arXiv:2512.24349v1 [math.HO] 30 Dec 2025

2026年1月1日

硬币讲述的几何学故事

Henryk Fukś，#22079

数学与统计学系，布鲁克大学，圣凯瑟琳斯，安大略省，加拿大电子邮件：
hfuks@brocku.ca

摘要

在2012年和2016年发表于 CNJ 的三篇文章中（作者更新后的版本可在 arxiv.org 查阅），我们探讨了数学科学、铸币与钱币学之间的一些联系。本文是这一系列文章的续篇（虽迟但到），以现代纪念币为背景和例证，讲述几何学史上的若干重要发展。

几何学是数学中最古老的分支之一。它研究空间的性质以及空间中物体（图形）的性质，所用概念包括距离、形状和大小。几乎所有古代文明都发展出某种几何学概念，尤其是关于长度、面积和体积测量的概念。人们认为，美索不达米亚文明和古埃及文明是最早出现这类概念的文化；而严谨的几何方法则被认为真正起源于古希腊数学家，他们也是最早运用演绎推理来解决几何问题的人。在大众印象中，希腊几何学常与毕达哥拉斯及其著名的直角三角形定理联系在一起。 [3], 中已讨论过这一内容，因此这里不再赘述，只补充一点：自 [3], 出版以来，出现了一枚纪念毕达哥拉斯的新硬币，即希腊银行于2013年在“希腊文化——数学家”计划下发行的10欧元银币。



尽管毕达哥拉斯在初等几何学习者中广受欢迎，数学史学家往往更强调其他古希腊数学家的成就与影响，他们常被称为“三巨头”，即欧几里得（公元前325—公元前270年）、叙拉古的阿基米德（约公元前287—约公元前212年）和佩尔盖的阿波罗尼乌斯（约公元前240—约公元前190年）。欧几里得被视为几何学之父，以其著作《几何原本》而闻名；这部著作是有史以来最成功的教科书。按版本数量计算，它仅次于《圣经》，直到20世纪初仍被用作教科书。仅英语版本就有近20种不同译本。

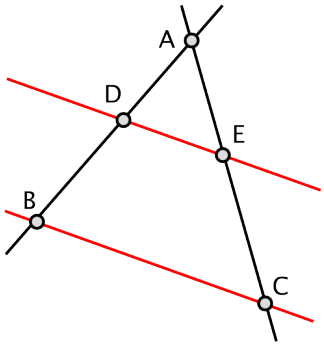


因此，欧几里得竟然等了将近23个世纪才在硬币上获得纪念，多少令人惊讶。这发生在2023年，希腊国家银行发行了一枚银质10欧元硬币，正面饰有欧几里得肖像，由Geórgios Stamatópoulos设计。显然，这幅肖像出自艺术家的想象，因为没有欧几里得的图像流传至今。硬币背面是一幅由各种几何图形组成的马赛克，这些图形的性质都在《几何原本》中有所探究，例如直线、圆、椭圆和多边形。细心的读者会注意到其中也有螺旋线——这稍有些时代错置，因为欧几里得的著作中并未提及螺旋线。

然而，“三巨头”中的下一位阿基米德对螺旋线进行了非常详细的研究。他和欧几里得一样，直到2015年才登上硬币。这同样是一枚银质精制币，属于希腊银行发行的、与欧几里得硬币相同的系列，并由同一位雕刻师设计。阿基米德是历史上最伟大的数学家之一，他发明了巧妙的方法，用于计算几何图形的面积和体积，包括圆、椭圆和球体，以及抛物面和旋转双曲面。为此，他发明了“穷竭法”，预示了17世纪晚期发展起来的现代微积分。上述硬币上的阿基米德头像，背景是一套复滑轮系统，这是他众多发明之一，也是一种被称为“滑轮组”的简单机械。硬币背面的圆形图案中，其中一个在“10欧元”字样中充当零，可能是在向据称是阿基米德的遗言——“不要扰乱我的圆圈！”——致敬。根据罗马作家瓦莱里乌斯·马克西穆斯的记载，公元前212年叙拉古围城战期间，一名罗马士兵前来杀害阿基米德时，他说出了这句话（措辞略有不同）；他指的是自己在这场致命遭遇前不久在沙地上勾勒出的几何图形。











“三巨头”中的第三位——佩尔盖的阿波罗尼乌斯，以研究所谓的圆锥曲线而闻名。圆锥曲线是圆锥表面与平面相交所形成的曲线。如今，这些曲线仍沿用阿波罗尼乌斯所命名的名称，即椭圆、抛物线和双曲线。阿波罗尼乌斯目前还没有自己的纪念币，不过，鉴于希腊银行继续开展“希腊文化——数学家”系列项目，我们可以期待这一情况在不久的将来有所改变。2024年，该系列又发行了一枚纪念币，这次纪念的是米利都的泰勒斯（公元前624—540年）。凡是在高中有幸接受过传统几何教学的人，一定都还记得他的名字，这要归功于基本比例定理，也就是广为人知的泰勒斯定理：若BC与DE平行，则DE/BC = AE/AC =AD/AB。泰勒斯的著作无一流传下来，但泰勒斯定理出现在欧几里得《几何原本》第一卷中，列为第26命题。说到这里，我想吐槽一下：在我看来，泰勒斯纪念币背面那幅颇为神秘的图案，实在是错失了一个机会。基本比例定理的示意图几乎是在恳求设计者把它印上去。

正如我们在开头提到的，其他古代文明也发展出了几何思想，并在拓展几何知识方面取得了进展。中华文明无疑是其中之一。祖冲之（429—500年）是古代晚期最杰出的中国数学家之一，他最伟大的成就是将 π 计算到八位小数的精度。他求出了 π的精确值的上界和下界，$3.1415926 < \pi < 3.1415927$，并给出了有理近似值 $\pi \approx 355/113$。中华人民共和国于1986年发行的5元银币，呈现了祖冲之的全身像，背景是水碓——他发明的机械装置之一。在左上方，我们可以看到内接于圆的多边形。在推导关于 π的结果时，祖冲之用 n边多边形近似圆，逐渐增加



n的数值。祖冲之究竟如何得出 π的界限区间，目前尚不清楚，但有些作者推测，他是从六边形开始，之后多次将边数加倍，从而得到边数为12、24、48等的多边形。维基百科等网络资料斩钉截铁地声称，他最终得到了一个有 $3 \cdot 2^{12}$ 条边的多边形，但有充分理由对此表示怀疑。数学史学家认为，他实际上是从正方形开始，不断将边数加倍，直到得到一个有 2^{15} 条边的多边形。幸运的是，1986年硬币的设计者无法访问维基百科，因此倾向于更有可能的假说，在硬币上画了一个八边形。这对应于近似过程的第一步：正方形有4条边，加倍后得到一个有8条边的多边形，即八边形。

说回希腊数学家，人们常说，阿基米德去世后，几何学便走向衰落。事实上，在古代晚期，若只考虑抽象几何学，值得一提的希腊人只有亚历山大的帕普斯（约290—约350年），以及《几何原本》的注释者吕基亚的普罗克洛（412—485年）。不过，公平地说，实用几何学的境遇要好得多。克劳狄乌斯·托勒密（约100—约170年）撰写了著名的天文学论著，后世称为《天文学大成》；他在书中描述了仅以几何原理为基础的地心宇宙模型。他还写了一本名为《地理学》的著作，讲解如何利用地理坐标绘制地图，这与我们今天的做法相似。1992年，古巴发行了一枚10比索银币，以纪念托勒密，以及15世纪的地图制作者兼数学家保罗·托斯卡内利（1397—1482年）。



之所以将两人一同列入，是因为托斯卡内利利用托勒密在《地理学》中提供的地理信息，提出向西航行、只需走6,500英里便可抵达亚洲的设想。他绘制了一幅地图来阐释这一想法。哥伦布拿到了托斯卡内利的地图，并因此受到启发，决定尝试寻找一条从欧洲直达亚洲的海上航线。古巴硬币上刻有这幅地图的现代复原图（原图已佚），以纪念哥伦布航行500周年。从这幅地图可以看出，契丹（日本）与欧洲和非洲之间隔着大洋海。

我们很快会回到地图绘制这一主题，但现在让我们按时间顺序继续讨论几何学的发展。在中世纪，抽象几何方面并没有发生太多变化，不过到了中世纪晚期，实用几何学再次蓬勃发展。欧洲宏伟的哥特式大教堂是中世纪建筑师技艺的生动见证；他们运用各种几何方法来设计、规划并建造这些壮丽的建筑。

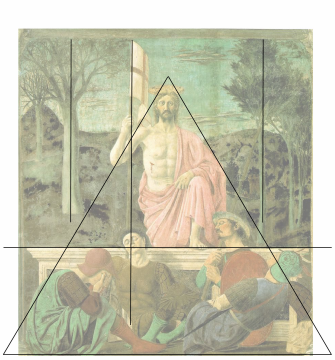
在15世纪初，我们遇到了实用几何学领域的另一项重要发展。菲利波·布рун内莱斯基（1377–1446）曾出现在圣马力诺于1977年发行的1000里拉硬币上（纪念他诞辰400周年）；他是一位意大利建筑师和设计师。1415–1420年间，他进行了一系列实验，最终发现了线性透视法——一种将三维物体表现于二维画布上的方法，从而产生深度感的错觉。人们认为他是第一个精确描述线性透视原理的人。圣马力诺硬币的正面展示了一群站在升高的平台或脚手架上的人，他们大概是在表现建筑师布рун内莱斯基与建筑工人讨论某件事情。垂直于硬币平面的梁 converging to a point located outside of the coin，遵循线性透视的规则，不过还加入了一些鱼眼畸变，以协调硬币的圆形形状。

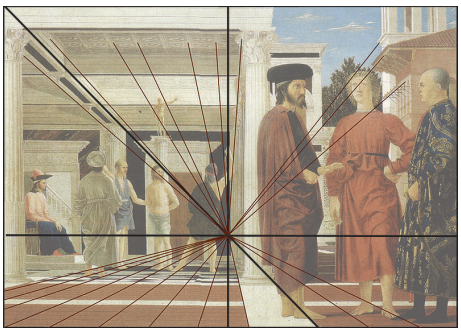




15世纪70年代，意大利画家皮耶罗·德拉·弗朗切斯卡（1415–1492）进一步发展了布鲁内莱斯基的思想，并创作了影响深远的著作《绘画的透视法》（论绘画透视法）。受欧几里得著作的启发，皮耶罗·德拉·弗朗切斯卡阐述了透视的数学原理，并说明了如何运用色彩表现透视。1992年发行的意大利500里拉硬币，正面是德拉·弗朗切斯卡的肖像，背面则是他最著名的湿壁画之一《复活》。虽然《复活》的构图基于一些几何原理（右图），但德拉·弗朗切斯卡的《基督受鞭刑》（下图）更能展现透视的运用，其中多条直线明显汇聚于一点。







继德拉·弗朗切斯卡之后，16世纪初，方济各会修士卢卡·帕乔利（1447—1517年6月）在其著作《神圣比例》（1509年）中进一步发展了透视理论。该书结合透视探讨了视觉艺术中的比例概念，并将其应用于建筑。1994年发行的意大利500里拉硬币上刻有他的肖像，肖像周围环绕着铭文“1494 Luca Pacioli 1994”。1494年是他的另一部重要著作《算术大全》的出版年份，该书除其他内容外，还首次刊载了对复式簿记系统的描述。这部著作为他赢得了“会计学之父”的称号。



在讨论完实用几何学的发展后，让我们回到更抽象的问题。17世纪上半叶，抽象几何领域出现了一项重要进展，可称为“几何与代数的结合”。这主要归功于勒内·笛卡尔（1596—1650），他提出了解析几何的原理，换言之，

利用坐标系研究几何学。如今，解析几何通常被称为笛卡尔几何，笛卡尔也被认为是其唯一的创始人，不过值得强调的是，皮埃尔·德·费马（1607–1665）也为这一领域作出了贡献。法国于1991年发行的硬币（100法郎）上，刻有笛卡尔的头像，他的头发从左侧平滑地过渡为书本，从右侧则过渡为一卷卷轴。圣马力诺1996年发行的50里拉硬币与几何学的联系更为密切，上面刻有笛卡尔半身像，像周围镌刻着笛卡尔坐标轴。



进入18世纪和19世纪，我们会遇到 Carl Friedrich Gauss（1777–1855）这位巍然卓立的人物。他是数学史上最具影响力的数学家之一，常被称为“数学王子”。这里不适合详述他对数学各个分支所作出的无数贡献，因此我们只提及几何学。在此之前，我们先说明：1977年，在高斯诞辰200周年纪念之际，当时彼此分立的两个德国国家——德意志民主共和国和德意志联邦共和国——发行了两枚“竞争性”硬币。东德硬币的面值为20马克（当然是东德马克），其图案印有高斯曲线，即统计学中广泛使用的著名概率分布函数，也称为“钟形曲线”。这是一个非常恰当的象征，体现了高斯对数学的贡献，因为它一眼便可辨认，并且已经深深植根于大众文化之中。



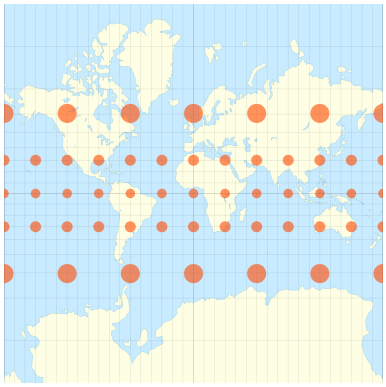
这枚面值为5德国马克（德国马克）的西德硬币，是一枚较为典型的纪念币，币上高斯的肖像明显取材于克里斯蒂安·阿尔布雷希特·延森1840年的著名画作（见右图），画中的高斯戴着他标志性的帽子。尽管在20世纪70年代，黑市汇率为5至10东德马克兑1德国马克，因此这枚5德国马克硬币比德意志民主共和国的20东德马克硬币更值钱，但如今，这枚东德硬币在收藏市场上的价格远高于其西德对应币种。当然，这主要反映了两者铸造量的差异（5.5万枚对100万枚）。



高斯被认为是非欧几何的发现者之一，后文将进一步介绍这一点。不过，高斯还开创了曲面微分几何。它不同于笛卡尔几何，因为它研究曲面时采用“内部”观察者的视角；观察者受限于只能在曲面上移动，就仿佛曲面是二维的。高斯在这一领域最伟大的成就之一是他的**卓越定理**（非凡定理）。简单来说，该定理指出，只需测量曲面本身上的角度和距离，就能完全确定曲面的曲率。

这一定理的推论之一是，球面无法在不产生变形的情况下呈现在平面上，因此，人们无法绘制出一幅涵盖地球较大区域且毫无变形的地图。例如，常用的一种地图投影——墨卡托投影，就是由佛兰德地理学家杰拉杜斯·墨卡托（1512–1594）发明的，并呈现在1969年的5马克德国银币上。





墨卡托投影具有一些优良性质，能够保留局部方向和形状，但也会放大远离赤道的物体。在右侧的示例地图中，红色的圆展示了这一点：它们在现实中的面积相同，但在地图上的大小却各不相同。高斯证明，无论采用何种巧妙的投影，最终都难免会产生这类变形。

如前所述，高斯的名字常与几何学中的另一项重要发展联系在一起。要说明这项发展，需要先作一些铺垫。在《style id='1'>《几何原本》 </style》中，欧几里得为平面几何提出了五条公设。公设或公理是被认为显而易见、无需证明的陈述。前四条假定以下操作总是可行：（1）从任意一点向任意一点作一条直线；（2）将一条有限线段沿直线连续延长；（3）以任意一点为圆心、任意长度为半径作圆；（4）所有直角都彼此相等。第五条公设称为平行公设，复杂得多，也并非一目了然，具体如下：

> 如果一条直线与两条直线相交，使同侧的内角之和小于两个直角，那么这两条直线无限延长后，必将在角度之和小于两个直角的那一侧相交。

如今，我们通常采用约翰·普莱费尔（1748—1819）提出的等价表述来陈述第五公设：在平面上，给定一条直线和直线外的一点，过该点至多可以作一条与给定直线平行的直线。

由于第五公设并非不言自明，两千多年来，数学家一直试图用前四条公设证明它。到了19世纪，人们终于发现，这些努力都是徒劳的，因为平行公设独立于其余四条公设。因此，人们可以构建有或没有第五公设的自洽几何体系，这意味着并不存在唯一的几何学，而是有多种几何学。这一非凡且真正开创性的成果，如同许多发现一样，由两人独立且几乎同时发现：匈牙利数学家János Bolyai（1802—1860）和俄罗斯数学家尼古拉·伊万诺维奇·罗巴切夫斯基（1792—1856）。俄罗斯和匈牙利都曾发行硬币，纪念本国的这两位数学家。

这枚俄罗斯1卢布铜镍币是为纪念罗巴切夫斯基诞辰200周年而发行的。它是俄罗斯联邦于1992年苏联解体后铸造的首批纪念币之一，正面以新的“俄罗斯银行”字样取代了原来的“CCCP”。背面饰有罗巴切夫斯基的半身肖像，



János Bolyai 诞辰200周年纪念在10年后的2002年到来，匈牙利也效仿，以一枚3000福林银币纪念这一事件。1831年，Bolyai 将自己的非欧几何著作作为附录，刊载于其父亲所著的一本书中。银币背面刻有这部著作的完整标题（拉丁文）：

> 附录：展示空间绝对真理的科学；独立于欧几里得第十一公理的真伪（先验上绝不可判定）；并附上公理为假时圆的几何求积。

其英文译文为：“附录：阐明空间的绝对真科学；独立于第十一条欧几里得公理（此公理无法先验地判定为真或假）；若该公理为假，则补充几何学上的圆的化圆为方。”银币正面展示了附录中一幅图的精确复制品，即图10，此处将其呈现在左侧。



Bolyai 生前未能获得应有的认可。János 的父亲 Farkas Bolyai 将一份附录著作寄给了高斯。高斯回信称，他无法赞扬 János 的工作，因为那就仿佛是在赞扬自己——他早在数年前就已发现了其中的主要成果。这对 Bolyai 是沉重的打击，尽管高斯并无优先权可言，因为他从未发表过那些所谓的发现。此外，高斯去世后，人们在他的任何文稿中都未找到上述说法的书面证据。

鲍耶和Lobachevski的发现发表后逐渐湮没无闻，几乎被完全遗忘，直到19世纪60年代，Bernhard Riemann关于微分几何的研究才掀起了人们对非欧几何的新一轮兴趣。黎曼提出了一套非常普适的方法，用于在任意空间中构建几何学。他的方法只需要能够测量点与点之间的距离，这样给定任意两个点，就可以讨论它们之间的最短路径；同时还需要能够测量相交曲线之间的角度。这一概念

允许计算出一个称为曲率的量，而在具有欧几里得几何的空间中，这个量处处恰好为零。尽管黎曼没有明确地这样称呼它们，鲍耶和Lobachevski的几何学是黎曼几何的特殊情形，对应于恒定的负曲率。如今，这类几何学被称为鲍耶–Lobachevski几何或双曲几何。

19世纪下半叶之后，几何学经历了进一步的蓬勃发展。除微分几何之外，还出现了许多新的分支，包括代数几何、有限几何和计算几何。其中一些领域非常新，我们还要再等一段时间，才能看到以其奠基人诞辰为主题的纪念币。不过，下一个机会已经近在眼前。2026年，我们将庆祝 Bernhard Riemann 诞辰200周年纪念。希望他对数学（包括几何学）所作出的贡献，也能通过一枚精美的硬币得到纪念。

参考资料

[1] H. Fukś, 《硬币上的数学，第一部分：两位女王与两位杰出人物的故事》，《加拿大钱币学杂志》**57** （2012年），第5期，304–315页，arXiv:1601.07394。[2] H. Fukś, 《硬币上的数学公式。第一部分：爱因斯坦》，《加拿大钱币学杂志》**61**（2016年），第4期，167–169页，arXiv:1609.09485。[3] H. Fukś, 《硬币上的数学公式。第二部分：从毕达哥拉斯到20世纪》，《加拿大钱币学杂志》**61** （2016年），第5期，208–213页，arXiv:1609.09485。