arXiv:2512.24320v1 [math.AC] 30 Dec 2025

¨Boij-Söderberg 锥中的算术

ADAM BOOCHER、NOAH HUANG 和 HARRISON WOLF

Abstract. 我们研究了关于多项式环上分次模的贝蒂数下界的两个长期猜想。通过将这些猜想重新表述为 Boij-S¨oderberg 锥中的算术问题，我们证明了余维为五和六时这些猜想的一些新情形。在这一框架下，潜在的反例对应于由纯分解的数值性质所产生的显式丢番图障碍。借助数论方法，我们完整分类了余维为三时的这些障碍，揭示了贝蒂表、交换代数与经典丢番图方程之间一些微妙的联系。关于余维为五和六的新结果涉及 Gorenstein 代数；研究这些丢番图方程确定的代数簇，足以解决这一情形下的猜想。

1. Introduction

设 $R = k[x_1, \ldots, x_n]$ 是域 k 上的多项式环， M 是一个有限生成的分次 R-模。两个由来已久的猜想涉及 M 的**贝蒂数** 及其与 c的关系，其中 c是 M 的余维（即 M的湮灭子的高度）。

M主要猜想。 设 R和 M如上，并设 $c = \operatorname{codim} M$。那么
(1) $\beta_i(M) \geq \binom{c}{i}$, **(2)** 若 M不是（同构于）完全交，则 $\sum \beta_i(M) \geq 2^c + 2^{c-1}$。

我们将在第 2 节简要回顾这些猜想的历史，此处先指出，当 $c \geq 5$时，这些猜想仍未解决。本文的首个主要结果在假设 $M = R/I$ 定义一个 Gorenstein环的前提下，证明了这些猜想的一些新情形。

定理 1. 设 $M = R/I$ 是余维为 c的 *Gorenstein*环，且不同构于完全交。

- 若 $c = 6$，则猜想 (1) 对 $i = 0$、1、2、4、5、6 成立，无需对 M作任何进一步假设。
- 在附加假设 M 是纯的条件下，若 $c \in \{5, 6\}$，猜想 *(2)* 成立；若 $c = 5$，猜想 *(1)* 成立。

若模 M 是 Cohen-Macaulay 模，且对所有 $i \geq 0$，其第 i 个上同调模由单一次数 d_i中的元素生成，则称其为纯模。我们将其次数序列记为$\{0, d_1, \ldots, d_c\}$[1]. 根据 [16], 的一个结果，这类模的贝蒂数存在一个（几乎）公式（即所谓的 Herzog-K¨uhl 方程 2.1）。事实上，对每个 D，都存在一个整数列表 $B(D)$，使得若 M 是次数序列为 D 的纯模，则其贝蒂数列表$\beta(M)$ 满足 $\beta(M) = LB(D)$，其中某个整数为 L。

Exa例 2. 设 M 是一个纯模，其 $c = 3$，且次数序列为 D。
(1) 若 $D = \{0, 2, 3, 8\}$，则 $B(D) = \{5, 20, 16, 1\}$，因此 $\beta(M) = \{5L, 20L, 16L, L\}$
(2) 若 $D = \{0, 1, 3, 4\}$，则 $B(D) = \{1, 2, 2, 1\}$，因此 $\beta(M) = \{L, 2L, 2L, L\}$。

请注意，这两个例子的数值情况从根本上不同。对于第一个例子，无论 L 是什么， $B(D)$ 都“足够大”，足以确保 M 同时满足两个猜想。

[1]不失一般性，取 $d_0 = 0$

另一方面，在第二个例子中， $B(D)$ 本身就违反了两个猜想的界限。出现这种情况时，我们称 D 是该猜想的**算术障碍**。换句话说，如果 $L = 1$ ，那么 $\beta(M) = B(D)$ 将违反这些猜想。因此，要证明这样的模 M 确实满足该猜想，就必须证明 L 不可能为 1。在这种情况下，这很容易，因为这样的模的极小自由分解开头是 $R^2 \to R^1 \to M$ ，显然接下来有 $M \cong R/I$ ，其中 I 是由 2 个极小生成元生成的理想；根据 Krull 高度定理，高度为 $c = 3$ 的理想不可能如此。

原则上，解决主猜想的一种方法是对所有算术障碍进行分类，然后排除相应的较小 L 值。事实上，我们无需对所有障碍进行分类（我们正是通过在余维 5 和 6 中进行这样的分析，证明了定理1）。与此同时，在余维 3 中，完全分类所有障碍是可能的：

定理3。若 $c = 3$ 则

- 存在**无穷多个**主猜想 *(1)* 的算术障碍。这些障碍在定理*15* 中有明确描述，且均满足 $B_1 = 2$ 或 $B_2 = 2$。
- 关于主猜想 *(2)*，恰有**4 个**次数序列 D 满足$\sum B（D） < 12$。这些序列在定理*21*中有明确描述。

若 M 是一个非完全交纯模，且其次数序列 D 是上述有问题的序列之一，那么在方程 $\beta（M） = LB（D）$ 中， L 必须至少为 *2*，这便重新说明了主猜想在此情形下成立。

综合上述定理，我们初步证明了这一框架有助于深入探讨上同调子模的秩相关问题。

从 Boij-S¨oderberg 理论的角度来看（例如参见 [3, 10, 11]），余维为 c 的 Cohen-Macaulay 模的所有 Betti 表都位于一个单纯锥中，其极端射线对应于纯模。若 ρ_D 是对应于次数序列D 的极端射线，那么， $B(D)$ 给出了该射线上最小整数点的坐标，而 Herzog-K¨uhl 定理断言，类型为 D 的任意纯模的每个 Betti 表都将位于 ρ_D 上，且为 $B(D)$ 的整数倍。我们的方法在精神上与 [12],所开创的方法相似，因为尽管计算 $B(D)$ 很直接，但要判断数值 $B(D)$ 是否确实是某个模的贝蒂数，可能相当困难。

由于 Boij S¨oderberg 锥的数值性质相当微妙，我们发现纯模是检验主要猜想的绝佳试验场。当 $1 \cdot B(D)$ 符合这些界限时，这为猜想提供了有趣的正面证据；若不符合，则会引导我们尝试理解对于哪些 L， $L \cdot B(D)$ 才能成为某个模的贝蒂数列。

为了 系统地研究一般情形，我们提出如下问题。

Program 4. 设 c 是一个正整数。

(1) 找出具有如下性质的次数序列 $D = \{0, d_1, \ldots, d_c\}$: $B(D)$ 违反主猜想 *(1)* 或 *(2)*。我们称这些为**算术障碍**。(2) 回顾一下，若 M 是类型为 D 的纯模，则对于某个整数 $L \geq 1$，有 $\beta(M) = LB(D)$。证明：若 M 是贝蒂数列为 $L\beta(D)$ 的纯模，则 L 必须足够大，使得 $\beta(M)$ 满足被 $B(D)$违反的猜想。

当 $c \in \{1, 2\}$ 该程序是平凡的，且定理 3 解决了 $c = 3$ 的情形。对于$c \geq 4$ 该程序似乎相当困难（例如，参见第 3.1 节中的讨论），我们希望相邻领域的技术能够有所帮助。

这有什么意义? 如果将定理3 视为验证在 $c = 3$时主要猜想某个特殊情形的一种新方法，那么这或许没那么有趣。毕竟，两者

早已知道，对于任意余维为 $c \leq 4$的模，猜想都成立。然而，计划4 有许多值得称道、值得更仔细研究的特点。

- 尽管我们无法在最一般的情形下完成计划4 ，但对于 $c \geq 4$，这一通用方法足以解决余维 5 和 6 的若干新情形中的主要猜想（见定理 1）。事实上，本文最后一节表明，即使不可能对障碍进行完整分类，仍然可以解决主要猜想。

- 步骤 (1) 中的分类需要求解丢番图方程（组），这是一项出了名的棘手工作。随着 c 增大，这些方程组的解将呈现何种规律，完全无法预料。

  例如，当 $c = 2$ 时，我们必须求出下列方程的整数解：

$$yz = 2(y - x)(z - x).$$

  我们首先求出有理数解，以此解决这个问题。对于任意c ，这一步都可以完成（见定理 17）；但求出整数解则依赖于证明过程中出现的一些巧合，它们将问题化归为求解佩尔方程，而佩尔方程有无穷多个解。

  对于 $c = 3$ ，需要研究的众多方程之一是：

$$yzw = 3(y - x)(z - x)(w - x).$$

  我们不知道是否存在无穷多个满足 $0 < x < y < z < w$ with gcd$(x, y, z, w) = 1$ 的解。虽然这与我们的情形并不完全相关，但我们指出，许多椭圆曲线都有无穷多个有理点，却始终只有有限个整数点。这里的丢番图方程组是否也遵循类似的规律?

- 虽然 $c = 3$ 情形涉及的数论是经典的，且只用到佩尔方程，但要完成该计划的步骤（2），必须运用一些相当精深的交换代数。要验证 $\beta_1, \beta_2 \geq 3$ 可以借助主理想定理。然而，关于主要猜想（2），次数序列 $D = \{0, 3, 5, 8\}$ 有 $B(D) = \{1, 4, 4, 1\}$，而 $D' = \{0, 1, 5, 6\}$ 有 $B(D') = \{2, 3, 3, 2\}$，这两者都违背了猜想 2。要排除这些情形，需要一些更有力的工具，例如 D 可以利用几乎完全交绝不会是 Gorenstein 这一事实来处理 [17]。对于 D'，我们可以利用这样的事实：任何具有 2×3线性表示矩阵的模 M都必须具有二次 Buchsbaum-Rim syzygy；也可以利用 $\beta_1(M) \geq \beta_0(M)+(c - 1)$ 这一事实。关于这两种方法，参见 [5]。或者，也可以使用 Syzygy 定理[14]。

简而言之，我们认为这件事之所以有趣，是因为这些算术问题值得仔细研究，而它们的解决很可能会带来一些有趣的贝蒂数候选，这些候选将需要运用交换代数中的技术加以处理。

最后，我们展示了计算机搜索得到的一些引人入胜的数据，这些数据引出了以下问题。如果一个次数序列的一阶差分是对称的，我们就称其为自对偶。值得注意的是，哪些自对偶度数序列可能成为一个非完全交 Gorenstein环的次数序列。显然， $B_0(D)$ 必须等于 1，并且由于几乎完全交从来不是 Gornstein [17], ，我们需要 $B_1(D) \geq c + 2$。

问题 5。 对于哪些 c ，存在一个具有如下性质的自对偶次数序列 D： $B(D)$ 具有 $B_0(D) = 1$ ，并且 $B_1(D) \geq c + 2$ ，从而违反主猜想 (1) 或 (2)?

通过计算，我们找到了 $c = 15$、19、25 的例子。这些例子可能引出如下问题：

问题 6。 是否存在一个 Gorenstein代数 R/I，其分解如下?

0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 1 85 630 2295 4998 6630 4590 2210 2210 4590 6630 4998 2295 630 85 1 0 : 1 .1 : . 85 630 2295 4998 6630 4590 . . . . . .2 : . . . . . 2210 . . . . . .3 : . . . . . 2210 . . . . . .4 : . . . . . 4590 6630 4998 2295 630 85 .5 : .1

这样的例子会同时违反猜想 (1) 和 (2)。这是我们目前发现的、无法用上述技术排除的最小对称次数序列。如果不要求 M 是循环模，那么我们可以进一步询问，是否存在一个 Cohen-Macaulay 模，其分解为

	0	1	2	3	4	5	6	7	8
total:	4	25	60	60	42	60	60	25	4
0 :	4	25	60	60	.	.	.	.	. .
1 :	.	.	.	.	42	.	.	.	.
2 :	.	.	.	.	.	60	60	25	4

这一 Betti图见于第一作者与 Grifo 合著的综述文章 [2]。鉴于两个猜想在 $c = 3$ 时表现出看似不同的行为，我们提出以下问题。

问题 7。设 $c \geq 4$。

- 与余维 3 的情形类似，是否存在无穷多个长度为 c、违反主猜想 (1) 的次数序列? 如果将问题细化为同时考虑指标 i，答案会有所不同吗?
- 类似地，违反主猜想 (2) 的次数序列是否只有有限多个?
- 需要哪些交换代数中的障碍条件，才能确保 L 足够大?

问题 8。如果结果表明，对某些（或大多数? ） c 而言，算术障碍只有有限多个，那么对这样的 c，令 λ_c 表示任何反例的最大末端指标 d_c D。数列集合 λ_c的渐近行为如何?

2. Background and History

主要猜想的简要历史： 关于猜想 (1) 和 (2) 的详细历史，请参阅文献 [2]。这里我们简要概述一下，旨在说明这两个猜想之间的联系。Horrocks [15]和 Buchsbaum-Eisenbud [6] 分别独立地首次针对循环模 R/I提出了主猜想 (1)。后者实际上猜想 R/I 的极小自由分解应具有 DG 代数结构，并通过与 Koszul复形比较，推出界限 $\beta_i \geq \binom{c}{i}$ 。Avramov [1] 否定了这一关于代数结构的更强论断，但此处所述的主猜想 (1) 仍然成立。这一形式通常称为 Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks秩猜想。该猜想在许多特殊情形下已得到证明，但当 $c \geq 5$时，一般情形仍未解决。

直到最近，还存在一个“中间”猜想，即 $\sum \beta(M) \geq 2^c$，称为总秩猜想。Walker [20] 在 k 的特征不为 2 的情形下证明了该猜想，VandeBogert-Walker [19] 则解决了剩余情形。作为他们工作的组成部分，他们证明了等号成立当且仅当 M 是完全交。因此，主要猜想（2）的内容是：在 2^c 之后，下一个可能的总秩为 $2^c + 2^{c-1}$。

当 $c \leq 4$时， M 的最小可能贝蒂数已为人所知。这里所说的最小，指由逐项不等式确定的偏序集中的极小元素。这一分类见于 [9]，其中他们指出，总和总是至少为 2^c+2^{c-1}；唯一的例外是 M 同构于完全交的情形，这正是我们的主要猜想（2）。与此同时， [8, 7]也得到了多分次阿廷模的相同结论。此后，主要猜想（2）已在其他若干情形下得到验证。值得注意的是，在这些结果中，界 $2^c + 2^{c-1}$ 都以不同形式出现。例如，在多分次阿廷情形下，如果 R/I 不同构于完全交，那么 $\beta_i(R/I) \geq \binom{c}{i}+\binom{c-1}{i}$，因此对 i求和即可得到该界。一般而言，这并不成立（即使对单项式理想 I，只要 R/I 不是阿廷模也不成立！），但尽管如此，另一个独立论证仍验证了这一一般单项式情形下的主要猜想（2） [3]。类似地， [4]讨论了一种相当奇特的行为：如果模 M 的正则性足够低，那么大致而言，前一半的贝蒂数 $\beta_1, \beta_2, \ldots \beta_{c/2}$ 满足 $\beta_i \geq 2\binom{c}{i}$，而后一半则满足 $\beta_i \geq \binom{c}{i}$；这一结果来自Erman的早期工作 [13]。因此，粗略地说，每个贝蒂数的平均值至少为 $1.5\binom{c}{i}$，总和因而至少为 $1.5 \cdot 2^c$，而这恰好就是 $2^c + 2^{c-1}$。 [18] 对Koszul几乎完全交情形下的Betti 表所作的分类，也验证了主要猜想（2）。

相关的 Boij-Sderberg 背景： 本文中，当我们说**纯模**时，指的是一个 Cohen-Macaulay 模 M，其第 i个上同调模由单一次数 d_i生成。若 c 是 M 的余维，则对于 $i > c$有 $d_i = 0$。如有必要，经过移位后，我们假设 M 由次数 0 生成。因此，对于这样的模 M，我们将其与严格递增的**次数序列** $D = \{0, d_1, \ldots, d_c\}$关联起来。稍微滥用一下术语，我们称 D 为余维为 c 的次数序列。根据 [16] 的一个结果，对于 $i > 0$，贝蒂数 $\beta_i(M)$由下式给出

$$\beta_i(M) = \beta_0(M) \prod_{i \neq j} \frac{d_j}{|d_i - d_j|}. \tag{2.1}$$

数 $\pi_i(D) := \prod_{i \neq j} \frac{d_j}{|d_i - d_j|}$ 因此是理解贝蒂数$\beta_i(M)$的关键。（按定义，令 $\pi_0 = 1$。）注意，由于 $\pi_i(D)$的公式具有齐次性，若 $\lambda \in \mathbb{Z}$，则 $\pi_i(\lambda D) = \pi_i(D)$。因此，我们只关注满足最大公因数$(D) = 1$的 D。我们称这样的 D 为非退化的；除非另有说明，任何旨在找出具有给定性质的所有 D 的陈述，都将只寻找非退化的对象。

我们可以将元组 $\pi(D) := (1, \pi_1(D) \ldots, \pi_c(D))$ 看作 $\mathbb{Q}^{c+1}$ 中的一个向量。于是$\beta_i(M) = \beta_0(M) \cdot \pi_i(D)$。我们有时会提到有理数 $\pi_i(D)$，但由于归根结底贝蒂数是整数，我们也将 $B(D)$ 定义为向量 $(1, \pi_i(D) \ldots, \pi_c(D))$ 中落在 $\mathbb{Z}^{c+1}$ 内的最小正整数倍，并将其第 i 个分量记作$B_i(D)$，其中 $i = 0, \ldots, c$。我们注意到，我们所称的 $B(D)$，正是通过调用 `pureBetti D` 得到的 Macualay2 软件包 BoijS¨oderberg 的输出。因此，如果 M是任意一个次数序列为 D 的纯模，那么对于某个正整数 L，有 $\beta_i(M) = L \cdot B(M)$。注意， L 取决于 M。我们通常会省略这一依赖关系，因为我们感兴趣的是考察所有 M，并为 $\beta_i(M)$ 寻找一个界，因此我们将考察 L可能取哪些值。

最后，我们指出，任何次数序列为 D 的纯模 M 的对偶 M^* 也是纯模，其次数序列为

$$D^* := \{0, d_c - d_{c-1}, d_c - d_{c-2}, \ldots, d_c - d_1, d_c\}.$$

例9. 如果 $D = \{0, 3, 4, 8\}$ 那么 $\pi(D) = \{1, 32/5, 6, 3/5\}$，并且 $B(D) = \{5, 32, 30, 3\}$。任何具有此次数序列的纯模 M 都将具有贝蒂数 $\beta_i(M) = LB_i(D)$

对于某个 L。 $D^* = \{0, 4, 5, 8\}$ 并且具有 $B(D^*) = \{3, 30, 32, 5\}$。下面展示贝蒂图：

$B(D)$

	0	1	2	3
0	3	.	.	.
1	.	.	.	.
2	.	.	.	.
3	.	30	32	.
4	.	.	.	.
5	.	.	.	5

$B(D^*)$

	0	1	2	3
0	5	.	.	.
1	.	.	.	.
2	.	32	30	.
3	.	.	.	.
4	.	.	.	.
5	.	.	.	3

文献 [11, 10] 证明了，对于任意次数序列，都存在纯模。也就是说，对于某个 L，存在一个模 M，其贝蒂数为 $\beta_i(M) = LB_i(D)$。这类模有明确的构造方法，但这些构造通常会导致 L 的值相当大，远非可能的最小值。例如，可以使用 Macaulay2 命令 `pureAll` 找出 $\beta_0(M)$ 的三个可行具体取值。在前面的例子中，这些数值是 35、175 和 10，因此我们特别看到，存在一个模 M，其贝蒂数为 $\beta_i(M) = \{10, 64, 60, 6\}$，或者在我们的例子中为 $L = 2$。不过，实际上存在一个满足 $L = 1$ 的模；通过使用命令 `randomModule`、 `randomSocleModule` 在 Macaulay2 中进行一些尝试，就可以找到它。作为比较，对于问题 6 中余维为 15 的次数序列，我们要问的是 $L = 1$ 是否可行。已知构造给出的界为 $L = 18240$。

最后，由于这两个引理在本文后续部分很有用，我们在此列出，以便后续章节的行文更加清晰流畅。

引理 10. 设 D 是任意长度为 c 的次数序列，且令 $B = B(D)$。则

(1) $B_0 - B_1 + \cdots + (-1)^c B_c = 0$.(2) </style}偶数指标 对应项之和等于奇数指标 对应项之和。(3) 所有 B_i 之和为偶数： $\sum B_i = 2s_{odd}$。

证明。 (2) 和 (3) 由 (1) 立即推出；(1) 可以通过利用 $\pi(D)$ 的公式计算验证，也可以根据以下事实得到：如果 M 是余维为 M 的 Cohen-Macaulay 模，那么若 M 是 M 的阿廷约化，则 M 将具有有限长度，因此作为一个模，其秩为 0。注意， M 和 M 的贝蒂数相同。因此，根据 Herzog-Kühl 方程，我们有

$$0 = \operatorname{rank}(M) = \sum_{i=0}^{c} (-1)^i \beta_i(\overline{M}) = \sum_{i=0}^{c} (-1)^i \beta_i(M) = \sum_{i=0}^{c} (-1)^i L \cdot B_i(D)$$

对于某个正整数 L。将结果除以 L 即得。 □

命题 11。 假设 $D = \{0, d_1, \ldots, d_c\}$ 是一个次数序列。那么

(1) $\pi_1(D) > 1$; (2) $B_1(D) > B_0(D)$;

(3) 若 $B_1(D) = 2$ 则 $B(D) = \pi(D)$。

证明。 在通分之前，我们看到

$$\pi_1(D) = \frac{d_2 \cdots d_c}{(d_2 - d_1) \cdots (d_c - d_1)} = \frac{d_2}{d_2 - d_1} \cdots \frac{d_c}{d_c - d_1} > 1 \cdots 1 = 1$$

这就证明了（1）。现在，若 $\pi_1(D)$ 写成最简形式 P/Q，那么根据（1）中的结论，我们有 $P > Q$。通分时必须乘以某个数，使得 $\pi(D)$ 是 Q 的倍数，因此我们有 $Q|B_0(D)$，设为 $B_0(D) = QR$。于是 $B_1(D) = PR > QR = B_0(D)$，这就证明了（2）。沿用这一记号，现在假设 $B_1(D) = 2$。那么，由于

$$2 = PR > QR \geq 1$$

唯一的可能性是 $Q = R = 1$，因此 $B_0(D) = 1$，且 $B(D) = \pi(D)$，证明完毕。□

3. Codimension 3 Degree Sequences with B_1 or B_2 equal to 2

在本节中，我们假设 $D = \{0, x, y, z\}$ 是一个余维 3 的次数序列。本节的目标是完成主猜想 (1) 的计划 4，其中 $c = 3$。换言之，我们要找出所有满足 D 的 $B(D)$ 不至少为 $\{1, 3, 3, 1\}$的情形。必要时取对偶后，这里的主要内容是理解何时 $B_1(D) = 2$. 根据命题 11，我们知道 $B(D) = \pi(D)$。因此，我们的目标是求解

$$2 = \frac{yz}{(y-x)(z-x)},$$

或等价地

$$2(y-x)(z-x) = yz. \tag{3.1}$$

设 x_0、y_0、z_0 为整数。我们的目标是确定何时（x_0、y_0、z_0）是方程3.1的一个解。注意，由于齐次性，若 $z_0 \geq 0$，则（x_0、y_0、z_0）是一个解，当且仅当（x_0/z_0、y_0/z_0、1）是一个解。因此，我们要找出满足 $z = 1$ 的方程的所有有理数解：

$$2(y-x)(1-x) = y. \tag{3.2}$$

注意，点 $P = (0, 0, 1)$ 是这样一个解，也是满足 $x = 0$ 的唯一解。若 $Q = (X_0, Y_0, 1)$ 是另一个有理解，那么连接 P 和 Q 的 xy 平面中的直线可表示为 $y = (Y_0/X_0)x$，其斜率为有理数。反过来，任何一条经过 P 且斜率为有理数的直线 m，与由方程 3.2 给出的平面曲线 C 至多还会相交于另一点 Q；该点的坐标必为有理数 $(X_0, Y_0, 1)$，且满足 $Y_0/X_0 = m$。

求解 Q 意味着求直线与曲线 C 的交点，由此得到方程

$$2(mx - x)(1 - x) = mx,$$

化简后得到

$$x((2 - 2m)x + m - 2) = 0.$$

若 $m = a/b$（其中 $\gcd(a, b) = 1$），则可得 Q 的坐标为：

$$\left(1 + \frac{a}{2(b-a)}, \frac{a}{b} + \frac{a^2}{2b(b-a)}, 1\right) = \left(1 + \frac{a}{2(b-a)}, \frac{a(2b-a)}{2b(b-a)}, 1\right).$$

这一描述完整地参数化了 C 上的所有有理点。要确定整数解，我们必须求出能消去方程 3.1 中分母的所有倍数。为此，首先需要将这些分数化为最简形式。

注意，$\gcd(a, b-a) = \gcd(a, b) = 1$ 且 $\gcd(2b-a, b-a) = \gcd(2b-a, b) = \gcd(a, b) = 1$，因此如果存在公因子，它们一定是分母中的 2。换句话说，这些分数要么已经是最简形式，要么我们可能需要约去一个因子 2，之后它们就会成为最简形式。

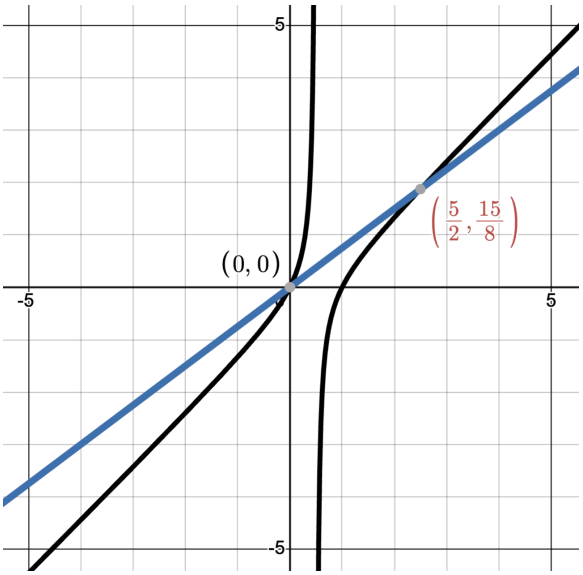


FIGURE 1. $2(y-x)(1-x) = y$的图像。有理点由经过 (0,0) 且斜率为有理数的直线参数化，对应于方程3.1的整数解。

情况1： a是奇数。在这种情况下，两个分数的分子都是奇数，因此该分数是最简形式。

情况2： a 是偶数，设为 $a = 2A$。注意，由于 $\gcd(a, b) = 1$，我们必须有 b 为奇数。然后约去因子 2 后，得到最简形式的表达式：

$$\left(1 + \frac{A}{(b-2A)}, \frac{A(2b-2A)}{b(b-2A)}, 1\right).$$

由于这些表达式涉及最简形式的分数，我们可以通分以对整数解进行分类。这证明了以下命题。

命题12. 满足方程 (x_0, y_0, z_0) *3.1* 且满足 $z_0 \neq 0$ 的整数解是以下各项的整数倍：

(类型1) $(b(2b-a)\ a(2b-a)\ 2b(b-a))$，其中 a 为奇数，且 $\gcd(a, b) = 1$。*(类型2)* $(b^2 - Ab, A(2b-2A)\ b(b-2A))$，其中 b 为奇数，且 $\gcd(a, b) = 1$。

下一个结果至关重要。

定理 13. 若 $D = \{0, x_0, y_0, z_0\}$ 是一个次数序列，且 $B_2(D) = 2$ 则 $z_0 = y_0 + 1$。

证明。 我们将用到这样一个事实： $B(D) = \pi(D)$ 的所有项都是整数，也就是说，$B_2 = \pi_2(D)$ 也必须是整数，因此我们有

$$\frac{xz}{(y-x)(z-y)} \in \mathbb{Z}$$

对于上述所有解，将它们代入其中，可得类型1：

$$\begin{aligned}\frac{xz}{(y-x)(z-y)} &= \frac{b(2b-a)2b(b-a)}{(a(2b-a)-b(2b-a))(2b(b-a)-a(2b-a))} \\ &= \frac{-2b^2}{2b^2+a^2-4ab}.\end{aligned}$$

这个分数必须是整数，因此分母必须是分子的因子。我们将证明，分母实际上是 ± 1。由于分母是奇数（因为 a 是奇数）， b^2 必定能被分母整除，因此设 $-2b^2 = \ell(2b^2 + a^2 - 4ab)$

对于某个整数 ℓ。由于 a 和 b 互素，因此 ℓ 必定是 b的倍数。约去这个因子 b 后，我们得到方程 $-2b = \ell'(2b^2 + a^2 - 4ab)$，其中 ℓ' 是某个整数；同样可以看出，它是 b的倍数。约去后，我们得到方程 $-2 = \ell''(2b^2 + a^2 - 4ab)$，其中 ℓ''是某个整数。除以 ℓ'' 后，我们得到

$$2b^2 + a^2 - 4ab = \frac{-2}{\ell''}.$$

左边是一个奇整数，因此必定是 ± 1。我们已经证明了 $2b^2 + a^2 - 4b = \pm 1$。注意，这恰好就是 $z_0 - y_0 = \pm 1$ 的条件。

在另一种情况下，我们得到

$$\frac{xz}{(y-x)(z-y)} = \frac{(b^2 - Ab)(b(b-2A))}{(A(2b-2A) - b^2 + Ab)(b(b-2A) - A(2b-2A))}$$
$$= \frac{-b^2}{2A^2 - 4Ab + b^2}.$$

类似地分析，在这种情况下利用 b 是奇数这一点，我们看到 $2A^2 - 4Ab + b^2 = \pm 1$，因而 $z_0 - y_0 = \pm 1.$。无论哪种情况，由于 D 是一个次数序列，$z_0 > y_0$，结论遂得证。□

注 14. 我们注意到，这个结果坦白说近乎奇迹。倘若并非如此，我们在尝试消去分母时恐怕会相当棘手。例如，在余维 4 的情形下，我们找到了以下具有 $B_1(D)$ 的 D 示例 $= 2$。注意，$D_c - D_{c-1} = 1$ 并**非** 总是成立。目前我们尚不清楚，是否可以像 $c = 3$ 情形那样，预期存在无穷多个此类 D。困难在于，若尝试像刚才那样消去分母，就会出现四个数 a_1，b_1，a_2，b_2，它们分别表示参数化中所用“斜率”的分子和分母。不能假设例如 a_1 和 b_2 互素，因此分析会变得相当棘手。此外，即便能够做到这一点，下一步也要寻找一个三次丢番图方程的整数解，而我们不知道该如何着手。我们希望数论和算术几何等相邻领域的专家能对这一现象有所见解。

D	$B(D)$
$(0, 1, 4, 5, 6)$	$(1, \boxed{2}, 5, 6, 23)$
$(0, 3, 13, 15, 16)$	$(1, \boxed{2}, 12, 26, 15)$
$(0, 9, 42, 44, 45)$	$(1, \boxed{2}, 90, 243, 1543)$
$(0, 20, 95, 96, 100)$	$(1, \boxed{2}, 512, 625, 114)$
$(0, 35, 168, 170, 171)$	$(1, \boxed{2}, 1275, 3724, 2450)$

现在我们能够证明主要结果。

定理 15. 余维为3 且满足 $B_1(D) = 2$ 的次数序列 D 构成一个无限族。它们均具有如下形式 $\{0, x_n, y_n, y_n + 1\}$，其中 $n \geq 1$ 的 x_n、y_n 由以下公式递归给出：

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

证明。 假设 $D = \{0, x, y, z\}$ 是一个次数序列，满足 $B_1(D) = 2$。根据命题11，我们知道 $B_1(D) = \pi(D)$，因此得到以下等式：

$$2(y-x)(z-x) = yz.$$

根据定理 13，我们知道 $z = y + 1$。代入并整理后，得到

$$y^2 + y - 4xy = -2x^2 + 2x.$$

配方法后，得到:

$$(y - 2x)^2 + y = 2x^2 + 2x,$$

$$(y - 2x)^2 + (y - 2x) = 2x^2.$$

令 $w = y - 2x$，再次配方法后，我们得到

$$(w + \frac{1}{2})^2 = 2x^2 + \frac{1}{4},$$

$$(2w + 1)^2 = 2(2x)^2 + 1.$$

令 $v = 2w + 1, u = 2x$，得到一个佩尔方程

$$v^2 = 2u^2 + 1.$$

无穷多个该方程的解 v_n, u_n 可通过比较系数得到:

$$(3 + 2\sqrt{2})^n = v_n + u_n\sqrt{2}.$$

这得到如下递推关系

$$\begin{aligned} v_{n+1} + u_{n+1}\sqrt{2} &= (3 + 2\sqrt{2})(v_n + u_n\sqrt{2}) \\ &= (3v_n + 4u_n) + (2v_n + 3u_n)\sqrt{2}. \end{aligned}$$

因此

$$\begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix}. \tag{3.3}$$

注意到 $x = u/2$ 和 $y = u + v/2 - 1/2$，我们令 $A = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 \\ 1 & 1/2 \end{bmatrix}$，然后注意到

$$A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix}.$$

现在从方程 3.3 出发，我们得到:

$$\begin{bmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} A^{-1} \left(A \begin{bmatrix} u_n \\ v_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= A \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} A^{-1} \left(\begin{bmatrix} x_n \\ y_n \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix} \right) + \begin{bmatrix} 0 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -4 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_n \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

由此我们证明了如果 $B_1(D) = 2$，那么 D 必定具有所需的形式。然而，我们仍需证明，这种形式的 D 确实满足 $\pi(D) = B(D)$。我们在下面的引理中证明这一点。□

引理 16. 固定 $n \geq 1$ 并按照前一个定理中的记号设定 $D = \{0, x_n, y_n, y_n + 1\}$，则 $B(D) = \pi(D) = \{1, 2, y_n - 2x_n + 1, y_n - 2x_n\}$.

证明。为简便起见，我们将省略 x, y中的下标。在前一个定理的证明中，我们已经证明了 $\pi_1(D) = 2$，也就是说

$$y^2 + y - 4xy = -2x^2 + 2x. \tag{3.4}$$

还需证明 $\pi_2(D)$ $\pi_3(D) \in \mathbb{Z}$。由于

$$1 - \pi_1(D) + \pi_2(D) - \pi_3(D) = 0$$

一旦我们证明 $\pi_2(D) = y - 2x + 1$，或证明

$$\frac{x(y+1)}{(y-x)\cdot 1} = y - 2x + 1.$$

这等价于方程 3.4。 □

3.1. 向更高余维的推广。 本节最后简要讨论哪些内容可以（以及哪些不能）推广到任意余维。一般而言，若要寻找满足 D with $B_i(D) = \alpha$ 且 $B_0(D) = L$ 的次数序列，就需要求解由 Herzog-K¨uhl 方程导出的某个丢番图方程的整数解。好消息是，寻找有理数解可以采用本节开篇所用的相同方法。

定理 17。 假设 $D = \{0, d_1, d_2, \ldots, d_c\}$。固定一个指标 i。对于某些正整数 α、L，满足 $B_i(D) = \alpha$ 且 $B_0(D) = L$ 的条件，等价于求方程的整数解 $x_1 < x_2$、$\ldots < x_c$：

$$Lx_1 \cdots \widehat{x_i} \cdots x_c = \alpha(x_i - x_1) \cdots \widehat{(x_i - x_i)} (x_{i+1} - x_i) \cdots (x_c - x_i).$$

整数解（z_1，……，z_c）都是如下形式的有理解的倍数：（q_1，……，q_{c-1}，1）。通过考察经过原点（0，……，0，1）且斜率为有理数的直线，可以对该方程的解进行参数化。每条这样的直线都与该方程定义的代数簇相交于次数为 $c-2$ 的原点。

证明。证明很直接。令 S 为由定理陈述中的方程（其中 $x_c = 1$）定义的超曲面。对 $\mathbb{Q}^{c-1}$ 中经过原点的有理直线 $r(t)$ 进行参数化。这里的意思是作如下参数化：

$$r(t) = (m_1 t, \ldots, m_{c-1} t)$$

其中 m_i 为某些有理数。S 上的任意有理坐标点都必定位于某条这样的直线上。为说明逆命题，假设 P 是位于某条有理直线上的一点，该直线由 $r(t)$ 参数化。那么，P 必须是 t 中关于 $c-1$ 次方程的一个解；该方程是将 $r(t)$ 的坐标代入 S 的方程后得到的，即：

$$Lm_1 t \cdots \widehat{m_i t} \cdots m_{c-1} t =$$

$$\alpha(m_i t - m_1 t) \cdots \widehat{(m_i t - m_i t)} (m_{i+1} t - m_i t) \cdots (m_{c-1} t - m_i t)(1 - m_i t).$$

可以看出，t^{c-2} 是等式两边的一个因子，因此原点是一个重数为 $c-2$的根。约去这个因子后，求解 t（从而求出 P的坐标）只需解一个线性方程。因此，P 的坐标必为有理数。□

注 18. 回想一下，当我们对 $c = 3$进行这些计算时，得到的是取决于斜率 $m = a/b$的有理参数化，因此有两个参数 a 和 b：

$$\left(1 + \frac{a}{2(b-a)}, \frac{a(2b-a)}{2b(b-a)}, 1\right).$$

定理 17 的内容表明，这可以在任意余维下完成。然而，如果想要得到 **整数** 解，就必须消去分母。在余维 3

的情形中，我们相当幸运，因为这些分数基本上都已是最简形式，所以只需乘以分母就能消去分数。这是因为有一个有用的假设：我们可以假设 $\gcd(a,\ b) = 1$，因为我们本来就可以将分数$m = a/b$ 取为最简形式。在高余维下，我们会有许多分数 $m_i = a_i/b_i$；虽然可以假设 $\gcd(a_i,\ b_i) = 1$，但一般来说，例如，a_3和 b_2 可能有一个公因子。下面的例子说明了可能出现的情况。

例19。若 $c = 4$，且我们想找出满足 $B_2(D) = 4$ 且$B_0(D) = 1$ 的那些次数序列，那么我们将求解方程

$$yzw = 2(y - x)(z - x)(w - x).$$

令 $w = 1$，并用 $r(t) = (m_1t,\ m_2t,\ m_3t)$ 参数化。不失一般性，由于我们关注的是非零解，可以通过令任意一个 $m_i = 1$ 来重新参数化。若令 $m_i = a_i/b_i$，则得到：

$$(\frac{a_2a_3}{b_2b_3})t^2 = 2(\frac{a_2}{b_2}t - t)(\frac{a_3}{b_3}t - t)(1 - t)$$

$$a_2a_3 = 2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)(1 - t)$$

$$t = 1 - \frac{a_2a_3}{2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}.$$

那么我们的解为

$$(x, y, z, w) = \left(t, \frac{a_2}{b_2} \cdot t, \frac{a_3}{b_3} \cdot t, 1\right) =$$

$$\left(1 - \frac{a_2a_3}{2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, \frac{a_2}{b_2} - \frac{a_2^2a_3}{2b_2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, \frac{a_3}{b_3} - \frac{a_2a_3^2}{2b_3(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, 1\right) =$$

$$\left(1 - \frac{a_2a_3}{2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, \frac{a_2(a_2a_3 - 2a_3b_2 - 2a_2b_3 + 2b_2b_3)}{2b_2(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, \frac{a_3(a_2a_3 - 2a_3b_2 - 2\,a_2b_3 + 2b_2b_3)}{2b_3(a_2 - b_2)(a_3 - b_3)}, 1\right).$$

注意，若 $m_2 = 13/3$ 且 $m_3 = 5/1$，那么第一个分数不是最简形式，因为$a_2 - b_2 = 10$ 与 a_3有公因子。这是求出所有整数解时需要处理的问题。

4. Codimension 3 Degree Sequences with $\sum B_i < 12$

现在我们转而研究那些次数序列 D，它们的余维为 3 且违反主要猜想（2），也就是说 $\sum B(D) < 12$。我们将全程手工计算，并使用上一节的结果。在第5 节中，我们将展示如何把这类方法推广到其他情形。

引理 20。对于任意余维为3的次数序列 D，

$$\sum B(D) \geq 2B_0(D) + 2B_3(D) + 2.$$

特别地，

- 若 $B_0(D) \geq 4$，则 $\sum B(D) \geq 12$;
- 若 $B_0(D) = 3$，则 $\sum B(D) \geq 12$，除非 $B_3(D) = 1$;
- 若 $B_0(D) = 2$，则 $\sum B(D) \geq 12$，除非 $B(D) = \{2, 3, 3, 2\}$ 或 $B_3(D) = 1$。

因此，除 $B(D) = \{2, 3, 3, 2\}$外，任何满足 $\sum B(D) < 12$ 的次数序列B_0都必须满足 $B_0(D) = 1$ 或 $B_3(D) = 1$。

证明。由命题 11 应用于 D 及其对偶可得 $B_1(D) \geq B_0(D) + 1$ 以及$B_2(D) \geq B_3(D) + 1$。由此得到这些结果。□

定理 21。 设 D 为余维 3的次数序列。满足$\sum B(D) < 12$ 的次数序列 D 仅有下表所列:

D	$B(D)$	sum
$\{0,1,3,4\}$	$\{1,2,2,1\}$	6
$\{0,1,2,3\}$	$\{1,3,3,1\}$	8
$\{0,1,5,6\}$	$\{2,3,3,2\}$	10
$\{0,3,5,8\}$	$\{1,4,4,1\}$	10

证明。如有必要，进行对偶化后，我们可假设 $B_0(D) \leq B_3(D)$。换言之，我们将较小的数放在前面。根据前述引理，可假设 $B_0(D) \leq 2$ ，并且若$B_0(D) = 2$，则 $B(D) = \{2,3,3,2\}$。

设 $B_0(D) = 1$，即 $B(D) = \{1,a,b,c\}$，其中 a， b， c满足 $c \leq 3$，由引理20可知。由于 $B(D)$ 的各项交错和为零，我们必有

$$B(D) = \{1, a, a+c-1, c\}.$$

分析 f 的各种情形或 $c \in \{1,2,3\}$ 给出 $B(D)$ 满足 $\sum B(D) < 12$ 的如下可能情形 :

$$\{1,2,2,1\}, \{1,3,3,1\}, \{1,4,4,1\}, \{1,2,3,2\}, \{1,3,4,2\}, \{1,2,4,3\}$$

注意，定理 13 刻画了满足以下条件的 D： $B_1(D) = 2$；并且注意到 $\{1,2,3,2\}$， $\{1,2,4,3\}$均不会出现，而 $\{1,2,2,1\}$ 当且仅当 $D = \{0,1,3,4\}$时出现。

因此，除对偶性外，我们只需研究序列 $B(D)$，即 $\{1,3,3,1\}$、 $\{1,4,4,1\}$、$\{1,3,4,2\}$ 和 $\{2,3,3,2\}$。我们分情况讨论。在以下各情形中，记 $D = \{0,x,y,z\}$，并假设 D 是非退化的，也就是说 $\gcd(x, y, z) = 1$。

情况1：序列 $\{1,3,4,2\}$ 不会以 $B(D)$ 的形式出现：

假设 $B(D) = \{1,3,4,2\}$。那么我们有以下方程:

$$yz = 3(y-x)(z-x),$$
$$xz = 4(y-x)(z-y),$$
$$xy = 2(z-x)(z-y).$$

中间的方程意味着 xz 可被 4 整除。

假设 x 和 z 都是偶数。由于 D 是非退化的， y 必须是奇数。但这意味着 $(y-x)(z-y)$ 是奇数，进而 $(xz)/4$ 是奇数，因此 $x/2$ 和 $z/2$ 都是奇数。然而，在最后一个方程中，因子 $2(z-x)$ 将是 4 的倍数，这是不可能的，因为左边是 2 的倍数，但不是 4 的倍数。

因此，我们必有以下两种情况之一： x 是 4 的倍数且 z 是奇数，或反之。特别地， $z-x$ 是奇数。将第二个方程除以第三个方程并化简，得到

$$z(z-x) = 2y(y-x).$$

因此， z 必须是偶数，且 x 必须是奇数。设 $z = 2^q k$ 对于 k 为奇数。于是，顶端方程迫使 $y-x$ 是 2^q的倍数，记作 $y-x = 2^q \ell$。于是中间的方程变为:

$$2^q kx = 4 \cdot 2^q \ell (z-y)$$

这就产生了矛盾，因为这意味着 kx （一个奇数）可被 4 整除。因此， $\{1,3,4,2\}$ 不会以 B（D）的形式出现。

情况2： D，其中 $B(D) = \{1,a,a,1\}$:

假设 $B(D) = \{1,a,a,1\}$ 对于 $a \in \{3,4\}$。那么我们有以下方程:

$$yz = a(y-x)(z-x),$$
$$xz = a(y-x)(z-y),$$

$$xy = (z - x)(z - y).$$

最后一个方程意味着 $z(z-x-y) = 0$，因此 $z = x + y$。于是，另外两个方程都等价于 $x + y = a(y - x)$，这意味着 $y = (a + 1)x/(a - 1)$。

如果 $a = 3$，那么这意味着 D 必须具有 $\{0, x, 2x, 3x\}$ 的形式，而非退化性要求 $D = \{0, 1, 2, 3\}$。

如果 $a = 4$，那么这意味着 D 必须具有 $\{0, x, \frac{5}{3}x, \frac{8}{3}x\}$ 的形式，而非退化性要求 $D = \{0, 3, 5, 8\}$。

情形 3： D，**其中** $B(D) = \{2, 3, 3, 2\}$**：**

假设 $B(D) = \{2, 3, 3, 2\}$。那么我们有以下方程：

$$2yz = 3(y - x)(z - x),$$
$$2xz = 3(y - x)(z - y),$$
$$2xy = 2(z - x)(z - y).$$

注意左边的因子 2，因为 $B_0 = 2$。

最后一个方程意味着 $2(z^2 - xz - yz) = 0$，所以 $z = x + y$。将其代入其他方程，得到 $2(x + y) = 3(y - x)$ 或 $y = 5x$，所以 $D = \{0, x, 5x, 6x\}$，因此由于 D 是非退化的，$D = \{0, 1, 5, 6\}$。

这些计算完成了证明，表明定理陈述中的表格是完整的。□

定理 *3* 的证明：最后，我们补完定理3的证明。剩下要做的，就是证明对于我们找到的每个算术障碍——在这些障碍中，$B(D)$ 违反了猜想的界——在方程 $\beta(M) = LB(D)$ 中必有 $L \geq 2$。

注意，违反猜想 1 的 $B(D)$ 都具有 $\{1, 2, B_2, B_3\}$ 或 $\{B_0, B_1, 2, 1\}$ 的形式。由于我们处于余维 3 的情形，Krull 高度定理排除了第一种数列作为模 M 的贝蒂数列的可能性。对 M 的对偶应用同样的论证，则可排除第二种数列。

现在考虑定理 $B(D)$ 中的数列。数列 $\{1, 2, 2, 1\}$ 根据 Krull 高度定理，不可能是某个模的贝蒂数列。第二个数列是完全交的贝蒂数列，因此符合猜想 2。第三个数列违反了一般事实，即 $\beta_1(M) \geq \beta_0(M) + (c - 1)$（例如，见 [5]中的定理 2.1）。最后，数列$\{1, 4, 4, 1\}$ 不可能是某个模的贝蒂数列，因为几乎完全交从来不是 Gorenstein。因此 $L \geq 2$ 在上述所有情形中都成立。□

5. Gorenstein Rings in Codimension 5 and 6

本节将证明定理 1。此前，我们一直致力于为方案 4寻找完整的解。换言之，我们想找出所有算术障碍。然而，如果我们有兴趣证明主要猜想的新情形，不妨也将 Krull 高度定理、昆茨定理等所施加的必要条件纳入考量。采用这种方法，下一个尚未解决的猜想情形便勉强触手可及。

定理 *1*的证明。 我们先证明余维 5 中的结论：

假设 $\beta = \{1, a, b, b, a, 1\}$ 是 Gorenstein 环 $M = R/I$的贝蒂数列，并假设 M 不与完全交同构。为证明主猜想 1，我们需要证明 $a \geq 5$ 且 $b \geq 10$。前者直接由 Krull 高度定理得出。根据 Kunz 的一个定理，几乎完全交从来不是 Gorenstein 环 [17], ，因此我们可以假设 $a \geq 7$。利用埃文斯–格里菲斯合冲定理 [14], ，我们可知分解中第三个映射的秩至少为 3。显然，第二个映射的秩为

秩 $a-1$ 由此可得 $b \geq 3+(a-1)$，所以 $b \geq 2+a$。因此，若 $a \geq 8$，主猜想 1 成立。若 $a=7$，则唯一需要排除的贝蒂数列是 $\{1,7,9,9,7,1\}$；下文将排除它，因为它也会违背主猜想 2。现在我们着重找出所有会违背后一个猜想的 a，b 的取值。

由于 $b \geq 2+a$，贝蒂数之和至少为 $6+4a$。因此，我们只需考虑 $a \in \{7,8,9,10\}$ 的情形。所有可能的（a，b）列表如下：

$$(7,9),(7,10),(7,11),(7,12),(7,13),(7,14),(7,15),(8,10),$$

$$(8,11),(8,12),(8,13),(8,14),(9,11),(9,12),(9,13),(10,12)$$

由于 R是 Gorenstein 且纯的，其次数序列具有如下形式：$\{0,x,y,z,z+y-x,y+z\}$，其中 $0<x<y<z.$。由于 β_0（R）$=1$，我们必须有 B（D）$=\beta$（D），因此得到

$$\begin{aligned} yz(z+y-x)(y+z) &= a\cdot(y-x)(z-x)(z+y-2x)(y+z-x) \\ xz(z+y-x)(y+z) &= b\cdot(y-x)(z-y)(z-x)z \end{aligned}$$

根据 Herzog-K¨uhl 方程。注意，每个方程中都可以约去相同的因子。对于每一对（a，b），这些方程定义了 $\mathbb{Q}^3$ 中的一个仿射簇 $X_{a,\,b}$，我们希望确定 $X_{a,\,b}$ 上是否存在满足 $0<x<y<z$ 的整数点（x，y，z）。为此，我们使用 Macaulay2 求出 $X_{a,\,b}$ 的不可约分支。具体而言，我们使用 Macaulay2 中的 `decompose` 命令来求出这些分支。结果发现，每个代数簇都有 9 个分支：8 条直线和一条平面三次曲线。这些直线均由方程定义，方程要么令某个坐标为零，要么令两个坐标相等。因此，它们不可能包含满足 $0<x<y<z$ 的点（x，y，z）。包含平面三次曲线的分支由一个线性形式 f 以及关于 y 和 z 的一个三次多项式定义。以下列出这些分支：

$$\begin{aligned}
&\texttt{ideal}\,(14x-15y+3z,20y^3-75y^2z+204yz^2-85z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(7x-8y+2z,12y^3-44y^2z+81yz^2-33z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(14x-17y+5z,85y^3-306y^2z+475yz^2-190z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(7x-9y+3z,33y^3-117y^2z+165yz^2-65z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(14x-19y+7z,190y^3-665y^2z+882yz^2-343z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(7x-10y+4z,65y^3-225y^2z+286yz^2-110z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(14x-21y+9z,343y^3-1176y^2z+1449yz^2-552z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(16x-17y+3z,51y^3-187y^2z+513yz^2-209z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(8x-9y+2z,15y^3-54y^2z+100yz^2-40z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(16x-19y+5z,209y^3-741y^2z+1155yz^2-455z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(8x-10y+3z,40y^3-140y^2z+198yz^2-77z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(16x-21y+7z,65y^3-225y^2z+299yz^2-115z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(18x-19y+3z,95y^3-342y^2z+945yz^2-378z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(9x-10y+2z,55y^3-195y^2z+363yz^2-143z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(18x-21y+5z,378y^3-1323y^2z+2070yz^2-805z^3)\\
&\texttt{ideal}\,(20x-21y+3z,77y^3-273y^2z+759yz^2-299z^3)
\end{aligned}$$

我们断言，这些分量中没有任何一个包含满足 $z>0$ 的点 (x,y,z)。若确实如此，由于这些三次式是齐次的，在令 $z=1$ 后，方程组便会有一个有理数解。可以用有理根判别法完成论证。

余维 6 中的证明以类似的方式进行。我们将指出其中的不同之处。这里要考虑的贝蒂数列形式为 $\beta=\{1,a,b,2b-2a+2,b,a,1\}$。注意，存在无穷多个满足 $\beta_3<20$ 的数对 (a,b)。这意味着，无法通过有限计算来验证 β_3 的主猜想 (1)。对于 β_1，注意根据总秩定理，如果 M 不同构于一个完全交，那么贝蒂数之和必须大于 $2^c=64$。因此我们有 $4+4b>64$，从而

$\beta_2 = b \geq 16 > 15 = \binom{c}{2}$。注意，我们完全没有用到 M 是一个纯模这一点（见推论 22。）

对于主要猜想（2），我们需要证明贝蒂数之和 $4+4b$ 至少为 2^6+2^5，也就是说 $b \geq 23$。根据上一段和 Syzygy 定理，我们有 $b \geq \min(a+3,\ 16)$，并且由 Kunz 定理可知 $a \geq 8$。因此需要检验 63 对 $(a,\ b)$。同样，由于 $M = R/I$ 是一个循环模，$B(D) = \beta(D)$；又由于 R/I 是 Gorenstein，我们知道 D 具有如下形式：$\{0, x, y, z, 2z-y, 2z-x, 2z\}$，其中 $0 < x < y < z$ 为一些整数。与之前一样，我们利用 Herzog-K¨uhl 方程来定义代数簇 $X_{a,\ b}$。

全部 63 个代数簇 $X_{a,\ b}$ 都恰有 5 个分支，这些分支包含由某个变量或两个变量之差的消失所定义的直线，因此并不对应有效的次数序列。消去这些分支后，对应的代数簇 $X_{a,\ b}$ 中，除一个以外，其余都只剩下一个分支，该分支包含一个关于两个变量的四次多项式 y，z。应用有理根检验可知，这些分支都不包含非零整数点。

唯一的例外是 $X_{16,\ 20}$（可能带有 $\beta = \{1, 16, 20, 10, 20, 16, 1\}$），它有 3 个非线性分支：

$$\{\texttt{ideal}(z, x-y), \texttt{ideal}(z, x+y), \texttt{ideal}(y-2z, x-z), \texttt{ideal}(y-z, x-2z),$$
$$\texttt{ideal}(2y-3z, 8x^2-16xz+5z^2), \texttt{ideal}(2y-z, 8x^2-16xz+5z^2),$$
$$\texttt{ideal}(4y^2-8yz+7z^2, 8x^2-16xz+15z^2)\}$$

仍然可以应用有理根检验来查看这些分支不包含非平凡整数点。□

上述定理的证明给出了以下更一般的结果，且不对纯性作任何假设：

推论 22。 如果 R/I 是任意有限生成的分次 *Gorenstein*代数，余维为 6，且不与完全交同构，那么 $\beta_2(R/I) \geq 16$。

注 23。 我们发现这些计算以如此快的速度解决这一情形，实在颇为神奇。然而，这一论证虽然简短，却掩盖了这种方法可能具有的微妙性。例如，我们的搜索排除了这一对 $(a,\ b) = (10,\ 11)$，因为这将违反 Syzygy 定理。尽管如此，这实际上确实作为一个 B-序列出现：

$$B(\{0, 3, 4, 10, 11, 14\}) = \{1, 10, 11, 11, 10, 1\}.$$

果不其然，对相应的理想进行分解后，可以得到一个分量

$$\texttt{ideal}(5y-2z, 10x-3z)$$

由此我们可以恢复次数序列，即 $(x,\ y,\ z) = (3,\ 4,\ 10)$。

我们能走多远? 由于主猜想 2 在某种意义上是“有限的”，即对于给定的 c，只需检验有限个贝蒂数列，因此人们或许会希望这一技术能够延续到 $c = 7$及更高情形。结果如何?从 $c = 7$ 开始，贝蒂数列和次数序列中都会出现新的参数。于是，初等分解这一步就变得困难得多。

此外，我们知道在某个时候，这个过程 **行不通**，因为会存在违反主猜想 2 的自对偶次数序列 D，其 $B(D)$ 如此。我们找到的最小例子是问题 6中的例子。它的余维为 15，且具有

$$D = \{0, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 11, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 20\},$$
$$B = \{1, 85, 630, 2295, 4998, 6630, 4590, 2210, 2210, 4590, 6630, 4998, 2295, 630, 85, 1\}.$$

Acknowledgements

我们感谢 Daniel Erman、Karthik Ganapathy、Elo´ısa Grifo、Srikanth Iyengar、Claudiu Raicu 和 Mark Walker 提供宝贵的交流。此项研究获得了面向本科生为主的高校教师的 AMS-Simons研究促进基金资助。我们感谢圣迭戈大学的支持，包括本科生研究办公室提供的支持，以及弗莱彻·琼斯应用数学捐赠基金的支持。

References

[1] Luchezar L. Avramov. 极小自由分解中乘法结构存在性的障碍。Amer. J. Math., 103(1):1–31, 1981.[2] Adam Boocher 和 Elo´ısa Grifo. 贝蒂数的下界。载于《交换代数》，第 77–111 页。Springer, Cham, [2021] ©2021.[3] Adam Boocher 和 James Seiner. 单项式理想的贝蒂数下界。Journal of Algebra, 508:445–460, 2018.[4] Adam Boocher 和 Derrick Wigglesworth. 正则性较低的分次模的贝蒂数大下界。Collectanea Mathematica, 72(2):393–410, 2021.[5] D Buchsbaum 和 David Eisenbud. 关于理想与分解的评注。载于《Symp. Math》，第 11 卷，第 193–204 页，1973.[6] David A. Buchsbaum 和 David Eisenbud. 有限自由分解的代数结构，以及余维 3 理想的一些结构定理。Amer. J. Math., 99(3):447–485, 1977.[7] Hara Charalambous. 多重分次模的贝蒂数。Journal of Algebra, 137(2):491–500, 1991.[8] Hara Charalambous 和 E. Graham Evans. 通过变形理论研究有限长度模的贝蒂数。J. Algebra, 143(1):246–251, 1991.[9] Hara Charalambous、E. Graham Evans 和 Matthew Miller. 有限长度模的贝蒂数。Proc. Amer. Math. Soc., 109(1):63–70, 1990.[10] David Eisenbud、Gunnar Fløystad 和 Jerzy Weyman. 等变纯自由分解的存在性（existence de r´esolutions pures et libres equivariantes）。载于《Annales de l'institut Fourier》，第 61 卷，第 905–926 页，2011.[11] David Eisenbud 和 Frank-Olaf Schreyer. 分次模的贝蒂数与向量丛上同调。Journal of the American Mathematical Society, 22(3):859–888, 2009.[12] Daniel Erman. Betti图半群。Algebra & Number Theory, 3(3):341–365, 2009.[13] Daniel Erman. Buchsbaum-Eisenbud-Horrocks秩猜想的一个特例。Math. Res. Lett., 17(6):1079–1089, 2010.[14] E. Graham Evans 和 Phillip Griffith. 齐次关系问题。Ann. of Math. (2), 114(2):323–333, 1981.[15] Robin Hartshorne. 射影空间上的代数向量丛：问题集。Topology, 18(2):117–128, 1979.[16] J¨urgen Herzog 和 Michael K¨uhl. 关于有限纯分解和线性分解的贝蒂数。Communications in Algebra, 12(13):1627–1646, 1984.[17] Ernst Kunz. 几乎完全交不是戈伦斯坦环。J. Algebra, 28:111–115, 1974.[18] Matthew Mastroeni. Koszul近完全交。Journal of Algebra, 501:285–302, 2018.[19] Keller VandeBogert 和 Mark E. Walker. 特征2下的总秩猜想。Duke Math. J., 174(2):287–312, 2025.[20] Mark E Walker. 有限投射维数模的总贝蒂数。Annals of Mathematics, pages 641–646, 2017.

Department of Mathematics, University of San Diego, San Diego, CA 92110, USA电子邮件地址: aboocher@sandiego.edu

Department of Mathematics, University of San Diego, San Diego, CA 92110, USA电子邮件地址: nhuang@sandiego.edu

Department of Mathematics, University of San Diego, San Diego, CA 92110, USA电子邮件地址: harrisonwolf@sandiego.edu