arXiv:2512.24417v1 [math.CT] 30 Dec 2025

具有柯尔莫哥洛夫积的因果马尔可夫范畴

Sean Moss 和 Sam Staton

2021年10月的笔记，整理于2026年1月1日

在 [2] (问题6.7) 中，提出了寻找一个有趣的马尔可夫范畴的问题：它是因果的，并且具有所有（小）柯尔莫哥洛夫积。这里我们给出一个例子，其中确定性子范畴是斯通空间范畴（即布尔代数范畴的对偶），而核对应于 Radon 单子的 Kleisli 箭头中的一个受限类别。

我们从两个角度来考察这个问题。首先，直接通过 pro-完备化和斯通空间。其次，通过与布尔代数和效应代数的对偶性。

1 从 pro-完备化的角度

设 $\mathcal{C}$ 是一个马尔可夫范畴，其确定性宽子范畴为 $\mathsf{det}(\mathcal{C})$。一个典型的例子是 $\mathcal{C} = \mathsf{FinKer}$，因此 $\mathsf{det}(\mathcal{C})$ 为 $=\mathsf{Fin}$，而 $\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$ 是斯通空间范畴。

我们常用‘$X \to X''$表示 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 的一个对象，作为 $X \cong \lim_{X \to X'} X'$ 的简写，其中 X' s 属于 $\mathcal{C}$。

令 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 为有限化完备化 $\mathsf{Pro}(\mathcal{C})$ 的全子范畴，它由可经 $\mathsf{det}(\mathcal{C})$ 分解的余滤图的极限组成。等价地，$\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 是下列范畴的全像：

$$\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C})) \longrightarrow \mathsf{Pro}(\mathcal{C}),$$

其中 $\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$ 是笛卡尔幺半的。$\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 是幺半范畴，其

$$X \otimes Y = \lim_{\substack{X \to X' \\ Y \to Y' \\ \text{in } \mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))}} X' \otimes Y',$$

即 $\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$ 中的笛卡尔积 $X \times Y$。每个 $X \in \mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 都带有一个复制结构，由下式给出：

$$X \longrightarrow X' \xrightarrow{\text{copy}} X' \otimes X'$$

对每个 $X \to X'$ in $\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$。

引理1。 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 是一个马尔可夫范畴，其确定性子范畴为$\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$。

证明。 幺半单位是终对象 $1 \in \mathcal{C}$。显然，$\mathsf{Pro}(\mathsf{det}(\mathcal{C}))$ 中的每个映射都是确定性的。设 $f : X \to Y$ 是 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 中的确定性映射。

那么，对于 Pro(det($\mathcal{C}$)) 中的每个 $Y \to Y'$，都存在一个 Pro(det($\mathcal{C}$)) 中的 $X \to X'$，使得

$$X \xrightarrow{f} Y \to Y' \;=\; X \to X' \xrightarrow{f'} Y'$$

对于某个 $f' :\; X' \to Y'$ 属于 $\mathcal{C}$，由此我们得到方程

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{\text{copy}} Y \otimes Y \to Y' \otimes Y' \\ = X \xrightarrow{f} Y \to Y' \xrightarrow{\text{copy}} Y' \otimes Y' \\ = X \to X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\text{copy}} Y' \otimes Y', \end{aligned}$$

and

$$\begin{aligned} X \xrightarrow{\text{copy}} X \otimes X \xrightarrow{f \otimes f} Y \otimes Y \to Y' \otimes Y' \\ = X \xrightarrow{\text{copy}} X \otimes X \to X' \otimes X' \xrightarrow{f' \otimes f'} Y' \otimes Y' \\ = X \to X' \xrightarrow{\text{copy}} X' \otimes X' \xrightarrow{f' \otimes f'} Y' \otimes Y'. \end{aligned}$$

因此，对于某个分解 $X \to X'' \to X'$ 属于 Pro(det($\mathcal{C}$))，我们有

$$X'' \to X' \xrightarrow{f'} Y' \xrightarrow{\text{copy}} Y' \otimes Y' = X'' \to X' \xrightarrow{\text{copy}} X' \otimes X' \xrightarrow{f' \otimes f'} Y' \otimes Y',$$

由此我们推得

$$X'' \to X' \xrightarrow{f'} Y'$$

属于 det($\mathcal{C}$)。由于 $Y \to Y'$ 是任意的，映射 f 属于 Pro(det($\mathcal{C}$))。 □

定理 2. ProDet($\mathcal{C}$) 具有所有小型柯尔莫哥洛夫积。

证明。 给定 $(X_i :\; i \in I)$，令 X 为它们在 Pro(det($\mathcal{C}$)) 中的积，视为 ProDet($\mathcal{C}$) 的一个对象。于是 X 是各个 X_i 的无限张量积，因为 Pro(det($\mathcal{C}$)) →ProDet($\mathcal{C}$) 保持余滤极限，这基本上是由构造决定的。 □

对于 ProDet(FinKer)，还有一个忠实函子 ProDet(FinKer) →Kleisli(R)，它将对象映入紧豪斯多夫空间上 Radon 单子的 Kleisli 范畴。对于对象，该函子将一个余滤图表映至其在紧豪斯多夫空间中的极限：一个 Stone 空间。回忆一下，态射 $f : \lim_i X_i \to \lim_j Y_j$ in ProDet(FinKer) 是指：对于每个 j，选取一个 i 以及 FinKer(X_i, Y_j) 中的一个态射，使相应图表交换，并对 i 的选择取商。因此，对于每个确定性点 $x : 1 \to \lim_i X_i$，即 Stone 空间中的一个点，我们对所有 j 都有一个态射 $p_j(x) \in$ FinKer(1, Y_j)，也就是说，在所有 j 上都有一个分布 $p_j(x)$，且这些分布彼此满足适当的相容性；于是我们构造紧豪斯多夫空间之间的函数 $p : \lim_i X_i \to R(\lim_j Y_j)$，将 x 映至 Stone 空间 $\lim_j X_j$ 上 $p_j(x)$ 的柯尔莫哥洛夫延拓。

由 [1, 例 11.35]，可知，所有可测空间之间的概率核构成的马尔可夫范畴是因果的。因此，由这个忠实嵌入可知，ProDet(FinKer) 是因果的。

我们会在第 2 节重新探讨这一点；在那里，代数将展现出一个不同的视角，并且还提示了一种直接证明因果性的办法。

1.1 补充说明：其他基本结果

引理 3. 如果 $\mathcal{C}$ 是可表示的，那么 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 也是可表示的。

证明。 假设 $\det(\mathcal{C}) \to \mathcal{C}$ 有一个右伴随 $D\colon\ \mathcal{C} \to \det(\mathcal{C})$。由 Pro 的 2-函子性可得一个右伴随 D^+，对应于 $\mathsf{Pro}(\det(\mathcal{C})) \to \mathsf{Pro}(\mathcal{C})$:

$$D^+X = \lim_{X \to X' \in \mathsf{Pro}(\det(\mathcal{C}))} DX'.$$

□

引理 4。 若 $\mathcal{C}$ 几乎处处相容可表示的，则 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 也如此。

证明。 设 $p\colon\ T \to A$ 和 $f,\ g\colon\ A \to X$ 是 $\mathsf{ProDet}(\mathcal{C})$ 中的映射，并假设 $f =_{p\text{-a.s.}} g$，即

$$T \xrightarrow{p} A \to A \otimes A \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes f} A \otimes X = T \xrightarrow{p} A \to A \otimes A \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes g} A \otimes X,$$

或者等价地,

$$\begin{aligned} & T \xrightarrow{p} A \to A \otimes A \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes f^\sharp} A \otimes D^+X \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes\mathsf{samp}} A \otimes X \\ = \quad & T \xrightarrow{p} A \to A \otimes A \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes g^\sharp} A \otimes D^+X \xrightarrow{\mathsf{id}\otimes\mathsf{samp}} A \otimes X. \end{aligned}$$

我们需要证明，可以从等式两边约去因子 $\mathsf{id} \otimes \mathsf{samp}$。显然，只需复合投影 $A \otimes X \to A' \otimes X'$ 即可做到这一点。

□

（注意：引理 3 和引理 4 与 FinKer 无关。）

引理 5。 设 $\mathcal{C} = \mathsf{FinKer}$。则对于 $X, Y \in \mathsf{FinKer},\ L \in \mathsf{ProDet}(\mathsf{FinKer})$，每个核 $p\colon\ X \rightsquigarrow Y \otimes L$ 都承认一个条件分布 $k\colon\ X \otimes Y \rightsquigarrow L$。

证明。 不妨设 $X = 1$。对于 $y \in Y$，$p(*)(y, \top^Z)$ 的值与所选取的确定性投影 $\pi\colon\ L \to Z \in \mathsf{Pro}(\mathsf{Fin})$ 无关。如果它为零，我们任意定义 $k(*, y)$。如果它不为零，设其为 $0 < K \leq 1$，那么对于每个 $\pi\colon\ L \to Z$，我们都有一个取值于 K 的测度 $p(*)(y, -)$，其定义在 Z 上，并在 L 的图表上形成一个核锥。用 K 进行归一化后，它仍然是一个核锥，因此我们定义了一个核 $k\colon\ 1 \otimes Y \rightsquigarrow L$。

我们必须验证这确实是条件分布，不过这很容易。

□

2 布尔代数与效应代数的双重视角

布尔代数与效应代数 令 BAlg 表示布尔代数范畴，其有限代数子范畴 $\mathsf{BAlg}_{\mathsf{fin}}$ 等价于 $\mathsf{Fin}^{\mathsf{op}}$，即有限集范畴及其所有函数范畴的对偶范畴。我们回顾一些一般性质。嵌入

$$\mathsf{BAlg} \hookrightarrow [\mathsf{BAlg}_{\mathsf{fin}}{}^{\mathsf{op}}, \mathsf{Set}] \simeq [\mathsf{Fin}, \mathsf{Set}]$$

是全忠实的，其本质像是可表函子在滤余极限下的闭包。

范畴 EAlg（由效应代数 构成）通常以偏代数的形式呈现，但有时采用以下观点会很有帮助：映射

$$(E, \circledcirc, 0, 1) \mapsto \lambda n.\{(e_1, \ldots, e_n) \in E^n : e_1 \circledcirc \ldots \circledcirc e_n = 1\}$$

将 EAlg 嵌入为 [Fin,Set] 的一个包含 BAlg 的完备反射子范畴

$$\mathsf{BAlg} \hookrightarrow \mathsf{EAlg} \hookrightarrow [\mathsf{Fin}, \mathsf{Set}].$$

我们不会提及以这种方式刻画 EAlg 的精确极限保持条件 [4, 6]。有限布尔代数上的余笛卡尔幺半结构通过 Day卷积扩展为 $\boxplus$ 在 [Fin,Set], 上的对称幺半结构，并且该结构在 BAlg 上限制为余积。虽然这一点并不明显，但将 Day 卷积反射到 EAlg 中后，限制在 EAlg 上便得到经典的效应代数张量积 $\otimes$。尽管包含映射 BAlg $\hookrightarrow$EAlg 通常不保持余积，却会保持始布尔代数 $\mathbb{2} = \{\bot, \top\}$。这使 EAlg 成为一个有趣的半余笛卡尔范畴。

区间效应幺半群 令 $\mathbb{I}$ 表示这样一个效应代数：其底集为实区间 $[0, 1]$，偏和 $a \oplus b$ 在 $a + b \leq 1$时有定义，此时其值等于 $a + b$。作为函子 Fin $\to$ Set,

$$\mathbb{I}(n) = \{\phi \in [0, 1]^n : \sum_{i=1}^{n} \phi(i) = 1\}$$

函数 f 的作用：$m \to n$ 将 $\phi \in \mathbb{I}(m)$ 映射为

$$\lambda i \in n. \sum_{f(j)=i} \phi(j).$$

众所周知，$\mathbb{I}$ 关于 $\otimes$ 构成一个幺半群，其乘法可用 Day卷积表示

$$\int^{a,b \in \mathsf{Fin}} \mathsf{Fin}(a \times b, n) \times \mathbb{I}(a) \times \mathbb{I}(b) \cong (\mathbb{I} \boxplus \mathbb{I})(n) \to \mathbb{I}(n)$$

通过二自然变换

$$\begin{aligned} \mathsf{Fin}(a \times b, n) \times \mathbb{I}(a) \times \mathbb{I}(b) &\to \mathbb{I}(n) \\ (f, \phi, \psi) &\mapsto \mathbb{I}(f)(\lambda(i, j) \in a \times b.\phi(i)\psi(j)) \end{aligned}$$

而单位就是唯一映射 $\mathbb{2} \to \mathbb{I}$。（请记住，$\mathbb{I} \boxplus \mathbb{I}$ 本身并不是效应张量 $\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$, 而是 [Fin，Set] 中的一个对象，其反射到 EAlg 中为$\mathbb{I} \otimes \mathbb{I}$。）

布尔代数上的测度及其之间的核 我们只讨论概率测度。布尔代数 A上的测度（即赋值）是一个映射 m：$A \to \mathbb{I}$ in EAlg，即一个自然变换。这实际上就是通常所说的有限可加测度（或模赋值）。

定义 6。 对于 A，$B \in \mathsf{BAlg}$，一个核 k： $A \rightsquigarrow B$ 是一个映射 k： $B \to \mathbb{I} \otimes A$。

效应幺半群 $\mathbb{I}$ 的模被称为“凸效应代数”，并且有一个关于带有指定强单位元 [3]的有序向量空间的表示定理。就我们的目的而言，以下特例很有用。

引理 7。 设 $A \in \mathsf{BAlg}$。那么 $\mathbb{I} \otimes A$ 同构于效应代数 $\mathsf{M}(A)$，其元素是局部常值函数 $f : S(A) \to [0,1]$，它们从 A 的 *Stone* 空间 $S(A)$ 映到单位区间，并配备显然的偏和运算。

Stone 对偶性告诉我们，$\mathsf{BAlg}^{\mathsf{op}}$ 等价于 CHaus 的一个全子范畴，即

$$\mathsf{BAlg}(B, A) \cong \mathsf{CHaus}(S(A), S(B)).$$

不难验证， $A \in$BAlg 上的测度等价于 $S(A)$上的 Radon 概率测度。因此，我们通过以下观察对 Stone 对偶性作了一点“扩展”:

$$\mathsf{EAlg}(B, \mathbb{I}) \cong \mathsf{CHaus}(1, R(S(B)))$$

其中 R 是 Radon 单子。一般而言，我们只能得到一个单射

$$\mathsf{EAlg}(B, \mathbb{I} \otimes A) \hookrightarrow \mathsf{CHaus}(S(A), R(S(B))).$$

以这种方式得到的 Radon 核 k： $S(A) \to R(S(B))$ 具有如下性质：对于每个开闭集 $C \subseteq S(B)$，函数 $\lambda x \in S(A).k(x, C)$ 都是局部常值函数——在这种情况下，存在一个将 $S(A)$ 划分为开闭集的（必然有限的）划分，使得赋予 C 的测度在每个集合上都是常值。

例 8。 一个不以这种方式产生的斯通空间之间的 Radon 核是 b： $2^{\mathbb{N}} \rightsquigarrow 2$ 其中 $b(\vec{x})$ 是偏置为$\sum_{i \in \mathbb{N}} 2^{-i-1} x_i$的伯努利分布。

布尔核的马尔可夫范畴

定义 9。 令 BKer $=((\mathsf{BAlg})^{\mathbb{I} \otimes (-)})^{\mathsf{op}}$ 为单子 $\mathbb{I} \otimes (-)$ 在 EAlg 上限制到 BAlg 的对象所得到的 Kleisli 范畴的对偶。因此，BKer 的对象是布尔代数，态射 $A \to B$ 是核，即 EAlg 中的映射$B \to \mathbb{I} \otimes A$。

引理 10。 BKer 是一个半笛卡尔幺半范畴。

证明。 效应代数的张量自然地诱导出自由$\mathbb{I}$-模的张量。BKer 是半笛卡尔的，因为幺半单位 $\mathbb{2}$, 是 EAlg 的始对象。

□

BKer 的复制-丢弃结构显然可知。对于布尔代数 A，“共丢弃”映射是唯一的映射

$$\mathbb{2} \to \mathbb{I} \otimes A$$

而“共复制”映射为

$$A \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A$$

将 BAlg 中的余对角映射与 EAlg 中的 $\mathbb{I}$ 单位复合。

$$A \otimes A \cong A +_{\mathsf{BAlg}} A \to A \cong \mathbb{2} \otimes A \to \mathbb{I} \otimes A$$

引理 11. BKer 的确定性子范畴恰好是$\mathsf{BAlg}^{\mathrm{op}} \hookrightarrow \mathsf{BKer}$。

证明。 令 $f\colon B \to \mathbb{I} \otimes A$ 表示 BKer 的一个确定性映射 $A \to B$。我们要证明，对于所有 $b \in B$, $f(b)$ 都具有 $1 \otimes a$ 的形式，其中某个 $a \in A$ 存在。将$f(b)$写成 $\alpha_1 \otimes a_1 + \ldots + \alpha_k \otimes a_k$的形式，其中 a_i两两正交，且$0 \leq \alpha_i \leq 1$。可复制性蕴含

$$\alpha_1 \otimes a_1 + \ldots + \alpha_k \otimes a_k = \alpha_1^2 \otimes a_1 + \ldots + \alpha_k^2 \otimes a_k$$

因此 $\alpha_i \in \{0, 1\}$，证毕。 □

因果性 根据 [1, 例 11，35], 所有可测空间之间概率核构成的马尔可夫范畴是因果的。由于 BKer 通过马尔可夫范畴态射忠实地嵌入其中，BKer 也是因果的。我们也直接论证一下。

假设给定

$$f : B \to \mathbb{I} \otimes A \qquad g : C \to \mathbb{I} \otimes B \qquad h_i : D \to \mathbb{I} \otimes C$$

EAlg 中的 $i = 1$，2，满足 A，B，C，$D \in$ BAlg，使得两个复合映射

$$(h_i \otimes 1_C) \circ \mathsf{copy}_C \circ g \circ f : A \to D \otimes C$$

在 BKer 中相等。我们需要证明这两个复合映射

$$(((h_i \otimes 1_C) \circ \mathsf{copy}_C \circ g) \otimes 1_B) \circ \mathsf{copy}_B \circ f : A \to D \otimes C \otimes B$$

相等。后者实际上是映射 $D \otimes C \otimes B \to \mathbb{I} \otimes A$，因此只需验证它们在形如 $d \otimes c \otimes b$ 的生成元上的取值相等。通过分解 c，我们可以假设 c 足够“小”，使得 $h_i(d) \in \mathbb{I} \otimes C$ 都是形如 $\sum_i \alpha_i x_i$ 的和，并且对每个 i，$c \leq x_i$ 或 $c \wedge x_i = 0_C$ 成立。用 M(C) 表述，这意味着 $h_i(d)$ 在 $S(C)$ 中对应于 c 的既开又闭子集上为常数。因此，映射 $(h_i \otimes 1_C) \circ \mathsf{copy}_C\colon C \to D \otimes C$ 作为函数 $D \otimes C \to \mathbb{I} \times C$，将元素 $d \otimes c$ 发送到某个 $\xi_i \in [0, 1]$ 所对应的 $\xi_i \otimes c$。根据假设，$g \circ f\colon A \to C$ 作为函数 $C \to \mathbb{I} \otimes A$，要么将元素 c 发送到 0，要么发送到 $\xi_1 = \xi_2$。无论哪种情况，都显然有待证等式成立。

柯尔莫哥洛夫积 回顾一下，BAlg 是 [Fin,Set]，中可表示函子的滤余极限闭包，并且根据构造，Day 张量积在每个变量上都保持余极限。因此，包含函子 $\mathsf{BAlg} \hookrightarrow \mathsf{EAlg}$ 保持滤余极限，严格幺半群函子 $\mathsf{BAlg} \to \mathsf{BKer}^{\mathrm{op}}$ 亦然；由此可知，BKer 具有所有小族的无限张量积，这些张量积由 BAlg 中底层对象的余积给出。显然，其边缘分布是确定性的，即 BAlg 具有所有柯尔莫哥洛夫积。

另请参见 Lorenzin 和 Zanasi，从离散走向连续：无限张量积构造， 2025 [5]。

参考文献

[1] Tobias Fritz. 马尔可夫核、条件独立性和充分统计量定理的综合方法。《数学进展》，370:107239，2020。[2] Tobias Fritz 和 Eigil Fjeldgren Rischel. 范畴概率中的无限积与零一律。《组合性》，2，2020年8月。[3] Stanley P. Gudder 和 Sylvia Pulmannov´a. 凸效应代数的表示定理。《查理大学数学评论》，39(4):645–659，1998。[4] Bart Jacobs. 凸性、对偶性与效应。载于《理论计算机科学》，第323卷*IFIP* 信息与通信技术进展，第1–19页。施普林格，柏林，2010。[5] Antonio Lorenzin 和 Fabio Zanasi. 从离散走向连续：无限张量积构造。arXiv:2510.14716。2025年10月。[6] Sam Staton 和 Sander Uijlen. 效应代数、预层、非定域性与情境性。载于 Magnus M. Halld´orsson、Kazuo Iwama、Naoki Kobayashi 和 Bettina Speck mann 编，《自动机、语言与编程》，第401–413页，柏林、海德堡，2015。施普林格柏林海德堡。