两个界分别进行证明。上界只需要构造 ^的基本细节 T_U 以及一些距离公式工具。为清晰起见，我们给出了该命题的完整证明；此外，这是因为证明层级路径的存在性和距离公式的上界时也会用到它；而且，该论证类似于推论3.16的证明，而后者实际上蕴含了该命题。

命题 5.2（上界）。存在 $K_1=K_1(\mathfrak{S})>0$，使得对于任意 $K_2>K_1$ 以及任意x、$y\in H$，我们有

$$\sum_{U\in\mathcal{U}}[d_U(x,y)]_{K_2}>\sum_{U\in\mathcal{U}}d_{\widehat{T}_U}(\hat{x}_U,\hat{y}_U)\tag{8}$$

其中 $>$ 中的常数仅取决于 $\mathfrak{S}$ 和 K_2。

证明。如上，令 $K_1\geqslant K+\epsilon$并设 $K_2\geqslant K_1+100E_{\mathfrak{S}}$。令$\mathcal{U}_i=\mathrm{Rel}_{K_i}(x,y)$，使得$\mathcal{U}_2\subset\mathcal{U}_1\subset\mathcal{U}$。若 $U\in\mathcal{U}$ 满足 $\hat{}x_U=\hat{}y_U$，则相应的项会在右侧消失。因此，只需考虑等式（*8*）右侧（*RHS*）出现而左侧（*LHS*）未出现的 $\mathcal{V}=\{V\in\mathcal{U}|d_V(x,y)<K_2$ 以及 $\hat{}x_U\neq\hat{}y_U\}$中的域。

^为此，引理 4.10 的第（9）项指出，对于至多有界多个 U，$\hat{}x_U$ 不包含在 T_U 的某个簇点中；$\hat{}y_U$ 也同样如此。（事实上，我们可以取 $\hat{}x_U = \hat{a}_U$ 和 $\hat{}y_U = \hat{}b_U$，但这样并不会使事情更简单。）这意味着，忽略有限多个域 $\mathbf{V}' \subset \mathbf{V}$ 后，若 $V \in \mathbf{V} - \mathbf{V}'$，则 $\hat{}x_V$ 和 $\hat{}y_V$ 位于不同的簇点，因此根据引理 4.10 的第（5）项，$d_V(x,y) > 50E_{\mathfrak{S}}$，即 $\mathbf{V} - \mathbf{V}' \subset \mathbf{Rel}_{50E_{\mathfrak{S}}}(x,y)$，同时还有 $d_{\hat{T}_V}(\hat{}x_V, \hat{}y_V) \geqslant r_2 \geqslant 1$。

应用命题 3.15 即可完成证明，具体如下。令 $\mathbf{U}_i = \mathbf{Rel}_{K_i}(x,y)$，并注意到 $\mathbf{V} - \mathbf{V}' \subset \mathbf{U}_1 - \mathbf{U}_2$。命题 3.15 表明，忽略一个满足 $\#\mathbf{V}'' \leqslant P(K_2)$ 的子集 $\mathbf{V}'' \subset \mathbf{V} - \mathbf{V}'$ 后，对每个 $V \in \mathbf{V}_0 = \mathbf{V} - (\mathbf{V}' \cup \mathbf{V}'')$，都存在某个区域 $W \in \mathbf{U}_2$，它确定右端的一项，且 $V \sqsubset W$。此外，它还表明，对于每个这样的 W，以这种方式计入的区域集合 $\mathbf{W} = \{V \in \mathbf{V} | V \sqsubset W\}$ 满足 $\#\mathbf{W} \leqslant (1+A) \cdot d_W(x,y) + A$，其中 $A = A(K_2, \mathfrak{S}) > 0$。结合这些观察，可得如下计算

$$\begin{aligned}\sum_{U\in\mathcal{U}_2} d_U(x,y) &= \sum_{U\in\mathcal{U}_2} d_U(x,y) + \sum_{V\in\mathcal{V}-\mathcal{V}'} d_V(x,y) + \sum_{Z\in\mathcal{V}'} d_Z(x,y)\\ &\leqslant \sum_{U\in\mathcal{U}_2} ((1+A)\cdot d_U(x,y) + A) + K_2 \cdot P(K_2)\\ &\leqslant (1+2A)\cdot \sum_{U\in\mathcal{U}_2} d_U(x,y) + K_2 \cdot P(K_2)\end{aligned}$$

其中，最后一个不等式由以下事实得出：对每个 $U \in \mathcal{U}_2$，都有 $d_U(x, y) > K_2$。证明至此完成。

□

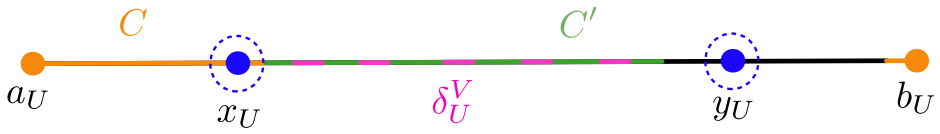


图 2. 命题 5.3 的证明：子簇 C' 隔离出 C 中与 $[x_U$相交、但避开 x_U和 y_U的 $(\alpha_0 + R)$-邻域的部分。来自具有 $\delta_U^V \subset C'$ 的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域 $V \sqsubset U$ 的 δ-集网（粉色）粗略编码了 C'的长度，而 BGIA 性质保证了 $\hat{}x_V = \hat{a}_V$ 和 $\hat{}y_V = \hat{}b_V$，进而对每个这样的 V，有 $d_{\hat{T}_V}(\hat{}x_V, \hat{}y_V) \geqslant K - B^2 - 2r_1$。

命题 5.3（下界）。存在 $K_1 = K_1(\mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $K_2 > K_1$ 和任意x，$y \in H$ 均有

$$\sum_{U\in\mathcal{U}} [d_U(x,y)]_{K_2} \prec \sum_{U\in\mathcal{U}} d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) \tag{9}$$

$\prec$ 中的常数仅取决于 $\mathfrak{S}$ 和 K_2。

证明。注意 由于 $d_U(x, y) \prec d_{T_U}(x_U, y_U)$ 对每个 U，由推论 3.16 只需证明 t

$$\sum_{U\in\mathcal{U}} [d_{T_U}(x_U, y_U)]_{K_2} \prec \sum_{U\in\mathcal{U}} d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U).$$

对于这个界，可能存在区域 $U \in \mathcal{U}$满足 $d_{T_U}(x_U, y_U) > K_2$但存在差异$d_{T_U}(x_U, y_U) > d_{\hat{T}_U}(\hat{}x_U, \hat{}y_U)$。令$\mathcal{W}$表示这类区域的集合。

^由于 T_U 是通过收缩簇从 T_U 得到的，我们需要分析将x_U与 y_U分隔开的簇，即那些依次与测地线 $C_1, \ldots, C_n$ 相交的簇 $[x_U, y_U]$ 位于 T_U中。证明主要采用大间隙不等式A 3.11 型论证，并结合命题 3.15 和覆盖引理3.14。

沿用上述记号，对每个 i，令 $C_i' = C_i \cap [x_U,\ y_U]_{T_U} - (B_{\alpha_0+R}(x_U) \cup B_{\alpha_0+R}(y_U))$，其中 $\alpha_0 = \alpha(R, \mathfrak{S}) > 0$ 是引理 4.5给出的一致性区间常数；参见图 2。

注意，对于每个 i，如果我们设 $\mathcal{V}_i = \{V \in \mathcal{U} | V \sqsubset U \text{ 和 } \delta_U^V \subset C_i\}$，那么 $\{\delta_U^V | V \in \mathcal{V}_i\}$ 在 C_i 中是 $(r_2 + 2r_1)$-稠密的。因此，我们可以找到一个子集族 $\mathcal{V}_i'$，使得

- 每个 $V \in \mathcal{V}_i'$ 都是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的；• 对于每个 $V \in \mathcal{V}'$, ，我们都有 $\delta_U^V \subset C_i'$;
- $\{\delta_U^V | V \in \mathcal{V}_i\}$ 是一个 $(2r_2 + 4r_1,\ r_2)$-网，覆盖 C_i'（见下面的定义 5.4）。

请注意，第三项中网常数的增大是保证第二项所必需的。特别地，我们有 $\#\mathcal{V}_i > \mathrm{diam}_{T_U}(C_i') \geqslant \mathrm{diam}_{T_U}(C_i \cap [x_U,\ y_U]) - 2(\alpha_0 + R)$，其中 $\#\mathcal{V}_i$表示 $\mathcal{V}_i$ 的基数。

令 $V \in \mathcal{V}_i'$。那么，根据构造，$d_{T_U}(\delta_U^V,\ x_U) > \alpha + R$ 且 $d_{T_U}(\delta_U^V,\ y_U) > \alpha_0 + R$。因此，交换 a 和 b的角色后，引理 4.2 中的大间隙不等式（5）表明 $d_{T_V}(\delta_V^U(a_V),\ \delta_V^U(x_V)) < R$且 $d_{T_V}(\delta_V^U(b_V),\ \delta_V^U(y_V)) < R$。

引理 4.5 表明，元组 (a_U)、(b_U)、(x_U)、(y_U) 都是 α_0-一致的。因此，由于 $d_{T_U}(a_U、\ \delta_U^V) > R + \alpha_0$，同理，对于 b_U、x_U、y_U、α_0，一致性迫使 $d_{T_V}(a_V、\ \delta_V^U(a_U)) < \alpha_0$，同理，对于 b_V、x_V、y_V。由此可得 $d_{T_V}(x_V、\ a_V) < \alpha_0 + R$ 和 $d_{T_V}(y_V、\ b_V) < \alpha_0 + R$，进而得到 $d_{T_V}(x_V、\ y_V) \geqslant d_{T_V}(a_V、\ b_V) - 2\alpha_0 - 2R$。据此，通过要求 $r_1 > \alpha_0 + R$，我们可以得出 $\hat{a}_V = \hat{}x_V$ 和 $\hat{}\ b_V = \hat{}y_V$。

另一方面，由于每个 $V \in \mathcal{V}_i'$ 都是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，且 $d_V(a,\ b) > K$，引理 4.10 的第 (4) 项说明 $d_{\hat{T}_V}(\hat{}\ a_V,\ \hat{}b_V) > K$。因此我们得到 $d_{\hat{T}_V}(\hat{}x_V,\ \hat{}y_V) = d_{\hat{T}_V}(\hat{a}_V,\ \hat{}b_V) > K$。

因此，对于每个 $U \in \mathcal{W}$，我们有

$$\begin{aligned} d_{T_U}(x_U, y_U) &= d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) + \sum_{i=1}^{n} \mathrm{diam}_{T_U}(C_i \cap [x_U, y_U]_{T_U}) \\ &< d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) + \sum_{i=1}^{n} \#\mathcal{V}_i' \\ &< d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) + \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{V \in \mathcal{V}_i'} d_{\hat{T}_V}(\hat{x}_V, \hat{y}_V) \right). \end{aligned}$$

最后，覆盖引理 3.14 指出，任意区域 $V \in \mathcal{U}$ 只能嵌套进 $\mathcal{U}$中的有界多个区域，其界由 $\mathfrak{S}$ 决定。因此，每个 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域 $V \in \mathcal{U}$ 至多对应有界多个 $U \in \mathcal{W}$。由此，采用与命题 5.2 证明末尾类似的论证，我们可以通过将式（$\mathcal{W}$）中具有这些较大 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域的各区域内簇被压缩所损失的距离计入，并将估计式（8）中的乘法常数增加一个有界量。证明完毕。□

我们在上述证明中使用了以下定义：

定义 5.4 (网)。给定常数 $a, A \geqslant 0$，度量空间的子空间 $Y \subset X$ 上的一个 (a, A)-网 是由 $Z \subset Y$ 个点组成的集合，满足：

(1) Z 在 Y 中是 a-粗稠密的，即对每个 $y \in Y$，都存在某个 $z \in Z$，使得 $d(z, y) < a$；(2) 对任意 $z, z' \in Z$，都有 $d_X(z, z') \geqslant A$。

特别地，Y 上的一个 (a, A)-网 Z 满足 $\#Z \asymp \mathrm{diam}(Y)$，其中常数仅依赖于 a, A。

$\hat{}$5.2. **映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to H$ 及簇的细化**。有了定理 5.1 之后，为了证明 $\hat{}\Psi :\ H \to \mathcal{Q}$ 是拟等距，我们需要说明 Ψ 是粗满射。这一事实的证明相当复杂，超出了综述性论文的范围。因此，我们主要介绍关键思路，而不提供完整的详细证明，因为与最一般情形相比，这里的证明并未大幅简化，参见 [Dur23，第 9–11]节。

在本小节中，我们将构造一个映射 $\Omega : \mathsf{Q} \to \prod_{U \in \mathfrak{U}} T_U$，并概述为何其像是 β-一致的，其中某些 $\beta = \beta(\mathfrak{S}, R, r_1, r_2) > 0$。将其升级为映射 $\Omega : \mathsf{Q} \to H$ 需要用到标准的 HHS 技术。在第 5.4 小节中，我们将证明树修剪定理 5.14。这是一个类似距离公式的实用工具，可以让我们修改折叠区间的设置，同时粗略地保留 Q 的几何结构。该工具是第 5.6 小节的关键组成部分；在该小节中，我们将概述为何 Ω 是 Ψ 的粗逆，也就是说，$d_{\mathcal{Q}}(\Psi \circ \Omega(\hat{x}), \hat{x})$ 有界，且其界与 $x \in \mathsf{Q}$ 无关。

我们现在可以开始定义映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to \prod_{U \in \mathcal{U}} T_U$，该映射是按坐标定义的。为了更精确地表述，我们希望将 Ω 定义为：

- 对于每个 $\hat{x} \in \mathcal{Q}$，元组 $\Omega(\hat{x})$ 对于某个 $\omega = \omega(\mathfrak{S}) > 0$ 是 ω-一致的，并且
- 当 $\hat{x} = (\hat{x}_U) \in \mathcal{Q}$ 且 $(x_U) = \Omega(\hat{x})$ 时，则对每个 $U \in \mathcal{U}$，有 $q_U(x_U) = \hat{x}_U$。

不出所料，在每个 q_U 下被压缩的簇子区间：$T_U \to T_U$，发挥着关键作用。特别是，这些簇子区间的直径可以任意大，因此，如果坐标 $\hat{x}_U \in \widehat{T}_U$ 位于 $\widehat{T}_U$ 的一个簇点中，那么其原像 $q_U^{-1}(\hat{x}_U)$ 就是整个簇。在该簇中选取一个点，需要利用 $V \sqsubset U$ 的坐标，其中 $\delta_U^V = \hat{x}_U$。我们将这一过程视为对该簇进行细化。

细化簇：令 $\hat{x} = (\hat{x}_U) \in \mathcal{Q}$。当 $U \in \mathcal{U}$ 具有 $\hat{x}_U \in T_U^e$ 时，定义很简单：$x_U = q_U^{-1}(\hat{x}_U)$，这是一个唯一的点。对于其他域，我们需要进一步进行一些设置。

备注 5.5。这里需要提醒读者，必须处理所有坐标 $\hat{x}_U$ 都包含在一个塌缩点中的情形。发生这种情况时，并不存在显而易见的极小域集合可供使用；而为了在区间 T_U 中重新确定坐标，必须使用手头所有的层次数据。

假设 $U \in \mathcal{U}$ 和 $\hat{x}_U \notin T_U^e$。令 C 表示 T_U 中的簇，使得 $q_U(C) = \hat{x}_U$。第一步是为每个满足 $\delta_U^V \subset C$ 的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域 $V \sqsubset U$ 关联一个标记点 $l_V \in \{a, b\}$。然后，我们利用这些 l_V 来细化较大的 $U \in \mathcal{U}$ 的簇，其中涉及了这样的 V。

那么，假设 $U \in \mathcal{U}$ 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的。由于 T_U 没有内部聚点，$\hat{x}_U$ 要么是一个 ^^标记点（即 a_U 或 b_U），要么是 T_U^e 中的一个点。若是前者，令 l_U 为相应的标记点，即 a, b。若是后者，则设 $l_U = \varnothing$。注意，根据构造，当 U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小时，$\hat{a}_U \neq b_U$。

现在假设 $U \in \mathcal{U}$ 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的。我们有 $q_U(C) = \hat{x}_U$，或者 $\hat{x}_U$ 包含于簇 $q_U(C)$ 中，该簇对应于簇 $C \subset T_U$。令 $\mathcal{B}_{\min}(C)$ 表示满足 $\delta_U^V \subset C$ 的所有 $\sqsubset$-极小域 $V \sqsubset U$ 的集合。注意，若 $\mathcal{B}_{\min}(C) = \varnothing$，则 $\operatorname{diam}_{T_U}(C)$ 可由 r_1, r_2 控制，因此也可由 $\mathfrak{S}$ 控制。

现在我们说明如何对 $\mathcal{B}_{\min}(C)$ 中的域进行细化，从而为 x_U 关联簇 C 在 T_U 中的一个有界直径子集（引理5.11）。

令 $V \in \mathcal{B}_{\min}(C)$。然后我们定义

$$C_U^V = \operatorname{hull}_C(C \cap (\mathcal{N}_{r_2}(\delta_U^V) \cup l_V)),$$

它是 C 的一个子区间，见图 3。最后，令 $B_U(\hat{x}) = \bigcap_{V \in \mathcal{B}_{\min}(C)} C_U^V$ 为这些 C_U^V 的总交集。

在下文的引理5.9 中，我们证明，若 V，$W \in \mathcal{B}_{\min}(C)$，则 $C_U^V \cap C_U^W \neq \varnothing$。由于每个 C_U^V 都是一个子区间，由树的海利性质可知 $B_U(x)$ 非空。最后，在引理5.11 中，我们证明这个交集的直径有界，且其界取决于 $\mathfrak{S}$。

因此，我们可以如下定义元组 $\Omega(\hat{x}) = (x_U)_{U \in \mathcal{U}}$：

- 对于带有 $U \in E(\hat{x})$ 的 $U \in \mathcal{U}$，我们令 $x_U = q_U^{-1}(\hat{x}_U)$。
- 对于带有 $U \notin E(\hat{x})$ 且为 $U \sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的 $U \in \mathcal{U}$，令 x_U 为 $q_U^{-1}(\hat{x}_U)$ 中的任意一点。
- 否则，我们令 $x_U \in B_U(\hat{x})$。

以下结论可由构造直接得到：

引理 5.6。对于每个 $\hat{x} \in Q$ 和 $U \in \boldsymbol{U}$，均有 $q_U(x_U) = \hat{x}_U$。

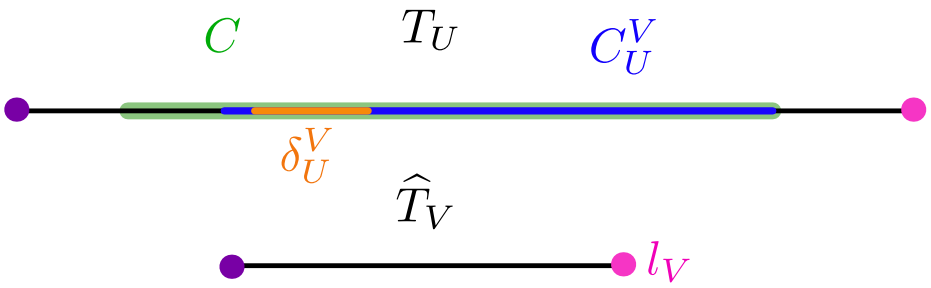


图 3。簇 C（绿色）在 T_U 中与 x_U 在 T_U中相对应。由于 $V \in \mathcal{B}_{\min}(C)$，其影 δ_U^V（橙色）避开了 T_U的所有分支。由 x_V 选出的标记点和叶 l_V（粉色）确定了 C_U^V（蓝色）在 C 中的半子树，该半子树由 V选出。

在命题 5.12 中，我们将在下文证明 (x_U) 是一个 ω-一致元组，适用于 $\omega = \omega(\mathfrak{S}) > 0$。

注记 5.7（立方体风格）。簇精炼的过程是少数几个能在构造中非显式立方体的部分看到类立方体特征的地方之一。特别是，对于每个 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小 V，两个端点a_V，b_V在 T_V中彼此不同，这一点至关重要。因此，$\sqsubset$-极小域决定了在 a，b之间选择一个端点，就像一面墙选择一个半空间一样。

当 U不是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小且 $\delta_U^V = x_U$时，坐标 x_V要么不选择 $\widehat{T}_V$的任何端点（如果 $x_V \in \widehat{T}_V^e$），要么选择a_V，b_V中的一个。这个选择进而确定了 C的某种“半区间” C_U^V，在这里我们可以把 δ_U^V 看作起到超平面的作用。在下面的引理 5.9 和 5.11中，我们将看到，所有此类“半区间”$B_U = \bigcap_{V \in \mathcal{B}_{\min}(C)} C_U^V$的交非空且有界直径，而这种类似超滤子的行为是由元组 x的一致性所迫使的。

注记 5.8（警告）。需要提醒读者，我们必须处理这样的情形：对于每个坐标 U，$\hat{}x \in \mathcal{Q}$中的$\hat{}x_U$ 都是一个簇或端点。与前一条注记中的情形一样，这些点在 T_U 中为所有 $\sqsubset$-极小域 $U \in \mathcal{U}$确定了无歧义的坐标，但仅凭这些数据，无法据此为 $\sqsubset$-格中更高层的域 V 在 T_V 中选取坐标。必须利用所有域之间的完整关系集。

5.3. 界定交。

在本小节中，我们证明所需的辅助命题，以便定义映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to \prod_{U \in \mathcal{U}} T_U$。再次固定$\hat{}x \in \mathcal{Q}$。

第一条说明，C_U^V 对应的 $V \in \mathcal{B}_{\min}(C)$ 两两非空交：

引理 5.9。若 $V, W \in \mathcal{B}_{\min}(C)$，则 $C_U^V \cap C_U^W \neq \varnothing$。此外，若 $d_{T_U}(\delta_U^V, \delta_U^W) > r_2$，则 $\delta_U^V \sqsubset C_U^W$ 或 $\delta_U^W \sqsubset C_U^V$ 至少有一个成立。

证明概要。 我们给出证明概要，详见 [Dur23，引理 9。9]。我们将在证明概要的过程中考察第 (1) 项。

根据 $C_U^V = \text{凸包}_C((\mathbf{N}_{r_2}(\delta_U^V) \cup l_V) \cap C)$ 的定义，我们可以假设 $\mathbf{N}_{r_2}(\delta_U^V) \cap \mathbf{N}_{r_2}(\delta_U^W) = \varnothing$，因此由引理 4.2 的第 (3) 项可得 $V \pitchfork W$。现在的思路是，δ_U^V, δ_U^W 必定分别出现在簇 C 中。不失一般性，我们可以假设 δ_U^V 将 a_U 与 δ_U^W 分隔开。于是可以利用 $(\hat{}x_U)$ 的一致性以及引理 4.2 和 4.10，证明 $l_V = b$ 或 $l_W = a$ 至少有一个成立；这将推出 $C_U^V \cap C_U^W \neq \varnothing$，从而得到所需结论；见图 4。 □

如上所述，我们可以定义 $B_U = \bigcap_{V \in \mathcal{B}_{\min}(C)} C_U^V$；只要 $\mathcal{B}_{\min}(C) \neq \varnothing$，根据树的海利性质，它就必定非空。

注记 5.10。树的海利性质指出，若一组子树两两相交，则它们的总交集非空。在我们当前构造的一般版本中，参见 [Dur23], ，相关的树和子树不必具有有限直径。这是我们当前语境下的论证比 [Dur23] 所讨论的情形更简单之处之一。

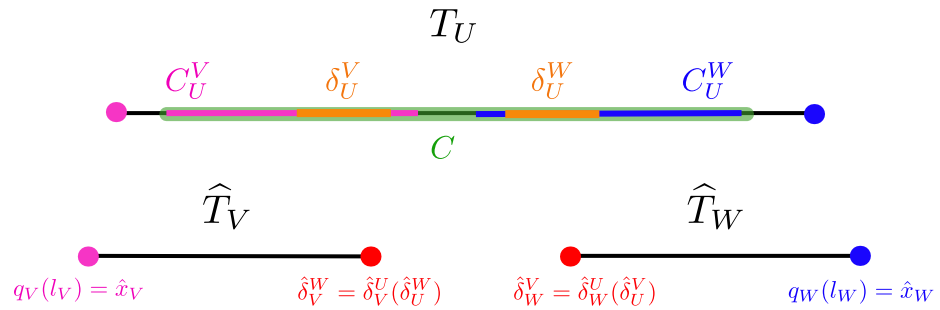


图 4. $V \pitchfork W \in \mathcal{B}_{\min}(C)$ 选择了 C_U^V（粉色）和 C_U^W（蓝色）这两条不相交的边，而它们分别属于 C（绿色）。这是不可能的情形，因为这会迫使$\hat{x}_V$和$\hat{x}_W$不一致。

下一个引理给出了 B_U 的直径上界：

引理 5.11。 存在 $B_1 = B_1(\mathfrak{S}, r_2) > 0$，使得对于所有 $U \in \mathbf{U}$，都有直径$_{T_U}(B_U) < B_1$。

证明。如果 B_U过宽（相对于 r_2而言），那么我们可以找到 $V, W \in \mathrm{B}_{\min}(C)$，使得 δ_U^V、$\delta_U^W \subset B_U$以及 $r' < d_{T_U}(\delta_U^V$、$\delta_U^W) < 2r'$对于 $r' = r'(r_2) > 0$成立，因为对于$\mathrm{B}_{\min}(C)$中的域，其 δ-集合以粗糙性的方式覆盖 C，且粗糙性仅取决于 r_2。由引理 5.9可知，$\delta_U^V \subset C_U^W$或 $\delta_U^W \subset C_U^V$至少有一个成立，也可能两者都成立。事实上，两者都必须成立；因为如果 $\delta_U^V \notin C_U^W$，那么 $\delta_U^V \notin B_U$，这是不可能的。但此时 $C_U^V \cap C_U^W \subset$ 凸包$_C($ $\mathrm{N}_{r_2}(\delta_U^V) \cup \mathrm{N}_{r_2}(\delta_U^W))$的直径由$2r' + 2r_2$界定，因为$d_{T_U}(\delta_U^V, \delta_U^W) < 2r'$。由于 $B_U \subset C_U^V \cap C_U^W$，证明完成。□

现在我们可以陈述一致性结果了：

命题 5.12. 存在 $\alpha_\omega = \alpha_\omega(\mathfrak{S}, r_1, r_2, R) > 0$ 以及一个映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to Y$，使得对任意$\hat{x} \in \mathcal{Q}$，元组 $\Omega(\hat{x})$ 都是 α_ω-一致的。此外，若 $\Omega(\hat{x}) = (x_U)$，则对每个 $U \in \mathbf{U}$，都有 $q_U(x_U) = \hat{x}_U$。

该命题的证明是对 Ω 的定义和簇的构造进行的一项颇为繁复的练习，其中运用了许多标准的 HHS 型论证。与本文其他证明不同，在我们当前的设定下，这一事实的证明与一般情形下的证明并无实质差异，见 [Dur23，第 9 小节。5], 除了需要处理 $\sqsubset$-极小二部域（定义见 [Dur23，定义 9）2] 而非所有 $\sqsubset$-极小域。因此，我们不在此重复证明，而将细节留给有兴趣的读者自行核查。

5.4. **树修剪**。 在本小节中，我们介绍一种实用工具，用于修改压缩区间系统及其关联的 0-相容集。这些“树修剪”技术使我们能够对各个压缩区间中的子区间进行受控塌缩，T_U 同时粗略保留关联的$\mathcal{Q}$-距离。我们将其视为距离公式的一种更灵活的版本，因为它们允许我们修改距离项，而不只是通过提高阈值将其舍弃。就我们的目的而言，它们将以两种不同的方式发挥作用：我们将在证明 Ψ 的粗满射性时用到它们：$H \to \mathcal{Q}$；此外，稍后在小节6.3 中，我们也会用它们来修改$\mathcal{Q}$上的立方结构。

主要思想很简单：给定一族区间 $\mathbf{U}$，我们分布在这族区间$\mathbf{U}$上的$\mathcal{Q}$-坐标塌缩，然后将它们组合成一个全局塌缩映射 $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$，其中$\mathcal{Q}'$ 是$\prod_{U \in \mathbf{U}} T_U$的0-相容集，定义方式与定义4.8相同。形式化地，我们采用以下定义：

定义 5.13（可容许修剪配置）。 给定 $B > 0$，B-可容许修剪配置 是一个由各个 $T_{U,e}$ 中的修剪区间 $\mathcal{B}$ 组成的集合，满足以下条件：

- 对于每个连通分支 $E \in \pi_0(T_{U,e})$，满足 $D \subset E$ 的连通分支 $D \in \mathcal{B}$ 至多有 B 个。
- 对于每个连通分支 $D \in \mathcal{B}$，满足 $|D| < B$。

给定 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 上的一个 B-可容许修剪配置 $\mathcal{B}$，对于每个 $U\in\mathcal{U}$，令 $\Delta_U\colon T_U \to T_{U,0}$ 表示将 T_U 中的每个修剪区间塌缩为一个点的映射。由此，我们可以在 $\widehat{T}_{U,0}$ 上导出如下投影数据：对于 $V\sqsubset U$ 和 $V\pitchfork U$，令 $(\delta_U^V)_0 = \Delta_U(\delta_U^V)$；若 $U\sqsubset V$，则令 $(\delta_U^V)_0 = \Delta_U\circ\delta_U^V\circ\Delta_V^{-1}$。令 $\Delta:\prod_{\mathcal{U}}\widehat{T}_U\to\prod_{\mathcal{U}}\widehat{T}_{U,0}$ 表示直积映射。

定理 5.14 (树修剪)。存在 $B_{tt}=B_{tt}(\mathfrak{S},K)>0$，使得对于任意 $B<B_{tt}$，都存在 $L=L(\mathfrak{S},B)>0$，满足以下条件：

(1) 我们有 $\Delta(\mathcal{Q})\subset\mathcal{Q}'$。(2) 存在一个映射 $\Xi:\mathcal{Q}'\to\mathcal{Q}$，使得 $\Delta\circ\Xi=id_{\mathcal{Q}'}$。特别地，$\Delta(\mathcal{Q})=\mathcal{Q}'$。(3) 映射 $\Delta:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$ 是一个 (L,L)-拟等距。

鉴于距离公式 3.8，这一陈述相当可信，但该定理的证明颇为复杂。尽管这些想法最初是在更一般的情形下提出的，见 [Dur23，第 10] 节——在那里，底层数据涉及两个以上的点以及层级射线时同样适用——其证明比我们当前情形所需的证明仅稍复杂一些。此外，处理射线时的许多技术细节都通过单独的论证解决了，因此建议感兴趣的读者参阅该文中的完整证明。

相反，我们将在下文给出一个简短的证明概要，希望这能提供足够的直观理解，使该陈述显得可信。我们已在附录5.14 中给出了所述版本定理的证明A。

证明概要。$\Delta(\mathcal{Q})\subset\mathcal{Q}'$, 这一事实，也就是说，$\Delta$ 保持 0-一致性，是显然的，因为 Δ_U 只会压缩子区间，因此原本被压缩的投影仍然保持压缩，从而证明了条目 (1)。

条目 (2) 是最复杂的部分。对于每个 $U\in\mathcal{U}$，令 $C_U=\Delta_U^{-1}(y_U)$。目标是为每个 $U\in\mathcal{U}$选取一个点 $x_U\in C_U$，然后证明元组 $x=(x_U)$ 的 0-一致性。注意，根据构造，对于这样的元组，$\Delta(x)=y$。

其证明思路与小节 5.2中的簇精炼过程相似。主要区别在于，压缩子区间并不会自动对应于一组域，这正是难点所在。该论证按 $\sqsubset$-格中的层级进行归纳，并需要仔细分析构造以及层级技术的数量。

最后，对于第 (3) 项，由于 $\Delta|_{\mathcal{Q}}$ 是满射且距离不增，只需证明 $d_{\mathcal{Q}}<d_{\mathcal{Q}'}$；而为此，只需给出每个 $U\in\mathcal{U}$ 中距离的上界。

给定 $x,y\in\mathcal{Q}$，其中 $x'=\Delta(x)$ 且 $y'=\Delta(y)$，令人担心的是，在修剪过程中，距离可能会被任意程度地缩短。然而，测地线 $[x_U,y_U]$ 经过的 T_U 的每个边分量中，被塌缩的子区间数量都只能有界。不过，这些边分量中至多有两个例外，其余边分量的端点都是簇点，且由 δ_U^V 标记为对 $V\precsim\sqsubset$-极小。对于这样的 V，映射 $\Delta_V\colon T_V\to T'_V$ 塌缩的子区间总直径至多为 B^2；因此，我们可以利用这些 $\sqsubset$-极小域来核算层级中丢失的所有信息。

要使这一点精确化，需要仔细处理，并用到命题 3.15。感兴趣的读者可参见 [Dur23，第 10]节。□

5.5. **转换为单纯区间**。树修剪定理5.14 的一个应用是我们可以将压缩区间族 T_U 替换为单纯区间族，使簇和标记点都位于顶点处。其基本思路是，将每个边分量 $E\subset T_U^e$ 中的一小段长度小于 1 的线段折叠掉，就能使其长度成为非负整数。由这些线段构成的族是一个 1-可容许修剪配置，它为我们提供了一个 E 长度小于 1 的这类线段族。该族构成一个 1-可容许修剪配置，并为我们提供了一个区间族 $\{T'_U\}_{U\in\mathcal{U}}$其中 $\Delta_U\colon T_U\to T'_U$将这些小线段折叠掉，而 $\Delta:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$将它们组合成其 0-一致集之间的映射。

推论 5.15。设 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 是与 a、$b\in X$ 的一个 R-区间系统的 (r_1,r_2)-加厚相对应的折叠区间。存在 $L_{simp}=L_{simp}(R,X)>0$，使得 $\Delta\colon\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$ 是一个(L_{simp},L_{simp})-拟等距。

- 特别地，除去一个一致拟等距 Q，我们可以假设折叠区间$\sim T_U$ 全都是单纯区间，且簇和标记点位于顶点处。

参见 [Dur23，第 10 小节。1] 以了解更多讨论。请注意，由于我们将仔细构造使其成为单纯复形的稳定区间，因此上述推论不会用于主定理 A的证明。不过，要在每个双曲空间中取一般区间，并执行上述构造以形成区间的层次族（参见定义 6.1），则需要用到它；而这一层次族是我们证明下文距离公式（推论 6.11）所必需的。

5.6. **从 $\Omega: \mathcal{Q} \to \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$ 到 $\Omega: \mathcal{Q} \to H$。** 现在回到我们的主要任务，即定义一个准等距映射 $\Omega: \mathcal{Q} \to H$。到目前为止，我们已经定义了映射 $\Omega: \mathcal{Q} \to \prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$，这构成了工作的主要部分。接下来，我们要将其提升为映射 $\Omega: \mathcal{Q} \to H$。由于论证的这部分主要运用标准的 HHS 技术，我们只会概述其内容，并适当引用 Dur23]。

对于每个 $x \in Q$，我们首先取元组 $\Omega(x) = (x_U) \subset \prod_U T_U$，并通过 $\phi_U(x_U) = y_U$将其向前映射为元组$(y_U) \in \prod_U C(U)$，其中 $\phi_U: T_U \to C(U)$是由 R-区间系统结构（定义 4.3）所提供的映射。这些映射共同定义了一个映射 $\Phi: \prod_{U\in U} T_U \to \prod_{U\in U} C(U)$。根据命题 5.12，存在某些 $\alpha_\omega = \alpha_\omega(\mathfrak{S}, R, r_1, r_2) > 0$，使得元组 $\Omega(x) \in \prod_{U\in U} T_U$是 α_ω-一致的。仅利用 R-系统公理和标准的层次双曲空间技术，[Dur23，命题 6.17]表明，对于某个仅依赖于 $\mathfrak{S}, \alpha_\omega$ 的一致性常数，$(y_U) \in \prod_{U\in U} C(U)$ 在定义 3.1 的意义下是一致的。

由于对于所有，$b) < K$，都有 $d_V(a\, V \in \mathfrak{S} - \mathcal{U}$，因此通过对所有$\mathcal{U}\, y_V \in \pi_V(a)\ V \in \mathfrak{S} -$ 进行选择，可知完整元组 $(y_U) \in \prod_{U\in\mathfrak{S}} \mathcal{C}(U)$ 对，R，$K) > 0$是 β-一致的（因为 α_ω 只取决于 $\mathfrak{S}$ 和 R）。

现在我们手头已有一个完整的一致元组，可以应用实现定理 3.3 来定义映射 $\mathrm{Real}_\beta: \prod_{U\in\mathfrak{S}} \mathcal{C}(U) \to \mathcal{X}$，它将每个 β-一致元组映射为一个点 $x \in \mathcal{X}$，其投影与该元组粗略一致，误差取决于 β，$\mathfrak{S}$。

最后，[Dur23，引理 6.6]，（它依赖于更一般的事实）[BHS19，命题 6.给出了一个 $(J,\ J)$-粗缩回映射 $\mathrm{ret}_H: \mathcal{X} \to H$，其中 $H =$凸包$_{\mathcal{X}}(a,\ b)$ 其中 $J = J(\mathfrak{S}) > 0$。这个映射就是到凸包的最近点投影$_U(a,\ b)$ 在每个 $\mathcal{C}(U)$ 加上定理 3.3。

将这些结合起来，我们得到一个映射 $\Omega: \mathcal{Q} \to H$ 定义为 $\Omega = \mathrm{ret}_H \circ \mathrm{Real}_\beta \circ \Phi \circ \Omega$。我们的主要目标是证明 $\Psi \circ \Omega: \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$ 是粗略意义下的恒等映射，其中 $\Psi: H \to \mathcal{Q}$ 是命题4.9中定义的映射。

在分析这个总复合之前，我们先来看一个中间步骤。为方便起见，如果 $\alpha > 0$，我们用$\mathcal{Z}_\alpha$ 表示 $\prod_{U\in\mathcal{U}} T_U$ 中 α-一致元组的集合。定义

$$\Phi_\alpha: \mathcal{Z}_\alpha \to H$$

为 $\mathrm{ret}_H \circ \mathrm{Real}_\beta \circ \Phi$。

下面的命题说明，与坐标映射 $\psi_U: \mathcal{X} \to T_U$ 复合后，该映射的行为符合按坐标方式的预期；回顾一下，这些坐标映射由 $\psi_U = \phi_U^{-1} \circ p_U \circ \pi_U$ 定义，其中 $p_U: \mathcal{C}(U) \to \phi_U(T_U)$ 是最近点投影。

命题 5.16。 存在 $D_1 = D_1(K, \mathfrak{S}) > 0$，使得如果 $x = (x_V) \in Z_{\alpha_\omega}$，那么我们有

(1) 对所有 $U \in U$，$d_{T_U}(x_U, \psi_U \circ \Phi_{\alpha_\omega}(x)) < D_1$ 均成立；

并且(2) $\#\{U \in U | d_{T_U}(x_U, \psi_U \circ \Phi_{\alpha_\omega}(x)) > 2\alpha_\omega + 3R\} < D_1$.

- 特别地，选择 $L > 2\alpha_\omega + 3R$ 后，我们得到

$$\sum_{U\in\mathcal{U}} [d_{T_U}(x_U, \psi_U \circ \Phi_{\alpha_\omega}(x)]_L < D_1^2.$$

概述。 该命题是 [Dur23命题 11 的一个特例。4], 证明几乎完全相同。第 (1) 项的证明只是追溯定义。基本上，这就是说，区间情形中的一致性大致等同于层级情形中的一致性，而从前者映射到后者再返回，只会使坐标移动有界的距离。

另一方面，第 (2) 项的证明——它断言移动超过有界距离的坐标数量有界——更加复杂，但也相当标准。它采用了引理 3.6中的上行性质的一种变体，以及定义 4.3中的大间隙不等式性质。令 $\psi_U \circ \Phi_{\alpha_\omega}(x) = y = (y_U)$。这里的思路是，如果存在太多坐标使得 $d_{T_U}(x_U,\ y_U) > 2\alpha_\omega + 3R$，那么我们就能迫使某个坐标 T_W 满足 $d_{T_W}(x_W,\ y_W) > D_1$，这与 (1) 矛盾。□

5.7. **映射 $\Omega\colon\ \mathcal{Q} \to H$ 以及 Ψ 的粗满射性。** 我们现在准备分析映射 $\Omega = \Phi_{\alpha_\omega} \circ \Omega\colon\ \mathcal{Q} \to H$。由于 $\Psi(H) \subset \mathcal{Q}$ 根据命题 4.9，我们看到 $\Psi \circ \Omega\colon\ \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}$。我们证明该映射在粗意义下是恒等映射：

命题 5.17。 存在 $M_0 = M_0(R, \mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $x \in \mathcal{Q}$，都有 $d_{\mathcal{Q}}(x, \Psi \circ \Omega(x)) < M_0$。

概要。 该命题是 [Dur23第 11 小节中所述证明的一个特例。2]由于证明的细节与原证明非常相似，我们将再次仅给出概要。

固定 $x_0 \in \mathcal{Q}$。我们将按坐标进行论证，因为 Q 上的 ℓ^1 距离就是按这种方式定义的。这里与通常的层次双曲空间风格论证不同之处在于，$d_{\mathcal{Q}}$ 是一个不涉及阈值的 ℓ^1 和。为了解决这个问题，我们将如下利用命题 5.16 和树修剪 5.14 进行论证。我们证明，所有坐标距离 $d_{\hat{T}_U}(x_U, y_U)$ 都可由 $\mathfrak{S}$ 和 K 控制，其中除至多有界多个（由 $\mathfrak{S}$控制）之外，其余距离都可由 $\mathfrak{S}$控制。然后，我们可以将后面那些域中 x_U 与 y_U 之间的子区间压缩，且只在整体上产生有界误差，从而得到 x、y 的像在商空间中相距有界，这就表明 x、y 在 Q 中相距有界。

设 $\Omega(x) = (x_U)$ 和 $\Psi \circ \Omega(x) = (y_U)$，并注意到由于 $q \circ \Omega(x) = x$，元组 (x_U)，(y_U) 恰好属于命题 5.16 中陈述的类型。此外，由于 $q \circ \Omega(y) = y$ 是按构造得到的，而 q 根据引理 4.10 的第（4）项是 1-Lipschitz 的，因此只需控制 $d_{T_U}(x_U,\ y_U)$ 的按坐标距离，即可利用上述论证。

令 $\mathcal{V} = \{U \in \mathcal{U} | x_U \neq y_U\}$。对 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-层级进行归纳。令 $\mathcal{V}_{min} \subset \mathcal{V}$ 表示 $\mathcal{V}$ 中的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域。

根据引理 4.10 的第（8）项，对于除 A 个 $U \in \mathrm{V}_{min}$ 之外的所有 $A = A(\mathfrak{S}) > 0$，我们有 x_U、$y_U \in \{a_U, b_U\}$，因此对于 V_{min} 中至多 A 个域，我们有 x_U、y_U 是 $\hat{T}_U$ 的（相反）端点。根据该引理的第（6）项，$d_{T_U}(a_U, b_U) > d_{\hat{T}_U}(a_U, b_U) > K$，而 K 可以取为比 $2\alpha_\omega + 3R$ 大得多，达到我们所需的程度，因为 α_ω 和 R 仅取决于 $\mathfrak{S}$。由于命题 5.16 对满足 $d_{T_U}(x_U, y_U) > 2\alpha_\omega + 3R$ 的 $U \in \mathrm{U}$ 中域的数量给出了界，因此我们可以得出 $\#\mathrm{V}_{min} < D_1 + A$。

现在令 $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V} - \mathcal{V}_{min}$ 表示非极小域的集合 V 其中 $x_V \neq y_V$ 以及 $d_{T_V}(x_V,\ y_V) < 2\alpha_\omega + 3R$。需要注意，根据命题 5.16 的第 (2) 项，这只排除了有限多个域。

由于映射 $q_V\colon\ T_V \to T_V$ 是 1-Lipschitz（引理 4.10 的第 (4) 项），我们有 $d_{\hat{T}_V}(x_V, y_V) < 2\alpha_\omega + 3R$。现在的思路是运用树修剪定理 5.14，将 $[x_V, y_V]$ 中位于 T_V 内的 x_V, y_V 之间的测地线压缩为点。每个区间 T_V 至多包含一条这样的测地线，并且每条这样的测地线的长度都有一个与 K 无关的上界。因此，两个 $\sqsubset$-极小域和非极小域中满足此距离界的所有这类区间构成一个可容许修剪集，符合定理 5.14 的要求。

如果令 T'_V 为由 T_V 裁剪后得到的区间，并令 Q′ 为相应的 0-相容集，那么 x'、y'（即 x、y 的像）现在对除了有界多个 V 之外的所有情况都满足 $x'_V = y'_V$，而根据命题 5.16 的第 (1) 项，其余距离都被 D_1 的某个函数所控制。特别地，$d_{\mathcal{Q}'}(x, y)$ 是有界的。但映射 $\Delta : \mathrm{Q} \to \mathrm{Q}'$ 是一致拟等距，这意味着 $d_{\mathcal{Q}}(x, y)$ 也有界，这正是我们想要证明的结论。具体细节留给读者验证。□

6. 从区间的层次族构建立方复形

本节的目标是说明，如何从一组满足某些类似 HHS 的性质的特殊区间出发，构造一个 CAT(0) 立方复形。这一构造的细节促使我们在本文后续部分发展稳定化技术。

6.1. **区间的层次族**。 本小节将区间族所需满足的性质公理化，以便据此构建立方复形。公理化的目的在于允许我们以各种方式修改构造，同时保留这些公理，因为任何满足这些公理的设置都会产生一个立方复形。这些性质本身受到层次双曲空间公理以及引理中的性质的启发4.10。

定义 6.1（区间的层次族）。 区间的层次族（HFI）由以下对象和性质构成：

（1）一个由区域组成的有限指标集 $\mathfrak{U}$，带有关系 $\sqsubset, \pitchfork, \perp$，满足• $\sqsubset$ 是反自反且反对称的，并给出链长有界的偏序；• $\pitchfork$是对称且反自反的；• 存在唯一的 $\sqsubset$-极大元素 S；• $\mathfrak{U}$ 中任意一对区域 $U, V \in$ 恰好满足上述一种关系。（2）任意两两 $\perp$可比较的 $\mathfrak{U}$ 的子集，其大小均有上界。$\widehat{\ }$（3）对每个 $U \in \mathfrak{U}$，都有一个与之关联的有限单纯区间 T_U。（4）一对标签 $F = \{x, y\}$，用于确定端点，称为$\widehat{\ }$区间 T_U 的标记点 $\hat{}x_U, \hat{}y_U$，对每个 $U \in\mathfrak{U}$ 均如此。（5）一族相对投影，用于确定：• 对于每个 $U, V \in\mathfrak{U}$，若 $V \sqsubset U$或 $V \pitchfork U$，则存在一个称为簇点的顶点 $\hat{}\delta_U^V \in \widehat{T}_U^{(0)}$。（6）存在投影映射 $\hat{}\ \delta_V^U \colon \widehat{T}_U \to \widehat{T}_V$，当 $V \sqsubset U$时满足以下性质：（a）（一致性）对每个 $f \in F$，有 $\hat{}\ \delta_V^U(\hat{}\ f_U) = \hat{}f_V$。（b）（大间隙不等式）若 $C \subset \widehat{T}_U - \hat{}\delta_U^V$ 是一个连通分支，则对满足 $\hat{}f_U \in C$的 $f \in F$，$\hat{}\ \delta_V^U(C)$ 与 $\hat{}\ f_V$ 重合。（7）若 $U, V, W \in\mathfrak{U}$ 满足 $V, W \sqsubset U$, $V \pitchfork W$，且 $\hat{}\ \delta_U^V \neq \hat{}\delta_U^W$，则 $\hat{}\ \delta_V^U(\hat{}\delta_U^W) = \hat{}\delta_V^W \in \widehat{T}_V$。

注记 6.2。 在 [Dur23 的定义12中，1], 区间的层级树族的定义允许树拥有多于2个叶。这仅在对3个或更多点的元组建模时才有必要。

下 文是第 4 节工作的直接推论，尤其是引理 4.10 ：

引理6.3。 设 $R > 0$， $r_1 > R_1 = R_1(R, \mathfrak{S}) > 0$ 如命题 *4.9* 和 $r_2 > R_2 = R_2(R, \mathfrak{S}) > 0$如引理 *4.10*。对于任意 (r_1, r_2)-加厚的 R-区间系统，其对应于 $a, b \in \mathcal{X}$，相关的压缩区间族及其压缩投影构成一个区间的层次族。

$\widehat{\ }$如定义 4.8 中所述，我们可以定义直积 $\prod_U T_U$ 的一个0-相容子集。我们的下一个目标是以下定理：

定理 6.4。 *HFI* 的0-一致子集是一个 *CAT(0)* 立方复形。此外，其超平面与各因子的边之间存在一一对应关系。

6.2. **中位图与对偶立方复形**。 我们在此给出的定理 6.4的证明将用到中位空间的概念。中位图与 CAT(0) 立方复形之间的联系可追溯至 Roller 对 Sageev 构造的重新阐释 [Rol16] ；另见 [Sag95], 、[CN05、Nic13]。值得注意的是，Chepoi [Che00，定理 6.1] 证明了每个中位图都是唯一一个 CAT(0) 立方复形的 1-骨架。Bowditch 在 [Bow22第 11] 节中详细阐释了这些联系。

设 X 是一个空间，$\mathsf{m} \colon X^3 \to X$ 是一个三元算子。若对所有a， b， c， d， $e \in X$，均有下述性质，则称 (X, m) 为中位代数

$$\mathsf{m}(a, b, c) = \mathsf{m}(b, a, c) = \mathsf{m}(c, a, b),\ \mathsf{m}(a, a, b) = a,\ \mathsf{m}(a, b, \mathsf{m}(c, d, e)) = \mathsf{m}(\mathsf{m}(a, b, c), \mathsf{m}(a, b, d), e).$$

若图 Γ 中所有 $v_1, v_2, v_3 \in \Gamma^{(0)}$ 的选择性均满足：对于所有 i, j，存在一个唯一的点位于从 v_i, v_j 出发的某条测地线上；那么 $\mathsf{m}(v_1, v_2, v_3)$ 就是该唯一的点。

给定 $a, b \in X$， a, b之间的（中位）区间 为 $I(a, b) = \{x \in X | \mathsf{m}(a, x, b) = x\}$。若中位代数 (X, m) 满足对每个 $a, b \in X$，$I(a, b)$ 都是有限的，我们就称它是离散的 。子代数 是一个在 m 运算下封闭的子集$S \subset X$ 。特别地，局部有限中位图是离散中位代数。

每个中位代数 (X,m) 都确定一个称为其邻接图 $\Gamma(X)$ 的图，定义如下。若 $a, b \in X$满足 $I(a, b) = \varnothing$，我们就称它们相邻。 $\Gamma(X)$的顶点是 X中的点；当且仅当 a, b相邻时，$a, b \in X$才由 $\Gamma(X)$中的一条边连接。该图是中位图，当且仅当 (X, m) 是离散中位代数 [Bow22, 引理 16.1.2]。

每个 CAT(0) 立方复形 X 都具有如下规范的中位数结构。对于任意 $a, b \in X^{(0)}$，令 $J(a, b)$ 表示 a, b之间的 ℓ^1-测地线集合。那么给定 $a, b, c \in X^{(0)}$，$\mathsf{m}(a, b, c) = J(a, b) \cap J(a, c) \cap J(b, c)$ 是一个单点，并且 (X, m) 构成中位数结构，其中 $X^{(1)}$ 是中位图；特别地，对所有 $a, b \in X^{(0)}$，都有 $J(a, b) = I(a, b)$ 。此外，显然 $X^{(1)} = \Gamma(X^{(0)})$，因为 $X^{(0)}$ 中中位相邻的顶点恰好是张成 $X^{(1)}$中一条边的顶点。

^定理 6.4 的证明。首先注意到$\mathcal{Y} = \prod_{U \in \mathcal{U}} T_U$ 是单纯树的乘积，因此是一个 CAT(0) 立方复形。

接下来注意，$\mathcal{Q} \subset \mathcal{Y}$ 是一个立方子复形，理由如下。对于任意 $x \in \mathcal{Q}$，令 $C \subset \mathcal{Y}$ 为包含 x 且使其位于内部的最小立方体。假设 C 不是一个顶点，根据最小性，x_U 在 C的每个定义坐标区间中都位于一条边的内部，而这些区间的区域标签根据引理 4.10 的第（9）项两两正交。这意味着我们可以任意改变 x 的这些坐标，使其成为这些边上任意选择的点，也就是说 $C \subset \mathcal{Q}$。因此 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{Y}$ 的一个立方子复形。

因此，只需证明 $\mathcal{Q}^{(0)} \subset \mathcal{Y}$ 是一个离散中位子代数。一旦证明了这一点，就可知 $\Gamma(\mathcal{Q})$ 是一个中位数图；显然 $\Gamma(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}^{(1)}$，因为 $\mathcal{Q}$ 是 $\mathcal{Y}$ 的一个立方子复形。由于每个中位数图都是唯一一个 CAT(0) 立方复形的 1-骨架 [Che00，由定理 6.1],可知 $\mathcal{Q}$ 必定就是该立方复形，证明完毕。

该结论可归结为三个留给读者的练习：

- 任意（有限个）中位空间的直积都具有中位空间的结构，其中直积上的中位数是各坐标上的中位数构成的元组。• 对于任意$\hat{a}, \hat{b}, \hat{c} \in \mathsf{Q}^{(0)}$，我们有 $\left(\mathsf{m}_U(\hat{a}_U, \hat{b}_U, \hat{c}_U)\right)_U \in \mathsf{Q}$。可用一个基本的一致性论证证明这一点（见 [Dur23，引理 15.12]）。• 在此中位数结构下， $a, b \in \mathsf{Q}^{(0)}$ 恰好在它们张成 $\mathsf{Q}^{(1)}$中的一条边时才是中位相邻的。

^最后，注意到$\mathcal{Y}$的超平面具有$\mathbf{h} \times \prod_{V \neq U} T_V$的形式，其中$\mathbf{h}$ 是$\curvearrowright T_U$中的某个超平面。由于$\mathcal{Q}$ 是$\mathcal{Y}$的中位子代数，$\mathcal{Q}$ 的超平面就是$\mathcal{Y}$ 的超平面与$\mathcal{Q}$的交，因此“此外”部分的结论随之得出。证明完毕。□

6.3. **更多树修剪与超平面删除**。 在小节5.4中，我们介绍了树修剪技巧。这些技巧使我们能够对一族折叠区间进行处理，并进一步折叠一族子区间，同时控制与之相关的 0-相容子集。在本小节中，我们需要对 HFI 及其相关的立方复形作进一步细化。

令$T_{\mathcal{U}}\{\}_{U \in \mathcal{U}}$ 是定义 6.1中所述的区间的层次族。固定一个常数 $B > 0$，用来控制我们在所有区间中要折叠的子区间的大小和数量。在我们的应用中，我们能够控制 B的大小，但值得注意的是，无法相对于大常数 K进行控制，这与定理 5.14的陈述不同。

定义 6.5（可容许单纯形修剪设置）。 给定 $B > 0$，一个 B-可容许单纯形^修剪设置是由各个 T_U ⊬e 的修剪区间 $\mathcal{B}$ 组成的集合，满足以下条件：

^(1) 对于每个具有 $D \subset E \in \pi_0(T_U \mathcal{B}_e)$, $D \in$，我们有 (a) D 是 E 的一个子区间，其端点位于顶点处；(b) D 的长度 $l(D)$ 是一个正整数，且其长度不超过 B。

(2) $\mathcal{B}$ 中的子区间数量不超过 B，即 $\#\mathcal{B} < B$。

注记 6.6。我们注意到，定义6.5 中的条件保证每个商区间 $T_{U,0}$都是我们通常考虑的那类单纯区间。要求每条线段 $D \in \mathcal{B}$的端点均为顶点，这保证了折叠此类线段时，只会影响其中包含的区间超平面，而保留其补集中的区间超平面。

我们采用与小节 5.4中相同的相关记号。此外，我们注意到，如果 $T_U^e \subset \mathcal{B}$，那么 $\operatorname{diam}(\widehat{T}_U) < B^2$ 且 $\widehat{T}_{U,0}$是一个点。令 $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$表示满足 $\widehat{T}_{U,0}$不是一个点的域的子集。忽略 $\mathcal{U} - \mathcal{U}_0$, 中的域后，我们可以考虑折叠区间的集合$\{\widehat{T}_{U,0}\}_{U\in\mathcal{U}_0}$，其中我们从任意满足 $V \in \mathcal{U} - \mathcal{U}_0$ 的域 $V \sqsubset U$ 中移除所有标签 δ_U^V。

下面的定理在5.14 的 HFI 情形下作了进一步阐述:

定理 6.7。设 $B > 0$ 和 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 是一个 *HFI*。对于任意 B-可容许单纯形修剪设置 $\boldsymbol{B}$，以下结论成立:

(1) 集合 $\{T_{U,0}\}_{U\in\mathcal{U}}$ 和 $\{T_{U,0}\}_{U\in\mathcal{U}_0}$ 都是 *HFI*。我们将其对应的0-一致子集记为 Q', Q_0 。(2) 我们有 $\Delta(Q) = Q'$, , 其中 $\Delta: \prod_U T_U \to \prod_U T'_U$ 是全局塌缩映射。(3) 存在一个映射 $\Xi: Q' \to Q$，使得 $\Delta \circ \Xi = id_{Q'}$。(4) 映射 $\Delta|_Q: Q \to Q'$ 是一个 $(1, B^2)$-拟等距。(5) 在立方复形层面，映射 $\Delta: Q \to Q'$ 是一个超平面删除映射，最多删除 B^2个超平面。

证明。（1）显然成立，因为我们只是将单纯子区间压缩掉。（2）–（3）由定理 5.14 推出；在证明中，只需将 HFI 公理（定义 6.1）替换为引理 4.10 中相应的性质即可。由于 Δ 至多删除 B^2 个超平面，故（5）由定理 6.4 的“此外”部分推出。最后，（4）可由（5）立即得到。证明完毕。

□

6.4. **层级路径与距离公式**。有了定理6.4，我们可以对 $\mathcal{Q}$ 的立方结构及其与层级性质的关系作一些观察。特别是，我们得到了距离公式 3.8 中（更难的）下界的证明，并证明了层级路径的存在性。

以下引理见于 [Dur23，引理 14。7], 为求完整起见，我们在此给出其证明。

引理 6.8。设 $x, y \in Q$。设 γ 是 Q 中从 x 到 y的任意组合测地线。那么对于所有 $U \in \boldsymbol{U}$, 投影 $\widehat{\pi}_U(\gamma) \subset T_U$ 都是 x_U 与 y_U之间的无参数测地线。

证明。由于组合测地线不会两次穿过同一个超平面，且限制商映射$\widehat{\pi}_U: \mathcal{Q} \to T_U$ 是 1-Lipschitz，因此 $\widehat{\pi}_U(\gamma)$ 也不会回溯。证明至此完成。□

这个引理有两方面作用：它有助于证明 HFI 的同构会诱导其立方对偶的同构（命题6.12）；在下一个命题中，我们将直接运用它来说明，立方模型中的组合测地线会映射为环境层次双曲空间中的层次路径（定义 3.9）。下一个命题的内容即是如此，它是 [Dur23，命题 148]的简化版本:

命题6.9。设 $a, b \in X$， $K \geqslant K_0$其中 $K_0 = K_0(\mathfrak{S}) > 0$ 来自定理 *3.8*，$U = \boldsymbol{Rel}_K(a, b)$，并设 $H =$凸包$_{\mathcal{X}}(a, b)$。设 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$是 R 的任意区间系统， a, b，且 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$ 是与 $r_1 \geqslant R_1, r_2 \geqslant R_2$ 的任意 (r_1, r_2)-加厚相关联的 *HFI*，其中 r_1 是正整数。设 Q 为相应的 *0*-相容集，$\Omega: Q \to H$ 为第 *5* 节中构造的拟等距映射。

- 若$\hat{a}, b$是分别对应于 a, b的点 Q，且 γ是它们之间的一条组合测地线，那么$\Omega(\gamma) \subset H$是(L_{hp}, L_{hp})之间的一条 a, b-层次路径，其中 $L_{hp} = L_{hp}(R, r_1, r_2, K, \mathfrak{S}) > 0$。

证明。 以下给出该证明一个相当完整的概要，其比 [Dur23，命题 14。8]。

$\hat{}$由于映射 Ω：$\mathcal{Q} \to H$ 实际上是按坐标定义的，因此只需考虑$\hat{}$逐坐标映射 B_U： $T_U \to T_U$ 如小节 5.2所述，因为根据假设，映射 ϕ_U： $T_U \to \mathcal{C}(U)$ 是一个(R, R)-拟等距嵌入。为此，我们令 γ_U 表示逐坐标$\hat{}$投影到每个 γ上的投影，并希望证明 T_U是 $B_U(\gamma_U)$中的一条无参数拟测地线 T_U。

根据构造， $B_U(\gamma_U) \subset [a_U, b_U] = T_U$，因此只需证明这条路径不会发生无界回退。对 U 中的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$ 层级进行归纳，若 $U \in$ U 是 $\sqsubset$- 极小的，则$\hat{}$在 q_U 中的塌缩量： $T_U \to T_U$ 有界，故由引理 6.8 即得结论。对于非极小域 $U \in$ U，注意由引理 6.8 可知，只有当$\gamma_U(t), \gamma_U(s)$ 位于对应于某个簇 C 的同一个塌缩点时， T_U 中才可能发生回退。若存在时刻 $s < t$，使得 $d_{T_U}(B_U(\gamma(s), b_U) - d_{T_U}(B_U(\gamma(s)), b_U) \gg 100r_2 + 100r_1$，则存在某个 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域$V \sqsubset U$，满足$\hat{}\ \delta_U^V = q_U(C)$，且 $B_U(\gamma_U(t))$ 位于 a_U 的一侧，而 $B_U(\gamma_U(s))$ 位于b_U的一侧，二者距 δ_U^V 均为 $(50r_2 + 50r_1)$。但一致性以及引理 4.2 中的有界测地像性质意味着， $B_V(\gamma_V(t)), a_V$与 $B_V(\gamma_V(s)), b_V$彼此 R-接近，因此 $\gamma_V(t) = \hat{a}_V$ 且 $\gamma_V(s) = \hat{}b_V$，这与此归纳法的基础情形矛盾。证明完毕。□

$\hat{}$注 6.10。 由于映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ 是一致拟中位的 [Dur23，第 15], 节，因此也可以改用层次双曲空间中的中位路径是层级路径这一事实 [BHS21，引理 1。37]。

由命题6.9 和5.3，我们得到距离公式3.8的下界：

推论 6.11。 存在 $K_0 = K_0(\mathfrak{S}) > 0$，使得对于所有 $K > K_0$ 以及任意 $x, y \in X$，都有

$$\sum_{U \in \mathfrak{S}} [d_U(x, y)]_K \prec d_{\mathcal{X}}(x, y).$$

6.5. **HFI 及其相关立方复形的同构**。 在本小节的最后部分，我们将讨论两个 HFI 何时确定同构的立方复形。尽管这一陈述并不令人意外，但它为后续各节的内容提供了动机，因此将其置于此处。

令$T'_U\{\hat{T}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$和$\{\hat{}$是定义在同一指标集 $\mathcal{U}$和相同关系上的两个 HFI，即 $\hat{}U$， $V \in \mathcal{U}$在两个 HFI 中具有相同的关系。任意映射族 i_U： $T_U \to T'_U$都会诱导一个全局映射 I：$\prod_{U\in\mathcal{U}} T_U \to \prod_{U\in\mathcal{U}} T'_U$，其中 $I((\hat{}x_U)) = (i_U(\hat{}x_U))$。

以下命题是 [Dur23 命题 14 的区间版本。12], 它给出了诱导映射成为等距映射 I： $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 的充分条件，该映射在它们的对偶立方复形之间诱导一个立方同构。

$\hat{}$ $\hat{}$**命题 6.12**。 设 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$和 $\{T'_U\}_{U\in\mathcal{U}}$是定义在同一指标集 U 上的两个 *HFI*，其标记点分别为 $F = \{a、b\}$，并设 Q、Q' 是它们对应的 0-相容集。假设对每个 $U \in U$，$\hat{}$ $\hat{}$都存在一个单纯等距映射 i_U： $T_U \to T'_U$，且该映射还满足：

(1) 我们有 $i_U(\hat{a}_U) = \hat{a}'_U \in \hat{T}'_U$和 $i_U(\hat{}b_U) = \hat{}b'_U \in \hat{T}'_U$.(2) 对于所有满足 $V \sqsubset U$或 $V \pitchfork U$ 的 $V \in U$，我们有 $i_U(\hat{}\delta_U^V) = \left(\hat{}\delta_U^V\right)'$.(3) 对于所有满足 $U \sqsubset V$且 $\hat{}x_V \in \hat{T}_V$ 的 $V \in U$，我们有 $\left(\hat{}\delta_U^V\right)'(i_V(\hat{}x_V)) = i_U(\hat{}\delta_U^V(\hat{}x_V))$.

于是，相应的映射诱导出一个立方同构 $I : Q \to Q'$。

证明概要。 下面这个版本的证明与原证明相同，而原证明本身则是运用本节中的构造加上引理 6.8 得到的一个练习。核心思路是，陈述中的条件保证由按坐标的等距映射诱导的全局映射 I 保留 0-一致性和距离，即我们有 I： $\mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 是一个等距嵌入，而其满射性则由一致性论证得出。由于逐区间映射尊重单纯结构，根据引理2.5，我们有 I 也是一个立方同构。细节留给读者。

□

7. 控制域

本节转而证明我们的主要技术结果，即稳定立方区间定理 9.9，这是针对一对点a，b在任意层次双曲空间 $\mathcal{X}$中的立方模型构造的稳定化版本。我们的目标是证明：若将 a，b稍作扰动，得到一对点 a'，b'满足 $d_{\mathcal{X}}(a,\ a') \leqslant 1$且 $d_{\mathcal{X}}(b,\ b') \leqslant 1$，那么我们可以为 $\mathcal{Q}$构造立方模型 a，b并为 $\mathcal{Q}'$构造立方模型a'，b'使二者在删去有界多个超平面后同构。为此，需要仔细控制输入立方化机制的主要要素——即由这些点的投影构造出的区间族。

这一过程的第一步，是说明如何控制一对点 $F = \{a、\ b\} \subset \mathcal{X}$及其扰动 $F' = \{a',\ b'\}$（如上所述）的相关域集合（定义 3.5）。在接下来的几节中，我们将说明如何利用这些投影数据构造一族稳定区间，并将其输入立方化机制。

第一部分的主要工作，Bestvina–Bromberg– Fujiwara [BBF15] 和 Bestvina–Bromberg–Fujiwara–Sisto [BBFS20]已经替我们完成了。我们与 Minsky 和 Sisto 在 [DMS20]中的工作，主要是将他们的设置调整到层次双曲空间情形，并作出了一些直接但重要的观察。

在 [DMS20的第 2.3 和 2.4], 节中，我们处理的是 F，F'为有限点集且基数可能大于 2 的情形。尽管如此，其中所有论证最终都归结为考察点对，因此，对于我们当前的设置，证明实质上相同。因此，我们主要介绍设置和关键陈述，只对证明作简要概述。

7.1. **可着色性**。 BBFS [族20]所适用的层级情形属于以下这一类，该类最初由 [DMS20，定义 2 中提出。8] 后来又被 [HP23、Pet21]采用：

定义 7.1（可着色层次双曲空间）。若存在将 $\mathfrak{S}$ 分解为有限多个族 $\mathfrak{S}_i$的方式，使得每个 $\mathfrak{S}_i$ 都是两两-$\pitchfork$，则称层次双曲空间 $(\mathcal{X}\ \mathfrak{S})$ 是可着色的。

- 我们将 $\mathfrak{S}_i$ 称为*BBF* 族。

注 7.2。可着色性的概念受到 Bestvina-Bromberg-Fujiwara [BBF15],的工作的启发；他们证明了曲线图是有限可着色的。因此，给定有限型曲面 S 的子曲面集合可以分解为有限多个由两两交错的子曲面组成的族，上述定义正是对这一概念的直接推广。关于这一联系的详细讨论，参见 [DMS20，小节 2。3]。

7.2. **稳定投影**。 我们的下一个目标是陈述一个定理，为任意可着色层次双曲空间配备一组投影，使其满足若干关键稳定性性质。首先需要给出一些定义。

给定一对点 $F = \{x,\ y\} \subset \mathcal{X}$和 $K > 0$，令$\mathcal{U}(F) = \mathrm{Rel}_K(F)$。若 $V \in \mathcal{U}(F)$，则令$\mathcal{U}^V(F) = \{W \in \mathcal{U}(F) | W \subsetneq V\}$。

以下定义 [DMS20，定义 2。13]描述了我们在扰动 F时想要控制的域：

定义 7.3（涉及的域）。设 $F = \{x,\ y\}$，$F' = \{x',\ y'\} \subset \mathcal{X}$满足 $d_{\mathcal{X}}(x,\ x') \leqslant 1$且$d_{\mathcal{X}}(y,\ y') \leqslant 1$。对于 $K > 0$，若 $V \in \mathcal{U}(F) \cup \mathcal{U}(F')$满足以下任一条件，则称其涉及从 F到F' 的转变：

(1) $\pi_V(F) \neq \pi_V(F')$。

（2）$\mathcal{U}^V(F) \neq \mathcal{U}^V(F')$。

以下结果结合了 [DMS20，定理 2.9 和命题 2。14], 它指出，对于任意可着色层次双曲空间 $\mathcal{X}$，我们都可以将给定的投影替换为粗等价投影，并借此以有界误差控制涉及的域：

定理 7.4。 设 $(X\ \mathfrak{S})$ 是一个配有标准投影 $\hat{}\pi_\_$、$\hat{}\rho^_$的可着色层次双曲空间。那么存在$\theta > 0$ 以及新的投影 $\pi_\_$、$\rho^\_$，它们分别具有相同的域和值域，并满足以下条件：

(1) 新的投影 $\pi_\_, \rho^\_$ 与旧投影 $\hat{}\pi__, \hat{}\rho^_$粗略地重合。更准确地说：

(a) 如果 X, Y 位于不同的 $\mathfrak{S}_j$ 中，且 $\hat{}\rho_Y^X$ 有定义，那么 $\rho_Y^X = \hat{}\rho_Y^X$。*(b)* 如果 $X, Y \in \mathfrak{S}_j$，那么 $d_Y^{Haus}(\rho_Y^X, \hat{}\rho_Y^X) < \theta$.*(c)* 如果 $x \in \boldsymbol{X}$ 且 $Y \in \mathfrak{S}$，那么 $d_Y^{Haus}(\pi_Y(x), \hat{}\pi_Y(x)) < \theta$。*(2)* 存在 $K_0 = K_0(\boldsymbol{X}) > 0$ 和 $N_0(\boldsymbol{X}) > 0$，使得如果 $K > K_0$，则下述结论成立。设 $x, y, x', y' \in \boldsymbol{X}$，其中 $d_{\mathcal{X}}(x, x') \leqslant 1$ 且 $d_{\mathcal{X}}(y, y') \leqslant 1$，并令 $\boldsymbol{U} = \boldsymbol{Rel}_K(\{x, y\})$ 和 $\boldsymbol{U}' = \boldsymbol{Rel}_K(\{x', y'\})$ 为新投影 $\pi_\_$ 对应的相关集合。那么：*(a)* $\#(\boldsymbol{U} \triangle \boldsymbol{U}') < N_0$，且若 $V \in \boldsymbol{U} \triangle \boldsymbol{U}'$，，则 $d_V(x, y) < K$ 且 $d_V(x', y') < K$。*(b)* 在 F 与 F' 之间的转变过程中，涉及的域 $V \in \boldsymbol{U}(F) \cup \boldsymbol{U}(F')$ 至多有 N_0 个。

证明概要。 满足条件 (1) 的新投影的存在性，基本上可直接由 [BBFS20 的定理 4 的构造推出。1]关于相关集合 $\mathcal{U}$、$\mathcal{U}'$, 稳定性的条件 (2) 需要多做一些工作，但关键思路如下：

利用 [BHS19, 命题 2.8]（推广了 [CLM12, BKMM12, BBF15]），在 $\mathrm{Rel}(x, y)$ 上存在一个偏序 $\prec$；对于每个 i，该偏序在 $\mathrm{Rel}^i(x, y) = \mathrm{Rel}_K(x, y) \cap \mathfrak{S}_i$ 上成为全序。因此，我们可以将每个 $\mathrm{Rel}^i(x, y)$ 视为一个区间 $X_1 \prec \cdots \prec X_n$。新投影 $\pi_\_, \rho_\_^-$ 满足的一项附加性质（见 [DMS20, 定理 2.9]）是：若 $X \prec Y$ 同时沿着 $\mathrm{Rel}(x, y)$ 和 $\mathrm{Rel}(x', y')$，则 $\pi_Y(x) = \pi_Y(x') = \rho_Y^X$ 且 $\pi_X(y) = \pi_X(y') = \rho_X^Y$。利用这一点，可以证明 $\mathrm{Rel}(x, y)$ 和 $\mathrm{Rel}(x', y')$ 在全序 $\prec$ 中至多只在首尾元素处不同。因此，$\#\left(\mathrm{Rel}^i(x, y) \triangle \mathrm{Rel}^i(x', y')\right) \leqslant 4$；见 [DMS20, 引理 2.11 和命题 2.12]。由于 BBF 族 $\mathfrak{S}_i$ 只有有限多个，(2a) 便可轻松得证。

现在可以用类似的论证来控制定义 7.3 中类型 (1) 的涉及区域数量，参见 [DMS20 命题 2 的证明。14]对于类型 (2) 的涉及区域，这可直接由第 (2a) 项和覆盖引理 3.14 得出；该引理限定了给定的 $W \in \mathcal{U}$ 能够嵌套进多少个区域 $V \in \mathcal{U}$ 之中。□

8. 稳定区间

借助定理 7.4 提供的新 HHS 投影，我们现在转而将稳定化的投影数据转化为稳定的区间族，特别是稳定第 4 节中的立方模型构造的输入。

我们的最终目标是为相邻且仅相差受控数量超平面删除的点对构造立方模型（定理 9.9）。由于立方模型中的超平面来自 HFI 中单纯区间的边（定理 6.4），因此只需构造这样的 HFI，使其中的区间之间仅相差有界数量的有界大小边集。这正是稳定区间定理 8.14 的内容。

我们首先说明这一结果的推导过程，具体陈述则留待后文。我们将在具有类层级构型的双曲空间中展开讨论。该构造是双曲几何中一项颇为漫长且精细的工作，我们主要会给出详细的概述。

8.1. 基本设置与假设。 在本节余下部分，假设 $\mathcal{Z}$ 是一个 δ- 双曲测地空间。我们首先要设定一项记号：为任意一对点选择一条测地线。也就是说，对任意 $x, y \in \mathcal{Z}$，我们固定（并始终沿用）一条测地线 $\lambda(x, y)$。更一般地，若 $C, C' \subset \mathcal{Z}$ 是有限子集，则记 $\lambda(C, C')$ 为连接它们的一条选择性测地线，其长度满足 $|\lambda(C, C')| = d_{\mathcal{Z}}(C, C')$，并要求其具有对称性，即 $\lambda(C, C') = \lambda(C', C)$。

还需要对测地线函数 λ 稍作修改，使其结果长度为整数。为此，我们令 $\lambda_0(C, C')$ 表示 $\lambda(C, C')$：$[0, d_{\mathcal{Z}}(C, C')] \to \mathcal{Z}$ 在区间 $[0, \lfloor d_{\mathcal{Z}}(C, C') \rfloor]$ 上的限制。这样做的效果是截短 $\lambda(A, B)$，使其具有正整数长度，并且它们的长度满足 $l(\lambda(C, C')) - l(\lambda_0(C, C')) < 1$。虽然并非必要，但也可以将两侧各截短 $l(\lambda(C, C')) - l(\lambda_0(C, C'))$ 的一半，使其对称。不过，在论证过程中，通常可以使用 λ 而不是 λ_0。

现在，在本节余下部分中，我们固定一对点 $\{a,b\}\subset\mathcal{Z}$。此外，令 $\mathcal{Y}\subset\mathcal{Z}$ 为 $\mathcal{Z}$ 的一个有限（但可能任意大）点集，并令 $\epsilon>0$，使得对于所有 $y\in\mathcal{Y}$，都有 $d_{\mathcal{Z}}(\lambda(a,b),y)<\epsilon/2$。我们称这样的安排 $(a,b;\ \mathcal{Y})$ 为 $\mathcal{Z}$ 中的一个 ϵ-设置。

在层级情形中，$\mathcal{Z}$ 将是双曲空间 $\mathcal{C}(U)$ 对于 $U\in\mathcal{U}$，而点 $\mathcal{Y}$将是 ρ_U^V 对于 $V\sqsubset U\in\mathcal{U}$中的点。点 $\mathcal{Y}$ 与 $\lambda(a,b)$ 之间的邻近条件来自大间隙不等式 A 3.11。

记号 8.1 ($O(\epsilon)$-记号)。本节中，我们经常需要对各种距离量获得受控的界限，这些界限取决于我们对 ϵ 的选择性以及 $\mathcal{Z}$ 的双曲常数。当数值 A 可由 ϵ,δ的函数给出上界时，我们将简写为

$$A<O(\epsilon),$$

因为 δ 是给定的，而我们需要灵活地选择 ϵ。

以下引理本质上是双曲空间的莫尔斯引理的推论，它控制了当 $\lambda(C,C')$ 可以离 $\lambda(a,b)$ 多远，其中 $C,C'\subset\mathcal{Y}$，因此与$\lambda(a,b)$的距离至多为 ϵ:

引理 8.2 （伴行，δ-双曲）。设 Z 是 δ-双曲且为测地的，γ 是连接 a、$b\in Z$ 的一条测地线。对于每个 $\epsilon>0$，存在 $\epsilon'=O(\epsilon)>0$，使得以下结论成立：

- 设 γ' 是一条连接点 x、$y\in N_\epsilon(\gamma)$ 的测地线，并且 x'、y' 分别是 x、y在 γ 上的最近点。那么任意测地线 $[x、\ y]$ 都满足 $d_{\mathcal{Z}}^{Haus}([x、\ y]、\ [x'、\ y'])<\epsilon'$。

因此，如果 C，$C'\subset\mathcal{Y}$是有限子集，那么 $\lambda(C,\ C')\subset\mathcal{N}_{\epsilon'}(\lambda(a,\ b))$。最后，为方便起见，我们假设 $\epsilon'>\epsilon$。

8.2. **簇与簇图**。我们的首要目标是将$\mathcal{Y}$ 中的点分组成相邻集合的簇。为此，令 $E=E(\epsilon)>\epsilon$ 足够大，其具体取值将在下文确定。

令 $\mathcal{C}_E$ 表示一个图，其顶点是$\mathcal{Y}\cup\{a,b\}$中的点；当且仅当 $d_{\mathcal{Z}}(x,y)<E$时，两个点 $x,y\in\mathcal{Y}\cup\{a,b\}$之间有一条边。$\mathcal{C}_E$的连通分支称为 E-簇；当 E 固定时，也简称为簇。

对于任意 E-簇 C，令 $s(C)=\mathrm{hull}_{\lambda(a,b)}(p_{\lambda(a,b)}(C))$ 表示 C 在 $\lambda(a,b)$上的最近点投影在 $\lambda(a,b)$中的凸包。集合 $s(C)$ 称为 C 在 $\lambda(a,b)$上的影。

下面的引理说明簇的影子沿着 $\lambda(a,b)$的排列方式。其证明很直接（见 [DMS20，引理 3。6]），因此留给读者验证（:

引理 8.3。若 $E>5\epsilon$ 和 $C\neq C'$ 是不同的 E-簇，则 $s(C)\cap s(C')=\varnothing$.

在下文中，我们需要多次调整簇常数 E，但通常会省略该常数，直接称它们为簇。

现在，我们可以利用引理 8.2 来定义簇分离的概念。其思路是，簇彼此 ϵ-近，因此连接它们的测地线也会保持 $\lambda(a$-近于 $b)$，根据引理 ϵ'-近于 $\lambda(a,\ b)$ 引理 8.2。

定义 8.4。设 C_1、C_2、C_3 为簇。给定 $\epsilon'>0$，若存在一条连接 C_1 与 C_3 的最短测地线，且该测地线经过距 C_2不超过 $2\epsilon'$ 的位置，则称 C_2 ϵ'-分离 C_1 与 C_3。

- 给定 $E>0$，对于 $(a、\ b;\ \mathcal{Y})$，其 E-簇分离图记作 $\mathcal{G}_E=\mathcal{G}_{E、\ \epsilon'}(a、\ b;\ \mathcal{Y})$，定义如下：$\mathcal{G}_E$ 的顶点是簇；当且仅当两个顶点不被另一个簇 $2\epsilon'$-分离时，它们之间以一条边相连。

以下实质上是引理 8.3 的推论。它指出，簇图是一个区间，其顶点的顺序与簇影子沿着 $\lambda(a,\ b)$ 的顺序相对应。我们省略其证明，该证明只用到双曲几何和引理8.3。

命题 8.5。设 $\mathcal{Z}$是 δ-双曲的，$\lambda(a,\ b)$一条连接 a，$b\in\mathcal{Z}$，并且 $\mathcal{Y}\subset\mathcal{Z}$ 有限，满足$\mathcal{Y}\subset\mathcal{N}_\epsilon(\lambda(a,\ b))$。另设 $\epsilon'=\epsilon'(\epsilon,\ \delta)>0$如引理 8.2 中所述，并且 $\epsilon'>\epsilon$。

存在 $E=E(\epsilon,\delta)>0$，使得 E-簇分离图 $G_{E,\ \epsilon'}(a,b;\ Y)$ 是一个区间，其顺序与沿着 $\lambda(a,b)$ 的簇影顺序一致，且其端点簇分别包含a,b。

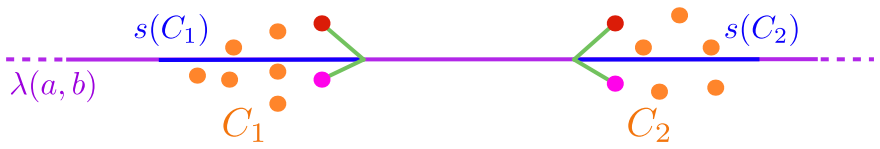


图 5. 引理的证明 8.8：簇可能有多对最近点。在此例中，C_1 上的红色点和粉色点到 C_2上与之对应的点等距，而 C_1 中的红色和粉色聚点到影 7ϵ的端点的距离均不超过 $s(C_1)$ 与 $s(C_2)$最近的 C_1；C_2 互换两者的角色时，情况也相同。在接下来的论证中，这将使我们能够得出结论：即使改变簇，连接簇之间的点仍彼此接近。

8.3. **稳定区间的定义**。现在我们已准备好描述稳定区间。

由命题 8.5可知，簇分离图是一个区间。我们的稳定区间可分解为两个区间族，即边分量和簇分量。边分量在相邻簇的最近点处将它们连接起来，而簇分量则连接与给定簇相连的所有边分量的端点。

定义 8.6（稳定区间）。设$\mathcal{Z}$为 δ-双曲的，a，$b\in\mathcal{Z}$且 $\lambda(a,\ b)$为连接它们的一条测地线，并设$\mathcal{Y}$ $\subset\mathcal{Z}$ 为有限集，且$\mathcal{Y}$ $\subset\mathcal{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a,b))$。此设置下的稳定区间是以下两个测地线段族的并集：

（1）（边分量）对于 G 中每一对相邻的簇 C、C' $=\mathsf{G}E\epsilon'(a\,b;\ \mathrm{Y})$，它们之间的边分量为 $\lambda_0(C$ $C')$。• 这些边分量构成边森林，记作 T_e。（2）（簇分量）对于每个簇 C，令 C_1C_2 为 G 中与 C 相邻的簇。令 $r(C)$ $=$ $C\cap(\lambda(C_1C)\cup\lambda(C\,C_2)\cup\{a\,b\})$；若 C 是端点簇，则令 $\lambda(C_i$ $C)$ $=\varnothing$，其中 $i\in\{12\}$取适当的值。于是，簇 C 确定簇分量$\mu(C)=\lambda(r(C))$。• 这些簇分量构成簇森林，记作 T_c。• 稳定区间为 $T(a\,b;\ \mathrm{Y})$ $=T_e\sqcup T_c$，即这两个森林的不交并：对于由 G 确定的相邻 C_1C_2，将 $\lambda_0(C_1C_2)$ 附加到 $\mu(C_1)\mu(C_2)$ 的相应端点上。• 令 $\phi\colon$ $T(a\,b;\ \mathrm{Y})\to$ Z 表示由其各部分都是 Z 中的测地线这一事实所诱导的映射。

备注 8.7：我们注意到，稳定区间抽象地来说是区间，但不一定是 $\mathcal{Z}$ 的子集。特别地，点 a、b不一定是稳定区间 T 的“端点”，无论是在抽象意义下还是在 $\mathcal{Z}$ 中。然而，它们在压缩稳定区间中的像将是端点，见小节 9.2。

下面的引理是控制 $T(a$、$b;\ \mathcal{Y})$结构的关键。我们省略其证明，因为它再次只使用了双曲几何，不过示意图见图5：

引理 8.8。设 C_1、C_2 是沿着 $\lambda(a$、$b)$ 的不同簇。假设 $p_1\in C_1$ 和 $p_2\in C_2$ 是最近点，而 $x_1\in s(C_1)$ 和 $x_2\in s(C_2)$ 是最近点。那么对于 $i=1$，$d_{\mathcal{Z}}(x_i$、$p_i)\leqslant 7\epsilon\,2$。由此可得以下结论：

(1) 对于不同的簇 C_1,C_2，有 $|d(C_1,C_2)-d(s(C_1),s(C_2))|<14\epsilon$.(2) 对于任意 $p\in T_e$，有 Y $\cup\{a,b\})\leqslant d_{\mathcal{Z}}(p,\partial T_e)+O(\epsilon)$.(3) 对于 $T=T_e\cup T_c$ 的任意连通分支 V,W，有 直径 $_{\mathcal{Z}}(s(V)\cap s(W))<O(\epsilon)$。

有了上述引理，我们就可以证明以下结构命题：

命题 8.9. 存在 $L_0=L_0(\delta,\epsilon)>0$，使得以下结论成立：

(1) $T(a,b;\ Y)$ 是一个区间，其端点包含在 Y $\cup\{a,b\}$ 中，它们在 Z 中的像是 $O(\epsilon)\,a,b\in Z$ 的

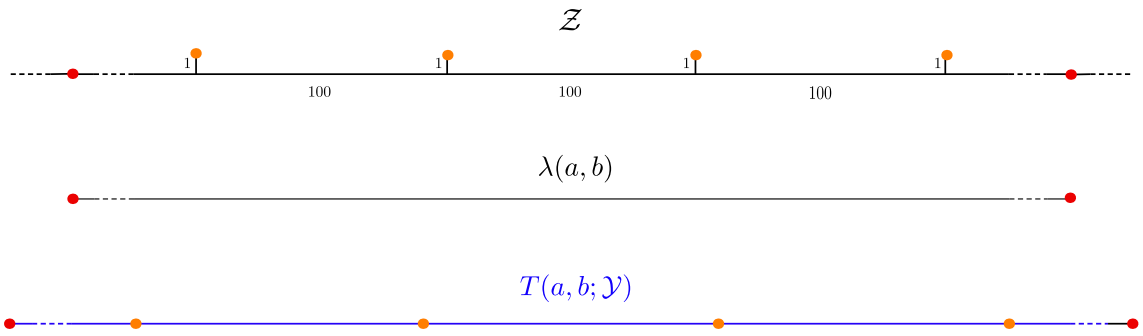


图6。 该图本质上是 [DMS20，图 11], 的一个例子，展示了两种现象。首先，稳定区间的边分量在空间 $\mathcal{Z}$中可能具有有界重叠。这可能会导致拟等距嵌入 ϕ： $T(a, b; \mathcal{Y}) \to \mathcal{Z}$；见命题 8.9 的第（3）项。在该图中，乘法常数至少为 $102\,100$。其次，$T(a, b; \mathcal{Y})$ 在 $\mathcal{Z}$中的像本身不一定是区间，因为簇可能在像上形成叶。

(2) 对于每个簇 C，都有 $d_{\mathcal{Z}}^{Haus}(\mu(C), C) < L_0$ 和 $\phi(T_C) \subset N_{L_0}(Y \cup \{a, b\})$。(3) 映射 ϕ： $T(a, b; Y) \to Z$ 是一个 (L_0, L_0)-拟等距嵌入，其像与 $\lambda(a, b)$ 在 L_0-*Hausdorff* 意义下接近。(4) T 的每个边分量都具有正整数长度。

证明。 对于（1），注意到 $T(a, b; \mathcal{Z})$ 根据构造和命题 8.5是一个区间，并且端簇分别包含 a, b，同样由该命题可知。由于每个簇 $C \subset \mathcal{N}_E(\lambda(a, b))$如果$a \in C$，那么 $\mu(C)$ 的最外端点必在 E 的 a以内，正如所要求的。

对于 (2)，注意到每个簇 C 与 $s(C)$的豪斯多夫距离不超过 $O(\epsilon)$；而引理 8.8表明 $\mu(C)$ 与 $s(C)$的豪斯多夫距离不超过 $O(\epsilon)$。结论由此得出。

第 (3) 项本质上是引理 8.8 和如下构造的推论。由引理 8.2 可知，映射 $\phi : T \to$Z 对 T_e 和 T_c 的每个连通分支的像，与其在$\lambda(a, b)$上的影的距离不超过 $O(\epsilon)$。换言之，对于 T_e或 T_c的任意连通分支 V，影子映射会导出一个 $(1, O(\epsilon))$-准等距映射 s： $\phi(V) \to s(\phi(V))$。另一方面，引理 8.8 表明， T的任意一对连通分支在 $\lambda(a, b)$ 上的影都具有 $O(\epsilon)$-有界重叠。因此， ϕ： $T \to$Z 是一个 $(O(\epsilon), O(\epsilon))$-准等距嵌入，证毕。

最后，(4) 成立是因为我们采用函数 λ_0 作为定义8.6中的连接器；该函数会在 λ 的一端进行小幅手术，使结果具有整数长度。证明至此完成。 □

8.4. **稳定分解**。 上文定义了稳定区间后，我们几乎可以陈述稳定区间定理 8.14了。本节这些定义的动机，源于我们希望将各种对象接入立方模型工具。我们将在下文第9.3小节说明其运作方式，并请读者参阅该小节，以了解下文内容的动机。

稳定分解是指将一对可容许配置对应的一对稳定区间分解为若干子区间，并配以一些映射来识别和组织各个部分。下一个定义旨在简洁地表达这样的要求：所涉及的各种映射都须遵循各个部分相对于环境区间端点的朝向。

定义8.10 （保序映射）。 设 T_1, T_2 是两个区间，且 T_i 的端点标记为 a_i, b_i。设 $T_i = T_{i,1} \sqcup T_{i,2}$ 是 T_i 的细分，各自分成有限个子区间，且 $\#T_{1,1} = \#T_{2,1}$ （因此 $\#T_{1,2} = \#T_{2,2}$）。

- 如果等距映射 $i_{E,E'}$： $E \to E'$ 连接连通分支 $E \subset T_{1,1}$ 和$E' \subset T_{2,1}$，且 $i_{E,E'}$ 将 E 上最靠近 a_1 的端点映射到 E' 上最靠近 a_2的端点，我们就称其为保序。

- 如果双射 α :$\pi_0(T_{1,1}) \to \pi_0(T_{2,1})$ 与沿着 T_i 从 a_i 到b_i记录连通分支 $T_{i,1}$ 出现顺序所得到的双射一致，我们就称其为保序。

备注 8.11。使用上述记号，请注意，保序双射 $\alpha : \pi_0(T_{1,1}) \to \pi_0(T_{2,1})$会自动诱导出一个保序双射 β : $\pi_0(T_{1,2}) \to \pi_0(T_{2,2})$。此外，本文只讨论一对点之间的区间，通常记作（某种形式的） a, b。我们始终将“保序”理解为沿给定区间从 a 一侧移向 b 一侧时保持顺序。

我们再引入最后一个记号：给定一个稳定树 $T = T_e \cup T_c$，对应于一个 ϵ-设置 $(\mathcal{Y};\ \{a, b\})$，若 $y \in \mathcal{Y} \cup \{a, b\}$，则令 C_y 表示包含 y 的簇，并令 $\mu(C_y)$ 表示T^c中对应的连通分支。

以下定义包含了我们所需的稳定性性质：

定义 8.12（稳定分解）。设$\mathcal{Z}$ 为 δ-双曲且测地的。

(1) 给定 $N > 0$，若两个 ϵ-设置 $(a、\ b;\ \mathrm{Y})$ 以及 $(a'、\ b';\ \mathrm{Y}')$ 满足 (a) $d_{\mathcal{Z}}(a、\ a')$、$d_{\mathcal{Z}}(b、\ b') \leqslant \epsilon$，(b) $\mathrm{Y}、\mathrm{Y}' \subset \mathbf{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a, b)) \cap \mathbf{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a', b'))$„ (c) $|\mathrm{Y} \triangle \mathrm{Y}'| < N$，则称其为 $(N、\ \epsilon)$-可容许的。(2) 给定一个 ϵ-设置 $(a、\ b;\ \mathrm{Y})$，其稳定区间 $T = T_e \cup T_c$的边分解是子区间 $T_s \subset T_e$的一个集合。(3) 给定 $L > 0$、$\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Y} \cap \mathrm{Y}'$, 以及两个 $(N、\ \epsilon)$-可容许设置 $(a、\ b;\ \mathrm{Y})$ 和 $(a'、\ b';\ \mathrm{Y}')$, 若两个边分解 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$ 满足 Y_0-稳定地 L-相容，则称它们为 Y_0-稳定地 L-相容，条件如下：(a) T_s 和 T'_s 的每个连通分支都具有正整数长度，其端点分别位于 T_e和 T'_e的顶点上。(b) 在稳定分支集合之间存在一个保序双射 $\alpha :\ \pi_0(T_s) \to \pi_0(T'_s)$ 。(c) 对于由 α识别的每个稳定对 $(E、\ E')$，存在一个保序等距映射 $i_{E、\ E'} :\ E \to E'$。(d) 除至多 L 对稳定分支 $(E、\ E')$ 之外，对于所有 $x \in E,\ \phi(E) = \phi(E')$ 与 $\phi(x) = \phi'(i_{E、\ E'}(x))$ 相同。(e) 对于（至多） L对剩余稳定对 $(E、\ E')$, 对于所有 $x \in E$，有 $d_{\mathcal{Z}}(\phi(x)、\ \phi'(i_{E、\ E'}(x))) < L$ 。(f) 补集 $T_e - T_s$ 和 $T'_e - T'_s$ 至多由 L个直径不超过 L的不稳定分支组成。(g) 诱导的保序双射 β: $\pi_0(T - T_s) \to \pi_0(T' - T'_s)$ 满足：(i)（端点）令 D_a 表示包含 $\mu(C_a)$的 $T - T_s$ 的连通分支，并类似地定义 $D_b、\ D_{a'}、\ D_{b'}$。则 $\beta(D_a) = D_{a'}$ 和 $\beta(D_b) = D_{b'}$。(ii)（识别簇）对于任意 $y \in \mathrm{Y}_0,$, 令 $D_y、\ D'_y$ 分别表示包含 $\mu(C_y)、\ \mu(C'_y)$的 $T - T_s$和 $T' - T'_s$的连通分支。则 $\beta(D_y) = D'_y$。

注记 8.13。上述定义细化了 [DMS20 稳定树定理 3.2], 中所包含的性质；在该文中，我们构造这些稳定分解，是为了使其能够很好地融入本文前面介绍的立方模型工具。第 9.3 小节将更详细地说明这一过程的运作方式；目前，我们先解释定义中的若干部分。粗略地说，点 Y 和 Y′ 代表每个区间上的相对投影数据，而 $T - T_s$ 和 $T' - T'_s$ 的每个连通分支都由这样一个点标记。最终，我们会将 $T - T_s$ 和 $T' - T'_s$ 的每个连通分支折叠为点。(3g) 项指出，公共标签 $\mathrm{Y} \cap \mathrm{Y}'$ 会被识别，端点对 a, a' 和 b, b' 也会被识别。其余部分则指出，T_s 和 T'_s 的连通分支之间存在双射，其中被识别的连通分支彼此等距；保序性质则说明如何将这些连通分支粘合起来，从而得到折叠区间之间的等距映射。最后，(3d) 和 (3e) 项中的邻近性质对于控制

映射回环境 HHS；参见定理 9.9 的证明。更一般的版本见 [DMS25，定义 10。18]。

8.5. **稳定区间定理**。 根据定义8.12 ，现在我们可以陈述本节的主要结果，即下文的定理 8.14。该定理指出，一对可容许的 ϵ-设置的稳定区间具有相容的稳定分解——也就是说，可分解为若干子区间，这些子区间与经识别的点对一一对应，并且在忽略有限个长度有界的子区间后，彼此一致地接近。我们先陈述这一技术性结果，再证明一个推论，该推论给出了构建稳定立方模型时对我们而言最重要的结论。

先回顾一下设置：第 4.4 小节介绍了区间加厚的概念。其做法是将一个带有分解 $T = A \cup B$ 的区间分成若干线段集合，并扩展其中一个线段集合，再将其合并。我们的稳定区间带有这样的分解 $T = T_e \cup T_c$；我们所说的稳定区间 T 的加厚，始终是指沿着簇森林的连通分支 T 对 T_c 进行加厚。最后，我们将所得加厚的连通分支记为 $T = \mathbb{T}_e \cup \mathbb{T}_c$，并注意到 $\mathbb{T}_e \subset T_e$ 和 $T_c \subset \mathbb{T}_c$。

定理 8.14 (稳定区间)。 设 Z 为 δ-双曲且为测地线的。对于任意 ϵ、$N > 0$ 和正整数 r_1、$r_2 > 0$，存在 $L_1 = L_1(\delta, \epsilon, N) > 0$ 以及 $L_2 = L_2(\delta, \epsilon, N, r_1, r_2) > 0$，使得下述结论成立。设 $(a, b; Y)$ 和 $(a', b'; Y')$ 是 (N, ϵ)-可容许的 ϵ-设置，并令 $T = T_e \cup T_c$ 和 $T' = T'_e \cup T'_c$ 表示它们的稳定区间。那么

(1) 存在 $(Y \cap Y')$-稳定的 L_1-相容分解 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$，并且(2) 存在 $(Y \cap Y')$-稳定的 L_2-相容边分解 $\mathbb{T}_s \subset \mathbb{T}_e$ 和 $\mathbb{T}'_s \subset \mathbb{T}'_e$，它们是沿着 T_c、T'_c 对 T、T' 的 (r_1, r_2) 次加厚所得。• 此外，我们有 $\mathbb{T}_s \subset T_s$ 和 $\mathbb{T}_s \subset T'_s$。

注记 8.15. 在层次双曲空间情形下，我们能够根据环境 HHS 结构控制各个常数 δ，ϵ，N，r_1，r_2。我们将陈述写成包含两个结论，是因为第一个结论是对原定理 [DMS20，定理 3。2], 的轻微改写，而第二个结论才是本文所讨论的立方化机制实际需要的。值得注意的是，第二个结论很容易由第一个推出。

在转入证明之前，我们先说明以下推论，其陈述和证明为定理 8.14 的陈述提供了动机。特别是，该推论将使我们能够验证命题 6.12 中的逐区间条件，并给出稳定立方剖分定理 9.9所需的立方同构；参见小节 9.3。

推论 8.16。 设 $(a, b; Y)$ 和 $(a', b'; Y')$ 是具有 $(Y \cap Y')$-稳定 L-$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$相容分解 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$ 的 (N, ϵ)-可容许 ϵ-设置。设 $\Delta\colon T \to T$ 和 $\Delta'\colon T' \to T'$ 表示分别将 $T - T_s$ 和 $T' - T'_s$ 的每个连通分支压缩为一个点后得到的商空间。以下结论成立：

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(1) T和 T'是单纯区间，其中 $T - T_s$和 $T' - T'_s$的每个被压缩的连通分支都是一个顶点，并且$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$(2) 存在一个等距映射 $\Phi\colon T \to T'$，它由双射 $\alpha\colon \pi_0(T_s) \to \pi_0(T'_s)$和 $\beta\colon \pi_0(T - T_s) \to \pi_0(T' - T'_s)$，以及稳定分支对的等距映射 $i_{E,\alpha(E)}\colon E \to \alpha(E)$ （对于 $E \subset T_s$）诱导而来。此外，我们有(a) $\Phi(\Delta(a)) = \Delta'(a')$ 和 $\Phi(\Delta(b)) = \Delta'(b')$，(b) 如果 $y \in Y \cap Y'$，且 $D_y \in \pi_0(T - T_s)$ 和 $D'_y \in \pi_0(T - T_s)$ 分别包含 $\mu(C_y)$ 和 $\mu(C'_y)$，那么 $\Phi(\Delta(D_y)) = \Delta'(D'_y)$。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$证明。 首先，注意到 T和 T'是区间，因为 T，T'是区间，并且 $T - T_s$和$T' - T'_s$的每个连通分支都是子区间。根据给定描述，它们是单纯区间，因为定理8.14 （具体而言，定义 8.12的第 (4a) 项）指出，T_s，T'_s的每个连通分支都具有正整数长度，因此 $T - T_s$和 $T' - T'_s$中对应于成对收缩连通分支的点之间的距离是正整数。

$\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$ $\widehat{\ }$对于第二个结论，我们可以如下定义 $\Phi\colon T \to T'$ 对于每个对应于连通分支 $C \in \pi_0(T - T_s)$ 的顶点 $v \in T\widehat{\ }$，我们定义 $\Phi(v) = v'$，其中 v' 是 T' 中对应于

$\sim\beta(C) \in \pi_0(T' - T'_s)$。如果此时 $x \in T$不是这样的顶点，那么 $x \in \Delta(E)$ 对于某个连通分支 $E \in \pi_0(T_s)$。因此我们定义 $\Phi(x) = \Delta'(i_{E,\ \alpha(E)}(x))$。这些分段映射能够相容地粘合这一事实，直接源于 α 是保序的。(2) 的各子项直接由定义 3g 的第 8.12 项得出。证明完毕。 □

注 8.17. 值得注意的是，只要存在稳定分解，上述推论就成立；因此，特别是当该稳定分解由我们的稳定区间的加厚版本产生时，也成立。

8.6. **证明的详细概述**。 我们不提供完整证明（见附录 B），而是对定理 8.14 给出详细概述，并配以图示说明关键的技术论证。这些论证在相当具体的层面上更容易理解，而不容易严谨地写下来。此处的证明策略更接近于 [DMS25，定理 1023]，而非原始的 [DMS20，定理 31]。

目标是证明，对于成对的可容许 ϵ-设置，稳定区间（定义 8.6）存在定义 8.12意义下的稳定分解。粗略地说，这些分解将区间分解为若干子区间：它们要么完全相同（如条目 (d)），要么长度相同且彼此一致接近（如条目 (e)），要么属于数量有界、可以忽略的不稳定分量（如条目 (f)）。我们需要说明，如何将条目 (1) 中对输入数据的约束转化为对稳定区间各连通分支的控制。

首先，为了开始概述，请注意，关于设置8.14 的定理$(a,\ b;\ \mathcal{Y})$ 以及 $(a',\ b';\ \mathcal{Y}')$ 的两个主要假设是

- 聚点集$\mathcal{Y}$，$\mathcal{Y}'$ 与 $\lambda(a,\ b)$ 和 $\lambda(a',\ b')$ 都很接近，且对称差有界；并且• 端点对 $(a,\ b)$ 与 $(a',\ b')$ 彼此相距不超过 ϵ。

这启发了以下迭代证明策略：

(1) 首先，证明在保持端点不变的情况下，添加一个邻近的聚点时，我们可以构造一个稳定分解。(2) 接下来，证明我们可以迭代地组合稳定分解，从而得到一个稳定分解。(3) 最后，证明在保持其他所有内容（包括聚点集）不变、仅微调一个端点时，我们可以构造一个稳定分解。

步骤(1)和(3)可以视为一系列操作，每次只改变一项数据；我们将看到，(3)类操作基本上就是(1)类操作。对于步骤(2)，我们希望通过向设置 $(a, b; \mathrm{Y})$中添加$\mathrm{Y}' - \mathrm{Y}$的额外聚点，迭代执行(1)类操作，从而将 $(a, b; \mathrm{Y})$ 变为 $(a, b; \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}')$。然后，我们进行两次(3)类操作，将 $(a, b; \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}') \to (a', b; \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}') \to (a', b'; \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}')$变为。最后，我们再进行一系列迭代的(1)类操作，将 $(a', b'; \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}')$ 逐步变为 $(a', b'; \mathrm{Y}')$。由于这一系列操作的总量不超过 $N + 2$，证明便告完成。

对于步骤（1），主要有两种情况——分裂簇的情况，此时我们在远离所有 z 的$\mathcal{Y}$-簇的位置向$\mathcal{Y}$添加一个点；以及受影响簇的情况，此时 z 靠近某个已有的$\mathcal{Y}$-簇。相关示意图分别见图7和8。这里的思路很简单：添加一个簇点只会产生局部影响，因此只需进行有界的局部修改。

现在，证明的步骤（2）涉及迭代应用步骤（1），因此必须证明，能够在共同设置下协调地组合两对稳定分解。图9给出了论证的示意图，其中有三棵稳定树 T_1，T_2，T_3，以及与之关联的稳定分解，使得关于 T_1，T_2和 T_2，T_3的分解彼此兼容。思路是在 T_2 上取两个分解的交，并将它们拉回到 T_1，T_3。

每次迭代都会使相关稳定性常数以受控的幅度增加，但我们假设在定理8.14中只需要进行有界次迭代。

最后，步骤（3）是步骤（1）和（2）的应用。为了理解其思路，我们可以考虑以下受限设置，并着重说明扰动端点时会发生什么。令a，b，$a' \in \mathcal{Z}$和 $\mathcal{Y} \subset \mathcal{Z}$为有限集，且$\mathcal{Y} \subset \mathcal{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a,b)) \cap \mathcal{N}_{\epsilon/2}(a', b)$。下面的设置集合，

其中每个设置都通过添加或删除一个簇点而有所不同，或者改变 a， a' 或 b， b'在簇与端点之间所扮演的角色：

(1) $(a,\ b;\ \mathcal{Y})$, (3) $(a,\ b;\ \mathcal{Y}\cup\{a,\ a'\})$, (5) $(a',\ b;\ \mathcal{Y}\cup\{a'\})$, (2) $(a,\ b;\ \mathcal{Y}\cup\{a\})$, (4) $(a',\ b;\ \mathcal{Y}\cup\{a,\ a'\})$, (6) $(a',\ b;\ \mathcal{Y})$。

因此，在添加了所有必要的簇点之后，我们可以使用步骤 (1)、(2)、(3) 并进行迭代，来交换端点的角色。完整论证见附录 B 。

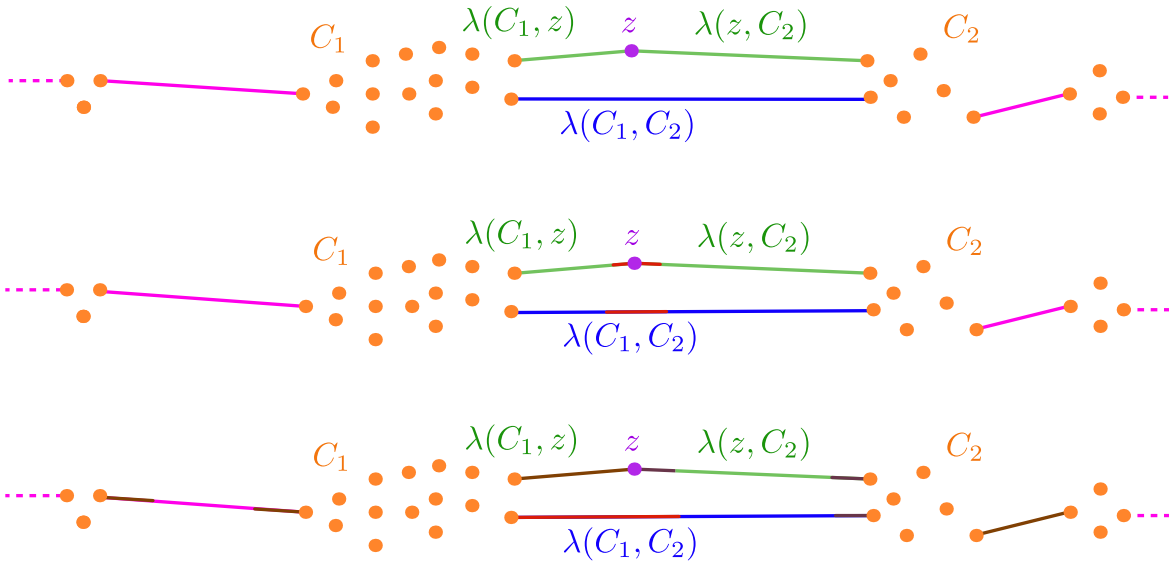


图7。定理 8.14 证明的步骤 (1)，分裂簇情形：第一幅图展示了两个稳定区间的两个边分量。点 z形成一个单独的簇，因此必须作为顶点插入图 G 中，位于簇 C_1、C_2 之间。 C_1 左侧的所有簇均保持不变，所有连接线段（粉色）也是如此； C_2右侧的情况也相同。第二幅图展示了稳定区间的稳定分解。这里，我们需要将簇 z 在 $\lambda(C_1$、$C_2)$ 上的影作为一个不稳定分量纳入其中。这会将$\lambda(C_1$、$C_2)$ 切分成两条线段，分别与 $\lambda(C_1$、$z)$ 以及 $\lambda(z$、$C_2)$配对，不过需要稍微截短这些线段，以确保它们长度相同；用于实现这一点的不稳定线段以红色标出。第三幅图展示了它们的 $(r_1$、$r_2)$ 加厚的稳定分解，这些加厚是边分量 $T_e\subset T$ 和$T'_e\subset T$的子集，以棕色标出。请注意，如果某个边分量的直径小于 r_2-2r_1，这可能导致整个边分量被压缩。这些棕色线段细化了稳定分解 $T_s\subset T_e$和 $T'_s\subset T'_e$。

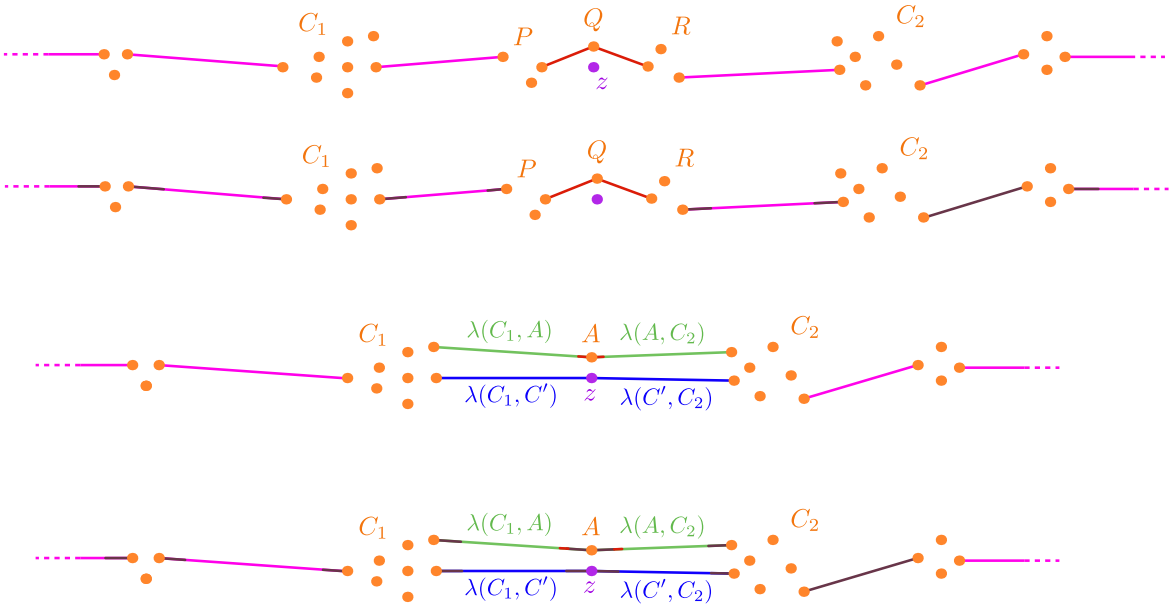


图 8。定理 8.14 证明的步骤（1），受影响簇情形。图中展示了两种现象。上图中，对于 $(a, b;\ \mathbf{Y})$，有三个受影响簇 P, Q, R，它们与 z 合并为一个新簇 C'，对应于 $(a, b;\ \mathbf{Y} \cup \{z\})$。根据定义，$P, Q, R$ 必须彼此相隔 $O(\epsilon)$，事实上它们在 $\mathbf{G}$ 中相邻。簇 C_1, C_2 在两种设置中都出现，而 $\mathbf{G}$ 中位于 C_1 左侧的子图，与 $\mathbf{G}'$，对应的相同子图重合，对于 C_2 也是如此。因此，对应的（粉色）连通分支构成 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$ 的（稳定）连通分支。连接 P, Q, R 的 T_e 的连通分支被判定为不稳定；在此例中，T_e 的连通分支 $\lambda(C_1, P)$ 和 $\lambda(R, C_2)$ 分别与 T'_e 的连通分支 $\lambda(C_1, C')$ 和 $\lambda(C', C_2)$ 重合，因此是稳定的。第二幅图展示了 (r_1, r_2) 加厚的稳定分解；这些加厚只是 $T_s = T'_s$ 各连通分支的加厚，因此也完全相同。在第二个例子中，外围部分的讨论相同。对于图的中间部分，z 与簇 A 合并，产生线段对 $\lambda(C_1, A)$ 和 $\lambda(C_1, C')$，以及 $\lambda(A, C_2)$ 和 $\lambda(C', C_2)$；这些线段的端点相距 $O(\epsilon)$，因此在 Hausdorff 意义下相距 $O(\epsilon)$，且长度相差至多 $O(\epsilon)$。小手术为图三所示的稳定区间 T, T' 提供了所需的稳定连通分支。第四幅图展示了此例中 (R, r) 加厚的稳定分解。

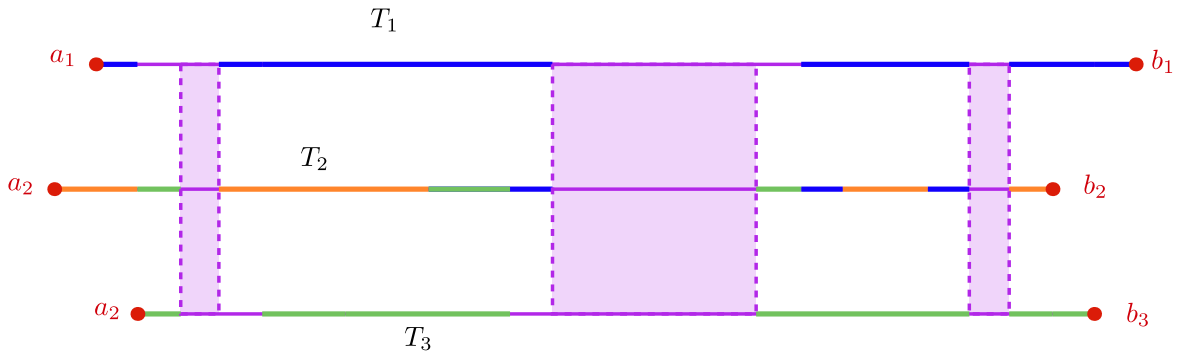


图9. 定理 8.14 的证明，迭代稳定分解：迭代论证的思路是分别对 T_1 与 T_3 取稳定分解 $T^1_{s,2} \cap T^3_{s,2} \subset T_2$ 的交，然后利用将 T_1 与 T_2 的稳定对对应起来的等距映射，为 $(T_1$ 与 $T_2)$ 给出细化稳定分解；再通过简单复合，将其与 $(T_2$、$T_3)$ 的细化结合起来。在示意图中（这并非发生在 Z 中），我们将稳定区间 T_1、T_2、T_3 排列在一起，以说明如何将 $(T_1$、$T_2)$ 以及 $(T_2$、$T_3)$ 的成对稳定分解细化为 $(T_1$、$T_3)$ 的一个稳定分解。橙色线段对应区间的簇分量，而蓝色和绿色线段分别对应稳定对 $(T_1$、$T_2)$ 和 $(T_2$、$T_3)$ 的不稳定分量。T_2 上橙色、蓝色和绿色线段的补集构成 T_2 上的细化稳定分解，紫色方格则表示这些线段如何在 T_1 和 T_3 上诱导出细化稳定分解。

9. 稳定立方模型

本节将说明如何把第4–6节所述的立方化工具，与第7.4 节确立的控制域定理7以及第8.14节的稳定区间定理结合起来8。在前两个小节中，我们证明可以将稳定区间纳入区间系统工具，从而为层次双曲空间中的任意一对点 a，$b \in \mathcal{X}$ 构造一个 HFI。

本节的核心是说明如何关联一对点 a，b 对应的两个 HFI，以及经过扰动的一对点 a'，b'所对应的 HFI。我们将在第9.3小节详细说明如下。

9.1. 稳定区间构成一个区间系统。我们的首要目标是说明如何取一对点 a，$b \in \mathcal{X}$ 所关联的稳定区间族，并由此构造一个区间的层次族。

首先，我们需要在稳定区间上诱导出一组相对投影，使其构成一个 R-区间系统（定义4.3），且具有统一的 $R = R(\mathfrak{S}) > 0$。

设 $U \in \mathbf{U}$。回顾 BGIA 3.11：如果 $d_V(a,b)$ 对 $V \in \mathfrak{S}$ 足够大，那么当 $V \sqsubset U$ 时，$\rho^V_U \subset \mathbf{N}_{E_{\mathfrak{S}}}(\lambda(a$；更进一步，当 $V \pitchfork U$ 时，$\rho^V_U \subset \mathbf{N}_{E_{\mathfrak{S}}}(a \cup b)$。若令 $\mathbf{Y}_U = \{\rho^V_U | V \sqsubset U \in \mathbf{U}\}$，则 $(\pi_U(a), \pi_U(b)$；$\mathbf{Y}_U)$ 是 $\mathbf{C}(U)$ 中关于 $\epsilon = 2E_{\mathfrak{S}}$ 的一个 ϵ-设置，其含义见第 8.1 小节。特别地，我们的稳定区间构造（命题 8.9）适用。

对每个 $U \in \mathbf{U}$，令 $T_U = T_{U,e} \cup T_{U,c}$ 表示设置 $(a,b$；$\mathbf{Y}_U)$ 在 $\mathbf{C}(U)$ 中对应的稳定区间。回顾一下，$T_{U,c}$ 的每个连通分支都与 $\mathbf{Y}_U \cup \{a,b\}$ 中某个点簇 C 的 $\mu(C)$ 重合（第 8.2 小节）。值得注意的是，命题 8.9 的条目 (2) 表明，$\phi_U(\mu(C))$ 与 C 本身在豪斯多夫意义下接近 $O(\epsilon)$（因此也 $O(\mathfrak{S})$）。这一性质使得下面的定义能够成立：

定义 9.1（稳定区间投影）。对每个 $U \in \mathcal{U}$，我们定义以下稳定区间投影：

- 对于每个满足 $V \sqsubset U$ 的 $V \in \mathcal{U}$，令 C 为包含 ρ^V_U 的簇。定义

$$\delta^V_U = \phi_U^{-1}(\mathrm{hull}_{\mu(C)}(p_{\phi_U(\mu(C))}(\rho^V_U))) \subset \mu(C),$$

其中 p_U: $\mathsf{C}(U) \to \phi_U(\mu(C))$ 是到测地线段 $\phi_U(\mu(C)) = \mu(C)$ 的最近点投影。• 对于每个满足 $V \pitchfork U$ 的 $V \in \mathsf{U}$，令 $f \in \{a, b\}$ 表示满足 $d_U(\pi_U(f), \rho_U^V) < \epsilon$ 的点（由定义 3.1 给出），并令 C 表示包含 f 的簇。再次定义$\delta_U^V = \phi_U^{-1}(\text{凸包}_{\mu(C)}(p_{\phi_U(\mu(C))}(\rho_U^V))) \subset \mu(C)$。 $U \sqsubset V$ 时，我们定义区间投影映射 δ_U^V: $T_V \to T_U$，其定义为 $\delta_U^V = \phi_U^{-1} \circ p_{T_U} \circ \rho_U^V \circ \phi_V$.

下一个引理指出，这些投影使稳定区间族成为一个区间系统。证明留给读者，其中需要验证定义 4.3（进而引理 4.2）中的条件；验证过程可借助引理 3.10 和命题 8.9。

引理 9.2。 存在 $R_s = R_s(\mathfrak{S}) > 0$，使得配备稳定区间投影的稳定区间 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ 构成针对 a、b 的 R_s-区间系统。

9.2. **稳定区间的加厚、其塌缩及 HFI**。 本小节将说明，塌缩后的加厚稳定区间系统构成 HFI。

首先，在小节 4.4中，我们取一个区间系统 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ 及其相对投影数据 δ_U^V，随后沿分解 $T_U = A \cup B$的连通分支 B 进行区间加厚，其中 B由这些 δ_U^V以及标记点 a_U组成，b_U。接着，在小节 4.5中，我们沿此加厚进行塌缩，从而在折叠区间上诱导出塌缩相对投影。另一方面，我们在稳定区间定理 8.14 中考察的稳定区间加厚，是沿簇分量进行的。

下面这个引理的证明留给读者，它说明这些加厚彼此相同，因此相应的压缩树也完全相同：

引理 9.3。 对于任意 $U \in \boldsymbol{U}$，令 $T_U = A \cup B$ 为如下分解： B 是所有 δ_U^V（$V \sqsubset U$ 满足相应条件）与 a_U的并，b_U。令 $T_U = T_{U,\,e} \cup T_{U,\,c}$ 表示命题 8.9给出的分解。存在 $R_3 = R_3(\mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $r_1 > R_3$ 和 $r_2 > 0$，沿B 以及沿 $T_{U,\,c}$ 对 T_U 所作的 $(r_1,\ r_2)$-加厚相同。

引理 9.2和 9.3 的结论是，我们可以将稳定区间直接代入区间系统的工具体系。下一步是说明如何利用第4.4 和 4.5小节中讨论的加厚和塌缩过程，从这个系统构造一个 HFI（定义 6.1）。

沿用我们的记号，引理 9.2 表明，赋予区间投影（见定义 9.1）的稳定区间 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ 构成一个用于 $a, b \in \mathsf{X}$ 的 R_s-区间系统，其中 $R_s = R_s(\mathfrak{S}) > 0$。由于 $R_s = R_s(\mathfrak{S}) > 0$，命题 4.9 和引理 4.10 给出了常数 $R_1 = R_1(\mathfrak{S}) > 0$ 和$R_2(\mathfrak{S}) > 0$，使得对于任意 $r_1 \geqslant R_1$ 和 $r_2 \geqslant R_2$，引理 4.10 的结论都适用于从系统 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$ 的 (r_1, r_2)-加厚中得到的折叠区间族$\widehat{\ }$ $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$。我们还希望假设 $r_1 > R_3 = R_3(\mathfrak{S}) > 0$，以便引理 9.3 成立。

下一个命题指出，只要 r_1 是正整数，折叠区间 $\widehat{\ }$ T_U 全都是单纯区间，其中塌缩点位于顶点上。证明直接应用前面各节中的思想即可，因此留给读者。

命题 9.4。 **</style}只要 max**$\{R_1, R_3\}$ 是正整数，并且 $r_2 \geqslant R_2$，沿着 $T_{U,\,c}$对 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$进行 (r_1, r_2)-加厚所得到的、与之关联的塌缩稳定区间族 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$，并赋予它们塌缩投影，就构成一个区间的层次族。

我们注意到命题9.4 和定理 6.4的以下直接推论：

推论 9.5。 设 a，$b \in \mathcal{X}$，$K > K_0$对于 K_0，如定理 3.8和 $\mathcal{U} = \mathrm{Rel}_K(a,\ b)$。设 $\{T_U\}_{U \in \mathcal{U}}$为相应的稳定区间族。那么，层次包 $H = \mathrm{hull}_{\mathcal{X}}(a,\ b)$ 与相应 *HFI* 的对偶立方复形拟等距，其常数仅取决于 $\mathfrak{S}$ 和 K。

9.3. **从扰动对到稳定分解族**。在本小节中，我们将说明如何将本文的基本设置应用于迄今为止构建的工具体系。

在本节余下部分，假设我们有一个可着色层次双曲空间 $(\mathcal{X}\ \mathfrak{S})$，其赋有定理 7.4中的稳定投影。令 $K > K_0 = K_0(\mathfrak{S}) > 0$ 如该定理第（2）项所述。

此外，在本节余下部分，固定 a、b、a'、$b' \in \mathcal{X}$使得 $d_{\mathcal{X}}(a$、$a')$、$d_{\mathcal{X}}(b$、$b') \leqslant 1$。我们将点 a'、b'称为来自 a、b的扰动对。令 $\mathcal{U} = \mathrm{Rel}_K(a$、$b)$ 以及 $\mathcal{U}' = \mathrm{Rel}_K(a'$、$b')$。令 $\{T_U\}_{U\in\mathcal{U}}$和$\{T'_U\}_{U\in\mathcal{U}'}$表示如上产生的稳定区间族。

首先需要注意的是，控制域定理 7.4 的第 (2)(a) 项给出

(1) $|\mathcal{U}\triangle\mathcal{U}'| < N_0 = N_0(\mathfrak{S})$，且 (2) 每个域 $V \in \mathcal{U}\triangle\mathcal{U}'$ 都满足 $d_V(a, b) \leqslant K'$ 以及 $d_V(a', b') \leqslant K'$，其中 $|K - K'|$ 由 $\mathfrak{S}$有界控制。

第 (2) 项和引理 4.10 表明，每个相关的折叠区间 T_V或 T'_V对于 $V \in \mathcal{U}\triangle\mathcal{U}'$都有有界直径。对于其余的域，即域 $U \in \mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$，，我们希望在区间 T_U和 T'_U之间得到相容的稳定分解，具体如下。

首先注意，若 $V \sqsubset U \in \mathrm{U}_0$，，则 $d_V(a, b) \geqslant K > E_{\mathfrak{S}}$ 和 $d_V(a', b') \geqslant K > E_{\mathfrak{S}}$，因此大间隙不等式 BGIA 3.11 推出 $\rho_U^V \subset \mathrm{N}_{E_{\mathfrak{S}}}(\lambda_U(a, b)) \cap \mathrm{N}_{E_{\mathfrak{S}}}(\lambda_U(a', b'))$，其中 λ_U 是一个函数，它将第 8.1 小节中任意一对点映射到 $\mathrm{C}(U)$ 中的一条测地线。因此，在我们的稳定树设置中取 $\epsilon = 2E_{\mathfrak{S}}$，就足以使 $(\pi_U(a), \pi_U(b); \mathrm{Y}_U)$ 和 $(\pi_U(a'), \pi_U(b'); \mathrm{Y}'_U)$ 成为 $\mathrm{C}(U)$ 中的 ϵ-设置（定义 8.12 的第 (1) 项）。

此外，对于每个 $U \in \mathcal{U}_0$，定理 7.4 给出

(a) 嵌套到 U 中的 $\mathcal{U}$ 和 $\mathcal{U}'$ 中各区域的 ρ-集——即 $\mathcal{Y}_U$ 和 $\mathcal{Y}'_U$ ——分别满足 $|\mathcal{Y}_U\triangle\mathcal{Y}'_U| < N_0 = N_0(\mathfrak{S})$；(b) 若 $\mathcal{U}_0^* \subset \mathcal{U}_0$ 是由满足 $\mathcal{Y}_U \neq \mathcal{Y}'_U$ 或 $\pi_U(a) \neq \pi_U(a')$ 或 $\pi_U(b) \neq \pi_U(b')$ 的域 $U \in \mathcal{U}_0$ 构成的集合，则 $\#\mathcal{U}_0^* < N_0$。

因此，根据 (a)，对于 U_0，中的所有区域，这些 ϵ-设置按照定义 8.12 的 (2) 项所述是 (N_0, ϵ)-可容许的；而 (b) 项说明，对于 $\mathrm{U}_0 - \mathrm{U}_0^*$ 中的区域，这些 ϵ-设置完全一致。因此，稳定区间定理 8.14 的 (2) 项蕴含，它们的稳定区间 T_U, T'_U 的 (r_1, r_2)-加厚允许 L_s-相容的稳定分解，其中 $L_s = L_s(\mathfrak{S}) > 0$通过选择$r_1 = \max\{R_1, R_3\}$ 和 $r_2 = R_2$，因为常数 $R_i = R_i(\mathfrak{S}) > 0$ 仅取决于 $\mathfrak{S}$。特别地，我们有：

命题 9.6。对于每个 $U \in \mathrm{U}_0$，，沿 $T_{U,\,c}, T'_{U,\,c}$的稳定区间 $T_U = T_{U,\,e} \cup T_{U,\,c}$和 $T'_U = T'_{U,\,e} \cup T'_{U,\,c}$ 的 (r_1, r_2)-加厚分别都具有 L_s-相容的稳定分解，其中$L_s = L_s(\mathfrak{S}) > 0$。

- 此外，如果 $U \in \mathrm{U}_0 - \mathrm{U}_0^*$，那么 $T_U = T'_U$，并且这些加厚恰好重合。

对于每个 $U \in \mathrm{U}_0$，，令 $\Delta_U\colon T_U \to T_U$,0 和 $\Delta'_U\colon T'_U \to T'_U$,0 表示将这些分解中的不稳定分支压缩为点的映射；我们注意到，当 $U \in \mathrm{U}_0 - \mathrm{U}_0^*$时，这些映射就是恒等映射。根据稳定分解的定义 8.12，T_U 和 T'_U 的子区间在 $U \in \mathrm{U}_0$ 沿 被压缩，并连同 $V \in \mathrm{U}\triangle\mathrm{U}'$时的整个区间 T_V, T'_V（定义到哪个就取哪个），共同构成 $(L_s^2 + 2K'N_0)$-可容许单纯形修剪设置，分别用于 $\{\widehat{T}_U\}_{U\in\mathcal{U}}$和 $\{\widehat{T}'_U\}_{U\in\mathcal{U}'}$，其含义见定义 6.5。这是因为集合 $(\mathrm{U} \cup \mathrm{U}') - \mathrm{U}_0$ 根据上面的 (1) 至多有 N_0个域，每个域的直径都不超过 K'，而 U_0中各域的不稳定片段由至多 L_2个直径不超过 L_2的片段组成。

令 $L_2^2 + 2K'N_0 = S_0$，注意到它仅取决于 $\mathfrak{S}$ 以及我们对 K的选择性。现在由定理 6.7 和命题 9.6可得：

命题 9.7。以下结论成立：

(1) 集合 $\{T_{U,\,0}\}_{U\in\mathcal{U}_0}$和 $\{T'_{U,\,0}\}_{U\in\mathcal{U}_0}$ 都是 *HFI*。令 Q_0, Q'_0 表示它们对应的 *0*-相容子集。*(2)* 组合映射 $\Delta : Q \to Q_0$ 和 $\Delta' : Q' \to Q'_0$ 满足 $\Delta(Q) = Q_0$ 和 $\Delta'(Q') = Q'_0$，并且都是 $(1, S_0^2)$-拟等距映射。*(3)* 存在映射 $\Xi : Q_0 \to Q$ 和 $\Xi' : Q'_0 \to Q'$，满足 $\Delta \circ \Xi = id_{\mathcal{Q}_0}$ 和 $\Delta' \circ \Xi' = id_{\mathcal{Q}'_0}$。*(4)* 在立方复形层面，映射 $\Delta Q \to Q_0$ 和 $\Delta' : Q' \to Q'_0$ 至多删除 S_0^2 个超平面。

利用这个命题，我们可以定义映射 $\Omega_0 : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{X}$ 和 $\Omega_0' : \mathcal{Q}_0' \to \mathcal{X}$，定义方式为 $\Omega_0 = \Omega \circ \Xi$ 和 $\Omega_0' = \Omega' \circ \Xi'$，其中 $\Omega : \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ 和 $\Omega' : \mathcal{Q} \to \mathcal{X}$ 是第5.6小节定义的拟等距嵌入。

作为设置的最后一步，我们要注意到这些 HFI $\{T_{U,0}\}_{U \in \mathcal{U}_0}$ 以及 $\{T'_{U,0}\}_{U \in \mathcal{U}_0}$ 按照命题 6.12 的意义，存在同构。为此，我们需要下面的引理，其证明直接应用定义和推论 8.16 即可。

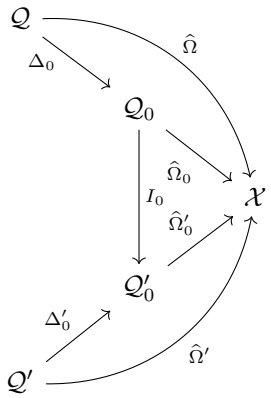
引理 9.8。对每个 $U \in \mathcal{U}_0^*$，推论 $i_U : T_{U,0} \to T'_{U,0}$ 所给出的等距映射满足命题 *8.16* 的条件 *6.12*。

- 因此，这些逐连通分支的等距映射合在一起便给出一个等距映射 $I_0 : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_0'$。

9.4. 稳定立方剖分定理的陈述。现在我们可以陈述稳定立方区间定理了：

定理 9.9 (稳定立方区间)。沿用我们一直使用的记号，存在 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{S}, K) > 0$，使得下图在误差 Σ 范围内交换：

(10)



- 在上述内容中，$I_0 : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{Q}_0'$ 是引理 *9.8* 中的同构。
- 特别地，任何可着色层级双曲空间都是 Σ-稳定弱局部拟立方的（定义*2.7*）。

证明。还需证明上方、下方和中间的三角形在粗略意义下可交换。上方三角形（因而下方三角形）的证明根据构造几乎是显然的。特别地，由命题 9.7 的第 (2) 项，映射 $\Delta_0 : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}_0$ 是一个 $(1, S_0^2)$-拟等距映射，其中 $S_0 = S_0(\mathfrak{S}, K) > 0$。另一方面，该命题的第 (3) 项表明 $\Delta_0 \circ \Xi = id_{\mathcal{Q}_0}$ 而 $\Omega_0 : \mathcal{Q}_0 \to \mathcal{X}$ 由 $\Omega \circ \Xi$ 定义。因此，上方三角形在误差 S_0 范围内可交换，下方三角形亦然。

对于中间的三角形，我们希望证明，对于任意 $x \in \mathcal{Q}_0$，$d_{\mathcal{X}}(\Omega_0(x), \Omega_0' \circ I_0(x))$ 之间的距离可由 $\mathfrak{S}$ 和 K 控制。然而，我们注意到，映射 $\Omega_0 : \mathcal{Q}_0 \to H$ 与 $\Delta_0 \circ \Psi : H \to \mathcal{Q}_0$ 互为准逆（误差取决于 $\mathfrak{S}$ 和 K）；同样，$\Omega_0' : \mathcal{Q}_0' \to H'$ 与 $\Delta_0 \circ \Psi : H' \to \mathcal{Q}_0'$ 也互为准逆。这里，$H = \mathrm{hull}_{\mathcal{X}}(a, b)$ 和 $H' = \mathrm{hull}_{\mathcal{X}}(a', b')$。但是，由于 $d_{\mathcal{X}}(a, a') \leqslant 1$ 且 $d_{\mathcal{X}}(b, b') \leqslant 1$，根据距离公式 3.8 和定义 3.12，可知 $d_{\mathcal{X}}^{Haus}(H, H')$ 之间的距离可由 $\mathfrak{S}$ 控制。

因此，只需证明对于 $x \in H \cap H'$（于是 $\Psi(x)$ 和 $\Psi'(x)$ 都有定义），有

$$d_{\mathcal{Q}_0'}(\Delta_0' \circ \hat{\Psi}'(x), I_0 \circ \Delta_0 \circ \hat{\Psi}(x)) < \Sigma,$$

对于 $\Sigma = \Sigma(\mathfrak{S}, K)$。设 $\Delta_0' \circ \Psi'(x) = x_0' = (x'_{U,0})$ 以及 $I_0 \circ \Delta_0 \circ \Psi(x) = y_0' = (y'_{U,0})$，注意到 $x_0', y_0' \in \mathcal{Q}_0'$ 均成立。

我们逐个连通分支论证 $d_{\mathcal{Q}_0'}(x_0', y_0')$ 有界。回顾一下，映射 $\Psi : H \to \mathcal{Q}$ 是在集合 $\mathcal{U}$ 上逐个连通分支定义的，其定义为 $\psi_U = q_U \circ \phi_U^{-1} \circ p_U \circ \pi_U$，其中 $\pi_U : \mathcal{X} \to \mathcal{C}(U)$ 是层次双曲空间

投影， p_U:$\mathcal{C}(U) \to \phi_U(T_U)$ 是最近点投影， ϕ_U: $T_U \to \mathcal{C}(U)$ 是 (L_0, L_0)-准-^等距嵌入，由命题 8.9 给出（此处 $L_0 = L_0(\mathfrak{S})$），而 $q_U : T_U \to T_U$ 是沿簇分量塌缩 T_U 的一致加厚所得的映射，其常数仅依赖于^。映射 $\mathfrak{S}$: $\Psi' \mathbin{Q} H' \to$ 的定义方式类似。

首先，我们可以将问题约化到$\mathcal{U}_0 = \mathcal{U} \cap \mathcal{U}'$中涉及的域。若 $U \in \mathcal{U} \triangle \mathcal{U}'$, , 则 a, b 和 a', b' 到 U 的投影直径分别可用 K 和 $\mathfrak{S}$控制；同时，每个这样的域都按定义7.3 的意义被涉及，因此根据定理 7.4，这样的域至多只有有界多个。接下来注意，若$U \in \mathcal{U}_0$未被涉及，则两种设置下的稳定树 T_U, T'_U 完全相同，因而其加厚也完全相同；于是，这一对的稳定分解分别都是各自的边分量的（相同）集合 ^ ^，相应的压缩树 T_U 和 T'_U 也完全相同。因此，对于未被涉及的 $U \in \mathcal{U}_0$, , 有 $\hat{x}'_{U,0} = \hat{y}'_{U,0}$。

设 $U \in \mathcal{U}_0$ 被涉及。由于根据定理7.4</style}，这样的域至多只有有界多个（在 中），因此只需用 控制直径 ,$_0(\hat{x}'_{U,0}, \hat{y}'_{U,0})$ 即可。

^距离 $d_{\hat{T}'_{U,0}}(\hat{x}'_{U,0}, \hat{y}'_{U,0})$ 是通过将它们分开的边分量来测量的，而这些边分量是 $T'_{U,0}$ 的稳定分支。这意味着，如果距离 $d_{\hat{T}'_{U,0}}(\hat{x}'_{U,0}, \hat{y}'_{U,0})$非常大，那么必然存在以下情况之一

(1) 存在某个较长的稳定分支 $E' \subset T'_{U,s}$，使得 $\Delta'_U(q'_U(E'))$ 的某个较长线段将 $\hat{x}'_{U,0}$ 与 $\hat{y}'_{U,0}$分开；或者 (2) 如果不存在这样的长分支，那么必然有大量这样的稳定分支将它们分开。

在情况 (1) 中，令 $E \subset T_{U,s}$ 为与 $E' \subset T'_{U,s}$ 配对的稳定分支。注意， $\phi_U(E) \cup \phi'_U(E')$ 是一致拟凸的（在 $\mathfrak{S}$ 中），因此 $\pi_U(x)$ 到它的投影一致有界。然而，^ 的某个长线段将 $\hat{x}'_{U,0}$与 $\hat{y}'_{U,0}$分开的事实意味着， $\phi_U(E) \cup \phi'_U(E')$ 中某个直径很大的部分粗略地（在 $\mathfrak{S}$ 中）将 $p_U(\pi_U(x))$ 与 $p'_U(\pi_U(x))$ 分开，这是不可能的。

在情形 (2) 中，我们可以假设不存在这样的长稳定连通分支，因此，距离$d_{\hat{T}'_{U,0}}(\hat{x}'_U,0, \hat{y}'_{U,0})$ 对应于某个由短稳定连通分支组成的序列 $E'_1, \ldots, E'_n \subset T'_{U,s}$，其长度由 $\mathfrak{S}$ 控制。令 $E_i \subset T_{U,s}$ 表示与 E'_i 配对的稳定连通分支。由命题 8.9 以及 $d_{\mathcal{X}}(a, a') \leqslant 1$和 $d_{\mathcal{X}}(b, b') \leqslant 1$ 这一事实可知， $\phi_U(T_U)$ 和 $\phi'_U(T'_U)$ 在 $\mathsf{C}(U)$ 中的豪斯多夫距离由 $\mathfrak{S}$ 控制。由于每个 E'_i 都与 E_i 在 $\mathfrak{S}$ 意义下统一接近，且双射 α: $\pi_0(T_{U,s}) \to \pi_0(T'_{U,s})$ 是保序的，因此凸包 $\mathrm{hull}_{\phi_U(T_U)}(E_1, E_n)$ 和 $\mathrm{hull}_{\phi'_U(T'_U)}(E'_1, E'_n)$ 彼此之间的豪斯多夫距离由 $\mathfrak{S}$ 统一控制，故它们的并集在 $\mathfrak{S}$ 意义下统一拟凸。因此，若 $\Delta'_U(q'_U(E'_1)), \ldots, \Delta'_U(q'_U(E'_n))$ 在 T'_U,0 中分离 $\hat{x}'_U$,0 与 $\hat{y}'_U$,0^，则这些凸包的并集在 $\mathfrak{S}$ 意义下粗略地分离 $p_U(\pi_U(x))$ 与 $p'_U(\pi_U(x))$。

由于每条线段 E'_i 的长度都有界，当线段 n 的数量非常大时，这些凸包的并集就会很长。此外，每对线段 E'_i、E'_{i+1} 之间都由某个补分支 $C_i \subset T'_U - T'_U$、$_s$隔开。根据构造，除去数量有界（关于 $\mathfrak{S}$）的这类连通分支外，其余都对应于 T'_U的某个簇分支。由于涉及的域的数量有界（关于 $\mathfrak{S}$），只要选择足够大的 n，就存在某个 C_j，其中包含一个 $\sqsubset_{\mathcal{U}_0}$-极小域 $V \sqsubset U$，它同时是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的和 $\sqsubset_{\mathcal{U}'}$-极小的。但这是不可能的，因为 BGIA 3.11 将推出 $d_V(\rho^U_V(p_U(\pi_U(x)))$、$\rho^U_V(p'_U(\pi_U(x)))) > K$，而这不可能发生，因为我们还可以令 $\pi_U(x)$ 与 ρ^V_U相距任意远。因此，不存在这样的长序列 E'_1、$\ldots E'_n$，证明完毕。

□

附录A. 树修剪定理的证明5.14

下面重新陈述定理 5.14。参见小节5.4 了解相关背景定义和记号。

定理 A.1 (树修剪)。存在 $B_{tt} = B_{tt}(\mathfrak{S}, K) > 0$，使得对于任意 $B < B_{tt}$，都存在 $L = L(\mathfrak{S}, B) > 0$，满足以下条件：

(1) </style}我们有 QQ。(2) 存在一个映射 $\Xi\colon \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$，使得 $\Delta \circ \Xi = id_{\mathcal{Q}'}$。

特别地，$\Delta(\mathcal{Q}) = \mathcal{Q}'$。(3) 映射 $\Delta\colon \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ 是一个 (L, L)-拟等距。

证明。 $\Delta(\mathcal{Q}) \subset \mathcal{Q}'$, 这一事实，即 Δ 保持 0-一致性，可直接由以下事实得出：Δ_U 只是压缩子区间，因此，被压缩投影的坐标仍然是被压缩投影，这就证明了第 (1) 项。第 (2) 项和第 (3) 项需要更多工作，我们将分别给出详细的概述。

第 (2) 项：的满射性： $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$：令 $\hat{y} \in \mathcal{Q}'$。我们将通过逐坐标论证构造一个点 $\hat{x} \in \mathcal{Q}$，使得 $\Delta(\hat{x}) = \hat{y}$，从而定义一个映射 $\Xi : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$，使得 $\Delta \circ \Xi = id_{\mathcal{Q}'}$。

对于每个 $U \in \mathcal{U}$，令 $C_U = \Delta_U^{-1}(\hat{y}_U)$。我们的目标是为每个 $U \in \mathcal{U}$选取一个点 $\hat{x}_U \in C_U$，然后证明元组 $\hat{x} = (\hat{x}_U)$具有 0-一致性。注意，根据构造，对于这样的元组，$\Delta(\hat{x}) = \hat{y}$。证明对$\mathcal{U}$中的嵌套层级进行归纳，并且类似于命题*5.17*中映射 $\Omega : \mathcal{Q} \to H$的构造。主要区别在于，塌缩子区间并不会自动与一组域相关联，而这正是工作的难点所在。该证明基本上是 [Dur23定理 10 中相应事实的证明, 2], 只是我们的设置要简单得多。下面给出一个非常详细的概要，其中一些细小部分留给读者完成。

对于基础情形，令 $B \in \mathcal{U}$ 为某个 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-最小的。如果 $\hat{y}_U \in \Delta_U(B)$ 对于某个 $B \in \mathcal{B}$ 成立，并且 $B \subset T_U$ 不包含端点，那么令 $\hat{x}_U \in C_U$ 为任意一个点。反之，如果 C_U 包含端点，那么它可能同时包含两个端点，此时我们需要选取其中一个。

下面的命题与 [Dur23，命题 10，完全相同，3], 不要求 U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的：

命题 A.2。如果 W，$Z \in \{V \in \mathcal{U} | V \pitchfork U$，并且 $\hat{y}_V \neq (\hat{\delta}_V^U)_0\}$，那么 $\hat{\delta}_U^W = \hat{\delta}_U^Z$。

有了命题 A.2 之后，我们可以如下定义 $\hat{x}_U$ 对于 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的 U 情形：

- 如果 $\mathcal{W}_U^{\pitchfork} = \{V \in \mathcal{U} | V \pitchfork U$ 且 $\hat{y}_W \neq (\hat{\delta}_U^V)_0\} \neq \varnothing$，那么对于任意（因此根据该断言也适用于所有）$W \in \mathcal{W}_U^{\pitchfork}$，我们设 $\hat{x}_U = \hat{\delta}_U^W$。• 如果 $\mathcal{W}_U^{\pitchfork} = \varnothing$，那么我们令 $\hat{x}_U$ 为 C_U中的任意一个标记点。

此时，我们还希望令 l_U 等于端点 $\hat{x}_U$，当 U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，其中$l_U = \varnothing$ 当 C_U 不包含 T_U 的端点时。这些标签将发挥与小节 5.2中的簇细化过程类似的作用。

在归纳步骤中，假设 U 不是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，并且我们已对所有$V \sqsubset U$ 定义了 $\hat{x}_V$，尤其是对所有 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的 $V \in \mathcal{U}$也已定义。和之前一样，如果 C_U 不包含某个 $V \sqsubset U$对应的标记点或投影 $\hat{\delta}_U^V$，那么我们令 $\hat{x}_U \in C_U$ 为任意一点。如果 C_U 恰好包含一个端点，但不包含 $V \sqsubset U$对应的 $\hat{\delta}_U^V$，那么 C_U 只包含这一个端点（因为 U 不是$\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的），于是我们令 $\hat{x}_U \in C_U$ 为任意一点

否则，我们令 $C = C_U$，并令$\mathcal{V}_U$表示满足以下条件的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域集合：$V \sqsubset U$ $\hat{\delta}_U^V \in C$（或等价地，$(\hat{\delta}_U^V)_0 = \hat{y}_U$）。对每个 $V \in \mathcal{V}_U$，令 $C_U^V = $凸包$_C(\hat{\delta}_U^V \cup \pi_C(\hat{x}_V))$表示 C 中的 δ_U^V 凸包，即由 $\hat{\delta}_U^V$ 以及标记点（其标签为 l_V）向下投影到凸子集 C所得的凸包。以下命题恰为 [Dur23 的命题 10，4], 将帮助我们在这样的 C_U中选取一点：

命题 A.3。对于每个 V，$W \in \mathcal{V}_U$，都有 $C_U^V \cap C_U^W \neq \varnothing$。此外，$\hat{\delta}_U^V \in C_U^W$ 和 $\hat{\delta}_U^W \in C_U^V$ 至少有一个成立。

证明。我们不妨假设 $\hat{\delta}_U^V \neq \hat{\delta}_U^W$，因此 $V \pitchfork W$。若 $C_U^V \cap C_U^W = \varnothing$，则 $\hat{\delta}_U^V \notin C_U^W$且 $\hat{\delta}_U^W \notin C_U^V$，由此可得 $l_V \neq l_W$。引理4.10 的（7）中的大间隙不等式性质，加上引理4.2 的第（4）项，推出 $\hat{\delta}_V^W \notin \Delta_V^{-1}(\hat{y}_V)$ 且 $\hat{\delta}_W^V \notin \Delta_W^{-1}(\hat{y}_W)$，因此 $\hat{y}_V \neq (\hat{\delta}_V^W)_0$ 且 $\hat{y}_W \neq (\hat{\delta}_W^V)_0$，这与 $\hat{y}$的 0-一致性矛盾。由此得证。□

因此，树的海利性质意味着$\bigcap_{V\in\mathcal{V}_U} C_U^V \subset \hat{T}_U$ 非空。不过，这个交集中可能包含许多 $\hat{}\,\delta_U^V$，对于 $V\in\mathcal{V}_U$而言。以下断言恰好是 [Dur23中的断言 10。6] 它有助于我们作出一致的选择：

命题A.4. 假设 $V,W\in\mathcal{W}_U^{\sqsubset}$，则 $\hat{}\,\delta_U^V=\hat{}\,\delta_U^W$。

命题A.4 的证明。反设 $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$，于是 $V\pitchfork W$。那么，再次由引理 4.10 第 (7) 项中的大间隙不等式性质可得 $\hat{}\,\delta_W^V=\hat{}\,\delta_W^U(\hat{}\,\delta_U^V)$ and $\hat{}\,\delta_V^W=\hat{}\,\delta_V^U(\hat{}\,\delta_U^W)$。但这样一来，$\hat{}\,y_W\neq(\hat{}\,\delta_W^V)_0=(\hat{}\,\delta_W^U)_0((\hat{}\,\delta_U^V)_0)$ and $\hat{}\,y_V\neq(\hat{}\,\delta_V^W)_0=(\hat{}\,\delta_V^U)_0((\hat{}\,\delta_U^W)_0)$，这与 $\hat{}\,y$ 的 0-一致性矛盾，证明完毕。□

最后，这个结论有助于我们在 $\hat{}\,\delta_U^V$ 集合和标记点之间作出一致的选择，前提是 C_U 同时包含两者：

命题A.5。 以下结论成立：

(1) 若存在 $V\pitchfork U$ 使得 $\hat{}\,y_V\neq(\hat{}\,\delta_V^U)'$，则对所有满足 $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$ 的 $W\in\mathcal{V}_U$，都有 $\hat{}\,x_W=\hat{}\,\delta_W^V$。
(2) 若存在满足 $\hat{}\,y_W\neq(\hat{}\,\delta_W^U)'(\hat{}\,y_U)$ 的 $W\in\mathcal{V}_U$，则对所有满足 $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$ 的 $V\pitchfork U$，都有 $\hat{}\,y_V=(\hat{}\,\delta_V^U)'$。• 特别地，若 $V\in\mathcal{W}_U^{\pitchfork}$ 且 $W\in\mathcal{W}_U^{\sqsubset}$，则 $\hat{}\,\delta_U^V=\hat{}\,\delta_U^W$。

命题 *A.5* 的证明。 设 $V\pitchfork U$ 如命题第 (1) 项所述，并取 $W\in\mathcal{V}_U$ 满足 $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$。则$W\pitchfork V$，且由于 $W\sqsubset U$，我们有 $(\hat{}\,\delta_V^W)_0=(\hat{}\,\delta_V^U)_0\neq\hat{}\,y_V$，因此根据定义可得 $\hat{}\,x_W=\hat{}\,\delta_W^V\hat{}\,x_W$。
现在假设 $W\in\mathcal{V}_U$，如条目 (2) 所示，并且 $V\pitchfork U$with $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$。那么 $W\pitchfork V$。根据 $\hat{}\,y$ 的 0-一致性，我们有 $\hat{}\,y_U=(\hat{}\,\delta_U^W)_0$。但由于 $\hat{}\,\delta_U^V\neq\hat{}\,\delta_U^W$，我们有 $(\hat{}\,\delta_U^V)_0\neq(\hat{}\,\delta_U^W)_0$，因此 $\hat{}\,y_V=(\hat{}\,\delta_V^U)_0=(\hat{}\,\delta_V^W)_0$，因为 $W\sqsubset U$。证明至此完成。□

我们终于可以定义元组 $\hat{}\,x$ 了。对于每个 $U\in\mathcal{U}$，我们分别在各个区域上进行定义。：
(1) 如果 $\hat{}\,y_U$ 不是 $\hat{T}_U$,0 的标记点或簇点，那么我们令 $\hat{}\,x_U\in C_U$ 为 $\Delta_U^{-1}(\hat{}\,y_U)$ 中的任意一点。(2) 对于任意类型为 (1) 的 U：如果 $V\pitchfork U$ 或 $U\sqsubset V$，我们令 $\hat{}\,x_V=\hat{}\,\delta_V^U$；如果 $U\sqsubset V$，则令 $\hat{}\,x_V=\hat{}\,\delta_V^U(\hat{}\,x_U)$。 (3) 如果 U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，且 $\hat{}\,y_U$ 是 T_U,0 的标记点，那么有以下三种情况：(a) 集合 $\mathsf{W}_U^{\pitchfork}=\{W\in\mathsf{U}|W\pitchfork U$ 且 $(\hat{}\,\delta_W^U)'\neq\hat{}\,y_W\}$ 非空，我们对任意 $W\in\mathsf{W}_U^{\pitchfork}$ 令 $\hat{}\,x_U=\hat{}\,\delta_U^W$（根据命题 A.2，这对所有此类点都成立）；(b) $\mathsf{W}_U^{\sqsubset}=\{V\sqsubset U|(\hat{}\,\delta_V^U)'(\hat{}\,y_U)\neq\hat{}\,y_V$ 且 $(\hat{}\,\delta_W^U)'(\hat{}\,y_U)\neq\hat{}\,y_W\}$ 非空，我们对任意 $V\in\mathsf{W}_U^{\sqsubset}$ 令 $\hat{}\,x_U=\hat{}\,\delta_U^V$（根据命题A.4，这对所有此类点都成立）；或者 (c) $\mathsf{W}_U^{\pitchfork}$ 和 $\mathsf{W}_U^{\sqsubset}$ 均为空，我们令 $\hat{}\,x_U$ 为 $\hat{T}_U^e$ 中包含于 C_U 的任意一点，尤其可以取一个既不是簇点也不是标记点的点。(4) 归纳进行下去，如果 U 不属于上述情况 (1)–(3)，那么$\bigcap_{V\in\mathsf{V}_U} C_U^V\neq\varnothing$ 且具有有限直径。这里又分为三种情况：(a) 如果 $\mathsf{W}_U^{\pitchfork}\neq\varnothing$，则对任意 $W\in\mathsf{W}_U^{\pitchfork}$，有 $\hat{}\,x_U=\hat{}\,\delta_U^W$；(b) 当 $\mathsf{W}_U^{\sqsubset}\neq\varnothing$ 时，对任意 $V\in\mathsf{W}_U^{\sqsubset}$，有 $\hat{}\,x_U=\hat{}\,\delta_U^V$；或者 (c) 否则，$\mathsf{W}_U^{\pitchfork}$ 和 $\mathsf{W}_U^{\sqsubset}$ 均为空，我们令 $\hat{}\,x_U$ 为 $\hat{T}_U^e\cap C_U$ 中的任意一点。

最后，我们通过逐情况分析证明$\hat{}\,x=(\hat{}\,x_U)$ 是 0-相容的，这与命题 5.12 的证明类似。证明这一点即可完成 $\Delta:\mathcal{Q}\to\mathcal{Q}'$ 的满射性证明。该证明与 [Dur23 定理 102] 中证明的相应部分十分相似。

$U\pitchfork V$：不妨设$\hat{}\,x_V\neq\hat{}\,\delta_V^U$，否则结论已得。于是$\hat{}\,y_V\neq(\hat{}\,\delta_V^U)_0$，因此由$\hat{}\,y$的 0-一致性可得$\hat{}\,y_U=(\hat{}\,\delta_U^V)_0$。由此可知$\hat{}\,\delta_U^V\in C_U=\Delta_U^{-1}(\hat{}\,y_U)$，并且必有$\hat{}\,\delta_U^V\in\{\hat{a}_V,\hat{}\,b_V\}$，故不失一般性可设$\hat{}\,\delta_U^V=\hat{a}_V$。若 U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的，那么我们在 (3) 中对$\hat{}\,x_U$的选择表明$\hat{}\,x_U=\hat{}\,\delta_U^V$，如所需。

现在假设 U不是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的。令 $\mathcal{V}_U$为满足 $\hat{}\,\delta_U^W\in C_U$ 的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小 $W\sqsubset U$ 的集合。令 $W\in\mathcal{V}_U$ 满足 $\hat{}\,\delta_U^W\neq\hat{}\,\delta_U^V$。那么 $W\pitchfork V$ 且 $(\hat{}\,\delta_V^W)_0=(\hat{}\,\delta_V^U)_0\neq\hat{}\,y_V$，因此 $\hat{}\,x_W=\hat{}\,\delta_W^V=\hat{a}_W$，其中

第一个等号由我们在（3）中的选择性得到，最后一个等号则由 a 的 0-一致性得到。但这说明 $a = l_W$，因此对于所有 $W \in \mathcal{V}_U$（包括那些满足 $\hat{}\,\delta_U^W = \hat{}\,\delta_U^V = \hat{a}_U$ 的情形），都有 $\hat{a}_U \in C_U^W$。

由此可知 $\hat{}a_U \in \bigcap_{W \in \mathcal{V}_U} C_U^W$ 因此 $\hat{}x_U = \hat{a}_U$ 根据 $\hat{}$ 的定义x 在上面的第（4a）项中。

$V \sqsubset U$：不妨设 $\hat{}x_V \neq \hat{}\delta_V^U(\hat{}x_U)$，否则我们已经完成证明。于是 $\hat{}y_V \neq (\hat{}\delta_V^U)_0(\hat{}y_U)$，而 $\hat{}y$ 的 0-一致性意味着 $\hat{}y_U = (\hat{}\delta_U^V)'$，从而 $\hat{}\delta_U^V \in C_U = \Delta_U^{-1}(\hat{}y_U)$。我们断言，对于所有 $W \in \mathcal{V}_U$，都有 $\hat{}\,\delta_U^V \in C_U^W$。

为证明这一点，只需考虑 $W \in \mathcal{V}_U$，其中 $\hat{}\,\delta_U^W \neq \hat{}\delta_U^V$。于是 $W \pitchfork V$。但是 $\hat{}x_V \neq \hat{}\delta_V^U(\hat{}x_U)$，所以若还有 $\hat{}\delta_U^V \notin C_U^W$，则 $\hat{}x_V \neq \hat{}\delta_V^U(\hat{}\delta_U^W) = \hat{}\delta_V^W$；另一方面，$\hat{}x_W \neq \hat{}\delta_W^U(\hat{}\delta_U^V) = \hat{}\delta_W^V$，这两者都在引理 4.10 的第（7）项中使用了 BGI 性质。然而 $\hat{}y_V \neq (\hat{}\delta_V^W)_0$，且 $\hat{}y_W \neq (\hat{}\delta_W^V)_0$，这与 $\hat{}y$ 的 0-一致性矛盾。

因此 $\hat{}\,\delta_U^V \in C_U^W$对所有 $W \in \mathcal{V}_U$，由此可得 $\hat{}\delta_U^V \in \bigcap_{W \in \mathcal{V}_U} C_U^W$，接着 (4b) 表明 $\hat{}x_U = \hat{}\delta_U^V$。

因此 $(\hat{}x)$ 是 0-相容的。由于对所有 $U \in \mathcal{U}$，$\Delta(\hat{}x) = \hat{}y$，因为 $\hat{}x_U \in \Delta_U^{-1}(\hat{}y_U)$，我们便完成了 $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$，的满射性证明；这也定义了映射 $\Xi : \mathcal{Q}' \to \mathcal{Q}$，其定义为 $\Xi(\hat{}y) = \hat{}x$，如上所述。至此，条目 (2) 的证明完成。

条目 (3)： $\Delta : \mathcal{Q} \to \mathcal{Q}'$ **是一个拟等距：**这一部分的证明与其在 [Dur23定理 10 中的对应证明类似，2], 但做了一些简化（尤其参见 [Dur23第 9 节第 9 小节1]）。

由于 $\Delta|_{\mathcal{Q}}$ 是满射且距离不增，只需证明 $d_{\mathcal{Q}} \prec d_{\mathcal{Q}'}$；为此，只需对每个 $U \in \mathcal{U}$ 中的距离给出上界。

设 $\hat{}x, \hat{}y \in \mathcal{Q}$，其中 $\hat{}x' = \Delta(\hat{}x)$ 且 $\hat{}y' = \Delta(\hat{}y)$。我们可以假设，对于将要考虑的任意 $U \in \mathcal{U}$，都有 $\hat{}x_U \neq \hat{}y_U$。首先作一个有用的化简。

注意，引理 4.10 的第（9）项意味着，满足 $\hat{}x_U$、$\hat{}y_U$ 位于 T_U^e 的同一连通分支这一条件的域 $U \in \hat{\mathfrak{U}}$ 的数量有一个由 $\mathfrak{S}$ 控制的上界。对于这样的 U，我们有 $d_{\hat{T}_U}(\hat{}x_U、\hat{}y_U) \leqslant d_{\hat{T}'_U}(\hat{}x'_U、\hat{}y'_U) + B^2$，因为从那条边上删除的直径为 B 的子树至多有 B 个。因此，在比较 $d_{\mathcal{Q}}(\hat{}x、\hat{}y)$ 与 $d_{\mathcal{Q}'}(\hat{}x'、\hat{}y')$ 的距离估计时，我们可以用一个加法常数处理这些数量有界的域。下文假设 $\hat{}x_U$、$\hat{}y_U$ 中至少有一个与某个簇重合，或者二者之间至少隔着一个簇。

分两种情况：（1）U 是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的；（2）否则。

情况（1）：那么 T_U^e 只有一个连通分支。因此，被压缩的直径至多为 B的子树至多有$\backsim B$ 个，位于 T_U^e 中。根据引理4.10 的第（9）项，这类 $\mathfrak{S}$中的$\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小 U对象至多有有限多个，其中有一个 $\hat{}x_U$、$\hat{}y_U$不是簇点。我们可以通过增大距离估计中的加性常数来处理这类 U对象。

一般情形是，$\hat{}x_U$、$\hat{}y_U$ 是区间的不同端点簇 $\hat{T}_U$。在这种情况下，

$$d_{\hat{T}'_U}(\hat{x}'_U, \hat{y}'_U) \geqslant d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) - B^2 \geqslant K - B^2 - 2r_1,$$

根据引理4.10的第（6）项。因此，选取 $K = K(\mathfrak{S}) > 0$ 足够大，并要求$B_{tt}^2 - 2r_1 < K$，即可保证 $d_{\hat{T}'_U}(\hat{}x'_U、\hat{}y'_U) > 1$从而可以得到估计

$$d_{\hat{T}_U}(\hat{x}_U, \hat{y}_U) \leqslant d_{\hat{T}'_U}(\hat{x}'_U, \hat{y}'_U) + B^2 \leqslant (1 + B^2) d_{\hat{T}'_U}(\hat{x}'_U, \hat{y}'_U).$$

因此，我们可以通过一个有界的乘法误差来计入这些域。

情形（2）：假设 $U \in \mathcal{U}$不是 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小的。由于 $\hat{}x_U \neq \hat{}y_U$，存在某些由边$\hat{}$连通分支 $E_1, \ldots, E_k \subset T_U^e$组成的集合，将 $\hat{}x_U$与 $\hat{}y_U$分隔开，即与 $[\hat{}x_U, \hat{}y_U]_{\hat{T}_U}$相交。根据假设，每个这样的连通分支在 $\mathcal{B}$ 中至多包含 B个直径不超过 B 且被 Δ_U坍缩的子区间：$T_U \to T'_U$。此外，相邻区间 E_i, E_{i+1}连接于某个坍缩簇 C_i处。对于每个这样的坍缩簇 C_i，选取一个满足 $\hat{}\delta_U^{V_i} \in C_i$的 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域 $V_i \sqsubset U$。

注意

$$\begin{aligned} d_{\widehat{T}_U}(C_i, C_{i+1}) &\leqslant d_{\widehat{T}'_U}(\Delta_U(C_i), \Delta_U(C_{i+1})) + B^2 \\ &\leqslant d_{\widehat{T}'_U}(\Delta_U(C_i), \Delta_U(C_{i+1})) + B^2 d_{\widehat{T}'_{V_i}}(\hat{x}'_{V_i}, \hat{y}'_{V_i}). \end{aligned}$$

因此，我们可以通过 $[\hat{}x_U, \hat{}y_U]$ 之间的 C_i距离， C_{i+1} 来补偿每对相邻坍缩簇点之间损失的距离（即边 E_i中损失的距离），这些距离来自 $\sqsubset_{\mathcal{U}}$-极小域V_i。类似地，我们可以利用 V_1、 V_k 来补偿$\hat{}x_U$、C_1 与 C_n、$\hat{}y_U$之间损失的距离。分别地，由覆盖引理$\mathcal{U}$ 中的每个域至多嵌套进$\mathcal{U}$ 中的有界多个域，因此3.14，情况 (2) 的证明得证。定理的证明至此完成。□

附录B. 稳定区间定理8.14的证明

我们将较为完整地说明定理8.14所涉及的两个主要论证。详细的概述和提纲见第8.6 小节。这两个关键论证分别是证明我们可以稳定地添加一个簇点，以及证明我们可以迭代这一过程。

B.1. **添加一个簇点**。 本小节将说明如何在设置中添加一个簇点时构造稳定分解。这是定理 8.14的主要工作。

命题 B.1. 设 Z 是一个测地 δ-双曲空间， $\epsilon > 0$，且 $r_1, r_2 > 0$ 为正整数。设 $(a, b;\ Y)$ 是一个 ϵ-设置，并进一步固定一点 $z \in N_{\epsilon/2}(\lambda(a, b))$。则

(1) $(a, b;\ Y \cup \{z\})$ 是一个 ϵ-设置；*(2)* 两个设置 $(a, b;\ Y)$ 和 $(a, b;\ Y \cup \{z\})$ 是 $(1, \epsilon)$-可容许的；*(3)* 存在 $L_1 = L_1(\delta, \epsilon) > 0$，使得设置 $(a, b;\ Y)$ 和$(a, b;\ Y \cup \{z\})$ 的稳定区间 T 和 T' 均具有 Y-稳定的 L_1-相容分解；*(4)* 存在 $L_2 = L_2(\delta, \epsilon, r_1, r_2) > 0$，使得 T, T' 的 (r_1, r_2)-加厚具有 Y-稳定的 L_2-相容分解。

证明。 由于点 a, b 没有改变，前两个结论由假设自动成立。

取 $E \gg \epsilon$，命题 8.5 表明 $\mathcal{G} = \mathcal{G}_E(a, b; \mathcal{Y})$ 和 $\mathcal{G}' = \mathcal{G}_E(a, b; \mathcal{Y} \cup \{z\})$ 都是区间。主要分为两种情况：(a) $d(z, C) > E$ 对所有簇 C都成立；或 (b) 其他情况。

我们将分别处理这些情况，不过论证类似。此外，对于每种情况，我们都要处理稳定树 $T = T_e \cup T_c$ 的原始分解，以及其 (r_1, r_2)-加厚 $T = \mathbb{T}_e \cup \mathbb{T}_c$ 的分解。后者的相容分解将细化前者的分解，误差可能会随 r_1, r_2 略微增加。

情况 (a), z 构成一个分裂簇：在这种情况下， z 形成自己的簇，尤其不会影响任何其他簇是否包含相关元素。此外，它不可能是$\mathcal{G}'$, 的端点簇，因为这类簇必然包含 a 和 b。因此，存在两个簇 C_1, C_2 ，它们在 $\mathcal{G}$ 中相邻，但在 $\mathcal{G}'$, 中被 z 隔开；设 C_1 位于 a 一侧， C_2 位于 b 一侧。从这个意义上说，我们可以把 z看作将簇 C_1, C_2一分为二。

引理 8.3 表明，对于 $(a, b,\ z$ 将两个簇 C, C' 分隔开；当且仅当 $s(z)$ 沿着 $\lambda(a, b)$ 将 $s(C), s(C')$ 分隔开时，Y)。因此，连接包含 a 的簇与 C_1 的 G 的子图，与 $\mathsf{G}_E(a, b; \mathsf{Y} \cup \{z\})$ 的子图相同；同理，连接 C_2 与包含 b 的簇的子图也相同。这说明，对于 G′, $\lambda_0(C, C')$ 中位于 z 的 a 侧的任意一对 C, C'，它都是 T 和 T' 的一个边分量；对于位于 z 的 b 侧的任意一对，结论也类似。因此，我们可以将 $E \subset T_e$ 和 $E \subset T'_e$ 的每个这样的连通分支分别纳入稳定分解 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$，其中恒等映射就是定义 8.12 的 (3c) 和 (3d) 部分所述的映射。根据构造，这些片段各自具有正整数长度，从而验证了性质 (3a)。

为了构造其余的稳定分解，即定义 8.12 中类型 (3e) 的稳定片段，我们需要比较连通分支 $\lambda_0(C_1, C_2) \subset T_e$ 与两个连通分支 $\lambda_0(C_1, z) \cup \lambda_0(z, C_2) \subset T'_e$。首先，引理 8.8 表明， $\lambda(C_1, C_2)$ 和 $\lambda(C_1, z)$ 在 C_1 上的端点彼此相距不超过 14ϵ, 因此 $\lambda_0(C_1, C_2)$ 和 $\lambda_0(C_1, z)$ 的端点之间的距离不超过 $14\epsilon + 2$，对于 C_2 也同样如此。由此可得

由 Z 的 δ-双曲性可知， $\lambda_0(C_1, C_2)$ 与 $\lambda_0(C_1, z) \cup \lambda_0(z, C_2)$ 在 Hausdorff 意义下相距不超过 $O(\epsilon)$。现在，除非 C_1, C_2 在 Z 中相距不超过 $O(\epsilon)$——若是如此，我们便可将这三条测地线都判定为不稳定——否则， z 在 T 上的影 $s_T(z)$ 将真包含于 $\lambda_0(C_1, C_2)$ 中，且直径有界，不超过 $O(\epsilon)$。因此，我们可以将这些测地线分解为彼此相距不超过 $O(\epsilon)$ 的稳定片段，以及标记为 z 的不稳定片段，如性质 (3f) 所述；同时满足 (3a) 中的长度要求，以及 (3d) 和 (3e) 中的接近要求。启发性示意见图7。对于双射 α： $\pi_0(T_s) \to \pi_0(T'_s)$，由于 T_s, T'_s 的连通分支数量相同，我们可以令 α 表示自然的保序双射，即沿测地线 $[a, b]_T$ 和 $[a, b]_{T'}$ 移动所得到的双射。根据构造，此双射将我们所需的连通分支对应起来，从而满足相关条件 (3d) 和 (3e)。

最后，我们需要确认保序双射 β： $\pi_0(T - T_s) \to \pi_0(T' - T'_s)$（由 α 诱导）满足 (3g) 中的性质。由于 β 是保序的（这里的顺序与定义 8.10 中一样，是“从 a 到 b”），因此 (3(g)i) 自动成立，即与 a 和 b 相关联的 $T - T_s$ 和 $T' - T'_s$ 的连通分支彼此对应。对于 (3(g)ii)，注意到 $\mathrm{Y} \cap (\mathrm{Y} \cup \{z\}) = \mathrm{Y}$；并且再次根据构造，若 $y \in \mathrm{Y}$，则 β 会将 $T - T_s$ 中对应于 y 的连通分支 D_y 与 $T' - T'_s$ 中对应于 y 的连通分支 D'_y 对应起来。在这种情况下，这是因为所有这些连通分支完全相同。由此证明了该陈述的第 (1) 部分。

对于陈述的第 (2) 部分，我们要考察沿着 T_c, T'_c 对 T, T' 分别进行 (r_1, r_2) 加厚，会如何影响分解 $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$。首先，根据定义，注意到 $\mathbb{T}_e \subset T_e$ 和 $\mathbb{T}'_e \subset T'_e$。特别地，考虑一个连通分支 $D \subset T_e$，其中 $D = \lambda_0(C, C')$ 对应相邻簇 C, C'。于是，对 D 进行 (r_1, r_2) 加厚，要么将 D 截短为 $D_{thick} = D - (\mu_{r_1}(C) \cup \mu_{r_1}(C'))$，要么在 $d_T(\mu(C), \mu(C')) < r_2 - 2r_1$ 的情况下，可能将 D 从 $\mathbb{T}_e$ 中完全移除。对于 T'_e 的连通分支，也有类似的结论。

由上可知， T_s 和 T'_s 的大多数连通分支都是 T_e, T'_e 的相同连通分支，因此根据上文，它们的加厚完全相同。对于其余连通分支，即 T'_e 中的 $\lambda_0(C_1, z), \lambda_0(z, C_2)$ 以及 T_e 中的 $\lambda_0(C_1, C_2)$，每一个都如上所述，要么被截短，要么被移除。稳定分解 T_s 中剩下的两个连通分支分别对应于 $\lambda_0(C_1, z)$ 和 $\lambda_0(z, C_2)$，因此，可以对 $\lambda_0(C_1, z)$ 以及 $\lambda_0(z, C_2)$ 分别进行 (r_1, r_2) 加厚，并采用相同的步骤，构造出 $\mathbb{T}_s$ 中对应的连通分支。请注意，这可能会增大邻近常数，但增幅仅取决于 r_1, r_2。证明的其余部分不变；见图7。

情形（b），z 会影响其他簇：现在反过来假设存在某个簇 C for$(a, b; \mathcal{Y})$，使得 $d(z, C) < E$；我们称 C 为一个受影响簇。

断言 B.2。若 $3E - 56\epsilon > 2E$，则至多有三个受影响簇，且它们在$\mathcal{G}$中相邻。

证明。假设 $C_1, \ldots, C_4$ 是沿着 $\lambda(a, b)$依次出现的四个簇。根据引理 8.8的第（1）项，由于 $d(C_i, C_{i+1}) \geqslant E$，我们有 $d(s(C_i), s(C_{i+1})) > E - 14\epsilon$，对于 $i = 1, 2、3$。

由于这些影子是测地线 $\lambda(a, b)$ 的互不相交线段，因此我们有

$$d(s(C_1), s(C_4)) \geqslant d(s(C_1), s(C_2)) + d(s(C_2), s(C_3)) + d(s(C_3), s(C_4)) \geqslant 3E - 42\epsilon.$$

因此，若 $3E - 56\epsilon \geqslant 2E$，则引理 8.8 的第（1）项说明

$$d(C_1, C_4) \geqslant d(s(C_1), s(C_4)) - 14\epsilon \geqslant 3E - 56\epsilon > 2E.$$

如果 z 同时与 C_1， C_4 的距离都不超过 E，这是不可能的。因此，受影响簇至多有三个，且它们是$\mathcal{G}$中相邻的顶点。□

令 C' 表示由 z 以及来自 $(a, b$的受影响簇组成的簇；Y$)$。注意，添加 z不会改变所有其他 $(a, b;$ Y$)$-簇的归属。令 C_1 和 C_2 分别表示 G 中位于 a和 b一侧、与受影响簇相邻的簇。与上文的分裂簇情形一样，引理 8.3 表明， C_1 将 G 中 a侧的所有簇与 C'分隔开；同理， C_2 将 b侧的簇分隔开。因此，G 中连接包含 a 的簇与 C_1的子图，就是 G′ 中连接包含 a的同一个簇与 C_1的子图； b侧的情况也类似

$\mathcal{G}$ 和$\mathcal{G}'$。因此， T_e 和 T'_e 的所有对应连通分支完全相同，并且根据构造具有正整数长度，从而验证了定义 8.12 中关于这些连通分支的性质（3a）、（3c）和（3d）。

森林 T_e 和 T'_e 还有一些剩余连通分支需要分解。在 T_e 中， T_e 至多有 2 个连通分支连接受影响簇。根据假设，这些线段至多长为 $O(\epsilon)$，因此我们可以将它们视为不稳定分支。

现在说明如何处理剩下的两个连通分支。令 A 为 G 中与 C_1 相邻的受影响簇。只需证明测地线段 $\lambda(C_1, A)$ 与 $\lambda(C_1, C')$ 在 $O(\epsilon)$-豪斯多夫意义下接近，因为这样一来， $\lambda_0(C_1, A)$ 与 $\lambda_0(C_1, C')$ 的长度相差至多 $O(\epsilon)$，我们便可将每条线段末端的一小段视为不稳定，使它们的（稳定）补集具有相同的（正整数）长度，且彼此在 $O(\epsilon)$-意义下接近。不过，这个端点接近性结论再次由引理 8.8 推出，因为 $\lambda(C_1, A)$ 与 $\lambda(C_1, C')$ 的端点距离 $s(C_1)$ 在 $\lambda(a, b)$ 上的端点不超过 7ϵ，而 $s(C')$ 包含 $s(A)$，其端点距离不超过 $(E + \epsilon)$。最后，(3g) 所需的双射 β: $\pi_0(T - T_s) \to \pi_0(T' - T'_s)$ 的定义与分裂簇情形 (a) 类似，条件 (3(g)i) 的证明基本相同。对于条件 (3(g)ii)，再次注意 $\mathrm{Y} \cap (\mathrm{Y} \cup \{z\}) = \mathrm{Y}$。假设 $y \in \mathrm{Y}$ 包含在 $(\mathrm{Y}; \{a, b\})$ 设置中的某个受影响簇内——否则，它就包含在 $(\mathrm{Y} \cup \{z\}; \{a, b\})$ 设置中的一个相同簇内——那么它对应于唯一一个连通分支，该分支与 $T' - T'_s$ 中对应于同时包含 y 和 z 的唯一簇的连通分支相识别。至此，受影响簇情形下 (1) 的证明完成。图 8 给出了示意图。

在受影响簇情形下证明 (2) 的论证与分裂簇版本基本相同：除少数连通分支外， $T_s \subset T_e$ 和 $T'_s \subset T'_e$ 的连通分支完全相同，因此其 (r_1, r_2)- 加厚也完全相同。而 T_s、T'_s 中其余的连通分支，则通过配对 T_e、T'_e 中与受影响簇相邻或将其连接起来的对应连通分支构造而成，然后要么将它们判定为不稳定，要么逐对修改它们以满足长度上界。与上文一样，这可以在加厚之后完成；参见图 8。至此，定理得证。

□

B.2. **迭代稳定分解**。 接下来，我们将证明迭代命题（命题 B.6）。主要工作是基础情形：在共同设置下合并两对稳定分解。

为此，假设我们有三个设置 $(a_i, b_i; \mathrm{Y}_i)$ for $i = 1, 2, 3$，满足对所有 i, j, k 均有 $\mathrm{Y}_i \subset \mathrm{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a_j, b_k))$，且对每个 i 均有 $\mathrm{Y}_0 \subset \mathrm{Y}_i$。假设与 $(a_1, b_1; \mathrm{Y}_1)$ 和 $(a_2, b_2; \mathrm{Y}_2)$ 相关联的稳定区间具有 Y_0-稳定的 L-相容分解，对 $(a_2, b_2; \mathrm{Y}_2)$ 和 $(a_3, b_3; \mathrm{Y}_3)$ 也同样如此。我们的目标是在 T_1, T_2 和 T_2, T_3 上导出新的稳定分解，分别编码来自 T_2, T_3 和 T_1, T_2 的稳定分解。下面描述这些导出分解应具备的性质：

定义 B.3（细化稳定分解）。 设 $(a, b; \mathcal{Y})$ 和 $(a', b'; \mathcal{Y}')$ 表示两个可容许的ϵ-设置，并令 $\mathcal{Y}_0 = \mathcal{Y} \cap \mathcal{Y}'$。假设我们有两个相容的 $\mathcal{Y}_0$-稳定分解 $T_s \subset T$ 和$T'_s \subset T'$。若另一对稳定分解 $T_{s,0} \subset T$和 $T'_{s,0} \subset T'$细化 $T_s \subset T$和$T'_s \subset T'$，则称其满足以下条件：

（1）我们有 $T_{s,0} \subset T_s$和 $T'_{s,0} \subset T'_s$；以及（2）令 β： $\pi_0(T - T_s) \to \pi_0(T' - T'_s)$和 β_0： $\pi_0(T - T_{s,0}) \to \pi_0(T' - T'_{s,0})$表示相应的保序双射。假设 $C_1 \in \pi_0(T - T_s)$，并令 $C_{1,0} \in \pi_0(T - T_{s,0})$ 表示包含 C_1 的连通分支（该连通分支存在，因为 $T_{s,0} \subset T_s$）。则 $\beta(C_1) \subset \beta_0(C_{1,0})$。

注记 B.4。 条件（2）尤其用于在我们的迭代过程中验证定义 8.12中的（3g）的性质。对于条目（3(g)i），由于 β 将包含与 a 相关联的簇分支的 $T - T_s$ 连通分支映射到包含与 a'相关联的簇分支的 $T' - T'_s$连通分支，细化条件（2）迫使同样的结论对 β_0成立。类似的观察可用于验证条目（3(g)ii）。

沿用上述定义之前的记号，令 $\phi_i:\ T_i \to \mathcal{Z}$ 表示映射到$\mathcal{Z}$的映射。此外，假设我们有

- 一个 Y_0-稳定分解 $T^1_{s,2} \subset T_{e,2}$，与设置$(a_1, b_1; \mathrm{Y}_1)$ 和 $(a_2, b_2; \mathrm{Y}_2)$相容；以及
- 一个 Y_0-稳定分解 $T^3_{s,2} \subset T_{e,2}$，与设置$(a_2, b_2; \mathrm{Y}_2)$ 和 $(a_3, b_3; \mathrm{Y}_3)$相容。

命题 B.5. 存在 Y_0-稳定的 $4L^2$-相容分解 $T^2_{s,1} \subset T_{e,1}$ 以及 $T^2_{s,3} \subset T_{e,3}$，它们细化了 $T^2_{s,1}$ 和 $T^2_{s,3}$。

证明。注意，稳定分解 $T^1_{s,2}$ 和 $T^3_{s,2}$ 都位于 T_2 上。令 $T^1_{s,2} = T^1_{s,2} \cap T^3_{s,2}$。注意到 $T_{e,2} - T^1_{s,2} = (T_{e,2} - T^1_{s,2}) \cup (T_{e,2} - T^3_{s,2})$ 至多有 $2L$ 个连通分支，且每个连通分支的直径至多为 $4L^2$；较大的直径上界是为了计入需要合并的不稳定分量，但这类分量至多有 $2L$ 个。此外，根据定义 *8.12* 的第 *(3)* 项，$T^1_{s,2}$ 和 $T^3_{s,2}$ 的每个连通分支的端点都位于包含它们的 $T_{e,2}$ 的连通分支的顶点处，因此这一性质对 $T^1_{s,2}$ 的每个连通分支也成立，

我们首先构造 $T^2_{s,1} \subset T^2_{s,1}$ 和 $T^1_{s,2} \subset T^1_{s,2}$ 的细化分解；同样的论证也会构造 $T^1_{s,2} \subset T^3_{s,2}$ 和 $T^2_{s,3} \subset T^2_{s,3}$ 的细化分解。接下来我们将看到，定义 B.3 中的性质使我们能够将这些分解合并起来，并以 $T^1_{s,2}$ 为桥接，将它们连接起来。

我们可以通过取 T_1, T_2 的所有稳定对 (E, E') 所对应的 $i_E^{-1}, E'(E' \cap T^1_{s,2})$ 的集合，在 T_1 上诱导出一个分解 $T^2_{s,1}$；这些稳定对由双射 $\alpha_{1,2} : \pi_0(T_{s,1}) \to \pi_0(T_{s,2})$ 标识。注意，任意连通分支 $V \subset T^2_{s,1}$ 都包含在某个连通分支 $V \subset E \subset T_{s,1} \subset T_{e,1}$ 中，并且映射 $i_{E,E'}|_V : V \to i_{E,E'}(V)$ 是等距映射，其中 $E' = \alpha_{1,2}(E)$，反之亦然。因此，$T^2_{s,1}$ 的连通分支与 $T^1_{s,2}$ 的连通分支一一对应，且对应的连通分支彼此等距。此外，自然的保序双射 $\alpha^3_{1,2} : \pi_0(T^2_{s,1}) \to \pi_0(T^1_{s,2})$（如定义 8.10 中所述）与由 $\alpha_{1,2}$ 和各个保序等距映射 $i_{E,E'}$ 所诱导的双射对应一致。我们还注意到，各个限制映射 $i_{E,E'}|_V$ 都是保序的，因为 $i_{E,E'}$ 是保序的。接下来注意，根据定义 8.12 的 (3d) 和 (3e)，像 $\phi_1(V)$ 与 $\phi_2(i_{E,E'}(V))$ 要么完全相同，要么在 Z 中 Hausdorff 意义下 L-接近。因此，分解 $T^2_{s,1} \subset T_1$ 和 $T^1_{s,2} \subset T_2$ 满足定义 8.12 的所有性质，唯独 (3g) 可能例外。我们还要证明它们给出了定义 B.3 中所述的细化。

为证明（3g），只需证明细化性质（定义 B.3），如备注B.4所述。定义B.3的性质（1），即 $T^2_{s,1} \subset T^2_{s,1}$ 和 $T^1_{s,2} \subset T^1_{s,2}$，按构造即成立。对于性质（2），我们逐个连通分支进行论证。具体而言，令 $\beta^3_{1,2}$： $\pi_0(T_1 - T^2_{s,1}) \to \pi_0(T_2 - T^1_{s,2})$ 为自然保序双射（由备注 8.11 可知其存在，因为 $\alpha^3_{1,2}$存在）。

首先，由于 $T_1 - T^2_{s,1}$的不稳定连通分支只有在转到 $T_1 - T^2_{s,1}$ 时才会扩展，因此，从 a_1 到 b_1 沿测地线 $[a_1, b_1]_{T_1}$ 移动时遇到的第一个连通分支 $C_0 \subset T_1 - T^2_{s,1}$ 包含于 $C_{0,3} \subset T_1 - T^2_{s,1}$，上的第一个此类连通分支中；在 T_2上的设置也同理。因此，这些扩展后的簇由 $\beta^3_{1,2}$标识；我们还注意到，这也验证了定义 8.12的第（3(g)i）项。

现在我们沿着 T_1 和 T_2 进行归纳。令 C_1、C_1' 表示在 C_0、C_0' 之后遇到的 $T_1 - T^2_{s,1}$ 和 $T_2 - T^1_{s,2}$ 的第二对连通分支。令 E、E' 分别表示 $T^2_{s,1}$ 和 $T^1_{s,2}$ 中连接 C_0、C_0' 与 C_1、C_1' 的连通分支。$(T_1 - T^2_{s,1}) \cap E$ 和 $(T_2 - T^1_{s,2}) \cap E'$ 的连通分支通过保序等距映射 $i_{E,E'}$ 以保序方式对应起来。特别地，这两组连通分支之间存在双射。因此，若 $C_1^3 \subset T_1 - T^2_{s,1}$ 是包含 C_1 的连通分支，则 $C_1' \subset \beta^3_{1,2}(C_1^3)$，如所需。对 $T_1 - T^2_{s,1}$ 的后续连通分支及其与 $T_2 - T^1_{s,2}$ 配对的连通分支重复这一过程，可知 $T^2_{s,1}$ 和 $T^1_{s,2}$ 分别细化 $T^2_{s,1}$ 和 $T^1_{s,2}$。

结合这些分解：现在我们要证明，对于 $(a_1、\ b_1;\ \mathrm{Y}_1)$ 和 $(a_3、\ b_3;\ \mathrm{Y}_3)$，$T^2、{}_{s\,1}{}^{3}$ 和 $T^2、{}_{s\,3}{}^{1}$ 是 Y_0-稳定的 $4L^2$-相容分解。为此，定义 α_1,3：$\pi_0(T^2、\ {}_{s}{}^{3}、\ {}_{1})\to\pi_0(T^2、\ {}_{s}{}^{1}、\ {}_{3})$ 为 $\alpha_1、\ {}_3=\alpha_2^1、\ {}_3\circ\alpha_1^3$,2，并类似地令 $\beta_1、\ {}_3=\beta_2^1、\ {}_3\circ\beta_1^3$,2。这些复合映射是保序双射，因为它们的组成映射都是保序双射；此外，我们也可以在 $T^2、{}_{s\,1}{}^{3}$ 和 $T^2、{}_{s\,3}{}^{1}$ 的连通分支上类似地诱导保序等距映射，这些分支由 α_1,3 对应，且满足定义 8.12 的 (3d) 和 (3e) 中的邻近条件，常数为 $2L$。特别地，尚需证明 (3g) 中的性质。

为此，我们使用定义 B.3 的细化性质 (2)。这基本上是自动成立的。对于 (1)，细化性质意味着 β_1^3,2 将与 a_1 相关联的 $T_1-T^2,{}_{s\,1}{}^{3}$ 的连通分支映射为与 a_2 相关联的 $T_2-T^1,{}_{s\,2}{}^{3}$ 的连通分支；对于 β_2^1,3，情况也类似。因此，β_1,3 将与 a_1, a_3 和 b_1, b_3 相关联的连通分支对应起来。同样，若 $y\in\mathrm{Y}_0\subset\mathrm{Y}_1\cap\mathrm{Y}_2\cap\mathrm{Y}_3,$，则细化性质意味着 β_1^3,2 将与 y 相关联的 $T_1-T^2,{}_{s\,1}{}^{3}$ 的连通分支映射为与 y 相关联的 $T_2-T^1,{}_{s\,2}{}^{3}$ 的连通分支；对于 β_2^1,3，情况也类似。因此，β_1,3 将 y 在 $T_1-T^2,{}_{s\,1}{}^{3}$ 和 $T_3-T^2,{}_{s\,3}{}^{1}$，两者中所关联的连通分支对应起来。命题得证。

□

下面的命题只需对命题 B.5 进行简单的迭代应用即可得到：

命题 B.6. 对于每个 $n\geqslant 2$，都存在 $L_n=L_n(L,n)>0$，使得下述结论成立。设 $(a_1, b_1; Y_1), \ldots, (a_n, b_n; Y_n)$ 是一列两两可容许的 ϵ-设置，并且设 $Y_0\subset\bigcap_i Y_i$。如果每一对相邻设置都允许存在 Y_0-稳定的 L-相容稳定分解，那么 $(a_1, b_1; Y_1)$ 和 $(a_n, b_n; Y_n)$ 都允许存在 Y_0-稳定的 L_n-相容稳定分解。

B.2.1. 完成证明。 为证明定理8.14，我们还需要完成两项任务：

(1) 我们需要说明，在扰动端点而保持设置其余部分不变时，如何构造稳定分解；(2) 说明如何将其纳入迭代设置。

扰动一个端点：这是对命题 B.1的迭代应用。

考虑以下受限设置，我们特别指出它，以便聚焦于扰动端点时发生的情况。设 $a, b, a'\in\mathcal{Z}$ 和 $\mathcal{Y}\subset\mathcal{Z}$ 均为有限集，且 $\mathcal{Y}\subset\mathcal{N}_{\epsilon/2}(\lambda(a,b))\cap\mathcal{N}_{\epsilon/2}(a',b)$。考虑以下设置集合，其中每个设置都通过添加或删除一个簇点，或改变 a, a' 或 b, b' 在簇点与端点之间所扮演的角色而有所不同：

(1) $(a,b;\mathcal{Y})$, (3) $(a,b;\mathcal{Y}\cup\{a,a'\})$, (5) $(a',b;\mathcal{Y}\cup\{a'\})$, (2) $(a,b;\mathcal{Y}\cup\{a\})$, (4) $(a',b;\mathcal{Y}\cup\{a, a'\})$, (6) $(a',b;\mathcal{Y})$.

首先注意到，Y 包含于上述每个簇点集合中，因此我们要了解如何为每个集合构造 Y-稳定分解；这意味着对任意 $\mathrm{Y}_0\subset\mathrm{Y}$，都存在 Y_0-稳定分解。接下来注意，在构造稳定区间 $T(a,b;\mathrm{Y})$时，端点 a, b 与簇点 Y 在簇形成过程中所起的作用是等同的。在定义 8.6 中，端点唯一特殊的作用体现在簇内所定义的线段上，即 $\mu(C)$ 连通分支。特别是，边分量（即 T_e 的连通分支）对待端点和簇点的方式相同。由于定理 8.14 所要求的稳定分解是边分量的子集，因此在应用命题 B.1 为每个步骤 $(1)\to(2)\to(3)$ 和$(4)\to(5)\to(6)$得到稳定分解时，我们可以将点 a, a', b, b' 视为簇点。唯一例外是步骤 $(3)\to(4)$，其中我们交换了 a 和a'的角色。此处命题 B.1 并不直接适用，但根据上述讨论，这两个设置具有完全相同的簇，因此也具有完全相同的边分量。因此，只需将边分量认定为稳定分支（同样，它们完全相同），并将补分量之间的双射取为显然的映射，即可得到所需的双射（及其邻近约束）。

换句话说，只要说明如何迭代地合并一系列稳定分解，我们就可以应用这一过程，从上面的设置（1）转到设置（6）。

将所有内容汇总起来：在该定理的更一般情形下，上述序列只出现在我们需要考察的更长序列的中间。具体而言，令 $\mathrm{Y}' - \mathrm{Y} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ 和 $\mathrm{Y} - \mathrm{Y}' = \{z_1, \ldots, z_m\}$，其中根据假设，$n$、$m < N$。设置 $\mathrm{Y}_i = \mathrm{Y} \cup \{x_1, \ldots, x_i\}$ 和 $\mathrm{Y}'_i = \mathrm{Y}' \cup \{z_1, \ldots, z_i\}$，并令 $\mathrm{Y}_0 = \mathrm{Y} \cap \mathrm{Y}'$ 和 $\mathrm{Y}_{all} = \mathrm{Y} \cup \mathrm{Y}'$。那么，根据我们设置中的假设，我们得到两个两两可容许的 ϵ-设置序列

$$(a,b;\mathcal{Y}) \to (a,b;\mathcal{Y}_1) \to \cdots \to (a,b;\mathcal{Y}_{all}) \to (a,b;\mathcal{Y}_{all} \cup \{a'\}) \to (a,b;\mathcal{Y}_{all} \cup \{a',b'\})$$

and

$$(a',b';\mathcal{Y}') \to \cdots \to (a',b';\mathcal{Y}_n) \to (a',b';\mathcal{Y}_{all}) \to (a',b';\mathcal{Y}_{all} \cup \{a\}) \to (a',b';\mathcal{Y}_{all} \cup \{a,b\}),$$

根据上述讨论，我们注意到它们在中间是连通的；这里需要互换 a, a' 和 b, b' 的角色。特别地，设置 $(a,b;\ \mathcal{Y}_{all} \cup \{a',b'\})$ 和 $(a',b';\ \mathcal{Y}_{all} \cup \{a,b\})$ 所对应的稳定树具有相同的边分量。

由命题 B.6 可得，针对 $(a,b;\ \mathrm{Y})$ 和 $(a,b;\ \mathrm{Y}_{all} \cup \{a',b'\})$，有 Y_0-稳定、L_{n+2}-相容的稳定分解；针对 $(a',b';\ \mathrm{Y})$ 和 $(a',b';\ \mathrm{Y}_{all} \cup \{a,b\})$，有 Y_0-稳定、L_{m+2}-相容的稳定分解。由于 $(a,b;\ \mathrm{Y}_{all} \cup \{a',b'\})$ 和 $(a',b';\ \mathrm{Y}_{all} \cup \{a,b\})$ 确定了相同的边分量，我们可以沿用命题 B.5 证明中的论证，导出针对 $(a,b;\ \mathrm{Y})$ 和 $(a',b';\ \mathrm{Y})$ 的精细 Y_0-稳定、$(L_n \cdot L_m)$-相容的稳定分解。细节留给读者。这就完成了证明。□

参考文献

[AB95] Juan M. Alonso 和 Martin R. Bridson。半双曲群。《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑）114 卷（1995 年），第 1 期：70–156。（引用见第 2、3 页及其他页）。[ABD17] Carolyn Abbott、Jason Behrstock 和 Matthew Gentry Durham。层级双曲群中最大的圆柱型作用与稳定性。arXiv 预印本 arXiv:1705.06219，2017。（引用见第 1 页）。[Aou13] Tarik Aougab。曲线图的统一双曲性。《几何与拓扑》17(5):2855–2875，2013。（引用见第 9 页）。[BBF15] Mladen Bestvina、Ken Bromberg 和 Koji Fujiwara。构造拟树上的群作用及其在映射类群中的应用。《高等科学研究所数学出版物》，122:1–64，2015。（引用见第 31、32 页）。[BBFS20] Mladen Bestvina、Ken Bromberg、Koji Fujiwara 和 Alessandro Sisto。投影复形上的圆柱型作用。《数学教学》65(1-2):1–32，2020。（引用见第 31、32 页）。[Beh06] Jason A. Behrstock。映射类群与 Teichmüller 空间的渐近几何。《几何与拓扑》10:1523–1578，2006。（引用见第 10 页）。[Ber21] Daniel James Solomon Berlyne。图乘积与图辫群的层级双曲性。博士论文，纽约市立大学，2021。（引用见第 10 页）。[Bes96] Mladen Bestvina。群边界的局部同调性质。《密歇根数学杂志》43(1):123–139，1996。（引用见第 2 页）。[BGGH25] Eliot Bongiovanni、Pritam Ghosh、Funda Gültepe 和 Mark Hagen。刻画层级双曲的自由循环群。arXiv 预印本 arXiv:2508.15738，2025。（引用见第 10 页）。[BHMS24a] Jason Behrstock、Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。层次双曲性的组合观点及其在映射类群商群中的应用。《拓扑学杂志》17(3):e12351，2024。（引用见第 9 页）。[BHMS24b] Jason Behrstock、Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。层次双曲性的组合观点及其在映射类群商群中的应用。《拓扑学杂志》17(3):论文编号 e12351，共 94 页，2024。（引用见第 13 页）。[BHS17a] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间与群的渐近维数和小消去。《伦敦数学学会会刊》（第 3 辑）114(5):890–926，2017。（引用见第 9 页）。[BHS17b] Jason Behrstock、Mark F. Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间 I：立方群的曲线复形。《几何与拓扑》21(3):1731–1804，2017。（引用见第 1、5、9 页）。[BHS19] Jason Behrstock、Mark Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间 II：组合定理与距离公式。《太平洋数学杂志》299(3):257–338，2019。（引用见第 9、10、11、12、25、32 页）。[BHS21] Jason Behrstock、Mark F Hagen 和 Alessandro Sisto。层级双曲空间中的拟平坦。《杜克数学杂志》1(1):1–88，2021。（引用见第 1、2、5、9、13、30 页）。[BKMM12] J. Behrstock、B. Kleiner、Y. Minsky 和 L. Mosher。映射类群的几何与刚性。《几何与拓扑》16:781–888，2012。（引用见第 10、11、32 页）。

[Bon24] Eliot Bongiovanni。有限生成 Veech 群的扩张。arXiv 预印本 arXiv:2406.11090，2024。（引用见第 9 页）。[Bow19] Brian H. Bowditch。粗中值空间中的凸包。预印本，2019。（引用见第 1、9、11、13 页）。[Bow22] Brian H Bowditch。中位数代数。预印本，第 209 页，2022。（引用见第 27、28 页）。[BR22] Daniel Berlyne 和 Jacob Russell。图乘积的层级双曲性。《群、几何与动力学》16(2):523–580，2022。（引用见第 10 页）。[Bro02] Jeffrey F. Brock。裤子分解与魏尔–彼得森度量。载于《复流形与双曲几何》（瓜纳华托，2001），《当代数学》第 311 卷，第 27–40 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2002。（引用见第 1、9、11 页）。[Che00] Victor Chepoi。某些 CAT 立方复形的图。《应用数学进展》24(2):125–179，2000。（引用见第 27、28 页）。[Che22] Marissa Chesser。亏格 2 把手体群的稳定子群。《代数与几何拓扑》22(2):919–971，2022。（引用见第 9 页）。[CLM12] Matt T. Clay、Christopher J. Leininger 和 Johanna Mangahas。映射类群中右阿廷群子群的几何。《群、几何与动力学》6(2):249–278，2012。（引用见第 32 页）。[CN05] Indira Chatterji 和 Graham Niblo。从墙空间到 CAT 立方复形。《国际代数与计算杂志》15(5-6):875–885，2005。（引用见第 27 页）。[CR24] Aaron Calderon 和 Jacob Russell。可容许曲线图的层级双曲性与标记分层的边界。arXiv 预印本 arXiv:2409.06798，2024。（引用见第 10 页）。[CRHK21] Montserrat Casals-Ruiz、Mark Hagen 和 Ilya Kazachkov。层级双曲群的实立方化与渐近锥。预印本，2021。（引用见第 3、12 页）。[CS11] Pierre-Emmanuel Caprace 和 Michah Sageev。CAT(0) 立方复形的秩刚性。《几何与泛函分析》21(4):851–891，2011。（引用见第 5 页）。[DDLS23] Spencer Dowdall、Matthew G Durham、Christopher J Leininger 和 Alessandro Sisto。Veech 群的扩张 I：双曲作用。《拓扑学杂志》16(2):757–805，2023。（引用见第 9 页）。[DDLS24] Spencer Dowdall、Matthew G. Durham、Christopher J. Leininger 和 Alessandro Sisto。Veech 群的扩张 II：层级双曲性与准等距刚性。《瑞士数学学报》99(1):149–228，2024。（引用见第 9 页）。[DMS20] Matthew G Durham、Yair N Minsky 和 Alessandro Sisto。稳定立方化、双向测地线族与重心。arXiv 预印本 arXiv:2009.13647，2020。（引用见第 1、2、3、5、6、7、8、9、12、31、32、33、35、36、37、38 页）。[DMS25] Matthew Gentry Durham、Yair Minsky 和 Alessandro Sisto。渐近 CAT(0) 度量、Z-结构与法雷尔–琼斯猜想。arXiv 预印本 arXiv:2504.17048，2025。（引用见第 2、3、5、37、38 页）。[Dra06] A. N. Dranishnikov。关于 Bestvina–Mess 公式。载于《群论的拓扑与渐近方面》，《当代数学》第 394 卷，第 77–85 页。美国数学会，罗得岛州普罗维登斯，2006。（引用见第 2 页）。[Dur16] Matthew Gentry Durham。曲面的增广标记复形。《伦敦数学学会杂志》（第 2 辑）94(3):933–969，2016。（引用见第 1、3、9、11 页）。[Dur23] Matthew Gentry Durham。在层级双曲空间中将无穷远立方化。arXiv 预印本 arXiv:2308.13689，2023。（引用见第 1、2、3、6、9、11、12、13、14、16、17、18、20、22、23、24、25、26、27、28、29、30、46、47、48 页）。[DZ22] Matthew Gentry Durham 和 Abdul Zalloum。通过 CAT(0) 立方复形研究映射类群中的一般性几何及 Teichmüller 空间。即将在《美国数学会汇刊》发表，arXiv：。（引用见第 页）。[EMR17] Alex Eskin、Howard Masur 和 Kasra Rafi。Teichmüller 空间的大尺度秩。《杜克数学杂志》166(8):1517–1572，2017。（引用见第 9、11 页）。[FJ93] F Thomas Farrell 和 Lowell E Jones。代数 K 理论中的同构猜想。《美国数学会杂志》6(2):249–297，1993。（引用见第 2 页）。[FM11] Benson Farb 和 Dan Margalit。映射类群入门（pms-49），第 41 卷。普林斯顿大学出版社，2011。（引用见第 3 页）。[Hag23] Mark Hagen。不可着色的层级双曲群。《国际代数与计算杂志》33(2):337–350，2023。（引用见第 10 页）。[Ham21] Ursula Hamenstädt。映射类群的几何 IIA：CAT(0) 立方复形与边界。预印本，网址：www.math.uni-bonn.de/people/ursula/noncube.pdf，第 34 页，2021。（引用见第 1 页）。[Ham25] Ursula Hamenstädt。映射类群的一个 Z-结构。arXiv:2505.18808，2025。（引用见第 2 页）。[HHP23] Thomas Haettel、Nima Hoda 和 Harry Petyt。粗单射性、层级双曲性与半双曲性。《几何与拓扑》27(4):1587–1633，2023。（引用见第 1、2 页）。[HMS24] Mark Hagen、Alexandre Martin 和 Alessandro Sisto。超大类型阿廷群是层级双曲的。《数学年刊》388(1):867–938，2024。（引用见第 10 页）。[HP98] Fr´ed´eric Haglund 和 Fr´ed´eric Paulin。负曲率空间自同构群的简单性。巴黎-萨克雷大学，数学系，1998。（引用见第 3 页）。´HP23] Mark F Hagen 和 Harry Petyt。投影复形与准中位数映射。《代数与几何拓扑》22(7):3277–3304，2023。（引用见第 31 页）。

[HRSS22] Mark Hagen、Jacob Russell、Alessandro Sisto 和 Davide Spriano. 通过拟同态为三维流形群构造等变分层双曲结构. arXiv 预印本 arXiv:2206.12244, 2022. (引用见第 9 页). [HS20] Mark F. Hagen 和 Tim Susse. 关于立方群的层级双曲性. 《以色列数学杂志》, 236(1):45– 89, 2020. (引用见第 9 页). [HW14] G Christopher Hruska 和 Daniel T Wise. 立方化群的有限性性质. Compositio Mathematica, 150(3):453–506, 2014. (引用见第 4 页). [Kar11] Aditi Kar. 渐近 CAT(0) 群. Publicacions Matem `atiques, 页 67–91, 2011. (引用见第 2 页). [KK14] Sang-Hyun Kim 和 Thomas Koberda. 右角阿廷群的曲线图的几何结构. 《国际代数与计算杂志》, 24(02):121–169, 2014. (引用见第 11 页). [Min10] Yair Minsky. 克莱因曲面群的分类 I：模型与界. 《数学年刊》, 页 1–107, 2010. (引用见第 13 页). [MM99] Howard A Masur 和 Yair N Minsky. 曲线复形的几何 I：双曲性. 《数学新进展》, 138(1):103–149, 1999. (引用见第 1、3 和 9 页). [MM00a] H. A. Masur 和 Y. N. Minsky. 曲线复形的几何 II：分层结构. 《几何与泛函分析》, 10(4):902–974, 2000. (引用见第 12 页). [MM00b] Howard A Masur 和 Yair N Minsky. 曲线复形的几何 II：分层结构. 《几何与泛函分析》, 10(4):902–974, 2000. (引用见第 1、3、9 和 11 页). [Nic13] Bogdan Nica. 双曲群在 L^p 149 5 773 792, -空间上的适2013 27当等距作用. Compos. Math., ( ): – . (引用见第 页). [NR98] G. A. Niblo 和 L. D. Reeves. 立方复形的几何及其基本群的复杂度. 《拓扑学》, 37(3):621–633, 1998. (引用见第 2、6 和 10 页). [Pet21] Harry Petyt. 映射类群是拟立方的. 即将在《美国数学杂志》发表，arXiv:2112.10681, 2021. (引用见第 1 和 31 页). [PZS24] Harry Petyt、Abdul Zalloum 和 Davide Spriano. 从墙系构造度量空间. arXiv 预印本 arXiv:2404.12057, 2024. (引用见第 1 页). [Raf07] Kasra Rafi. Teichm ¨uller 度量的组合模型. 《几何与泛函分析》, 17(3):936–959, 2007. (引用见第 3、9 和 11 页). [Raf14] Kasra Rafi. Teichm ¨ 18 5 3025 3053, 2014 1, uller 空间中3, 9的双曲性. 《几何与拓扑》, ( ): – . (引用见第 页和第 页). [Rol16] Martin Roller. Poc 集、中位数代数与群作用. arXiv 预印本 arXiv:1607.07747, 2016. (引用见第 3、4 和 27 页). [RST23] Jacob Russell、Davide Spriano 和 Hung Cong Tran. 分层双曲空间中的凸性. 《代数与几何拓扑》, 23(3):1167–1248, 2023. (引用见第 12 页). [Rus21] Jacob Russell. 多曲线稳定子的扩张是分层双曲的. 即将在《几何与拓扑》发表，arXiv:2107.14116, 2021. (引用见第 9 页). [Sag95] Michah Sageev. 群对的端与非正曲率立方复形. 《伦敦数学会会刊》(3), 71(3):585–617, 1995. (引用见第 3、4 和 27 页). [Sag14] Michah Sageev. CAT(0) 立方复形与群. 载于《几何群论》, IAS/Park City 数学丛书第 21 卷, 页 7–54. 美国数学会, 罗得岛州普罗维登斯, 2014. (引用见第 3 和 4 页). [Sch] Petra Schwer. CAT(0) 立方复形. 《数学讲义》, 2324. (引用见第 3 页). [She25] Sam Shepherd. 一个没有因子系统的立方化. 《代数与几何拓扑》, 25(1):255–266, 2025. (引用见第 9 和 10 页). [Sis17] Alessandro Sisto. 什么是分层双曲空间? arXiv 预印本 arXiv:1707.00053, 2017. (引用见第 3 和 10 页). [Zal23] Abdul Zalloum. CAT(0) 立方复形之外的单射性、立方近似与等变墙结构. arXiv 预印本 arXiv:2305.02951, 2023. (引用见第 3 页). [Zal25] Abdul Zalloum. 具有因子系统的立方化群的有效翻转、斜切与秩刚性. 《美国数学会汇刊》, 2025. (引用见第 1 页).

数学与统计系，纽约市立大学亨特学院，纽约州纽约市电子邮箱： matthew.durham@hunter.edu