关于皮卡-林德勒夫论证与巴拿赫-Caccioppoli压缩映射原理

Alexander I. Bufetov，Ilya I. Zavolokin

arXiv:2512.24283v1 [math.CA] 30 Dec 2025

摘要

本文旨在提出一个简单的观察：对压缩映射原理稍作改进，便可得出皮卡-林德勒夫定理中的精确收敛速率。**关键词：**皮卡-林德勒夫论证，巴拿赫-Caccioppoli压缩映射原理，解的存在性与唯一性，常微分方程**MSC2010：**46N20，34A05，34-03

谨以此文献给我们的老师 *Valery Vasilievich Kozlov*，表达我们的敬仰与爱戴

1 引言

Ivan Georgievich Petrovsky 在其 1939年 教科书 [1] 中给出了以下三种证明常微分方程解的存在性与唯一性的方法:

1. 通过欧拉方法对解进行分段线性逼近来证明存在性。随后证明，具有相同初始条件的两个不同解会与利普希茨条件相矛盾;

2. 通过迭代积分算子求得唯一解（皮卡-林德勒夫论证）;

3. 使用巴拿赫-Caccioppoli 压缩映射原理证明存在性与唯一性，I. G. Petrovsky 本人将其称为“恰乔波利-吉洪诺夫定理”[1]。

在他的第一个证明中，彼得罗夫斯基使用了基于阿尔泽拉-阿斯科利定理的紧性论证，因此只能得到解的存在性，而不能给出解的任何逼近；不过请注意，在皮亚诺存在定理的证明中使用的欧拉方法，可以证明会产生一个分段线性逼近序列，并以多项式速率收敛。压缩映射原理给出的则是指数收敛速率。皮卡-林德勒夫论证给出了一种估计：一致范数下，第 n 次皮卡逼近与解之间的差异不超过 $O(\alpha^n/n!)$。因此，应用压缩映射原理得到的收敛速率反而比皮卡原始方法更慢。事实上，Philip Hartman 在其经典教科书 [3] 中只给出了皮卡-林德勒夫论证，完全没有提及压缩映射；Vyacheslav Vasilyevich Stepanov 在 [4]中也如此。Lev Semenovich Pontryagin 在其《常微分方程》 [5]中既给出了皮卡-林德勒夫论证，也给出了基于压缩映射原理的证明，其收敛速率为几何速率。

本文旨在提出一个简单的观察：对压缩映射原理稍作改进，便可得到 $O(\alpha^n/n!)$ 的收敛速率；具体而言，我们考虑一个递减子空间链，以及一个映射，该映射将链中的每个子空间映入下一个子空间，并且在后续的每个子空间上具有越来越强的压缩性。

例如，设 H 是一个度量为 d 的完备度量空间，设 $H_n \subset H$ 是一个由闭子空间构成的递减链:

$$H_0 = H \supset H_1 \supset H_2 \ldots \supset H_n \supset \ldots,$$

令 $\varkappa_n \in (0,1)$，并令 $T\colon H \to H$ 为满足以下假设的映射:

[1]在 1949 年版中，压缩映射原理被称为“吉洪诺夫–卡恰波利定理”；而在身后版 [2], 中，则被称为“巴拿赫定理”。

1. 对所有 $n \geqslant 0$, $TH_n \subset H_{n+1}$,; **2.** 对所有 x, $y \in H_n$, $n \geqslant 0$, $d(Tx, Ty) \leqslant \varkappa_n d(x, y)$。

T当映射 T 有唯一的不动点 p，且对于所有 $x \in H$，我们有如下不等式 :

$$d(T^n x, p) \leqslant \varkappa_1 \dots \varkappa_{n+1} d(x, p),\ n \geqslant 1.$$

对这一简单方案稍作修改——在每个 H_n 上选取不同的度量——即可证明常微分方程的存在唯一性定理，并得出精确的收敛速率。最后，我们简要回顾从欧拉和柯西到皮卡、林德勒夫、巴拿赫和 Caccioppoli 的存在唯一性定理证明史。

2 度量空间链上的压缩映射

设 $\alpha_n > 0$ 为正数常量，并设 $(H_j, d_j)_{j=0}^{\infty}$ 为递减的完备度量空间链:

$$H_0 \supset H_1 \supset H_2 \supset \dots$$

使得我们有

$$d_j(x, y) \leqslant \alpha_{j+1} d_{j+1}(x, y),\ \text{for all}\, x, y \in H_{j+1}, \tag{1}$$

设 $\varkappa_j > 0$ 为满足以下条件的常量

$$\limsup_j \alpha_j \varkappa_j < 1 \tag{2}$$

并设 $P\colon H_0 \to H_0$ 是一个具有以下性质的映射:

$$PH_j \subset H_{j+1},\ \text{for all}\, j = 0, 1, \dots \tag{3}$$

$$d_{j+1}(P(x), P(y)) \leqslant \varkappa_{j+1} d_j(x, y),\ \forall x, y \in H_j,\ j = 0, 1, \dots \tag{4}$$

注释 1. 在皮卡-林德勒夫论证的应用中，常数 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$ 给出了该解所定义区间的长度。

Set

$$S = \bigcap_j H_j.$$

引理1. 映射 P 有唯一的不动点 $x_\infty \in S$。此外，对于所有 $x \in H$ 和所有 $n \geqslant j = 0,\ 1, \dots$ 由下式定义的序列 $(x_m)_m$:

$$x_0 = x,\ x_m = P^{\circ m} x,\ m \geqslant 1$$

满足以下关系

$$d_j(x_\infty, x_n) \leqslant C \alpha_n \varkappa_n \alpha_{n-1} \varkappa_{n-1} \dots \alpha_{j+1} \varkappa_{j+1} d_j(x_{1+j}, x_j),$$

其中

$$C = \sup_n \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n+m} \varkappa_{n+m} \alpha_{n+m-1} \varkappa_{n+m-1} \dots \alpha_{n+1} \varkappa_{n+1}. \tag{5}$$

注释 2. 级数 (5) 根据 (2) 收敛。

注 **3.** 特别地，如果 $\varkappa_n = L/n$，且 $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha$，那么令 $j = 0$，我们得到:

$$d_0(x_\infty, x_n) \leqslant e^{\alpha L} \frac{(L\alpha)^n}{n!} d_0(x_1, x_0).$$

备注 4. 如果 $d_j = d_0\Big|_{H_j}$， $j = 1$，.....，那么 $\alpha = 1$，证明显然成立——但是，正如我们稍后将会看到的，这不足以证明皮卡-林德勒夫定理，参见下文备注 5。

证明。 我们将证明，空间 $H_j, j \geqslant 0$ 的交集中存在一点 x_∞ from S，它在所有度量 $d_j, j \geqslant 0$ 下都是吸引点：

$$\exists x_\infty \in S : \forall j = 0, 1, \dots \ \forall x \in H_j : P^{\circ n} x \xrightarrow{d_j} x_\infty.$$

取 $x \in H$并记 $x_m := P^{\circ m} x$.那么对于 $n \geqslant j = 0, 1, \dots$，我们有以下估计

$$d_j(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_{j+1} d_n(x_{n+1}, x_n) \leqslant \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_{j+1} \varkappa_n \varkappa_{n-1} \dots \varkappa_{j+1} d_j(x_{1+j}, x_j),$$

其中，第一个不等式由 (1) 得出，第二个不等式则由算子 P 的性质 3、4) 得出。对于 $m \geqslant 0$，我们得到以下估计

$$d_j(x_{n+m}, x_n) \leqslant d_j(x_{n+m}, x_{n+m-1}) + \dots + d_j(x_{n+1}, x_n) \leqslant \tag{6}$$
$$(\alpha_{n+m}\alpha_{n+m-1} \dots \alpha_{j+1}\varkappa_{n+m}\varkappa_{n+m-1} \dots \varkappa_{j+1} + \dots + \alpha_n \alpha_{n-1} \dots \alpha_{j+1}\varkappa_n\varkappa_{n-1} \dots \varkappa_{j+1}) d_j(x_{1+j}, x_j) =$$
$$\alpha_n \varkappa_n \alpha_{n-1}\varkappa_{n-1} \dots \alpha_{j+1}\varkappa_{j+1}(\alpha_{n+m}\varkappa_{n+m}\alpha_{n+m-1}\varkappa_{n+m-1} \dots \alpha_{n+1}\varkappa_{n+1} + \dots + 1) d_j(x_{1+j}, \ x_j)$$

由于

$$\limsup \alpha_j \varkappa_j < 1,$$

由此可知，级数 $\sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n+m}\varkappa_{n+m}\alpha_{n+m-1}\varkappa_{n+m-1} \dots \alpha_{n+1}\varkappa_{n+1}$ 对所有 n 均收敛，并记

$$S(n) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_{n+m}\varkappa_{n+m}\alpha_{n+m-1}\varkappa_{n+m-1} \dots \alpha_{n+1}\varkappa_{n+1}.$$

根据假设 2，当 n 足够大时，我们有：

$$\alpha_{n+m}\varkappa_{n+m}\alpha_{n+m-1}\varkappa_{n+m-1} \dots \alpha_{n+1}\varkappa_{n+1} + \dots + 1 < (\limsup \alpha_j \varkappa_j)^m + \dots + 1 < \infty;$$

由此可得

$$\sup_n S(n) = C < \infty.$$

因此，对于任意 $j \in \mathbb{N}$，$(x_n)_n$ 都是度量空间 $(H_j, \ d_j)$ 中的柯西序列，并且我们有

$$x_n \xrightarrow{d_j} x_\infty^j \in H_j.$$

现在我们来验证不动点的唯一性。若 $z \in H_0$ 满足 $P(z) = z$，则对所有 $j \geqslant 0$，我们有：

$$d_0(x_\infty, z) = d_0(Px_\infty, Pz) < \alpha_j \varkappa_j \alpha_{j-1} \varkappa_{j-1} \dots \alpha_1 \varkappa_1 d_0(x_\infty, z),$$

以及 $d_0(x_\infty, z) = 0$.

现在我们来估计收敛速率。将 $m \to \infty$ 代入式 (6) 并取极限，可得不等式：

$$d_j(x_\infty, x_n) \leqslant C\alpha_n \varkappa_n \alpha_{n-1} \varkappa_{n-1} \dots \alpha_{j+1} \varkappa_{j+1} d_j(x_{1+j}, x_j).$$

所需的收敛速率已得到确立。引理1已完全证明。 □

3 皮卡-林德勒夫定理的证明

3.1 预备说明

现在我们将该引理应用于皮卡-林德勒夫定理的证明。

赋予空间 $\mathbb{R}^d, d \in \mathbb{N}$ 范数

$$||v|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{d} v_i^2}.$$

设 $t_0 \in \mathbb{R}$, $y_0 \in \mathbb{R}^d$, $a, b > 0$. 考虑时空平行六面体:

$$R = \{(t, y) : |t - t_0| \leqslant a,\ ||y - y_0|| \leqslant b\}$$

并令 $f\colon R \to \mathbb{R}^d$, 为关于 y 满足利普希茨条件的连续函数:

$$|f(t, y_1) - f(t, y_2)| \leqslant L||y_1 - y_2||,$$

且 $|f(x)| \leqslant M$在 R 上。令 $\alpha = \min(a,\ b/M)$。

注 5。 与经典的皮卡-林德勒夫论证一样, 常数 α 给出了定义解的区间长度。

引入由所有连续映射组成的完备度量空间 H_0

$$y : [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \to \mathbb{R}^d$$

满足假设 $||y(t) - y_0|| \leqslant b$, 且 $y(t_0) = y_0$, 并赋予诱导的一致度量

$$d_0(x, y) = \max_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} ||x(t) - y(t)||.$$

按公式引入皮卡算子 $P\colon H_0 \to H_0$

$$(Py)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds \tag{7}$$

注 6. 假设 y 是皮卡算子的不动点。根据定义, 我们有

$$y(t_0) = y_0,$$

对 (7) 求导可得

$$\frac{d}{dt}y(t) = f(t, y(t)), \tag{8}$$

因此, y 是方程 (8) 的柯西问题的解。

定理 1 (皮卡-林德¨öf)。 存在唯一的连续可微函数 $y^\infty \in H_0$, 使得 $Py^\infty = y^\infty$, 并且对于任意连续函数

$$y : \{|t - t_0| \leqslant \alpha\} \to \{||y - y_0|| \leqslant b\}$$

若 $y(t_0) = y_0$, 则由公式 $y^n = P^{\circ n}y$ 定义的序列收敛于 $y^\infty \in H_0$, 并满足估计

$$||y^n - y^\infty||_{C[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \leqslant e^{\alpha L}\frac{(\alpha L)^n}{n!}M.$$

注 7. 如上所述, 我们无法通过使用诱导度量$d_j = d_0\Big|_{H_j}$来简化论述。事实上, 对于皮卡算子 P, 我们有

$$d(Px, Py) = \max_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max_{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]} \int_{t_0}^{t} L||x(s) - y(s)|||ds| \leqslant \int_{t_0}^{t_0 + \alpha} Ld(x, y)ds = \alpha L d(x, y).$$

因此, 我们只能在区间 $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ 内（满足 $\alpha L < 1$）得到收敛, 而且收敛速度仅为几何收敛速度。

注 8. $\mathbb{R}^d$中的范数 $||\cdot||$仅为具体起见而选取; 也可以改用任何其他范数。该论证一般适用于巴拿赫空间。

3.2 子空间链

对于 $j \in \mathbb{N}$，令 H_j 为满足以下条件的函数 $y \in H_0$ 所构成的子空间：

$$\sup_{\substack{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\\ t\neq t_0}} \frac{||Py(t)-y(t)||}{|t-t_0|^j} < \infty \tag{9}$$

令 $C_j(f,\ y)$ 表示式（9）中的上确界。在 H_j 上按以下公式定义度量 d_j：

$$d_j(x,y) = \sup_{\substack{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\\ t\neq t_0}} \left|\left|\frac{x(t)-y(t)}{(t-t_0)^j}\right|\right|. \tag{10}$$

现在验证式（10）中的上确界是有限的。在巴拿赫空间 $C[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$ 上定义如下有界线性算子 $\mathcal{K}$：

$$(\mathcal{K}g)(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)|ds|,$$

对于 $g \in C[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$。容易验证，对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有：

$$(\mathcal{K}^n g)(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)\frac{|t-s|^{n-1}}{(n-1)!}|ds|,$$

and

$$(Id-L\mathcal{K})^{-1}g(t) = g(t)+\sum_{n=1}^{\infty}(L\mathcal{K})^n g(t) = g(t)+\sum_{n=1}^{\infty}L^n\int_{t_0}^{t} g(s)\frac{|t-s|^{n-1}}{(n-1)!}|ds| =$$

$$= g(t)+L\sum_{n=0}^{\infty}L^n\int_{t_0}^{t} g(s)\frac{|t-s|^{n}}{n!}|ds| = g(t)+L\int_{t_0}^{t} g(s)e^{L|t-s|}|ds|$$

记

$$[R_L g](t) = g(t)+L\int_{t_0}^{t} g(s)e^{L|t-s|}|ds|,$$

对于所有 $g\in C[t_0-\alpha,t_0+\alpha]$. 根据定义，算子 R_L 满足以下单调性：

$$g(t) \leqslant h(t),\ \forall t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha] \implies R_L g(t) \leqslant R_L h(t),\ \forall t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha].$$

对于所有 $x,\ y\in H_j$，我们有

$$||x(t)-y(t)|| \leqslant ||x(t)-Px(t)|| + ||y(t)-Py(t)|| + ||Px(t)-Py(t)||.$$

由于，

$$||Px(t)-Py(t)|| \leqslant \int_{t_0}^{t}||f(s,x(s))-f(s,y(s))||ds| \leqslant L\int_{t_0}^{t}||x(s)-y(s)||ds|,$$

我们得到

$$||x(t)-y(t)|| - L\int_{t_0}^{t}||x(s)-y(s)||ds| = (Id-L\mathcal{K})||x-y||(t) \leqslant (C_j(f,x)+C_j(f,y))|t-t_0|^j.$$

因此，

$$||x-y||(t) = (Id-L\mathcal{K})^{-1}(Id-L\mathcal{K})||x-y||(t) \leqslant (C_j(f,x)+C_j(f,y))(Id-L\mathcal{K})^{-1}|t-t_0|^j =$$

$$= (C_j(f,x)+C_j(f,y))\left(|t-t_0|^j+\sum_{k=j+1}^{\infty}\frac{L^k|t-t_0|^k}{(j+1)(j+2)\dots k}\right) =$$

$$= (C_j(f,x)+C_j(f,y))\left(1+L^j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k|t-t_0|^k}{(j+1)(j+2)\dots(j+k)}\right)|t-t_0|^j \leqslant$$

$$\leqslant (C_j(f,x)+C_j(f,y))\left(1+L^j\sum_{k=1}^{\infty}\frac{L^k|t-t_0|^k}{k!}\right)|t-t_0|^j =$$

$$= (C_j(f,\ x)+C_j(f,\ y))\left(1+L^j(e^{L|t-t_0|}-1)\right)|t-t_0|^j \leqslant (C_j(f,\ x)+C_j(f,\ y))\left(1+L^j(e^{L\alpha}-1)\right)|t-t_0|^j,$$

我们最终得到了所需的估计

$$d_j(x,y) < (C_j(f,x) + C_j(f,y))\left(1 + L^j(e^{L\alpha} - 1)\right).$$

根据定义，度量 d_j 满足不等式

$$d_j(x,y) = \sup_{\substack{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\\ t\neq t_0}} \left|\left|\frac{x(t)-y(t)}{(t-t_0)^j}\right|\right| \leqslant \sup_{\substack{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\\ t\neq t_0}} \left(\left|\left|\frac{x(t)-y(t)}{(t-t_0)^{j+1}}\right|\right| |t-t_0|\right) \leqslant \alpha d_{j+1}(x,y),$$

对所有 $x,\ y \in H_{j+1}$均成立。

3.3 空间 H_j 的完备性

注9 . 检验空间 H_j 完备性的一种方法是取 $y_0,\ y_1,\ y_2 \in H_j$，使其趋于 et

$$u_{10}(t) = \frac{y_1(t)-y_0(t)}{(t-t_0)^j}, \quad u_{20}(t) = \frac{y_2(t)-y_0(t)}{(t-t_0)^j},$$

并注意到，根据定义，我们有 $u_{10},\ u_{20} \in C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$，并且

$$d_j(y_1,y_2) = \max_{t:|t-t_0|<\alpha} |u_{10}(t) - u_{20}(t)|.$$

切比雪夫度量的完备性现在意味着度量 d_j 的完备性。也可以按如下方式进行。

我们验证度量空间 $(H_j,\ d_j)$ 是完备的。事实上，考虑一个柯西序列 (x_n)。不等式

$$d_0(x_n,x_m) \leqslant \alpha^j d_j(x_n,x_m) \to 0$$

意味着存在一个函数 $x \in C[t_0-\alpha, t_0+\alpha]$，使得

$$d_0(x_n,x) \to 0.$$

由不等式

$$d_j(x_n,x_m) \geqslant \sup_{\substack{t\in[t_0-\alpha,t_0+\alpha]\\ t\neq t_0}} \left(\frac{||x_n(t)-Px_n(t)||}{|t-t_0|^j} - \frac{||x_m(t)-Px_m(t)||}{|t-t_0|^j} - \frac{||Px_n(t)-Px_m(t)||}{|t-t_0|^j}\right),$$

我们得到

$$d_j(x_n,x_m) \geqslant C_j(f,x_n) - C_j(f,x_m) - d_j(Px_n,Px_m) \geqslant C_j(f,x_n) - C_j(f,x_m) - \alpha L d_j(x_n,x_m),$$

由此可得

$$C_j(f,x_n) - C_j(f,x_m) \leqslant (1+\alpha L) d_j(x_n,x_m).$$

同理,

$$C_j(f,x_m) - C_j(f,x_n) \leqslant (1+\alpha L) d_j(x_n,x_m).$$

The 实数序列（$C_j(f,\ x_n)$)$_n$ 是柯西序列，我们令 C 为其极限 :

$$\lim_{n\to\infty} C_j(f,x_n) = C < \infty.$$

将 $n \to \infty$ 代入不等式

$$||Px_n(t) - x_n(t)|| \leqslant C_j(f,x_n)|t-t_0|^j,$$

我们得到

$$||Px(t) - x(t)|| \leqslant C|t-t_0|^j.$$

因此， $x \in H_j$ 且度量空间 H_j 是完备的。

3.4 嵌套像

皮卡算子 P将映射 H_j映入 H_{j+1}，因为对于所有 $y \in H_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$，我们有

$$||P(Py) - Py|| = \left|\left|\int_{t_0}^{t} (f(s, Py(s)) - f(s, y(s)))ds\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L||Py(s) - y(s)||| ds| \leqslant \frac{C_j(f, y)L}{j+1}|t - t_0|^{j+1}$$

and

$$||Py - y_0|| = \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(s, y(s))ds\right|\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} ||f(s, y(s))|| |ds| \leqslant \int_{t_0}^{\alpha} M ds = b$$

3.5 收敛速度

为了应用引理1，还需证明假设（2）和（4）成立。我们有

$$d_{j+1}(Px, Py) = \sup_{\substack{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ t \neq t_0}} \frac{1}{|t - t_0|^{j+1}} \left|\left|\int_{t_0}^{t} f(s, x(s)) - f(s, y(s))ds\right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ t \neq t_0}} \frac{1}{|t - t_0|^{j+1}} \int_{t_0}^{t} L||x(s) - y(s)||| ds| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{t \in [t_0 - \alpha, t_0 + \alpha] \\ t \neq t_0}} \frac{1}{|t - t_0|^{j+1}} \int_{t_0}^{t} L \sup_{s \neq t_0} \left(\frac{||x(s) - y(s)||}{|s - t_0|^j}\right) |s - t_0|^j |ds| = \frac{L}{j+1} d_j(x, y).$$

特别地，我们有

$$\varkappa_j = \frac{L}{j} \to 0$$

并且引理1的假设均已验证。令 $y^n = P^{\circ n} y_0$。利用引理1，我们得到 $y^n \xrightarrow{d_0} y^\infty$.由于

$$y^\infty \in \bigcap_j H_j,$$

由此可得

$$y^\infty(t) = (Py^\infty)(t) = y_0 + \int_{t_0}^{t} f(s, y^\infty(s))ds,$$

并由此得到所需的收敛速率

$$d_0(y^n, y^\infty) \leqslant e^{\alpha L} \frac{(\alpha L)^n}{n!} M.$$

注 10. 可以简单地将子空间 H_j 定义为皮卡算子作用于空间 H_0 所得的像。我们更倾向于采用内在刻画：空间 H_j 由满足以下条件的函数组成：皮卡算子不改变其 j阶喷射。

4 复时间下的微分方程

4.1 预备说明

T同样的论证在复时间下也成立。赋予空间 $\mathbb{C}^d$, $d \in \mathbb{N}$，以无 rm

$$||v|| = \max_{j=1,\ldots,d} |v_j|.$$

令 $t_0 \in \mathbb{C}$, $z_0 \in \mathbb{C}^d$, a, $b > 0$. 考虑复时空平行六面体：

$$R = \{(t, y) : |t - t_0| \leqslant a, ||z - z_0|| \leqslant b\}$$

并令 $F\colon\ R \to \mathbb{C}^d$，为在 z 中满足利普希茨条件的全纯函数：

$$||F(t,z_1) - F(t,z_2)|| \leqslant L||z_1 - z_2||, \text{ for all } (t,z_1),(t,z_2) \in R$$

以及 $|F(t,\ z)| \leqslant M$在 R上。令 $\alpha = \min(a,\ b/M)$，令 $U = \{|t-t_0| < \alpha\}$为一个圆盘，$V = \{||z-z_0|| < b\}$为一个多圆盘。引入由所有在 U中全纯、在 U中连续的映射构成的度量空间 H_0

$$z : \overline{U} \to \overline{V}$$

并满足假设 $||z(t) - z_0|| \leqslant b$ 和 $z(t_0) = z_0$。空间 H_0 赋予一致度量

$$d_0(z,w) = \max_{t\in\overline{U}} ||z(t) - w(t)||.$$

通过以下公式引入皮卡算子 $P\colon H_0 \to H_0$

$$(Pz)(t) = z_0 + \int_{t_0}^{t} F(s,z(s))ds,$$

其中，积分沿着从 t_0 到 t的内部连接进行。

定理2（复时间中的皮卡-林德勒夫定理）。存在唯一的全纯函数

$$z^\infty : U \to V$$

使得 $Pz^\infty = z^\infty$。对于任意全纯函数

$$z : U \to V$$

其中 $z(t_0) = z_0$ 是由公式 $z^n = P^\circ z$ 定义的序列，它一致收敛于 z^∞，并满足估计

$$||z^n - z^\infty||_{C[\overline{U}]} \leqslant e^{\alpha L}\frac{(\alpha L)^n}{n!}M.$$

注 11. 例如，[25] 中给出了一个基于压缩映射原理的复时间存在唯一性定理证明。

4.2 子空间链

考虑度量空间 (H_0, d_0)。根据魏尔斯特拉斯定理，一致收敛的全纯函数序列的极限本身也是全纯的，因此我们可以看出，空间 (H_0, d_0) 是完备的。

对于 $j \in \mathbb{N}$，令 H_j 为满足以下条件的函数 $z \in H_0$ 所构成的子空间：

$$\sup_{\substack{t\in\overline{U}\\ t\neq t_0}} \frac{||Pz(t) - z(t)||}{|t-t_0|^j} < \infty \tag{13}$$

令 $C_j(F,z)$ 表示式（13）中的上确界。根据公式定义 d_j 在 H_j 上的度量：

$$d_j(z,w) = \sup_{\substack{t\in\overline{U}\\ t\neq t_0}} \left|\left|\frac{z(t) - w(t)}{(t-t_0)^j}\right|\right|. \tag{14}$$

我们验证对于所有 $z,\ w \in H_j$，(14) 中的上确界都是有限的。根据以下公式，在实连续函数 $g \in C(U)$ 构成的巴拿赫空间上定义有界线性算子$\mathcal{K}$

$$(\mathcal{K}g)(t) = \int_{t_0}^{t} g(s)|ds|.$$

同样，积分是在内部连接 t 和 t_0 上进行的。对于 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\left(\mathcal{K}^n g\right)(t) = \int_{t_0}^{t} g(s) \frac{|t-s|^{n-1}}{(n-1)!} |ds|,$$

and

$$(Id - L\mathcal{K})^{-1} g(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} (L\mathcal{K})^n g(t) = g(t) + \sum_{n=1}^{\infty} L^n \int_{t_0}^{t} g(s) \frac{|t-s|^{n-1}}{(n-1)!} |ds| =$$
$$= g(t) + L \sum_{n=0}^{\infty} L^n \int_{t_0}^{t} g(s) \frac{|t-s|^{n}}{n!} |ds| = g(t) + L \int_{t_0}^{t} g(s) e^{L|t-s|} |ds|$$

令

$$\left[R_L g\right](t) = g(t) + L \int_{t_0}^{t} g(s) e^{L|t-s|} |ds|.$$

对于 $g \in \overline{C}(U)$。根据定义，算子 R_L 是单调的，具体如下：

$$g(t) \leqslant h(t), \forall t \in \overline{U} \implies R_L g(t) \leqslant R_L h(t), \forall t \in \overline{U}.$$

对于所有 z， $w \in H_j$，有

$$||z(t) - w(t)|| \leqslant ||z(t) - Pz(t)|| + ||w(t) - Pw(t)|| + ||Pz(t) - Pw(t)||.$$

根据皮卡算子的定义，有

$$||Pz(t) - Pw(t)|| \leqslant \int_{t_0}^{t} ||F(s, z(s)) - F(s, w(s))|| |ds| \leqslant L \int_{t_0}^{t} ||z(s) - w(s)|| |ds|,$$

由此

$$||z(t) - w(t)|| - L \int_{t_0}^{t} ||z(s) - w(s)|| |ds| = (Id - L\mathcal{K}) ||z - w||(t) \leqslant (C_j(F, z) + C_j(F, w)) |t - t_0|^j.$$

因此，

$$||z - w||(t) = (Id - L\mathcal{K})^{-1} (Id - L\mathcal{K}) ||z - w||(t) \leqslant (C_j(F, z) + C_j(F, w)) (Id - L\mathcal{K})^{-1} |t - t_0|^j =$$
$$= (C_j(F, z) + C_j(F, w)) \left(|t - t_0|^j + \sum_{k=j+1}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{(j+1)(j+2)\dots k} \right) =$$
$$= (C_j(F, z) + C_j(F, w)) \left(1 + L^j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{(j+1)(j+2)\dots(j+k)} \right) |t - t_0|^j \leqslant$$
$$\leqslant (C_j(F, z) + C_j(F, w)) \left(1 + L^j \sum_{k=1}^{\infty} \frac{L^k |t - t_0|^k}{k!} \right) |t - t_0|^j =$$
$$= (C_j(F, z) + C_j(F, w)) \left(1 + L^j (e^{L|t-t_0|} - 1) \right) |t - t_0|^j \leqslant (C_j(F, z) + C_j(F, w)) \left(1 + L^j (e^{L\alpha} - 1) \right) |t - t_0|^j,$$

and

$$d_j(z, w) < (C_j(F, z) + C_j(F, w))(1 + L^j (e^{L\alpha} - 1)).$$

因此，度量 d_j 是定义良好的。根据定义，度量 d_j 满足不等式 ity

$$d_j(z, w) = \sup_{\substack{t \in \overline{U} \\ t \neq t_0}} \left|\left| \frac{z(t) - w(t)}{(t - t_0)^j} \right|\right| \leqslant \sup_{\substack{t \in \overline{U} \\ t \neq t_0}} \left(\left|\left| \frac{z(t) - w(t)}{(t - t_0)^{j+1}} \right|\right| |t - t_0| \right) \leqslant \alpha d_{j+1}(z, w),$$

对所有 z， $w \in H_{j+1}$。

4.3 H_j空间的完备性

注 12. 检验空间 H_j 完备性的一种方法是取 y_0，y_1，$y_2 \in H_j$，令

$$u_{10}(t) = \frac{y_1(t) - y_0(t)}{(t-t_0)^j}, \quad u_{20}(t) = \frac{y_2(t) - y_0(t)}{(t-t_0)^j},$$

并注意到，根据定义，我们有 $u_{10}, u_{20} \in C(U)$，且

$$d_j(y_1, y_2) = \max_{t \in \overline{U}} |u_{10}(t) - u_{20}(t)|.$$

切比雪夫度量的完备性现在推出度量 d_j 的完备性。也可以按如下方式进行。

我们验证度量空间 (H_j, d_j) 是完备的。事实上，考虑柯西序列 $(z_n)_n$。不等式

$$d_0(z_n, z_m) \leqslant \alpha^j d_j(z_n, z_m) \to 0$$

这意味着存在一个函数 $z \in C[U]$，使得 $\overline{z}$ 在 U 上的限制是全纯的，并且

$$d_0(z_n, z) \to 0.$$

根据不等式

$$d_j(z_n, z_m) \geqslant \sup_{\substack{t \in \overline{U} \\ t \neq t_0}} \left(\frac{||z_n(t) - Pz_n(t)||}{|t-t_0|^j} - \frac{||z_m(t) - Pz_m(t)||}{|t-t_0|^j} - \frac{||Pz_n(t) - Pz_m(t)||}{|t-t_0|^j} \right),$$

我们得到

$$d_j(z_n, z_m) \geqslant C_j(F, z_n) - C_j(F, z_m) - d_j(Pz_n, Pz_m) \geqslant C_j(F, z_n) - C_j(F, z_m) - \alpha L d_j(z_n, z_m),$$

由此

$$C_j(F, z_n) - C_j(F, z_m) \leqslant (1 + \alpha L) d_j(z_n, z_m).$$

类似地,

$$C_j(F, z_m) - C_j(F, z_n) \leqslant (1 + \alpha L) d_j(z_n, z_m).$$

因此，序列 $(C_j(F, z_n))_n$ 是一个实数柯西序列。令

$$C = \lim_{n \to \infty} C_j(F, z_n) < \infty.$$

将 $n \to \infty$ 代入不等式

$$||Pz_n(t) - z_n(t)|| \leqslant C_j(F, z_n)|t - t_0|^j,$$

我们得到

$$||Pz(t) - z(t)|| \leqslant C|t - t_0|^j.$$

因此，$z \in H_j$ 且度量空间 H_j 是完备的。

4.4 嵌套像

皮卡算子 P将 H_j映射到 H_{j+1}，因为对于所有 $z \in H_j$, $j = 0, 1, 2, \ldots$，我们有

$$||P(Pz) - Pz|| = \left|\left| \int_{t_0}^{t} (F(s, Pz(s)) - F(s, z(s)))ds \right|\right| \leqslant$$

$$\leqslant \int_{t_0}^{t} L||Pz(s) - z(s)|||ds| \leqslant \frac{C_j(f, z)L}{j+1}|t - t_0|^{j+1}$$

and

$$||Pz - z_0|| = \left|\left| \int_{t_0}^{t} F(s, z(s))ds \right|\right| \leqslant \int_{t_0}^{t} ||F(s, z(s))|||ds| \leqslant \int_{t_0}^{\alpha} M ds = b$$

4.5 收敛速率

为了应用引理1，还需要证明其假设 (2) 和 (4) 成立。我们有

$$d_{j+1}(Pz,Pw)=\sup_{\substack{t\in\overline{U}\\ t\neq t_0}}\frac{1}{|t-t_0|^{j+1}}\left|\left|\int_{t_0}^{t}F(s,z(s))-F(s,w(s))ds\right|\right|\leqslant$$

$$\leqslant\sup_{t}\frac{1}{|t-t_0|^{j+1}}\int_{t_0}^{t}L||z(s)-w(s)|||ds|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\alpha^{j+1}}\int_{t_0}^{t_0+\alpha}L\sup_{s}\left(\frac{||z(s)-w(s)||}{|s-t_0|^{j}}\right)|s-t_0|^{j}|ds|=\frac{L}{j+1}d_j(z(s),w(s)).$$

特别地，我们有

$$\varkappa_j=\frac{L}{j}\to 0.$$

令 $z^n=P^{\circ n}z$。利用引理1，我们得到 $z^n\xrightarrow{d_0}z^\infty$. 由于

$$z^\infty\in\bigcap_j H_j,$$

由此可得

$$z^\infty(t)=(Pz^\infty)(t)=z_0+\int_{t_0}^{t}F(s,z^\infty(s))ds,$$

并得到所需的收敛速率

$$d_0(z^n,z^\infty)\leqslant e^{\alpha L}\frac{(\alpha L)^n}{n!}M.$$

定理2得证。

5 历史评述

戈特弗里德·威廉·莱布尼茨 [8]提出了“微分方程”（æquatio differentialis）这一术语，而圣彼得堡的 Leonhard Euler 则使用（用现代术语来说）通过分段线性函数的收敛序列逼近解的方法，获得了最早的存在性定理 [9] 。这种方法如今以欧拉的名字命名。

维亚切斯拉夫·亚历山德罗维奇·多布罗沃利斯基 [17] 介绍了19世纪常微分方程存在唯一性定理的发展历史。多布罗沃尔斯基推测，奥古斯丁-路易·柯西或许早在1820[2]就已知晓存在唯一性定理。1844年，修道院院长弗朗索瓦-玛丽-拿破仑·穆瓦尼奥出版了一部基于柯西的讲课内容的积分学教程，并在第26–27课（第385页及以下）中使用欧拉方法给出了存在性证明。穆瓦尼奥给出了常微分方程存在解的充分条件：导数 $\partial f_{(x,y)}\,\partial y$ 连续且有界，该方程写成以下形式 ——

$$dy=f(x,y)dx$$

解的唯一性仅被简略提及。Moigno 在第39课（第513页及后续页）中讨论了将结果推广到常微分方程组的情形。解的唯一性再次仅被简略讨论。

利普希茨条件下的存在唯一性定理归功于鲁道夫·利普希茨[18] 。他再次使用欧拉方法，既没有引用柯西，也没有引用莫瓦涅；利普希茨详细证明了解的存在唯一性，并指出，如果不满足利普希茨条件，唯一性未必成立——不过，他并未提供具体的反例。

[2]柯西在 ´巴黎综合理工学院的课程讲义由 Charles Gilain 出版，阿道夫·巴甫洛维奇·尤什克维奇在 [26]中对此进行了讨论 [27],

现在我们简要回顾一下存在唯一性定理的迭代证明。首先回想一下，通过迭代压缩映射来解方程，这种做法在古代就有先例。亚历山大的希罗在其著作《度量论》（公元69年）中，用现代术语来说，使用了压缩映射

$$x \to \frac{1}{2}\left(x + \frac{R}{x}\right) \tag{13}$$

以求得 $\sqrt{R}$ 的近似值。泥板 YBC 7289 上对 $\bar{\sqrt{}}2$ 的极为精确的近似值，该泥板经古文字学鉴定为“公元前第二个千年的前三分之一时期” [16] ，目前由耶鲁巴比伦收藏馆收藏，这一发现使学者们推测，方案 (13) 在古巴比伦时期就已投入使用。

正如多布罗沃尔斯基所指出的，在约瑟夫·刘维尔的论文 [17]中，已经出现了一种预示皮卡方法的常微分方程迭代方案；这篇论文是后来被称为斯图姆-刘维尔理论的早期贡献之一。埃米尔·皮卡最初是在研究偏微分方程时引入了如今以他命名的迭代方法：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + a\frac{\partial u}{\partial x} + b\frac{\partial u}{\partial x} + cu = 0.$$

埃米尔·皮卡在随后的一篇论文[17]中将该方法用于研究常微分方程。恩斯特·林德勒夫¨在 [7] 中基本以现代形式给出了证明，并提供了收敛速率的估计 $O(\alpha^n/n!)$（参见 [7]第 121 页的 (5)）。不过请注意，林德勒夫¨通过反证法，利用利普希茨条件证明了解的唯一性；而且，他在分析学中似乎没有提到，皮卡迭代方案本身既能证明解的存在性，也能证明其唯一性。

现在我们简要回顾不动点定理的拓扑证明。后来被称为布劳威尔不动点定理的一个特例，是皮尔斯·格奥尔基耶维奇·博尔在 1904[19]得到的。博尔的研究专门针对常微分方程的应用——“k¨onnen dazu dienen, perodische L¨osungen von Differentialgleichungen nachzuweisen”[3] （ [19]第186页；另见梅什基斯和拉比诺维奇在 [20]中的简要讨论）。

现在让我们根据R.杜达的叙述，转向利沃夫在20世纪的发展 [21]。斯特凡·巴拿赫在其1920年的博士论文中确立了压缩映射原理，该论文于1922年发表[23]。巴拿赫将压缩映射原理表述为适用于完备赋范向量空间上的自映射——这些空间如今称为巴拿赫空间，且正是在巴拿赫的博士论文中首次得到明确引入。

在 [23] 斯特凡·巴拿赫并未讨论其原理在常微分方程中的可能应用。然而，几年后，利沃夫学派开始兴起一种思路：运用基于布劳威尔不动点定理 [22] 的拓扑考量来证明微分方程解的存在性。尤利乌什·绍德尔 [11], 在伯克霍夫和凯洛格先前工作的基础上[10], ，提出了著名的不动点定理，目的正是求解微分方程。需要强调的是，绍德尔的拓扑方法只能证明解的存在性，不能证明其唯一性，更谈不上提供求得近似解的步骤。在苏联，A. N. 吉洪诺夫 [12], 继续开展绍德尔的研究；他同样只考察了解的存在性。将压缩映射原理推广到一般度量空间，并将其应用于证明常微分方程解的存在唯一性，则归功于 Renato Caccioppoli。

Renato Caccioppoli 是20世纪意大利数学的悲剧英雄。Caccioppoli 对意大利分析学派的发展作出了决定性贡献。用 Alessandro Fig`a Talamanca[4], 的话来说，Caccioppoli 的思想“对意大利数学分析的发展产生了决定性影响：可以说，在意大利因文化上的孤立而与世界其他地区隔绝的时期，整整一代分析学家都从他那里汲取了新的思想、方向和灵感（.....）我们必须

[3]可用于求得微分方程的周期解 [4]Alessandro Fig`a Talamanca、Renato Caccioppoli、《意大利百科全书》、2004年。

归功于他，正是他使意大利数学分析得以在战后重新融入（……）世界数学思想的主流”[5]。

意大利统一至第一次世界大战之间的岁月，常被称为意大利数学的“黄金时代”。从 Eugenio Beltrami 致 Ernesto Ces`aro[6]，的名言中，可以看出这一乐观时期蓬勃昂扬的精神。在信中，这位伦巴第数学家——其父是微型画家，祖父是宝石雕刻师——称赞那不勒斯同僚的著作“确实具备意大利性这一特质，也就是说，具备$quid$ 这一特质，它源自严谨与言辞、思想之敏捷的结合，也就是对科学材料进行艺术加工”[7] ——Vito Volterra [24] 将这番话称为对“意大利数学创作，不仅是近期的，也是有史以来的”[8]一种审慎、精当而准确的概括。

他是 Proust 的热心读者，深深为其作品着迷，也对 Rimbaud 情有独钟；他把 Rimbaud 和 Galois 的肖像都摆在自己的工作桌上。他曾在那不勒斯组织电影俱乐部，专门放映当代电影；他还是一位才华横溢的钢琴家，曾考虑以演奏为职业。Caccioppoli 会在 Beltrami 的话语中认出自己吗? Ennio de Giorgi 说：“尽管试图探究一个人的奥秘既困难又冒失，但如果要我在 Caccioppoli 的艺术兴趣、科学兴趣以及社会和公民生活方面的兴趣之间找出一条线索，我会认为这是一种对和谐的根本追求，以及各种层面上的不和谐所带给他的痛苦。”他还进一步阐释道：“因为在他身上……有毕达哥拉斯式和谐的观念……数学构造……必须是美的、和谐的，不可能……毫无美感”[9]。

登上数学舞台之时，意大利数学的黄金时代刚刚在第一次世界大战的战火中消逝。Renato Caccioppoli 所生活的世界，与 Eugenio Beltrami 的时代截然不同。

Renato Caccioppoli 于1904年1月20日出生在那不勒斯，父亲是外科医生 Giuseppe Caccioppoli，曾担任玛格丽塔王后的私人医生；母亲是 Sofia Bakunina，她是 Mikhail Alexandrovich Bakunin 的女儿[10]。取得古典中学毕业证书后，Caccioppoli 进入那不勒斯大学学习工程学，后来转学数学。19世纪末，Nicola Trudi、Gabriele Torelli（其子 Ruggiero 证明了如今所称的托雷利定理）、Ernesto Ces`aro 和 Alfredo Capelli 都曾在那不勒斯大学任职。Caccioppoli 求学期间，卡亚内洛公爵 Pasquale del Pezzo 在该校担任射影几何讲席教授；他曾于1919年至 1921[15]担任校长。Mauro Picone 来到那不勒斯，对 Caccioppoli 产生了决定性影响；后来 Caccioppoli 成了他的助理。Caccioppoli 积极参与公共事务，这使他在法西斯意大利的生活艰难而危险[11]。1938年，为避免酿成灾祸，家人不得不将他送入精神病院；他们把他的钢琴搬去，让他能够继续练习。

[5]对意大利数学分析的发展产生了决定性影响：可以说，在意大利因文化上的自我封闭而与世界其他地区隔绝的时期，整整一代分析学家从他那里获得了新的思想、方向和灵感（……）因此，正是由于他，战后时期的意大利数学分析才得以重新融入（……）世界数学思想的主流[6]Luigi Bianchi、Eugenio Beltrami，《意大利百科全书》，1930年[7]真正体现意大利特色的要求，也就是说，那种源于严谨与言辞、思想敏捷相结合的特质，亦即对科学材料进行艺术化加工[8]意大利历来以及近来的数学成果[9]试图探究一个人的内心世界，既困难又不明智；但若要寻找一条贯穿 Caccioppoli 的艺术兴趣、科学兴趣以及社会和公民关怀的线索，我会将它归结为他对和谐的深切渴望，以及各种层次上的不和谐带给他的痛苦（……）因为他心中有着（……）毕达哥拉斯和谐的观念（……），认为（……）数学构造（……）必须（……）优美而和谐，不能（……）缺乏美感 [10]Renato Caccioppoli 留下了深刻的印象。多篇综述，尤其是2004年为纪念他诞辰一百周年而发表的文章，都探讨了 Caccioppoli 的数学。五部传记以及由 Mario Martone 执导、以这位数学家生平经历为蓝本进行艺术改编的电影《那不勒斯数学家的死亡》（1992），将 Caccioppoli 其人介绍给了广大公众。在这篇简短的评述中，我们将参考 Carlo Sbordone 的综述 [28] 以及 Lorenza Foschini 的传记 [29]

[11]Caccioppoli 于1937年在索伦托与安德烈·纪德的会面——纪德在1945年12月的一篇日记中将这次会面描述为“难忘”——引发了秘密警察的一份报告：“政治警察处。罗马，1937年8月27日。（……）Caccioppoli 将以下话语归于纪德：‘一个仅仅建立在某个人个人运气之上的政权，只能是一个过渡性政权！ [政治警察处。罗马，1937年8月27日。（……）Caccioppoli 将以下话语归于纪德：‘一个仅仅建立在某个人个人运气之上的政权，只能是一个过渡性政权！’”]

法西斯政权垮台了，但在战后的基督教民主派意大利，Caccioppoli 仍然受到猜忌，尤其无法出国旅行：当局以嘲弄般的残酷手段，虽然在纸面上批准了他的出境签证，却以一种让实际旅行无法成行的方式签发。举例来说，1954年，Caccioppoli 甚至被阻止前往阿姆斯特丹。面对如此屈辱的深渊，他终于不堪承受。用 Caccioppoli 本人的话说：“那不勒斯 `是一片沼泽，而我们是这片沼泽里病态的生灵。怯懦让我们发胖，同时也杀死我们。”Renato Caccioppoli 于1959年5月8日结束了自己的生命。

Caccioppoli关于椭圆方程的研究在一定程度上与彼得罗夫斯基的研究相互竞争，但我们并未发现Caccioppoli与莫斯科学派数学家之间有任何直接交往（参见Caccioppoli于1954年未能与柯尔莫哥洛夫会面一事）。尽管如此，在Caccioppoli创作力极为旺盛的时期，他于1930年发表的关于微分方程解的存在唯一性的论文问世数年后，其研究便被收录进一部1939年的教科书；该书依据作者1936年在萨拉托夫所作的讲座编写，作者是Ivan Georgievich Petrovsky。



Renato Caccioppoli在莱维-奇维塔家宅。照片来自莱维-奇维塔档案，切凯里尼-西尔伯斯坦家族。

致谢

我们衷心感谢图利奥·莱维-奇维塔的继承人，感谢他们慷慨允许我们在本文中使用Renato Caccioppoli的照片。我们衷心感谢匿名审稿人细致审阅稿件，并提出深思熟虑且富有建设性的批评意见。我们衷心感谢尤利·谢尔盖耶维奇·伊利亚申科提出的许多有益建议，尤其感谢他向我们推荐多布罗沃尔斯基的著作。我们衷心感谢阿列克谢·弗拉基米罗维奇·克利缅科指出彼得罗夫斯基经典教科书不同版本中术语的演变，感谢图利奥·切凯里尼-西尔伯斯坦和毛罗·马里亚尼进行的许多有益讨论，也感谢米哈伊尔·安东诺维奇·博罗维科夫提出的宝贵意见。作者荣获“BASIS”基金会数学与理论物理竞赛奖，并衷心感谢评审团和赞助方。

资助

本研究得到俄罗斯科学基金会资助，项目编号：24-71-10109，
https://rscf.ru/en/project/24-71-10109。

参考文献

[1] И. Г. Петровский，常微分方程理论讲义，莫斯科、列宁格勒：ГОНТИ，技术与理论文献编辑部，1939年，144页。

[2] И. Г. Петровский，常微分方程理论讲义，第7版，
莫斯科：莫斯科国立大学出版社，1984年，296页。[3] P. Hartman，《常微分方程》，约翰·威立父子出版公司，1964年，623页。[4] В. В. Степанов，《微分方程课程》，第5版，莫斯科：Физматгиз，1950年，473页。[5] Л. С. Понтрягин，《常微分方程》，第4版，莫斯科：科学出版社，1974年，331页。[6] ´E. Picard，《关于微分方程理论的回忆录》，《巴黎综合理工学院学报》，1890年，第60卷，第137–204页。[7]E. Lindel¨of，《论逐次逼近法在一阶常微分方程中的应用》，《法国科学院周报》，1894年，第118卷，第454–457页。[8] G.W. Leibniz，《求极大值与极小值的新方法，以及切线问题；该方法不涉及分数或无理量，并为此类问题提供一种独特的计算方法》，《学者纪事》，1684年，第3期（10月），第467–473页。[9] Leonhard Euler，《积分学原理》第一卷，圣彼得堡：帝国科学院，1768年。[10] G. D. Birkhoff, O. D. Kellogg，《函数空间中的不动点》，《美国数学会汇刊》，1922年，第23卷，第96–115页。[11] J. Schauder，《函数空间中的不动点定理》，Studia Math.，1930年，第2卷，第171–180页。[12] A. Tychonoff，《一个不动点定理》，《数学年刊》，1935年，第111卷，第767–776页。[13] Renato Caccioppoli，《函数变换中不动点存在性的一般定理》，《林琴国家科学院会议录》，1930年，第6辑，第11卷，第794–799页。[14] Renato Caccioppoli，《关于函数变换的不动点：边值问题的一则评注》，《林琴国家科学院会议录》，1931年，第13卷，第498–502页。[15] C. Ciliberto, E. S. Del Colombo. Pasquale del Pezzo，卡亚内洛公爵，那不勒斯数学家，《精密科学史档案》，2013年，第67卷，第2期，第171–214页。[16] D. Fowler, E. Robson，《古巴比伦数学中的平方根近似：YBC 7289的背景》，《数学史》，1998年，第25卷，第4期，第366–378页。[17]В. А. Добровольский，《微分方程解析理论发展概论》，基辅：Вища школа，1974年，456页。[18] R. Lipschitz，《论完全积分给定常微分方程组的可能性》，《数学年刊》，1868年，第2卷，第288–302页。.[19] P. Bohl，《关于机械系统在平衡位置附近的运动》，《纯粹与应用数学杂志》，1904年，第127卷，第179–276页。[20] 莫斯科数学会会议，《数学科学进展》，1955年，第10卷，第3期（总第65期），179–192页（俄文）。[21] R. Duda，《失落之城的珍珠：利沃夫数学学派》，（《数学史》丛书，第40卷），美国数学会，2014年，231页。[22] L. E. J. Brouwer，《关于流形映射》，《数学年刊》，1912年，第71卷，第97–115页。

[23] S. Banach, 《抽象集合上的运算及其在积分方程中的应用》, *Fundamenta Mathematicae*, 1922年, 第3卷, 第133–181页。[24] V. Volterra, 《19世纪下半叶意大利的数学》, 载于*Atti del IV Congr.internaz. dei Mat.*, 第I卷, Tipp. Acad. Lincei, 罗马, 1909年, 第55–65页。[25] Yulij Ilyashenko, Sergei Yakovenko, 《解析微分方程讲义》, Graduate Studies in Mathematics, 第86卷, 美国数学会, 普罗维登斯, 罗得岛, 2008年, 625页。[26] A. P. Youschkevitch, 《论"柯西-利普希茨方法"在常微分方程理论中的起源》, *Revue d'histoire des sciences*, 1981年, 第34卷, 第209–215页。[27] Augustin Louis Cauchy, 《常微分方程》, 未刊课程讲义, Charles Gilain作序, Etudes vivantes CNRS, 1981年。[28] Carlo Sbordone, Renato Caccioppoli, 《纪念Renato Caccioppoli诞辰一百周年》。意大利数学联合会通报, 《社会与文化中的数学》, 第八辑, 第VII-A卷, 2004年8月, 193–214页。[29] Lorenza Foschini, 《生命的摩擦: 那不勒斯数学家Renato Caccioppoli考》, La nave di Teseo, 2022年; 英文版: 《生命的摩擦: Renato Caccioppoli生平考》, 施普林格, 2024年。

Alexander I. Bufetov 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所, 俄罗斯莫斯科市古布金街8号, 邮编119991 电子邮箱: bufetov@mi-ras.ru Ilya I. Zavolokin 俄罗斯科学院斯捷克洛夫数学研究所, 俄罗斯莫斯科市古布金街8号, 邮编119991 电子邮箱: tunderavatar@yandex.ru