arXiv:2512.24419v1 [hep-th] 30 Dec 2025

广义等级-秩对偶、全纯共形场论与非可逆任意子凝聚

Clay Córdova, [1] **Diego García-Sepúlveda,** [1,2] **和 Jeffrey A. Harvey**[1]

[1]莱因韦伯理论物理研究所 & 卡丹诺夫理论物理中心 & 恩里科·费米研究所，芝加哥大学，美国伊利诺伊州芝加哥市，邮编 *60637*[2]学者协会，哈佛大学，美国马萨诸塞州剑桥市，邮编 *02138*电子邮箱：clayc@uchicago.edu，dgarciasepulveda@fas.harvard.edu，jh25@uchicago.edu

摘要：我们研究全纯共形场论与三维拓扑量子场论对偶之间的相互作用，并将层级-秩对偶的范式加以推广。具有卡茨-穆迪子代数的全纯共形场论意味着陈-西蒙斯规范理论之间存在拓扑界面。凝聚一组合适的任意子后，这种界面会产生拓扑场论之间的对偶。我们利用 Schellekens 分类的 $c = 24$全纯理论阐释这一思想，并由此得到一系列新颖的偶发对偶。其中一些对偶必然涉及具有非阿贝尔统计的任意子凝聚，即对不可逆一形式全局对称性进行规范化。我们发现的若干例子可从 $c = 24$ 推广为无穷级数。这包括 Spin$(n^2)_2$ 对偶于一种扭曲二面体群规范理论这一事实。最后，若 -1是模 k的二次剩余，我们便可推导出一列中心荷为 $c = 2(k-1)$、具有由 Spin$(k)_2$ 给出的融合范畴对称性的全纯共形场论；等价地说，其融合范畴对称性由 Tambara-Yamagami 融合范畴的$\mathbb{Z}_2$-等变化给出。

目录

1 引言 **1**

1.1 小中心荷下的全纯共形场论 2 1.2 全纯共形场论、拓扑场论与界面 3 1.3 展开、对偶与任意子凝聚 5 1.4 示例总结 7

2 拓扑界面与任意子凝聚 9

2.1 拉格朗日代数与凝聚任意子的识别 9 2.2 关于时间反演的评论 11

3 示例 **12**

3.1 无凝聚的示例 12 3.2 时间反演不变例子 13 3.3 可逆凝聚示例 14 3.4 不可逆凝聚示例 16

4 $\mathrm{Spin}(n^2)_2$ 作为二面体群规范理论 24 5 中心 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ TY 作为 $\mathrm{Spin}(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ CS 理论 26 一份 Schellekens 列表： $c = 24$ 全纯共形场论 [9] 32 三维拓扑量子场论与可凝聚代数概要 33 任意子数据概要 36 玻色 SU(k)$_1$ 37 的时间反演不变性

1 引言

本文探讨全纯二维共形场论（共形场论）、三维拓扑量子场论与任意子凝聚之间的关系。我们的一个主要目标是阐明：给定一个二维全纯共形场论，如何常常能够通过任意子凝聚的广义规范化过程（即规范化可逆或不可逆的一形式全局对称性 [1]），得到彼此相关的新颖三维拓扑量子场论对偶。我们尤其关注中心荷为 $c = 24$ 的理论，并将以此为例；不过，我们探讨的范式适用于具有一般中心荷的理论。

1.1 小中心荷下的全纯共形场论

有理全纯共形场论是顶点算子代数（顶点算子代数）。从物理角度看，它具有纯手征自由度。因此，中心荷为：

$$c_L = c\ , \quad c_R = 0\ . \tag{1.1}$$

c 的允许取值是量子化的：

$$\text{bosonic:}\quad c = 8\ell\ , \quad \ell \in \mathbb{N}\ , \qquad \text{spin:}\quad c = \frac{\ell}{2}\ , \quad \ell \in \mathbb{N}\ . \tag{1.2}$$

当理论涉及费米子时，自旋理论是自然的结构。特别是，这类理论不是模不变的，而是在保持自旋结构的 $SL(2,\mathbb{Z})$ 子群下保持不变。关于共形场论的近期探索和分类，参见 [2–8]。下文主要关注具有完全模不变性的玻色理论。

全纯共形场论通常与Kac–Moody代数相关。小中心荷下全纯共形场论的分类便是一个例子：

- $c = 8$：存在一个唯一的理论，由定义在李代数 E_8根格上的紧致玻色子构成。该理论的顶点代数为 $\mathrm{E}_{8,1}$，此处以及下文中，第二个指标表示流代数的层级。该共形场论的谱由环面配分函数编码：

$$Z_{c=8}(\tau) = \frac{E_4(\tau)}{\eta(\tau)^8} = q^{-1/3}\left(1 + 248q + 4124q^2 + \cdots\right)\ , \quad q \equiv \exp(2\pi i\tau)\ . \tag{1.3}$$

  特别注意首项幂 $q^{-c/24}$、唯一的单位算符（括号中q^0 的系数），以及自旋为一的守恒流数量（括号中 q 的系数）。

- $c = 16$：存在两个不同的理论，二者同样都与Kac–Moody代数有关：$\mathrm{E}_{8,\,1}\oplus\mathrm{E}_{8,\,1}$ 和 $\mathrm{Spin}(32)_1/\mathbb{Z}_2$.。这两个理论具有相同的谱，即算子维数和简并度集合一致，具体如下：

$$Z_{c=16}(\tau) = \frac{E_4(\tau)^2}{\eta(\tau)^{16}} = q^{-2/3}\left(1 + 496q + 69752q^2 + \cdots\right)\ . \tag{1.4}$$

  这两个理论的区别在于它们的算子乘积系数。

随着中心荷的增加，全纯共形场论的分类会变得愈发复杂。不过，仍有一种情形几乎已得到全面理解，即中心荷 $c = 24$，其开创性分析由 Schellekens 于[9]完成。更具体地说，[9] 对 V_1一个$c = 24$ 全纯顶点算子代数的一维部分进行了分类，并表明共有 71 种可能的选择（包括 V_1 为空的情形）。此外，[9] 猜想每种 V_1 选择都对应一个唯一的顶点算子代数。正如我们将在下文回顾的，这一猜想基本上已经得到证明，因此，按照卡茨-穆迪子代数来组织 $c = 24$ 全纯共形场论仍然很有用。[1]为方便起见，我们在附录A中列出这些理论。

[1]分类中仍有一个缺口：需要证明一个满足 $c = 24$ 且 V_1 为空的全纯理论必然是怪兽共形场论。

现在让我们概述为证明 [9]的猜想所取得的构造性进展。最基本的一类 $c = 24$ 全纯顶点算子代数是格理论（紧致玻色子）。这类格必然是正定、偶且幺模的。秩为24时，Niemeier 将这类格分类为24 个：Leech格， Λ它是唯一一个没有根的此类格；以及23 个 Niemeier 格， Λ_N。这些格由其根唯一确定，也就是说，由长度平方为 2 的元素唯一确定。与这些根相关的 Dynkin图的所有分量秩均为24，类型为 A、D 或 E，且 Coxeter数相同。Niemeier格通过依照“胶码”添加“粘合向量”构造而成。详情见 [10]。

Conway、Parker 和 Sloan 找到了一种从 Leech格 [10]出发构造 Niemeier格 的优雅方法。他们将 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ 中与 Leech格 距离最大的点定义为深洞。对于 Λ 的自同构群下的等价关系，恰好存在 23 个深洞，且它们与 Niemeier格 一一对应。具体而言，对于深洞 d ，对应的 Niemeier格 是 $\Lambda \otimes \mathbb{R}$ 中由 $\{\ell \in \Lambda | (\ell,\ d) \in \mathbb{Z}\}$生成的 $\mathbb{Z}$-模。从 Leech格 构造 Niemeier 格 的方法，引出了顶点算子代数层级上的类似构造。深洞的平移是附着于 Leech 格 的格顶点算子代数 V_Λ 的一个阿贝尔自同构，其阶等于与该深洞对应的 Niemeier格 的 Coxeter数。对该自同构进行规范化，也就是构造轨形理论，便得到与 Niemeier格 N相关联的格顶点算子代数 V_N 。

该顶点算子代数 V_Λ 还具有由 Conway群$Co_0 = \mathrm{Aut}(\Lambda)$的元素构成的自同构。 Co_0 的中心是 $\mathbb{Z}_2$ ，而模去该中心所得的商群是Conway群 Co_1，这是一个有限的单群、散在群。利用 Co_0的无反常子群的轨形构造，可以构造新的 $c = 24$ 全纯顶点算子代数。事实证明，这些轨形构造穷尽了具有 $V_1 \neq \emptyset$的 $c = 24$ 全纯顶点算子代数这一类。关于以如今所谓的Leech格广义深洞来分类 $c = 24$ 顶点算子代数的概述，见 [6, 11–16] 。

1.2 全纯共形场论、拓扑场论与界面

现在，我们将详细阐述全纯共形场论与拓扑场论之间的关系；下文将利用这一关系。

对于任意全纯共形场论，中心荷的量子化取值可以诠释为引力反常。通过流入机制，这一反常可以理解为三维中引力陈-西蒙斯项的层级：

$$I_{\text{inflow}} = \frac{c}{192\pi} \int \mathrm{Tr} \left(\omega \wedge d\omega + \frac{2}{3} \omega \wedge \omega \wedge \omega \right) \equiv (2c)\ \mathrm{CS}_{\text{grav}} \ , \tag{1.5}$$

其中， ω 是自旋联络；我们采用标准约定，即单位引力反常系数对应于手征中心荷的最小费米子值， $c = 1/2$. 引力陈-西蒙斯项是相对论系统最基本的对称性——洛伦兹不变性——所对应的对称性保护拓扑相（SPT）的一个例子。因此，任何全纯共形场论都可以视为这一基本 SPT 的一组一致边缘模。

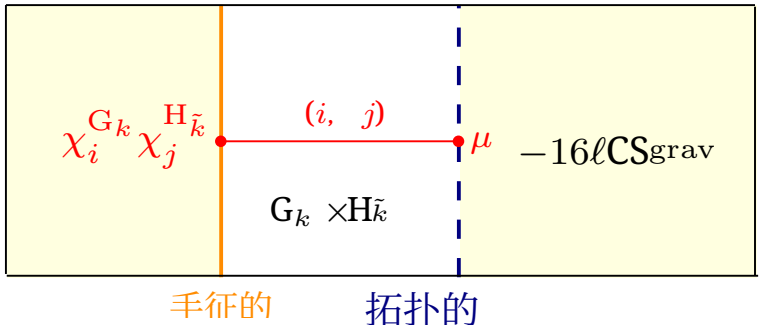


图1：全纯二维共形场论中分解为手征子代数 $G_k \times H_{\tilde{k}}$ 的局部算符，可以通过将一个任意子从标准手征 WZW 边界条件（左侧，橙色）延展至一个拓扑边界条件来构造；该边界条件将 $G_k \times H_{\tilde{k}}$ 与适当的引力陈-西蒙斯项隔开（右侧，蓝色）。指标 $\mu = 0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ N^{ij}$ 指定了特征标配对。黄色背景突出显示了具有平凡任意子数据的区域。

当我们考察它与全纯共形场论的 Kac-Moody 子代数之间的相互作用，并回想 [5, 17] 的一般性讨论时，这一点就变得更加有趣。假设手征代数可以分解为两个（或更多）WZW 形式的手征代数的乘积。我们将后面的因子记为 $G_k \times H_{\tilde{k}}$；如果需要两个以上的因子，其推广显而易见。于是，此类共形场论的配分函数可写为：

$$Z(\tau) = \sum_{i,j} N^{ij} \chi_i^{G_k}(\tau) \chi_j^{H_{\tilde{k}}}(\tau)\ , \tag{1.6}$$

对于 G_k 和 $H_{\tilde{k}}$ 中分别的一组特征标 $\chi_i^{G_k}(\tau)$ 和 $\chi_j^{H_{\tilde{k}}}(\tau)$，以及一组指定特征标配对的非负整数 N^{ij}。

在手征代数特征标层级上的这一结果表明，从三维角度看，全纯共形场论可以很自然地表示为乘积陈-西蒙斯理论的边界 $G_k \times H_{\tilde{k}}$。更具体地说，陈-西蒙斯理论定义在一个薄层上（见图1）。薄层的一端具有非平凡的顶点算子代数，它通过 [18, 19] 的标准 WZW 手征边界条件实现。与此同时，在薄层的另一端，陈-西蒙斯理论终止于一个拓扑边界，或者更准确地说，终止于通往引力陈-西蒙斯 SPT 的拓扑界面（1.5）。因此，借助顶点算子代数的自旋一流，顶点算子代数与引力陈-西蒙斯项之间的体-边对应得到了扩展，成为涉及陈-西蒙斯理论的加厚体-边对应。还要注意，拓扑边界将体线算符的端点限制为仅包含（1.6）中指定的那部分主场，从而从三维拓扑量子场论的角度生成全纯共形场论中适当的局域算符。

也可以从对称性拓扑量子场论 [1, 20–27] 的范式来理解陈-西蒙斯理论在薄层上的出现。在这种设定中，所关注的二维物理理论置于一个三维拓扑量子场论的边界上，而该理论是某个融合范畴的 Drinfeld 中心 $\mathcal{C}$。这个融合范畴是该理论的一种广义（通常不可逆的）全局对称性

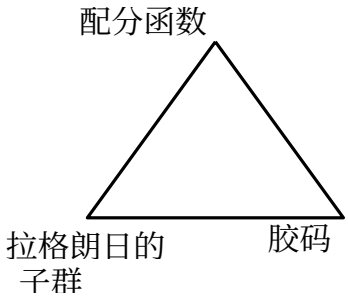


图 2：Niemeier 全纯共形场论中三个不同概念的等价性。配分函数可以用手征代数的扩展来表示，这也对应于对初始共形场论的一种阿贝尔对称性的规范化。用三维拓扑量子场论的术语来说，这对应于一个拉格朗日子群，或对相应拓扑量子场论的阿贝尔一形式对称性进行规范化。同时，同一个配分函数也可以由该格的胶码得到。

边界 [28]。融合范畴 $\mathcal{C}$ 可视为源自体区中与边界平行的拓扑线。此外，哪些此类线在边界处非平凡，其确切模式取决于终止薄层的拓扑边界条件，而该条件决定了对称性拓扑量子场论的一个拉格朗日代数。按照构造， $\mathcal{C}$ 中的任何此类线不仅是拓扑的，事实上还与对应于陈-西蒙斯理论的顶点算子代数的整个卡茨-穆迪子代数对易。通过这种方式，以陈-西蒙斯理论薄层的形式呈现全纯共形场论，使边界的某些广义对称性显而易见。关于全纯共形场论的非可逆对称性的近期研究，参见 [7, 29–32] 。特别地，我们指出，对于 Niemeier 全纯共形场论这一简单情形，相应的拓扑量子场论和边界融合范畴对称性全都是阿贝尔的，而此分析将若干不同概念等同起来。（见图2。）

1.3 展开、对偶与任意子凝聚

在上一节中，我们说明了如何利用全纯共形场论及其卡茨-穆迪子代数，为相应的（乘积）陈-西蒙斯理论构造拓扑边界。现在，我们将借此推导拓扑量子场论之间的对偶。

最重要的思路很简单，就是折叠技巧：$\mathsf{G}_k \times \mathsf{H}_{\tilde{k}}$的拓扑边界等价于$\mathsf{G}_k$ 与时间反演理论$\mathsf{H}_{-\tilde{k}}$之间的拓扑界面。从本质上说，这种拓扑界面体现了界面两侧拓扑量子场论之间的对偶。例如，一条G_k 中的线缺陷穿过界面后，会在$\mathsf{H}_{-\tilde{k}}$ 中成为一条新的线，从而建立起线缺陷之间的映射。

一个熟悉的例子可以说明这一构造。考虑顶点算子代数的共形嵌入：

$$\mathrm{SU}(N)_k \times \mathrm{U}(k)_N \subset \mathrm{U}(Nk)_1 \ , \tag{1.7}$$

它源自 Nk 个二维复费米子的分解。遵循上一节的一般逻辑，这一手征代数嵌入产生了一个拓扑界面

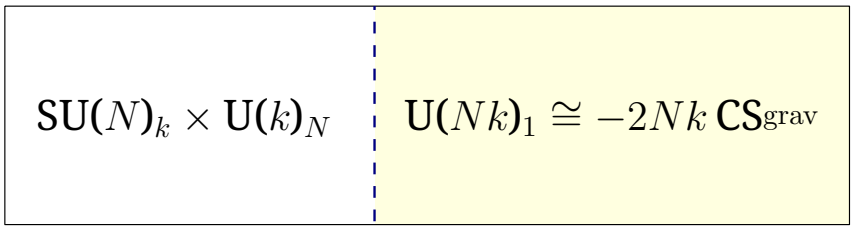


图3：陈-西蒙斯理论之间的拓扑界面（蓝色）$\mathrm{SU}(N)_k \times \mathrm{U}(k)_N$与$\mathrm{U}(Nk)_1$ 源自共形嵌入（1.7）。黄色背景用于强调$\mathrm{U}(Nk)_1 \cong -2Nk\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}$ 具有平凡任意子数据。

，连接相关的陈-西蒙斯理论 [33]（另见 [34, 35]），如图3所示。

现在我们回顾一下，$\mathrm{U}(Nk)_1$ 实际上是一个可逆拓扑场论。这意味着它具有平凡任意子数据，并等价于适当倍数的引力陈-西蒙斯项。[2] 因此，事实上，上文推导出的界面是一个拓扑边界，可以将其展开，从而得到图$\mathrm{SU}(N)_k$ 与$\mathrm{U}(k)_{-N}$ 之间的界面，如图4所示。这就是著名的层级-秩对偶性：

$$\mathrm{SU}(N)_k \cong \mathrm{U}(k)_{-N} \ , \tag{1.9}$$

该关系成立，至多相差一个可由上述论证推导出的引力陈-西蒙斯项的倍数。

类似的论证可以从拓扑界面的角度，帮助我们理解其他规范群 [36–39] 的能级-秩对偶。

这个简单的例子掩盖了若干我们必须在下文一般性讨论中面对的特征：

- 共形嵌入（1.7）用到了费米子，因此一般而言，只有将上述拓扑量子场论视为自旋理论时才成立。相比之下，下文中的许多对偶例子对玻色型拓扑量子场论也成立。

- 一般来说，拓扑界面并不会在线缺陷之间建立一一对应的映射。相反，界面两侧理论中的线之间可以存在多种不同的拓扑结点。

上文的第二点对拓扑界面等同于拓扑量子场论对偶这一观点构成了严峻挑战。幸运的是，这一主张的某种变体是正确的，但它引入了一个新的概念性要素：任意子凝聚。

一般而言，任意子凝聚是一种规范化过程：我们将给定的拓扑量子场论$\mathcal{T}$ 修改为新的拓扑量子场论 $\mathcal{T}/\mathcal{A}$。对 $\mathcal{A}$ 取商，在形式上就是一个凝聚任意子（线）的代数，而定义 $\mathcal{T}/\mathcal{A}$ 的显式过程则涉及对 $\mathcal{A}$中适当的线网络求和。若要能够进行规范化， $\mathcal{A}$ 中的线除其他要求外，还必须全部是玻色子且具有平凡的互统计。最熟悉的任意子凝聚示例，是 $\mathcal{A}$ 由具有阿贝尔融合规则的线组成的情形。在这种情况下，相关的线定义了

[2]我们记录所采用的约定如下：

$$\mathrm{U}(N)_1 \equiv -2N\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \ , \qquad \mathrm{SO}(M)_1 \equiv -M\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \ . \tag{1.8}$$

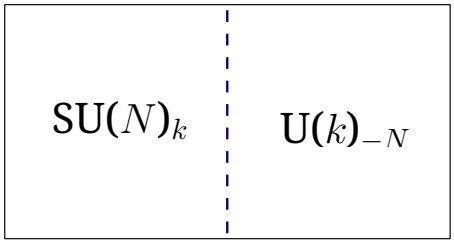


图 4：SU(N)$_k$ 与 U(k)$_{-N}$ 之间的拓扑界面（蓝色）意味着层级-秩对偶 SU(N)$_k$ ≅U(k)$_{-N}$ 的存在（差一个引力 Chern-Simons 项）。

一形式全局对称性与任意子凝聚，简单来说，就是对这一形式全局对称性进行规范化。然而，更一般地说，$\mathcal{A}$ 中的线具有非阿贝尔统计和不可逆融合规则，而定义 $\mathcal{T}/\mathcal{A}$ 的规范化操作称为不可逆或非阿贝尔任意子凝聚。这就是三维拓扑量子场论中非可逆一形式全局对称性的正确规范化概念。我们在附录B 中简要回顾这一过程，并请参阅 [40–51] 了解更多形式化论述及应用。

在讨论拓扑界面和拓扑量子场论的对偶时，任意子凝聚发挥着核心作用。正如我们在第2节中将以更形式化的方式阐述的那样，虽然拓扑界面通常并不意味着存在对偶，但它确实意味着规范化理论之间存在对偶。具体而言，若 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 是由一个拓扑界面隔开的拓扑量子场论，那么就存在可规范化代数 $\mathcal{A}_i \subset \mathcal{T}_i$，并且有以下基本等价关系：

$$\text{Topological Interface Between } \mathcal{T}_1 \ \& \ \mathcal{T}_2 \Longleftrightarrow \mathcal{T}_1/\mathcal{A}_1 \cong \mathcal{T}_2/\mathcal{A}_2 \ . \tag{1.10}$$

在经典的秩-能级对偶中，例如式（1.9）所示的例子，关键结论（1.10）通常通过规范化两个规范群共有的“公共中心”子群来体现。这意味着它表现为规范群上的阿贝尔商。相比之下，在通过拓扑界面实现层级-秩对偶的最一般版本中，例如 [45] 中讨论并将在下文出现的情形，必然会出现非阿贝尔任意子凝聚。回到我们通过全纯共形场论及其卡茨-穆迪子代数构造拓扑界面的做法，通常可得到如下对偶关系：

$$\mathrm{G}_k/\mathcal{A}_{\mathrm{G}} \cong \mathrm{H}_{-\tilde{k}}/\mathcal{A}_{\mathrm{H}} \ , \tag{1.11}$$

其中 $\mathcal{A}_{\mathrm{G}}$ 和 $\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$ 对应于对某些通常为非阿贝尔的任意子进行规范化；我们将在第 2 节中识别这些任意子。

1.4 示例总结

我们的分析主要在于识别上述一般范式的具体实例，该范式将全纯共形场论与拓扑量子场论的对偶联系起来。下文中，我们经常在 $c = 24$ 的背景下应用这一范式，同时也着重介绍一些适用于一般中心荷的实例。此处我们概述若干精选示例，推导过程留待正文详述：[3]

[3]我们用符号 ≅ 表示在相差一个 SPT 的意义下相等，例如相差引力陈-西蒙斯项（1.5）的某个倍数。正文中，我们通常会明确指出这个反项，但仍使用相同的记号。

- 不涉及任意子凝聚的示例：

$$\mathrm{E}_{8,2} \cong \mathrm{Spin}(17)_{-1} \ , \qquad \mathrm{E}_{7,2} \cong \mathrm{Spin}(11)_{-1} \times \mathrm{F}_{4,-1} \ . \tag{1.12}$$

- 蕴含时间反演对称性的示例：[4]

$$\mathrm{SU}(13)_1 \cong \mathrm{SU}(13)_{-1} \ , \qquad \mathrm{SU}(7)_1 \times \mathrm{SU}(7)_1 \cong \mathrm{SU}(7)_{-1} \times \mathrm{SU}(7)_{-1} \ , \tag{1.13}$$

以及：

$$\frac{\mathrm{Spin}(7)_2 \times \mathrm{Spin}(7)_2}{\mathbb{Z}_2} \cong \frac{\mathrm{Spin}(7)_{-2} \times \mathrm{Spin}(7)_{-2}}{\mathbb{Z}_2} \ . \tag{1.14}$$

这些成果补充了关于时间反演不变拓扑量子场论的现有文献 [37, 52–55]。

- 具有阿贝尔任意子凝聚（一形式对称性规范化）的示例：

$$\frac{\mathrm{USp}(16)_1}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{F}_{4,-1} \times \mathrm{F}_{4,-1} \ , \qquad \frac{\mathrm{E}_{6,3}}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{G}_{2,-1} \times \mathrm{G}_{2,-1} \times \mathrm{G}_{2,-1} \ , \qquad \frac{\mathrm{SU}(9)_2}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{F}_{4,-2} \ , \tag{1.15}$$

以及以下无限序列：

$$\frac{\mathrm{SU}(2n^2)_1}{\mathbb{Z}_n} \cong \mathrm{E}_{7,(-1)^n} \cong \mathrm{SU}(2)_{(-1)^{n+1}} \ . \tag{1.16}$$

- 涉及非阿贝尔任意子凝聚的示例：[5]

$$\frac{\mathrm{E}_{7,3}}{\mathcal{A}} \cong \mathrm{SU}(6)_{-1} \ , \qquad \frac{\mathrm{USp}(14)_2}{\mathcal{A}} \cong \mathrm{SU}(4)_{-1} \ , \qquad \frac{\mathrm{F}_{4,6}}{\mathcal{A}} \cong \mathrm{SU}(3)_{-2} \ . \tag{1.17}$$

以及以下适用于奇数 n的无限模式：

$$\frac{\mathrm{Spin}(2n^2)_2}{\mathcal{A}_n} \cong \mathrm{SU}(8)_{-1} \ , \tag{1.18}$$

其中，在（1.17）和（1.18）中的代数 $\mathcal{A}$ 和 $\mathcal{A}_n$ 在第 3.4 节中给出。

- 一列无限的对偶：

$$\mathrm{Spin}(n^2)_2 \cong \text{twisted Dihedral group, } \mathrm{D}_n, \text{ gauge theory} \ , \tag{1.19}$$

其中，具体的扭曲项在第 4 节中给出。

- 最后，给定扩张阿贝尔群 $\mathbb{Z}_{2n+1}$, 的 Tambara-Yamagami 融合范畴[6] $TY[\mathbb{Z}_{2n+1}]$，我们推导出由其 Drinfeld 中心 $Z[TY[\mathbb{Z}_{2n+1}]]$ 定义的三维拓扑量子场论与一种陈-西蒙斯理论之间的等价关系：

$$Z[TY[\mathbb{Z}_{2n+1}]] \cong \mathrm{Spin}(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1} \ , \tag{1.20}$$

[4]在附录D中，我们证明 $SU(k)_1$ 是时间反演不变的玻色拓扑量子场论，只要 k 为奇数，且 -1 是模 k. 的二次剩余。这是 [52] 关于自旋拓扑量子场论的相关结果的玻色提升。[5]在下面的第二个和第三个例子中，我们检查了一致性条件，但没有进行完整推导。参见第 3.4 节。[6]例如，参见 [28, 56] 其中讨论了 Tambara-Yamagami 融合范畴与自对偶性的关系。

重现了 [57–59] 的观察。正如我们将在第 5 节探讨的，关系式 (1.20) 解释了为何 Spin$(2n+1)_2$ 包含拓扑线缺陷；在规范化一种类似于 [60–62] 中示例的非可逆全局对称性时，这些缺陷表现为自对偶缺陷。利用 (1.20)，我们证明，当 -1 是模 k 的二次剩余时，Spin$(k)_2\times$Spin$(k)_2$ 存在时间反演对称拓扑边界。（关于密切相关的讨论，参见 [63] 。）[7] 相应地，这意味着存在一系列中心荷为 $c=2(k-1)$、具有融合范畴对称性的全纯共形场论，其对称性由 Spin$(k)_2$ 给出，或者等价地，由 $TY[\mathbb{Z}_k]$. 的 $\mathbb{Z}_2$-等变化给出

2 拓扑界面与任意子凝聚

本节将更详细地介绍通过任意子凝聚建立拓扑界面与对偶之间联系（1.10）。

主要技术结果取自模张量范畴（MTCs）领域的文献；模张量范畴为三维拓扑量子场论的概念提供了形式化表述。在这一背景下，人们常常会用到模张量范畴之间 Witt 等价的概念（下文将对此进行讨论）。Davydov、Müger、Nikshych 和 Ostrik 给出了以下结果（命题 5.15） [64]:[8]

命题1。 设 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_2$ 为模张量范畴。那么，以下条件等价：

- $[\mathcal{T}_1]=[\mathcal{T}_2]$，即 $\mathcal{T}_1$ 和 $\mathcal{T}_1$ 是 *Witt* 等价的。
- 存在连通 *étale* 代数 $\mathcal{A}_1\in\mathcal{T}_1$、 $\mathcal{A}_2\in\mathcal{T}_2$ 以及一个编织等价 e

$$(\mathcal{T}_1)^0_{\mathcal{A}_1}\cong(\mathcal{T}_2)^0_{\mathcal{A}_2}\ , \tag{2.1}$$

其中 $(\mathcal{T}_i)^0_{\mathcal{A}_i}$ 是一个数学记号，表示对$\mathcal{A}_i$ 中的 $\mathcal{T}_i$代数进行规范化后得到的模张量范畴。更精确的细节见附录 B 。为了从物理角度理解这一结果，我们回顾一下（例如参见 [17]）：当且仅当相关的拓扑量子场论之间存在拓扑界面时，模张量范畴 $\mathcal{T}_1$ 与 $\mathcal{T}_1$ 是 Witt 等价的。同时，为了理解上述第二点，我们必须回顾一下，连通 étale 代数描述了三维拓扑量子场论中一形式对称性的规范化。简要总结见附录 B 。在某些情况下，规范化是阿贝尔的，可以解释为改变规范群的整体形式（当 $\mathcal{T}_1$ 或 $\mathcal{T}_2$ 由某个李群描述时），正如标准的能级-秩对偶 [36–39]所示。然而，重要的是，这并非最一般的情形；上述规范化可能涉及非阿贝尔任意子。在这种情况下，我们无法像改变规范群的整体形式那样简单地加以解释，但正如我们将在下面的具体例子中看到的（另见 [45]），这种非阿贝尔凝聚可以完全明确地呈现出来。命题1 的这一物理解释证明了（1.10）。

2.1 拉格朗日代数与凝聚任意子的识别

我们上述的讨论严格论证了这样一种观点：带有 Kac-Moody 子代数的全纯共形场论会导出陈-西蒙斯理论之间的拓扑界面，以及 cor-

[7]对于 k 奇数，若每个素因子模 4 都同余于 1，则 -1 是模 k 的二次剩余。[8]事实上， [64] 在命题 5.15 中还包含第三个要点，但本文不会用到这一点。

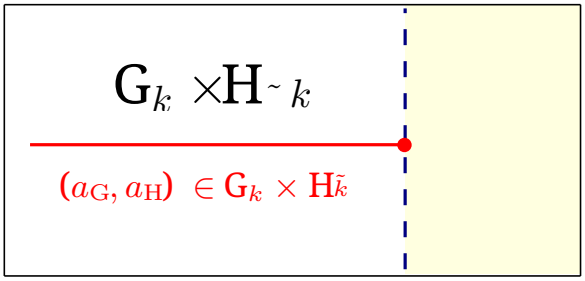


图5：全纯手征代数的 $G_k \times H_{\tilde{k}}$ 分解中的任意子，在 $G_k \times H_{\tilde{k}}$ 陈-西蒙斯理论中定义了一个拉格朗日代数。这确定了可以终止于拓扑边界上的线。黄色背景突出显示了具有平凡任意子数据的区域。

任意子凝聚时相应的对偶：

$$G_k/\mathcal{A}_G \cong H_{-\tilde{k}}/\mathcal{A}_H \ , \tag{2.2}$$

对于某些可凝聚代数 $\mathcal{A}_G$ 和 $\mathcal{A}_H$（并且相差适当倍数的引力陈-西蒙斯反项）。要完成我们的讨论，还需要确定代数 $\mathcal{A}_G$ 和 $\mathcal{A}_H$。

为此，我们按如下步骤进行。首先请注意，在展开之前，$G_k \times H_{\tilde{k}}$ 的拓扑边界本身可以用一组规范化任意子来刻画，这组任意子称为拉格朗日代数 [17, 43, 64, 65]。这是一组极大的可规范化任意子，使得凝聚后所得理论变为平凡（即可逆）。具体而言，拉格朗日代数中的线 $(a_G,\ a_H) \in G_k \times H_{\tilde{k}}$ 恰好是那些可以终止于拓扑边界的线，如图5所示。用特征分解（1.6）来表示，这些对恰好是配分函数求和中出现的那些对。

展开后，这一对 (a_G, a_H) 意味着界面一侧的线 a_G 属于 G_k，另一侧的线 a_H 属于 $H_{-\tilde{k}}$，且两者之间存在拓扑交点。特别地，为提取对偶陈述（2.2）中出现的代数，我们令 $a_H = 1$，并确定所有与 a_G^0 在 $H_{-\tilde{k}}$中的恒等线存在拓扑交点的线。于是，对偶中 G_k 内生成可凝聚代数的任意子，恰好就是这组与恒等线存在交点的任意子（见图 6）：

$$\mathcal{A}_G = \sum a_G^0. \tag{2.3}$$

$H_{-\tilde{k}}$ 也有类似的结论。下文将看到这一对应关系的多个例子。请注意，在最一般的情形下，$\mathcal{A}_G$ 和 $\mathcal{A}_H$ 可以同时非平凡。[9]然而，在本文研究的具体情形中，至多只有一个代数是非平凡的。

[9]例如，由共形嵌入 $SU(3)_6 \times SU(2)_{16} \subset E_{8,1}$ 产生的对偶 $PSU(3)_6 \cong SO(3)_{-8}$，要求在两个理论中都进行凝聚 [39]。

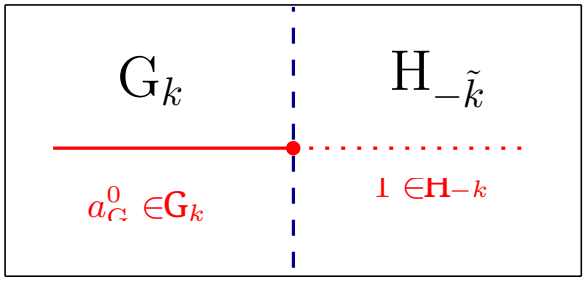


图 6：展开后，拉格朗日代数会产生一组特定的 G 中任意子 $a^0_{\mathrm{G}} \in$，$_k$。根据定义，它们与右侧 $\mathrm{H}_{-\tilde{k}}$ 的单位对象耦合。我们提出，这组任意子生成了 G_k 中的 Frobenius 代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{G}}$，它出现在由此得到的层级-秩对偶中。类似的观察使我们能够构造 $\mathrm{H}_{-\tilde{k}}$中的 Frobenius 代数 $\mathcal{A}_{\mathrm{H}}$。

2.2 关于时间反演的评论

特别值得关注的一类例子，是理论 $\mathcal{T}$与其时间反演$\mathcal{T}$. 之间的对偶。任何此类对偶都会导致理论 $\overline{\mathcal{T}}$具有时间反演对称性。

承接前文讨论，如果 $\mathcal{T}$ 具有时间反演不变性，就必然存在一个拓扑界面，将 $\mathcal{T}$ 与其时间反演 $\mathcal{T}$分隔开来。然而，根据命题 1 之后的讨论，我们知道，通常这类界面意味着时间反演不变性仅在 $\mathcal{T}$中的凝聚作用下成立：

$$\mathcal{T}/\mathcal{A} \cong \overline{\mathcal{T}/\mathcal{A}}\,. \tag{2.4}$$

如果采用我们关于（2.3）附近拉格朗日代数的观察，这一结果还可以改进。也就是说，若展开后，在 $\mathcal{T}$中唯一能与恒等线连接的线是 $\mathcal{T}$中的恒等线（反之亦然），那么该关系两边的代数都会平凡化，从而得到：

$$\mathcal{T} \cong \overline{\mathcal{T}}. \tag{2.5}$$

我们还可以利用 [40] 的陪集反演定理，严格推导出（ [45, 66]2.5）（另见相关讨论）。具体而言，若有模张量范畴 $\mathcal{T}_1$、 $\mathcal{T}_2$ 和 $\mathcal{T}_3$ 满足

$$\mathcal{T}_1 = \frac{\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_3}{\mathcal{A}_1} \tag{2.6}$$

对于模张量范畴 $\mathcal{A}_1$ 中的某个代数 $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_3$，只要 $(\alpha_2,\ 1)$ 或 $(1,\ \beta_3)$ 这种形式的元素中，唯一的一个是恒等线 $\mathcal{T}_2 \times \mathcal{T}_3$ $(1,\ 1)$，就可以对（2.6）求解，得到 $\mathcal{T}_2$或$\mathcal{T}_3$。具体而言：

$$\mathcal{T}_2 = \frac{\mathcal{T}_1 \times \overline{\mathcal{T}_3}}{\mathcal{A}_2}\,, \qquad \mathcal{T}_3 = \frac{\mathcal{T}_1 \times \overline{\mathcal{T}_2}}{\mathcal{A}_3}\,, \tag{2.7}$$

对于某些代数 $\mathcal{A}_2$，$\mathcal{A}_3$ 分别属于 $\overline{\mathcal{T}_1} \times \mathcal{T}_3$ 和 $\overline{\mathcal{T}_1} \times \mathcal{T}_2$。

现在考虑对 $\mathcal{T}_1$ 平凡模张量范畴应用陪集反演公式，并取 $\mathcal{T}_2 = \mathcal{T}_3 = \mathcal{T}$。这与我们的设定相符：两个理论的乘积具有一个边界，并且

$\mathrm{E}_{8,2}$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$\mathbf{w}_7$	$d_1 = 1$	$h_1 = 3/2$
2	$\mathbf{w}_1$	$d_2 = \sqrt{2}$	$h_2 = 15/16$

表1：$\mathrm{E}_{8,2}$的数据。

我们将 $\mathcal{A}_1$ 解释为定义该边界条件的拉格朗日的。利用前面提到的关于代数 $\mathcal{A}_1$ 的假设，我们得到：

$$\mathcal{T} = \frac{\overline{\mathcal{T}}}{\mathcal{A}_2} = \frac{\overline{\mathcal{T}}}{\mathcal{A}_3} \,. \tag{2.8}$$

对等式两边取量子维数（见（B.11））后，我们得到：

$$\dim(\mathcal{T}) = \frac{\dim\left(\overline{\mathcal{T}}\right)}{\dim(\mathcal{A}_2)^2} = \frac{\dim\left(\overline{\mathcal{T}}\right)}{\dim(\mathcal{A}_3)^2} \,. \tag{2.9}$$

由于 $\mathcal{T}$ 和 $\mathcal{T}$ 的量子维数相等，这意味着代数 $\mathcal{A}_2$ 和 $\mathcal{A}_3$ 是平凡的。因此：

$$\mathcal{T} \cong \overline{\mathcal{T}} \,, \tag{2.10}$$

这确实就是上文所述的结果。

3 示例

本节将通过从全纯共形场论构造拓扑界面，考察对偶的具体示例。我们首先讨论无需通过阿贝尔或非阿贝尔任意子进行规范化的示例。其中一类特殊示例对应于时间反演对称拓扑量子场论，我们将对此单独进行讨论。随后，我们考察涉及阿贝尔规范化的示例；这类示例可解释为将规范群的整体形式修改为适当的非单连通形式。最后，我们考察需要对不可逆一形式对称性进行规范化的示例（非阿贝尔任意子凝聚）。本节所使用的模张量范畴的谱和融合规则由 KAC 软件程序 [67]获得。

3.1 无凝聚的示例

我们先来看一些不需要对任何一形式对称性进行规范化的例子。一个直接考察即可清楚看出的例子取自 [9]编号 62（见附录A）。根据我们先前的讨论，并利用表1和附录C所示的线算符谱，可以很容易地验证：

$$\mathrm{E}_{8,2} \cong \mathrm{Spin}(17)_{-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \,. \tag{3.1}$$

$\mathrm{E}_{7,2}$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$2\mathbf{w}_6$	$d_1 = 1$	$h_1 = 3/2$
2	$\mathbf{w}_7$	$d_2 = \sqrt{2}$	$h_2 = 21/16$
3	$\mathbf{w}_6$	$d_3 = (1+\sqrt{5})/\sqrt{2}$	$h_3 = 57/80$
4	$\mathbf{w}_5$	$d_4 = (1+\sqrt{5})/2$	$h_4 = 7/5$
5	$\mathbf{w}_1$	$d_5 = (1+\sqrt{5})/2$	$h_5 = 9/10$

表 2：$\mathrm{E}_{7,2}$ 的数据。

同时，如果我们进行费米子化（左侧通过自旋为 3/2 的流扩张，而右侧则通过 1/2矢量线扩张），便可得到：作为一种自旋理论，$\mathrm{E}_{8,2}$ 是一个纯引力陈-西蒙斯项：

$$\mathrm{E}_{8,2} \cong -31\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}\,. \tag{3.2}$$

一个不涉及凝聚的第二个、更复杂的例子可以由[9]元素 53（见附录 A）得到。具体如下：

$$\mathrm{E}_{7,2} \cong \mathrm{Spin}(11)_{-1} \times \mathrm{F}_{4,-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.3}$$

利用表 2 和附录 C所示的线算符谱，同样很容易验证这一点。与前一个例子类似，我们可以将两边都费米子化：左侧通过扩展加入 3/2自旋初级场，右侧则通过扩展加入矢量型自旋 1/2 线。由此得到自旋层级-秩对偶：

$$\mathrm{E}_{7,2} \cong \mathrm{F}_{4,-1} - 37\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}\,. \tag{3.4}$$

3.2 时间反演不变的例子

以下是几个玻色时间反演不变性的例子，均由 [9]得到：

$$\mathrm{SU}(13)_1 \cong \mathrm{SU}(13)_{-1}, \tag{3.5}$$

与透明费米子（即 $\mathrm{SO}(0)_1$）张量化后，利用层级-秩对偶 $\mathrm{SU}(N)_k \cong \mathrm{U}(k)_{-N}$，我们重现了 $U(1)_{13}$ 在 [52] 中分类的时间反演。其他若干例子则来自 [9]，对 [37] 中论证的推广，从而由共形嵌入找到时间反演不变拓扑量子场论。下面列举几个有趣的例子：

$$\mathrm{SU}(7)_1^2 \cong \mathrm{SU}(7)_{-1}^2, \tag{3.6}$$

$$\frac{\mathrm{Spin}(7)_2 \times \mathrm{Spin}(7)_2}{\mathbb{Z}_2} \cong \frac{\mathrm{Spin}(7)_{-2} \times \mathrm{Spin}(7)_{-2}}{\mathbb{Z}_2}. \tag{3.7}$$

当然，通过与透明费米子进行张量积，这些例子中的任何一个都可以提升为自旋理论的对偶。关于无法通过

$E_{7,1}$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$\mathbf{w}_6$	$d_1 = 1$	$h_1 = 3/4$

表 3：$E_{7,1}$ 的数据。

这种方式获得的自旋理论的更多例子，可以从费米手征共形场论的分类中找到，例如参见 [3, 5]。由此我们可以得到，例如

$$\frac{\mathrm{SU}(3)_1 \times \mathrm{SU}(6)_2}{\mathbb{Z}_2} \cong \frac{\mathrm{SU}(3)_{-1} \times \mathrm{SU}(6)_{-2}}{\mathbb{Z}_2}, \tag{3.8}$$

其中规范化通过费米流进行。类似地：

$$\frac{\mathrm{USp}(12)_1}{\mathbb{Z}_2} \cong \frac{\mathrm{USp}(12)_{-1}}{\mathbb{Z}_2}. \tag{3.9}$$

也可以用类似的方法构造其他示例。

3.3 可逆凝聚示例

本小节展示一些必须规范化某种阿贝尔一形式对称性的示例。通过应用我们在附录 [68, 69], 中回顾的三步规范化规则，可以直接验证这些对偶关系B。

$A_{17,\ 1} \times E_{7,1}$

我们先来看一个容易验证、涉及纯阿贝尔模张量范畴的示例：

$$\frac{\mathrm{SU}(18)_1}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{E}_{7,-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.10}$$

对应于 [9] 第 65 条（见附录A）。为验证这一点，我们可以从附录C读取 $\mathrm{SU}(18)_1$ 的谱，应用B中回顾的三步程序，并与表3中给出的 $E_{7,1}$ 的谱进行比较。秩六和秩十二反对称表示具有整数拓扑自旋，因此我们可以规范化由这些线赋予的$\mathbb{Z}_3$ 对称性。这样一来，唯有秩为$3n$ 的反对称表示中的线保持规范不变，具体为 $n = 0$，1、2、3、4、5。由于规范对称性，线 $n = 0$、2、4 彼此等同，同理， $n = 1$、3、5 也彼此等同。正如预期，我们发现只剩下两条线，它们与 E_7的谱完全一致-1。

此外，通过研究共形嵌入，可以推导出能级-秩对偶 $\mathrm{E}_{7,1} \cong \mathrm{SU}(2)_{-1} - 16\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \cong \mathrm{SU}(8)_1/\mathbb{Z}_2$ (参见 [39])。因此，我们可以将对偶（3.10）加入这一系列能级-秩对偶中，并写作：

$$\frac{\mathrm{SU}(18)_1}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{E}_{7,-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \cong \mathrm{SU}(2)_1 - 32\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \cong \frac{\mathrm{SU}(8)_{-1}}{\mathbb{Z}_2} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \tag{3.11}$$

$\mathrm{USp}(16)_1$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$\mathbf{w}_8$	$d_1 = 1$	$h_1 = 2$
2	$\mathbf{w}_7$	$d_2 = \sqrt{2+\phi}$	$h_2 = 77/40$
3	$\mathbf{w}_1$	$d_3 = \sqrt{2+\phi}$	$h_3 = 17/40$
4	$\mathbf{w}_6$	$d_4 = (1+\phi)$	$h_4 = 9/5$
5	$\mathbf{w}_2$	$d_5 = (1+\phi)$	$h_5 = 4/5$
6	$\mathbf{w}_5$	$d_6 = \sqrt{3+4\phi}$	$h_6 = 13/8$
7	$\mathbf{w}_3$	$d_7 = \sqrt{3+4\phi}$	$h_7 = 9/8$
8	$\mathbf{w}_4$	$d_8 = 2\phi$	$h_8 = 7/5$

表4：$\mathrm{USp}(16)_1$ 的数据。在此表中，$\phi = (1+\sqrt{5})/2$。

事实上，显式地进行规范化后，我们可以推导出

$$\frac{\mathrm{SU}(2n^2)_1}{\mathbb{Z}_n} + 2(2n^2-1)\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \cong \mathrm{E}_{7,(-1)^n} + (-1)^n 14\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \cong \mathrm{SU}(2)_{(-1)^{n+1}} + (-1)^{n+1} 2\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.12}$$

这将模式（3.11）推广到任意非负整数 n。

$\mathrm{C}_{8,\ 1} \times (\mathrm{F}_{4,1})^2$

下一个例子对应于涉及阿贝尔规范化非阿贝尔模张量范畴的层级-秩对偶。更确切地说，我们取第 52 [9]个元素（见附录A）。$\mathrm{USp}(16)_1$ 的谱见表4，而$\mathrm{F}_{4.1}$ 的谱总结于附录C。我们得到：

$$\frac{\mathrm{USp}(16)_1}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{F}_{4,-1} \times \mathrm{F}_{4,-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}} \tag{3.13}$$

按照三步程序（见附录B），我们看到，标记为$\mathbf{w}_7$,$\mathbf{w}_1$, $\mathbf{w}_5$, $\mathbf{w}_3$ 的线在 $\mathbb{Z}_2$ 中心对称性下并非规范不变（对应于最高权为$\mathbf{w}_8$的线），因此从谱中移除。与此同时，$\mathbf{w}_6$,$\mathbf{w}_2$彼此识别，而线$\mathbf{w}_4$ 分裂为两条线，从而正确恢复了 $\mathrm{F}_{4,-1} \times \mathrm{F}_{4,-1}$ 的谱，其量子维数和拓扑自旋也正确无误。

$\mathrm{E}_{6,3} \times (\mathrm{G}_{2,1})^3$

现在我们给出一个涉及非阿贝尔模张量范畴阿贝尔规范化的最终示例。该示例对应于 [9]（见附录A），我们得到：

$$\frac{\mathrm{E}_{6,3}}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{G}_{32,\ -1} - 48\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}\,. \tag{3.14}$$

如前所述，我们可以利用表5中给出的$\mathrm{E}_{6,3}$ 的谱，并应用三步程序来检验这一表达式。大多数线都不是规范不变的，因此会从谱中移除。例外的是表示$(3\mathbf{w}_1)$ 和$(3\mathbf{w}_5)$中的线，它们正在被规范化，因而与恒等线等同；还有线$(\mathbf{w}_6)$、$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2)$

$E_{6,3}$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$3\mathbf{w}_1$	$d_1 = 1$	$h_1 = 2$
2	$3\mathbf{w}_5$	$d_2 = 1$	$h_2 = 2$
3	$\mathbf{w}_6$	$d_3 = (1+2\phi)$	$h_3 = 4/5$
4	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2$	$d_4 = (1+2\phi)$	$h_4 = 9/5$
5	$\mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_5$	$d_5 = (1+2\phi)$	$h_5 = 9/5$
6	$\mathbf{w}_5$	$d_6 = (2+\phi)$	$h_6 = 26/45$
7	$2\mathbf{w}_1$	$d_7 = (2+\phi)$	$h_7 = 56/45$
8	$\mathbf{w}_1 + 2\mathbf{w}_5$	$d_8 = (2+\phi)$	$h_8 = 86/45$
9	$\mathbf{w}_5 + \mathbf{w}_6$	$d_9 = (1+3\phi)$	$h_9 = 13/9$
10	$\mathbf{w}_2$	$d_{10} = (1+3\phi)$	$h_{10} = 10/9$
11	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_4$	$d_{11} = (1+3\phi)$	$h_{11} = 16/9$
12	$2\mathbf{w}_5$	$d_{12} = (2+\phi)$	$h_{12} = 56/45$
13	$\mathbf{w}_1$	$d_{13} = (2+\phi)$	$h_{13} = 26/45$
14	$2\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_5$	$d_{14} = (2+\phi)$	$h_{14} = 86/45$
15	$\mathbf{w}_4$	$d_{15} = (1+3\phi)$	$h_{15} = 10/9$
16	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6$	$d_{16} = (1+3\phi)$	$h_{16} = 13/9$
17	$\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_5$	$d_{17} = (1+3\phi)$	$h_{17} = 16/9$
18	$\mathbf{w}_3$	$d_{18} = 3\phi$	$h_{18} = 8/5$
19	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_5$	$d_{19} = 3(1+\phi)$	$h_{19} = 6/5$

表 5：$E_{6,3}$ 的数据。在此表中，$\phi = (1+\sqrt{5})/2$。

以及$(\mathbf{w}_4 + \mathbf{w}_5)$，它们彼此等同（属于同一个 $\mathbb{Z}_3$ 轨道），还有线$(\mathbf{w}_3)$ 和$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_5)$，它们各自都是被规范化的 $\mathbb{Z}_3$的不动点，因此分裂为三条线。结果确实与附录C中给出的$G_{2,1}$ 的谱相符。

3.4 非可逆凝聚示例

自旋$(18)_2 \times SU(8)_1$

现在我们转向一些需要通过非可逆（非阿贝尔）任意子凝聚来建立能级-秩对偶的示例。我们考虑的第一个示例是

$$\frac{\mathrm{Spin}(18)_2}{\mathcal{A}} = \mathrm{SU}(8)_{-1} \tag{3.15}$$

这对应于 [9]（见附录A）。$\mathrm{Spin}(18)_2$ 的谱列于表6中。显然，谱中存在两个玻色子，但仅凝聚玻色子（$\mathbf{w}_6$）且不计重数满足量子维数约束（B.11）。或者，根据第2节中的讨论，并考察相应的模不变量 [9]，也可以得到这一代数。因此，我们预期正确的

$\mathrm{Spin}(18)_2$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$2\mathbf{w}_s$	$d_1 = 1$	$h_1 = 9/4$
2	$2\mathbf{w}_1$	$d_2 = 1$	$h_2 = 1$
3	$2\mathbf{w}_c$	$d_3 = 1$	$h_3 = 9/4$
4	$\mathbf{w}_c$	$d_4 = 3$	$h_4 = 17/16$
5	$\mathbf{w}_s$	$d_5 = 3$	$h_5 = 17/16$
6	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s$	$d_6 = 3$	$h_6 = 25/16$
7	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_c$	$d_7 = 3$	$h_7 = 25/16$
8	$\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c$	$d_8 = 2$	$h_8 = 20/9$
9	$\mathbf{w}_1$	$d_9 = 2$	$h_9 = 17/36$
10	$\mathbf{w}_2$	$d_{10} = 2$	$h_{10} = 8/9$
11	$\mathbf{w}_7$	$d_{11} = 2$	$h_{11} = 77/36$
12	$\mathbf{w}_6$	$d_{12} = 2$	$h_{12} = 2$
13	$\mathbf{w}_3$	$d_{13} = 2$	$h_{13} = 5/4$
14	$\mathbf{w}_4$	$d_{14} = 2$	$h_{14} = 14/9$
15	$\mathbf{w}_5$	$d_{15} = 2$	$h_{15} = 65/36$

表 6：$\mathrm{Spin}(18)_2$ 的数据。

代数为

$$\mathcal{A} = (0) + (\mathbf{w}_6). \tag{3.16}$$

让我们检查这确实如此。首先，我们注意到，线 $(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)$、$(\mathbf{w}_1)$、$(\mathbf{w}_2)$、$(\mathbf{w}_7)$、$(\mathbf{w}_4)$、$(\mathbf{w}_5)$ 都是自共轭的，且不会分裂；这是因为它们的自融合包含一份恒等线，但不包含 $(\mathbf{w}_6)$，例如 $(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c) \times (\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c) = (0) + (2\mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}_2)$。因此，我们有：

$$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c) \to (\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1, \quad (\mathbf{w}_1) \to (\mathbf{w}_1)_1, \quad (\mathbf{w}_2) \to (\mathbf{w}_2)_1 \tag{3.17}$$

对于 $(\mathbf{w}_7)$、$(\mathbf{w}_4)$ 和 $(\mathbf{w}_5)$，情况也类似。

现在，如果我们分析 $(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c) \times (\mathbf{w}_2) = (\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c) + (\mathbf{w}_6) \to (0) + \ldots$，便可推得 $(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1$ 和 $(\mathbf{w}_2)_1$ 必须彼此识别，因为 $(\mathbf{w}_6)$ 会凝聚。按照类似的步骤，我们可以推得以下识别关系：

$$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1 \cong (\mathbf{w}_2)_1 \cong (\mathbf{w}_4)_1, \quad (\mathbf{w}_1)_1 \cong (\mathbf{w}_7)_1 \cong (\mathbf{w}_5)_1. \tag{3.18}$$

与此同时，我们看到 $(\mathbf{w}_6) \times (\mathbf{w}_6) = (0) + (2\mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}_6) \to 2(0) + \ldots$，因此 $(\mathbf{w}_6)$ 分裂为两个分量（其中一个是恒等线，因为 $(\mathbf{w}_6)$ 凝聚），并且注意到 $(2\mathbf{w}_1) \times (\mathbf{w}_6) = (\mathbf{w}_6) \to (0) + \ldots$，我们推断 $(2\mathbf{w}_1)_1$ 属于 $(\mathbf{w}_6)$ 的分裂。因此，我们得到 $(\mathbf{w}_6) \to (0) + (2\mathbf{w}_1)_1,$，类似的论证表明 $(\mathbf{w}_3) \to (2\mathbf{w}_s)_1 + (2\mathbf{w}_c)_1$。同样，我们推断 $(\mathbf{w}_c)$、$(\mathbf{w}_s)$、$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)$、$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_c)$ 分裂为两个分量，但由于此时这些线并非自共轭，我们发现

$$(\mathbf{w}_c) \to (\mathbf{w}_c)_1 + (\mathbf{w}_c)_2, \quad (\mathbf{w}_s) \to \overline{(\mathbf{w}_c)}_1 + \overline{(\mathbf{w}_c)}_2, \tag{3.19}$$

$$(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)\to(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2,\quad(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_c)\to\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1+\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2 \tag{3.20}$$

接下来，我们需要确定如何为右侧赋予量子维数。为此，我们计算 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_c)=(0)+(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)+(\mathbf{w}_2)+(\mathbf{w}_4)+(\mathbf{w}_6)$，以便将共轭对象配对。分裂之后，我们得到：

$$\begin{aligned}&(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1\\&\quad+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2=2\,(0)+(2\mathbf{w}_1)_1+3\,(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1\end{aligned} \tag{3.21}$$

右侧的恒等线显然必须分别赋给 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1$ 和 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2$。现在，由于 $\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2$ 和 $\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1$ 的量子维数必须相等，唯一一致的可能性是 $\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1=(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1$。现在，我们可以尝试将 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1=(0)+(2\mathbf{w}_1)_1$ 和 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2=(0)+(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1$，赋给它们，但这与量子维数守恒 $d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}=d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1}+d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2}$ 相矛盾。因此，唯一一致的融合规则是：

$$\begin{aligned}&(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1=(0),\quad(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2=(0)+(2\mathbf{w}_1)_1+(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1,\\&(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1=(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1,\end{aligned} \tag{3.22}$$

这尤其意味着 $d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1}=1$ 和 $d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2}=2$。类似的分析可得 $d_{(\mathbf{w}_c)_1}=1$ 和 $d_{(\mathbf{w}_c)_2}=2$。也容易验证，没有其他线与以下任何一项等同：$(\mathbf{w}_c)_1,(\mathbf{w}_c)_2,(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1,(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2$。不过，这一集合中的线之间可能存在等同关系。

为验证这一点，考虑融合 $(\mathbf{w}_s)\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)=(2\mathbf{w}_1)+(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)+(\mathbf{w}_2)+(\mathbf{w}_4)+(\mathbf{w}_6)$。分裂后：

$$\begin{aligned}&\overline{(\mathbf{w}_c)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1+\overline{(\mathbf{w}_c)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2+\overline{(\mathbf{w}_c)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\\&\quad+\overline{(\mathbf{w}_c)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=0+2\,(2\mathbf{w}_1)_1+3\,(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1.\end{aligned} \tag{3.23}$$

因此，我们必须有 $(\mathbf{w}_c)_1\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_1=(0)$ 或 $(\mathbf{w}_c)_2\times\overline{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)}_2=(0)+\cdots$。我们可以排除第一种可能，因为这意味着我们必须将 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1\cong(\mathbf{w}_c)_1$ 识别为同一对象。然而，$(2\mathbf{w}_1)\times(\mathbf{w}_c)=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)\Rightarrow(2\mathbf{w}_1)_1\times(\mathbf{w}_c)_1+(2\mathbf{w}_1)_1\times(\mathbf{w}_c)_2=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=(\mathbf{w}_c)_1+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2$。随后，通过匹配量子维数 $(2\mathbf{w}_1)_1\times(\mathbf{w}_c)_1=(\mathbf{w}_c)_1\Rightarrow(2\mathbf{w}_1)_1=(0)$，可知这并不成立，因为 $(2\mathbf{w}_1)$ 不会凝聚。因此我们推得 $(\mathbf{w}_c)_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=(0)+\cdots$，这意味着识别 $(\mathbf{w}_c)_2\cong(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2$。整理量子维数后，可以直接看出所得的融合规则为

$$\begin{aligned}&\overline{(\mathbf{w}_c)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=(0)+(2\mathbf{w}_1)_1+(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1,\quad\overline{(\mathbf{w}_c)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1=(2\mathbf{w}_1)_1,\\&\overline{(\mathbf{w}_c)}_1\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_2=\overline{(\mathbf{w}_c)}_2\times(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_s)_1=(\mathbf{w}_s+\mathbf{w}_c)_1,\end{aligned} \tag{3.24}$$

$\mathrm{Spin}(18)_2$		
$\mathrm{Spin}(18)_2$ 线	h 模 1	分裂
(0)	0	(0)
$(2\mathbf{w}_s)$	$1/4$	$(2\mathbf{w}_s)_1$
$(2\mathbf{w}_1)$	0	$(2\mathbf{w}_1)_1$
$(2\mathbf{w}_c)$	$1/4$	$(2\mathbf{w}_c)_1$
$(\mathbf{w}_c)$	$1/16$	$\underline{(\mathbf{w}_c)_1 + (\mathbf{w}_c)_2}$
$(\mathbf{w}_s)$	$1/16$	$(\mathbf{w}_c)_1 + (\mathbf{w}_c)_2$
$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)$	$9/16$	$\underline{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)_1 + (\mathbf{w}_c)_2}$
$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_c)$	$9/16$	$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)_1 + (\mathbf{w}_c)_2$
$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)$	$2/9$	$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1$
$(\mathbf{w}_1)$	$17/36$	$(\mathbf{w}_1)_1$
$(\mathbf{w}_2)$	$8/9$	$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1$
$(\mathbf{w}_7)$	$5/36$	$(\mathbf{w}_1)_1$
$(\mathbf{w}_6)$	0	$(0) + (2\mathbf{w}_1)_1$
$(\mathbf{w}_3)$	$1/4$	$(2\mathbf{w}_s)_1 + (2\mathbf{w}_c)_1$
$(\mathbf{w}_4)$	$5/9$	$(\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c)_1$
$(\mathbf{w}_5)$	$29/36$	$(\mathbf{w}_1)_1$

表 7</style}：凝聚 (0)($\mathbf{w}_6$) 后 $\mathrm{Spin}(18)_2$ 线的分裂（完成等同识别后）。

并且我们识别出 $(\mathbf{w}_c)_2 \cong (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)_2$。总之，我们得到了表中总结的分裂与识别结果7。

显然，所有非阿贝尔线都会禁闭，而阿贝尔线具有正确的自旋，从而重现 $\mathrm{SU}(8)_{-1}$。剩下的只是验证融合环。为此，我们考虑融合 $(\mathbf{w}_c) \times (\mathbf{w}_c) = (2\mathbf{w}_c) + (\mathbf{w}_1) + (\mathbf{w}_3) + (\mathbf{w}_5) + (\mathbf{w}_7)$，并考察分裂后得到的方程：

$$(\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_c)_1 + (\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_c)_2 + (\mathbf{w}_c)_2 \times (\mathbf{w}_c)_1 + (\mathbf{w}_c)_2 \times (\mathbf{w}_c)_2 = (2\mathbf{w}_s)_1 + 2\,(2\mathbf{w}_c)_1 + 3\,(\mathbf{w}_1)_1. \tag{3.25}$$

匹配量子维数后，我们要么有 $(\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_c)_1 = (2\mathbf{w}_s)_1$，要么有 $(\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_c)_1 = (2\mathbf{w}_c)_1$。第一种情况是不一致的，因为否则我们有 $(\mathbf{w}_c)_1 \times ((\mathbf{w}_c)_1 \times (2\mathbf{w}_c)) = (\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)_1 = (0)$，因此必须将 $(\mathbf{w}_c)_1$ 与 $(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s)_1$ 识别，而我们已经推导出这种情况不会发生。因此，我们有 $(\mathbf{w}_c)_1 \times (\mathbf{w}_c)_1 = (2\mathbf{w}_c)_1$，由此很容易推导出融合环的其余部分，并且它确实重现了 $\mathrm{SU}(8)_{-1}$ 的融合环。至此，我们完成了对 $\mathrm{Spin}(18)_2/\mathcal{A} \cong \mathrm{SU}(8)_{-1}$ 的检验，其中代数 $\mathcal{A}$ 定义于 (3.16) 中。

我们可以按如下方式推广前面的例子。首先，为了猜测一个一般模式，值得注意的是

$$\mathrm{Spin}(2)_2 = \mathrm{U}(1)_8 \cong \mathrm{SU}(8)_{-1}, \tag{3.26}$$

自旋$(2m)_2$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$2\mathbf{w}_s$	$d_1 = 1$	$h_1 = m/4$
2	$2\mathbf{w}_1$	$d_2 = 1$	$h_2 = 1$
3	$2\mathbf{w}_c$	$d_3 = 1$	$h_3 = m/4$
4	$\mathbf{w}_s$	$d_4 = \sqrt{m}$	$h_4 = \frac{(2m-1)}{16}$
5	$\mathbf{w}_c$	$d_5 = \sqrt{m}$	$h_5 = \frac{(2m-1)\,16}{}$
6	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_s$	$d_6 = \sqrt{m}$	$h_6 = \frac{(2m-1)\,16}{} + \frac{1}{2}$
7	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_c$	$d_7 = \sqrt{m}$	$h_7 = \frac{(2m-1)\,16}{} + \frac{}{2}$
8	$\mathbf{w}_s + \mathbf{w}_c$	$d_8 = 2$	$h_8 = \frac{m^2-1}{4m}$
$8+i$	$\mathbf{w}_i$	$d_{8+i} = 2$	$h_{8+i} = \frac{i}{2} - \frac{i^2}{4m}$

表 8：$\mathrm{Spin}(2m)_2$ 的数据。

其中，第一个等号源于这样一个事实：$\mathrm{Spin}(2)_k = \mathrm{U}(1)_{4k}$ 对于一般整数 k，而第二个表达式则来自玻色子级秩对偶$\mathrm{SU}(N)_k \cong \mathrm{U}(k)_{-N}$只要 N 为偶数且 $Nk = 0$ 模 8 [37, 70]。[10] 特别要注意，（3.26）和（3.15）都符合以下无限模式：

$$\frac{\mathrm{Spin}(2n^2)_2}{\mathcal{A}_n} \cong \mathrm{SU}(8)_{-1}, \tag{3.27}$$

当 n 时。对于 $n = 1$，左侧的代数是平凡的，该表达式还原为（3.26）；而对于 $n = 3$，它还原为（3.15），其中代数由（3.16）给出。

为检验前述模式是否正确，考虑以下关于代数的设想：

$$\mathcal{A}_n = (0) + \sum_{i=1}^{(n-1)/2} (\mathbf{w}_{2ni}). \tag{3.28}$$

事实上，利用表 8中给出的模张量范畴数据，很容易验证上文出现的$\mathrm{Spin}(2n^2)_2$ 中的所有线都是玻色子。此外，也很容易根据该表验证，上述玻色子集合满足量子维数约束（B.11）。

我们进一步回顾，$\mathbf{SU(8)}_1$ 具有可规范化的 $\mathbb{Z}_2$ 一形式对称性，由此导出对偶 [39]

$$\frac{\mathrm{SU}(8)_{-1}}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{SU}(2)_1. \tag{3.29}$$

若（3.27）正确，则由该表达式可推知，$\mathrm{Spin}(2n^2)_2$ 与$\mathrm{SU}(2)_1$ 之间必然存在拓扑界面，对任意奇数 n皆如此。事实上，我们也可以通过另一种方式直接证明该拓扑界面的存在：注意到阿贝尔拓扑量子场论

$$\mathrm{SU}(2n^2)_1 \times \mathrm{SU}(2)_{-1} \tag{3.30}$$

[10]作为自旋拓扑量子场论，层级-秩对偶对任意正整数 N 和 k [36] 都成立。

有一个由荷线生成的拉格朗日子群 $(n,1)$。在 $\mathrm{SU}(2n^2)_1$ 中对电荷共轭进行规范化，得到 $\mathrm{Spin}(2n^2)_2$, ，因此通过展开，我们找到了 $\mathrm{Spin}(2n^2)_2$ 与 $\mathrm{SU}(2)_1$ 之间所需的拓扑界面。利用命题1，我们还可得知，必定存在一个代数 $\mathcal{B}_n$ ，使得对偶（3.29）可以进一步扩展为

$$\frac{\mathrm{Spin}(2n^2)_2}{\mathcal{B}_n} \cong \frac{\mathrm{SU}(8)_{-1}}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{SU}(2)_1. \tag{3.31}$$

代数的存在 $\mathcal{A}_n$ 也意味着存在一个相应的代数 $\mathcal{B}_n$ ，它将$\mathrm{Spin}(2n^2)_2$ 映射到 $\mathrm{SU}(2)_1$。为此，只需将由 $\mathcal{A}_n$ 生成的界面与由 $\mathbb{Z}_2$ 将 $\mathrm{SU}(8)_{-1}$ 规范化到 $\mathrm{SU}(2)_1$所生成的界面叠加起来。按照第 2节的讨论，我们得到代数的如下形式 $\mathcal{B}_n$:

$$\mathcal{B}_n = (0) + (2\mathbf{w}_1) + 2\sum_{i=1}^{(n-1)/2} (\mathbf{w}_{2ni}). \tag{3.32}$$

如上所述，我们可以验证分解中的所有线都是玻色子，并且满足量子维数约束（B.11）。我们能够得到这样的代数并不令人意外，因为上述论证（3.31）保证了这一点。重要的观察是，这种代数的存在也可以独立地从代数 $\mathcal{A}_n$的存在推导出来，这为（3.27）提供了非平凡的验证。

$\mathrm{E}_{7,3}$ ×$\mathrm{SU}(6)_1$

最后，我们以最后一个详细示例结束这一系列讨论；在这个案例中，我们需要进行非阿贝尔任意子凝聚。这个最后的示例取自 [9]（见附录 A），其内容为对偶

$$\frac{\mathrm{E}_{7,3}}{\mathcal{A}} \cong \mathrm{SU}(6)_{-1}. \tag{3.33}$$

表 $\mathrm{E}_{7,3}$ 的数据见表9。按照我们的讨论，我们凝聚表 $(\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7)$ 记号中的线9，它是谱中唯一的非平凡玻色子。此外，我们在没有重数的情况下凝聚它，因为这正是唯一与量子维数约束（B.11）相容的可能性。或者，这也是按照第 2 节中的讨论，并考察在 [9] 中得到的相应模不变量后所获得的代数。因此，我们有:

$$\mathcal{A} = (0) + (\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7). \tag{3.34}$$

下面说明这确实给出了 $\mathrm{SU}(6)_{-1}$。首先，我们注意到 $\mathrm{E}_{7,3}$ 的所有线都是自共轭的，因此可以通过计算 $i \times i$ 形式的融合来检验它们是否分裂。我们得到以下分裂（在进行任何识别之前）：

$$(0) \to (0), \quad (3\mathbf{w}_6) \to (3\mathbf{w}_6)_1, (\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7) \to (0) + (\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7)_2, (\mathbf{w}_7) \to (\mathbf{w}_7)_1 + (\mathbf{w}_7)_2,$$

$$(2\mathbf{w}_6) \to (2\mathbf{w}_6)_1, \quad (\mathbf{w}_6) \to (\mathbf{w}_6)_1, \quad (\mathbf{w}_5) \to (\mathbf{w}_5)_1 + (\mathbf{w}_5)_2 + (\mathbf{w}_5)_3$$

$E_{7,3}$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	0	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
1	$3\mathbf{w}_6$	$d_1 = 1$	$h_1 = 9/4$
2	$\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7$	$d_2 = d$	$h_2 = 2$
3	$\mathbf{w}_7$	$d_3 = d$	$h_3 = 5/4$
4	$2\mathbf{w}_6$	$d_4 = d - 1$	$h_4 = 10/7$
5	$\mathbf{w}_6$	$d_5 = d - 1$	$h_5 = 19/28$
6	$\mathbf{w}_5$	$d_6 = d + 1$	$h_6 = 4/3$
7	$\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6$	$d_7 = d + 1$	$h_7 = 19/12$
8	$\mathbf{w}_1$	$d_8 = d - 1$	$h_8 = 6/7$
9	$\mathbf{w}_5 + \mathbf{w}_6$	$d_9 = d - 1$	$h_9 = 59/28$
10	$\mathbf{w}_2$	$d_{10} = d - 1$	$h_{10} = 12/7$
11	$\mathbf{w}_4$	$d_{11} = d - 1$	$h_{11} = 55/28$

表 9：$E_{7,3}$ 的数据，其中 $d = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{21})$。

$$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6) \to (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_1 + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_2 + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_3, (\mathbf{w}_1) \to (\mathbf{w}_1)_1,$$

$$(\mathbf{w}_5 + \mathbf{w}_6) \to (\mathbf{w}_5 + \mathbf{w}_6)_1, \quad (\mathbf{w}_2) \to (\mathbf{w}_2)_1, \quad (\mathbf{w}_4) \to (\mathbf{w}_4)_1. \tag{3.35}$$

识别不会分裂的线更容易。例如，若我们计算

$$(2\mathbf{w}_6) \times (\mathbf{w}_1) = (\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7) + (2\mathbf{w}_6) + (\mathbf{w}_5) \to (0) + \cdots, \tag{3.36}$$

我们发现 $(2\mathbf{w}_6)_1$ 必须与 $(\mathbf{w}_1)_1$，共轭，但由于这些线不会分裂，且在凝聚前是自共轭的，我们发现必然有

$$(2\mathbf{w}_6)_1 \cong (\mathbf{w}_1)_1. \tag{3.37}$$

以同样的方式继续：

$$(2\mathbf{w}_6)_1 \cong (\mathbf{w}_1)_1 \cong (\mathbf{w}_2)_1, \quad (\mathbf{w}_6)_1 \cong (\mathbf{w}_5 + \mathbf{w}_6)_1 \cong (\mathbf{w}_4)_1, \tag{3.38}$$

而这些线显然是受限的。

现在我们检查那些不分裂的线是否会作为分裂线的分量出现。例如：

$$(3\mathbf{w}_6) \times (\mathbf{w}_7) = (\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7) \to (0) + \cdots, \tag{3.39}$$

因此，$(\mathbf{w}_7)$ 的一个分量必须与 $(3\mathbf{w}_6)_1$ 相对应，因为后者的线是自共轭的：$(\mathbf{w}_7)_1 \cong (3\mathbf{w}_6)_1$。对其余各线进行类似处理后，我们得到表 10中总结的模式。

我们还注意到，$(\mathbf{w}_5) \times (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)$ 在 $E^{7,3}$ 中不包含 (0) 或 $(\mathbf{w}_6 + \mathbf{w}_7)$，因此 $(\mathbf{w}_5)_2, (\mathbf{w}_5)_3, (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_2, (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_3$ 不会与其他线或彼此被识别。检查量子维数后，我们看到 $d_{(\mathbf{w}_5)_2} = d_{(\mathbf{w}_5)_3} = d_{(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_6)_2} =$

$E_{7,3}$		
$E_{7,3}$ 线	h 模 1	分裂
(0)	0	(0)
$(3\mathbf{w}_6)$	$1/4$	$(3\mathbf{w}_6)_1$
$(\mathbf{w}_6+\mathbf{w}_7)$	0	$(0)+(2\mathbf{w}_6)_1$
$(\mathbf{w}_7)$	$1/4$	$(3\mathbf{w}_6)_1+(\mathbf{w}_6)_1$
$(2\mathbf{w}_6)$	$3/7$	$(2\text{宽}_6)_1$
$(\mathbf{w}_6)$	$19/28$	$(\mathbf{w}_6)_1$
$(\mathbf{w}_5)$	$1/3$	$(2\text{宽}_6)_1+(\text{宽}_5)_2+(\text{宽}_5)_3$
$(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)$	$7/12$	$(\mathbf{w}_6)_1+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_2+(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_3$
$(\mathbf{w}_1)$	$6/7$	$(2\text{宽}_6)_1$
$(\mathbf{w}_5+\mathbf{w}_6)$	$3/28$	$(\mathbf{w}_6)_1$
$(\mathbf{w}_2)$	$5/7$	$(2\text{宽}_6)_1$
$(\mathbf{w}_4)$	$27/28$	$(\mathbf{w}_6)_1$

表 10</style}：凝聚 (0) 后 E线的分裂 ($\mathbf{w}_6+\mathbf{w}_7$)（完成识别后）。

$d_{(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_3}=1$。此外，很容易看出，(0)，$(3\mathbf{w}_6)_1$,$(\mathbf{w}_5)_2$,$(\mathbf{w}_5)_3$,$(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_2$,$(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_3$ 均不发生禁闭，并且它们的拓扑自旋恰好符合将其识别为 $SU(6)_{-1}$ 中的线。剩下的就是检查融合环。

为此，我们首先需要计算 $(2\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_2=(\mathbf{w}_5)_2\times(2\mathbf{w}_6)_1$ 和 $(2\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_3\times(2\mathbf{w}_6)_1$，，我们可以通过计算 $(2\mathbf{w}_6)\times(\mathbf{w}_5)$ 并比较分裂前后的结果得到它们。很容易验证，这给出：

$$(2\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_2=(2\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_2\times(2\mathbf{w}_6)_1=(\mathbf{w}_5)_3\times(2\mathbf{w}_6)_1=(2\mathbf{w}_6)_1. \quad (3.40)$$

现在，为了求出涉及 $(\mathbf{w}_5)_2$ 和 $(\mathbf{w}_5)_3$ 的融合环，我们计算 $(\mathbf{w}_5)\times(\mathbf{w}_5)$，并比较分裂前后的结果。消去刚刚计算出的贡献后，我们得到：

$$(\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_2=(\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_3\times(\mathbf{w}_5)_2=(\mathbf{w}_5)_3\times(\mathbf{w}_5)_3=2(0)+(\mathbf{w}_5)_2+(\mathbf{w}_5)_3 \quad (3.41)$$

现在，$(\mathbf{w}_5)_2$ 和 $(\mathbf{w}_5)_3$ 必须互为共轭，否则我们会得到 $(\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_3$ 或 $(\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_2$,，这两种情况都会导致错误地得出 $(\mathbf{w}_5)_2$ 或 $(\mathbf{w}_5)_3$ 是恒等线的结论。总之，与 (3.41) 一致的唯一答案是

$$(\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_2=(\mathbf{w}_5)_3,\quad (\mathbf{w}_5)_3\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_2,\quad (\mathbf{w}_5)_2\times(\mathbf{w}_5)_3=(\mathbf{w}_5)_3\times(\mathbf{w}_5)_2=(0), \quad (3.42)$$

这正是重现 $SU(6)_{-1}$ 的 $\mathbb{Z}_3$ 子融合环的正确答案。最后，考虑 $(3\mathbf{w}_6)\times(\mathbf{w}_5)=(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)$，我们发现 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_2=(3\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_2$ 以及 $(\mathbf{w}_1+\mathbf{w}_6)_3=(3\mathbf{w}_6)_1\times(\mathbf{w}_5)_2$，它们重现了 $SU(6)_{-1}$ 的整个融合环。

其他示例

本节最后提及几个能级-秩对偶的例子，我们将直接引用这些例子而不详细验证。例如，我们可以验证的第一个例子对应于 [9] 中的第 36 项。具体如下：

$$\frac{\mathrm{SU}(9)_2}{\mathbb{Z}_3} \cong \mathrm{F}_{4,-2} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.43}$$

其中， $\mathbb{Z}_3$ 对应于 $\mathbb{Z}_9$ 中心的 $\mathbb{Z}_3$ 子群。

另外两个可以直接检验出需要非阿贝尔凝聚才能使能级-秩对偶成立的示例是

$$\mathrm{USp}(14)_2/\mathcal{A} \cong \mathrm{SU}(4)_{-1} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.44}$$

其代数为

$$\mathcal{A} = (0) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_7) + (2\mathbf{w}_5) + (\mathbf{w}_2 + \mathbf{w}_4). \tag{3.45}$$

and

$$\mathrm{F}_{4,6}/\mathcal{B} = \mathrm{SU}(3)_{-2} - 48\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{3.46}$$

其代数为

$$\mathcal{B} = (0) + (4\mathbf{w}_4) + (3\mathbf{w}_3) + (\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_2). \tag{3.47}$$

显然，和 $\mathcal{B}$ 都满足量子维数约束（B.11）。

4 $\mathrm{Spin}(n^2)_2$ 作为二面体群规范理论

既然我们已经给出了源自全纯共形场论的对偶的具体例子，接下来便进一步考察全纯共形场论的一些一般模式，这些模式或许可以通过更详细地研究其对称性结构来确定。

为阐明本节的结果，我们来研究陈-西蒙斯理论 $\mathrm{Spin}(25)_2$（ [9]中的第 57 个条目），它是$c = 24$ 处最简单的全纯共形场论实例之一，但并不对应于 Niemeier 理论。正如第 1 节和第 2 节所述，这一事实保证了 $\mathrm{Spin}(25)_2$ 存在一个拓扑边界条件，其拉格朗日代数由相关全纯共形场论的配分函数决定。通过进行非阿贝尔任意子凝聚，可以直接确定拓扑边界处的$\mathrm{Rep}(\mathrm{D}_5)$融合环。研究 $\mathrm{E}_{8,1}$，在 $c = 8$处的唯一全纯共形场论的手征子代数，也可以推导出类似结果。事实上，存在一个非最小嵌入，将$\mathrm{Spin}(9)_2$ 嵌入$\mathrm{E}_{8,1}$ 中，由此得到与 $\mathrm{Spin}(25)_2$ 情形类似的结果，只需将D_5 替换为 D_3。

在本节中，我们将证明前面的例子可以推广为一种无限模式。也就是说，对于奇数 n，陈-西蒙斯理论 $\mathrm{Spin}(n^2)_2$ 等价于 D_n 或 $\mathrm{Rep}(\mathrm{D}_n)$ 融合范畴对称性的 Drinfeld 中心；换言之，对于 Dijkgraaf-Witten 扭曲 [71] 的某个特定取值，它等价于 D_n 规范理论。

为此，请注意以下几点：

$$\frac{\mathrm{Spin}(n^2)_2}{\mathbb{Z}_2} \cong \mathrm{SO}(n^2)_2 \cong \mathrm{SU}(n^2)_1. \tag{4.1}$$

反过来，通过规范化零形式电荷共轭对称性，我们可以从 SU$(n^2)_1$ 恢复 Spin$(n^2)_2$。因此，我们将通过展示 SU$(n^2)_1$ 具有一种适当的阿贝尔陈-西蒙斯形式来证明所需结论；我们知道，在规范化电荷共轭后，这种形式会产生 D$_n$ 规范理论。

T首先回顾一下，任意阿贝尔模张量范畴都可以表示为阿贝尔陈-西蒙斯理论 ry:

$$\mathcal{L} = \frac{1}{4\pi} \sum_{i,j=1}^{n} A_i K_{ij} dA_j. \tag{4.2}$$

当矩阵 K 对称且取值为整数$K \in \mathbb{Z}^{n\times n}$时，该理论是规范不变的。当且仅当所有对角分量均为偶数时，该理论是玻色的。如果至少有一个对角分量为奇数，该理论就是自旋理论。手征中心荷由 K矩阵的符号差给出： $c = \text{sgn}(K)$。

线算符的谱可以用一个向量 $\vec{\alpha} \in \mathbb{Z}^n$ 来组织，该向量对应于威尔逊线 $W_{\vec{\alpha}}(\gamma) = \exp\left\{i\alpha^i \int_\gamma A_i\right\}$，其融合由 $\mathbb{Z}^n$ 向量的标准加法给出。相差一个属于 $K\vec{}$像的元素的线被视为彼此等同 $\vec{\alpha} \sim \vec{\alpha} + K\beta$，因此独立线的集合是有限的，并由格 $\mathbb{Z}^n/K\mathbb{Z}^n$标记。

这些线的拓扑自旋为：

$$\theta_{\vec{\alpha}} = \exp(2\pi i h_{\vec{\alpha}}), \quad h_{\vec{\alpha}} = \frac{1}{2}\vec{\alpha}^t K^{-1}\vec{\alpha}\,. \tag{4.3}$$

编织矩阵完全由任意子的拓扑自旋及其融合决定：

$$B(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\theta_{\vec{\alpha}+\vec{\beta}}}{\theta_{\vec{\alpha}}\theta_{\vec{\beta}}}\,. \tag{4.4}$$

我们声称，可以用具有以下 K-矩阵的阿贝尔陈-西蒙斯理论来刻画 SU$(n^2)_1$ （至多相差一个引力陈-西蒙斯项）：

$$K = \begin{pmatrix} 4 & n \\ n & 0 \end{pmatrix}\,. \tag{4.5}$$

为了说明 SU$(n^2)_1$ 可以写成这种形式，回顾一下，阿贝尔模张量范畴完全由任意子的拓扑自旋及其融合规则刻画。由于 n 是奇数，很容易看出，我们可以将独立任意子标记为 $\vec{\alpha}^T = (0, \alpha)$，其中$\alpha$ 是模 n^2 的整数。融合环显然是 $\mathbb{Z}_{n^2}$，这些线的拓扑自旋为：

$$\theta_\alpha = \exp\left(-2\pi i \frac{2\alpha^2}{n^2}\right). \tag{4.6}$$

同时，$\text{SU}(n^2)_1$ 的共形权重为（见附录 C）：

$$h_i = \frac{i(n^2-i)}{2n^2}, \quad i = 0, 1, \ldots, n^2-1. \tag{4.7}$$

接下来，很容易验证线 $\alpha = (n^2+1)/2$ 对应于 $i = 1$ 标准描述中的线 $\text{SU}(n^2)_1$。由于生成元的融合规则和自旋相匹配，我们看到 K-矩阵 (4.5) 确实描述了 $\text{SU}(n^2)_1$。

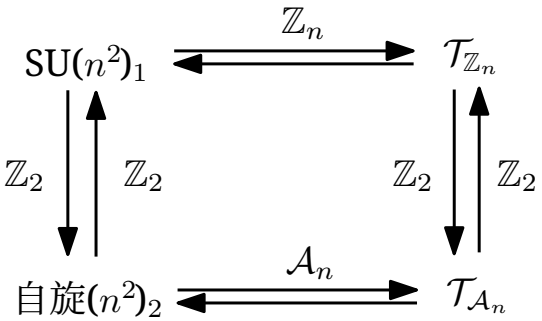


图7：当 n 为奇数时，SU$(n^2)_1$ 与Spin$(n^2)_2$ 之间的规范化关系；以及通过规范化SU$(n^2)_1$，的中心 Symmetry 的 $\mathbb{Z}_n$ 子群、分别通过规范化Spin$(n^2)_2$，中的代数 $\mathcal{A}_n$ 而定义的全纯共形场论 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_n}$ 和 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_n}$ 。研究相关的拓扑边界（见图1）可以验证， $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_n}$ 带有$\mathbb{Z}_n$ 对称性，而 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_n}$ 带有Rep(D$_n$)对称性。对于 $n = 3$ 且 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_3} = \mathcal{T}_{\mathcal{A}_3}$ =E^{8,1}，的情形，以及对于 $n = 5$ 且 $\mathcal{T}_{\mathbb{Z}_5}$ =Sch$_{67}$ 和$\mathcal{T}_{\mathcal{A}_5}$ =Sch$_{57}$的情形，该图分别有特殊形式。

为了将这一推导与有限规范理论联系起来，请注意 U(1) ×U(1) 层级矩阵为（4.5）的陈-西蒙斯理论等价于一个扭曲的 $\mathbb{Z}_n$ 规范理论。事实上，非对角项将规范群截断为 $\mathbb{Z}_n$ ，而对角项则指定具体的扭曲。最后，我们对电荷共轭进行规范化。在 $\mathbb{Z}_n$ 规范理论中，它作为规范群的外自同构，使规范群扩展为二面体群D$_n$[72, 73]。在切伦-西蒙斯描述中，这会将规范群转变为 Spin$(n^2)_2$ ，如下文（4.1）所述。因此我们得到：

$$\text{Spin}(n^2)_2 \cong \text{Twisted D}_n \text{ Gauge Theory} , \tag{4.8}$$

将上文 $c = 8$ 和 $c = 24$ 讨论的散例推广到任意奇数 n.一般情形的总结见图7，图中展示了SU$(n^2)_1$, Spin$(n^2)_2$, 以及它们在规范化后定义的全纯共形场论之间的关系。

5 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ TY 的中心作为Spin$(2n+1)_2 \times$ SU$(2n+1)_{-1}$ CS 理论 y

本节通过从特定的全纯共形场论外推，推导出另一种无限对偶模式。

我们的分析首先注意到，在$c = 24$ 处存在两个不同的全纯共形场论，原则上可以用 Spin$(13)_2$ ×Spin$(13)_2$ 手征代数来刻画（第11表给出了Spin$(13)_2$的谱）。其中一个对应于[9]中的第41项。配分函数为：

$$\begin{aligned} Z_{\text{Sch}_{41}}(\tau) = (&\chi_0^{\text{B}_{6,2}}\chi_0^{\text{B}_{6,2}} + \chi_\eta^{\text{B}_{6,2}}\chi_\eta^{\text{B}_{6,2}} + \chi_A^{\text{B}_{6,2}}\chi_B^{\text{B}_{6,2}} + \chi_B^{\text{B}_{6,2}}\chi_A^{\text{B}_{6,2}} + \\ &\chi_{\ell_1}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_5}^{\text{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_5}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_1}^{\text{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_2}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_3}^{\text{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_3}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_2}^{\text{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_4}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_6}^{\text{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_6}^{\text{B}_{6,2}}\chi_{\ell_4}^{\text{B}_{6,2}})(\tau). \end{aligned} \tag{5.1}$$

如第2节所述，这一表达式对应于$\mathrm{Spin}(13)_2 \times \mathrm{Spin}(13)_2$中生成拉格朗日代数的任意子组合；从三维拓扑量子场论的角度来看，构造全纯共形场论需要这一组合。

与此同时， [9] 中的第60项基于手征代数 $\mathrm{SU}(13)_1 \times \mathrm{SU}(13)_1$。配分函数为：

$$Z_{\mathrm{Sch}_{60}}(\tau) = \chi_0^{\mathrm{A}_{12,1}}(\tau)\chi_0^{\mathrm{A}_{12,1}}(\tau) + \sum_{i=1}^{12} \chi_i^{\mathrm{A}_{12,1}}(\tau)\chi_{5i}^{\mathrm{A}_{12,1}}(\tau), \tag{5.2}$$

主场的标记遵循附录C中的命名规则。特别要注意，上述特征标的标签是模 13 定义的（例如$\chi^{\mathrm{A}_{12}}_{\mathbb{Z}_{13}} = \chi^{\mathrm{A}_{12}}_{\mathbb{Z}_{13}}$）。

显然，该理论还存在一种明显的对称性，可为主场赋予荷。

然而，仿射李代数 $\mathrm{B}_{6,2} \hookrightarrow \mathrm{A}_{12,1}$ [74, 75],存在一个共形嵌入，据此可利用该嵌入的分支规则，将 $\mathrm{SU}(13)_1$ 特征标表示为 $\mathrm{Spin}(13)_2$ 特征标。用 $\mathrm{Spin}(13)_2$特征标写出的配分函数为：

$$\begin{aligned} Z_{\mathrm{Sch}_{60}}(\tau) = &((\chi_0^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_\eta^{\mathrm{B}_{6,2}})(\chi_0^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_\eta^{\mathrm{B}_{6,2}}) + \\ &2(\chi_{\ell_1}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_5}^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_5}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_1}^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_2}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_3}^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_3}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_2}^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_4}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_6}^{\mathrm{B}_{6,2}} + \chi_{\ell_6}^{\mathrm{B}_{6,2}}\chi_{\ell_4}^{\mathrm{B}_{6,2}}))(\tau). \end{aligned} \tag{5.3}$$

显然，从全纯共形场论的三维体构造来看，配分函数为 (5.1) 和 (5.3 的全纯共形场论之间的差异，源于拓扑边界条件的不同选择（见图1）。如第1节所述，这意味着在每个拓扑边界上显现的对称性融合范畴各不相同。（通过直接计算，也很容易从前面的例子中看出这一点。）

正如第1节所述，在 $c = 24$ 处的所有全纯共形场论都可以通过（不可逆）规范化 [6, 11–16]彼此得到。特别是，上述两个全纯共形场论通过 $\mathbb{Z}_2$ 规范化相关联。两组不同对称性之间的关系颇为有趣。例如，进行任意子凝聚后，可以确信 [9] 中的第41项具有 $\mathrm{Spin}(13)_2$ 融合范畴对称性。事实上，由方程（5.1）得到的拉格朗日代数意味着 $\mathrm{Spin}(13)_2$ 具有时间反演对称性（回顾第2节中的讨论）。因此，拓扑边界处的融合范畴本质上与 $\mathrm{Spin}(13)_2 \times \mathrm{Spin}(13)_{-2}$中的对角拉格朗日代数相同，即 $\mathrm{Spin}(13)_2$。反过来，$\mathrm{Spin}(13)_2$ 包含一个 $\mathrm{Rep}(\mathrm{D}_{13})$子范畴 [57], ，这正是由 [9] 中第60项的 $\mathbb{Z}_{13}$ 对称性以及 $\mathbb{Z}_2$ 规范化所预期的。更耐人寻味的是，$\mathrm{Spin}(13)_2$ 在 $\mathrm{Rep}(\mathrm{D}_{13})$之外还包含两条额外的线，而 [9]中第41项的 $\mathbb{Z}_{13}$ 对称性无法解释它们。其融合规则与对偶缺陷的融合规则相似，但这里所规范化的代数属于一种不可逆对称性。有关谱的信息请参见表11，相关融合规则见方程（5.5）。

接下来，我们将以此前的具体案例为指引，将其推广到一系列无限多个例子。首先，我们观察到，陈-西蒙斯理论

自旋$(2n+1)_2$			
线标签	最高权	量子维数	共形权重
0	(0)	$d_0 = 1$	$h_0 = 0$
η	$(2\mathbf{w}_1)$	$d_\eta = 1$	$h_\eta = 1$
A	$(\mathbf{w}_\sigma)$	$d_A = \sqrt{2n+1}$	$h_A = n/8$
B	$(\mathbf{w}_1 + \mathbf{w}_\sigma)$	$d_B = \sqrt{2n+1}$	$h_B = n/8 + 1/2$
ℓ_i	$(\mathbf{w}_i)$	$d_{\ell_i} = 2$	$h_{\ell_i} = \frac{i(2n+1-i)}{2(2n+1)}$
ℓ_n	$(2\mathbf{w}_\sigma)$	$d_{\ell_n} = 2$	$h_{\ell_n} = \frac{n(n+1)}{2(2n+1)}$

表11：Spin$(2n+1)_2$ 的数据。标签 i 依次取值为 $i = 1$、.....、$n-1$。

自旋$(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 对正整数 n 而言，等价于特定双特征标和 Frobenius-Schur 指标下的 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ Tambara-Yamagami 融合范畴的 Drinfeld 中心。通过直接分析任意子凝聚，或依据对作用的操作进行论证，都可以证明这一点。数学文献 [57–59]也提到了这种等价关系。得到这一结果后，我们便可以轻松进行一些拓扑操作，重现上述观察，并确定一个适当的无限族推广。

凝聚分析

我们从以下观察开始：

$$\frac{\mathrm{Spin}(2n+1)_2}{\mathbb{Z}_2} = \mathrm{SO}(2n+1)_2 = \mathrm{SU}(2n+1)_1, \tag{5.4}$$

这源于手征代数 $\mathrm{B}_{n,\ 2} \hookrightarrow \mathrm{A}_{2n,\ 1}$ 存在嵌入（例如参见 [64]中的共形嵌入列表）。

那么，我们知道 $\mathrm{Spin}(2n+1)_2$ 与$\mathrm{SU}(2n+1)_1$, 之间存在一个拓扑界面，因此$\mathrm{Spin}(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 存在一个拓扑边界条件。为了推导出该边界上存在何种融合范畴，我们可以使用附录 B.中总结的工具，分析通过对$\mathrm{Spin}(2n+1)_2$ 中的 $\mathbb{Z}_2$ 对称性进行规范化而得到的界面。

Spin$(2n+1)_2$ 的谱由 $n+4$ 个任意子构成，其数据总结于表 11。Spin$(2n+1)_2$ 的相关融合规则如下：

$$A \times A = B \times B = 1 + \sum_{s=1}^{n} \ell_s, \quad A \times B = \eta + \sum_{s=1}^{n} \ell_s, \quad \eta \times A = B \tag{5.5}$$

$$\eta \times \ell_s = \ell_s, \quad \ell_s \times \ell_s = 1 + \eta + \ldots, \quad s = 1, \ldots, n. \tag{5.6}$$

由于我们只是在规范化 η，因此代数就是 $\mathcal{A} = 1 + \eta$。于是，线 ℓ_i 不会受到禁闭，而是分裂为两条量子维数为一的线。它们是 SU$(2n+1)_1$中的共轭对。与此同时，凝聚 $\eta \to 1$意味着 A 和 B 会被识别。根据融合规则，我们还可看到 A 和 B 不会分裂；根据拓扑自旋，我们可知它们会在 Spin$(2n+1)_2$ 与 SU$(2n+1)_1$ 之间的界面处受到禁闭，并且不会

降为 $\mathrm{SU}(2n+1)_1$的真实线算符。由于线 ℓ_i 降为 $\mathrm{SU}(2n+1)_1$, 的阿贝尔线，我们从 (5.5) 可知，相应的融合环是$\mathbb{Z}_{2n+1}$ Tambara-Yamagami。

作用原理分析

在这一版本的分析中，我们从 $\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 陈-西蒙斯理论出发。对左侧因子上的电荷共轭零形式对称性进行规范化，会得到 $\mathrm{Spin}(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$。我们声称，$\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 等价于未扭曲的 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ 规范理论。因此，在 $\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 的标准表述中对电荷共轭进行规范化，相当于在未扭曲的 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ 规范理论的标准表述中，对交换电荷和磁荷的零形式对称性进行规范化，由此清楚地表明，拓扑边界此时将承载一个 $\mathbb{Z}_{2n+1}$Tambara-Yamagami 融合范畴。这表明，$\mathrm{Spin}(2n+1)_2 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 陈-西蒙斯理论是其 Drinfeld 中心。

在 $\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 陈-西蒙斯理论的标准表述中，各线的自旋为（见附录 C ）：

$$h_{(i,j)} = \frac{i(2n+1-i)}{2(2n+1)} - \frac{j(2n+1-j)}{2(2n+1)}, \tag{5.7}$$

融合规则为 $\mathbb{Z}_{2n+1} \times \mathbb{Z}_{2n+1}$。另一方面，未扭曲的 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ 规范理论由一个 K-矩阵描述

$$K = \begin{pmatrix} 0 & 2n+1 \\ 2n+1 & 0 \end{pmatrix}, \tag{5.8}$$

其拓扑自旋为

$$\theta_{[\alpha,\beta]} = \frac{\alpha\beta}{2n+1}. \tag{5.9}$$

融合规则很容易从 K-矩阵识别中推导出来，并且同样为 $\mathbb{Z}_{2n+1}\times\mathbb{Z}_{2n+1}$。在本节中且仅在本节中，我们使用 $(i,\ j)$ 表示 $\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 中的线，同时使用方括号 $[\alpha,\beta]$ 表示该理论的未扭曲$\mathbb{Z}_{2n+1}$ 规范理论表述中的线。

为了使两种描述相匹配，我们再次利用阿贝尔模张量范畴完全由各线的拓扑自旋及其融合规则决定这一事实。匹配起来很直接：

$$\Big((n+1)\alpha-\beta,\quad (n+1)\alpha+\beta\Big) \longleftrightarrow [\alpha,\beta], \tag{5.10}$$

反之亦然：

$$(i,j) \longleftrightarrow \Big[i+j,\quad (n+1)(j-i)\Big], \tag{5.11}$$

其两侧具有相同的拓扑自旋和融合规则。

既然我们已经证明这两种描述相符，就必须检验 $\mathrm{SU}(2n+1)_1 \times \mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 描述中左侧因子的电荷共轭零形式对称性 $\mathcal{C}_L$ 是否映射为未扭曲 $\mathbb{Z}_{2n+1}$规范理论描述中的电磁对偶对称性。也就是说，我们必须找到 α' 和 β' ，使得

$$\mathcal{C}_L\left(\Big((n+1)\alpha-\beta,\quad (n+1)\alpha+\beta\Big)\right) =$$

$$\Big(-(n+1)\alpha+\beta,\quad (n+1)\alpha+\beta\Big)=\Big((n+1)\alpha'-\beta',\quad (n+1)\alpha'+\beta'\Big). \tag{5.12}$$

由此很容易看出，$\alpha'=2\beta$ 和 $\beta'=(n+1)\alpha$，因此我们推得，在该理论的$\mathbb{Z}_{2n+1}$ 规范理论表述中，零形式对称性 $\mathcal{C}_L$ 的作用为

$$\mathcal{C}_L\big[[\alpha,\beta]\big]=[2\beta,(n+1)\alpha], \tag{5.13}$$

确实交换了电荷和磁荷。

与时间反演对称性和全纯共形场论的关系

为了将 $\mathrm{Spin}(2n+1)_2\times\mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 是 $\mathbb{Z}_{2n+1}$ TY 的中心这一表述与全纯共形场论联系起来，我们注意到，只要 $k:=2n+1$ 满足 -1 是模 k 的二次剩余，$\mathrm{SU}(2n+1)_1$ 就是一个时间反演不变理论（作为一种玻色理论）。[11]

假设 -1 是模 k 的二次剩余，我们可以通过加入一个引力陈-西蒙斯项为代价，反转 $\mathrm{Spin}(2n+1)_2\times\mathrm{SU}(2n+1)_{-1}$ 中第二个因子的层级。因此，我们看到，只要 -1 是模 k 的二次剩余，$\mathrm{Spin}(k)_2\times\mathrm{SU}(k)_1$ 就定义了一个全纯共形场论。换言之，存在一个代数 $\mathcal{A}_k$，使得

$$\frac{\mathrm{Spin}(k)_2\times\mathrm{SU}(k)_1}{\mathcal{A}_k}\cong -4(k-1)\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}, \tag{5.14}$$

当 -1 是模 k的二次剩余时。分析式（5.5）和（5.6）中的分裂，并追踪时间反演变换，可以直接看出 $\mathcal{A}_k$ 由下式给出：

$$\begin{aligned}\mathcal{A}_k=\big(0,0\big)+\big((2\mathbf{w}_1),0\big)+\sum_{i=1}^{\frac{(k-3)}{2}}\big[\big((\mathbf{w}_i),q(i)\big)+\big((\mathbf{w}_i),q(k-i)\big)\big]\\ +\big((2\mathbf{w}_\sigma),q\Big(\frac{k-1}{2}\Big)\big)+\big((2\mathbf{w}_\sigma),q\Big(\frac{k+1}{2}\Big)\big),\end{aligned} \tag{5.15}$$

其中 $q(\sigma)$表示将线 σ 模 k 从 $\mathrm{SU}(k)_1$映至线 $q\sigma$ 模 k 的时间反演置换（见附录 C 和 D）。位于分隔 $\mathrm{Spin}(k)_2\times\mathrm{SU}(k)_1$ 与引力陈-西蒙斯项的拓扑边界上的融合范畴，是我们在前面小节中发现的$\mathbb{Z}_k$ Tambara-Yamagami 融合范畴。对于 $k=13$，通过将代数与式（5.3）给出的配分函数进行比较，可以直接验证所得的全纯共形场论对应于 [9]中的第 60 项。不过，这里只有一个 $\mathrm{SU}(13)_1$ 因子按 $\mathrm{Spin}(13)_2$ 特征标分解。至此，这一构造显然将上文从 $k=13$ 推广到了任意满足 -1 是模 k的二次剩余的 k 。

现在，我们可以在 $\mathrm{Spin}(k)_2\times\mathrm{SU}(k)_1$ 拓扑量子场论中对电荷共轭进行规范化。由于电荷共轭对 $\mathrm{Spin}(k)_2$ 的作用是平凡的（所有线都是自共轭的），这等价于仅对 $\mathrm{SU}(k)_1$ 因子上的电荷共轭进行规范化。这会得到第二个因子

[11]这与 [52] 中推导出的条件相同，即 $\mathrm{U}(1)_k\equiv\mathrm{SU}(k)_{-1}$ 作为自旋理论具有时间反演不变性。

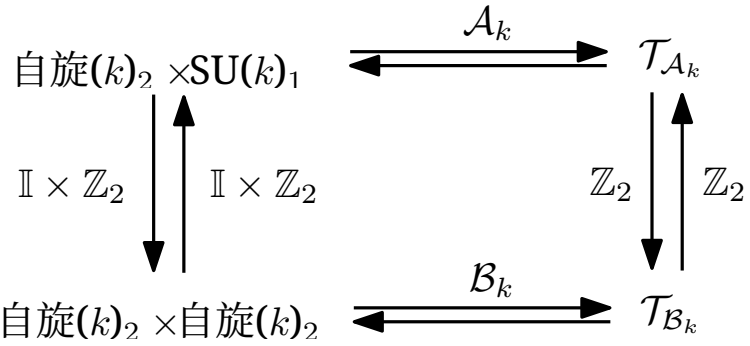


图8：当 -1 是模 k 的二次剩余时，我们可以规范化 Spin$(k)_2$ ×SU$(k)_1$ 中的代数 $\mathcal{A}_k$，从而得到一个具有 $\mathbb{Z}_k$ Tambara-Yamagami 对称性的全纯共形场论 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_k}$。在对电荷共轭进行规范化后，这种对称性变为 $\mathbb{Z}_2$-等变化的 $\mathbb{Z}_k$ Tambara-Yamagami。这等价于 Spin$(k)_2$ 融合范畴，它现在作为全纯共形场论 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_k}$ 的对称性出现；该场论是在对 Spin$(k)_2$ ×Spin$(k)_2$ 中的代数 $\mathcal{B}_k$ 进行规范化后得到的。对于 $k=5$（其中 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_5}=\mathcal{T}_{\mathcal{B}_5}=\mathrm{E}^{8,1,}$）以及 $k=13$（其中 $\mathcal{T}_{\mathcal{A}_{13}}=\mathrm{Sch}_{60}$ 且 $\mathcal{T}_{\mathcal{B}_{13}}=\mathrm{Sch}_{41}$），该图存在特殊情形。

$\mathrm{Spin}(k)_2$,[12]，由此得到一个拓扑量子场论 $\mathrm{Spin}(k)_2\times\mathrm{Spin}(k)_2$，它与引力陈-西蒙斯项 $-4(k-1)\mathrm{CS}^{\mathrm{grav}}$。

由于我们在体区对电荷共轭进行规范化，因此后一个拓扑界面现在将承载一种融合范畴对称性，它对应于对先前发现的 $\mathbb{Z}_k$ Tambara-Yamagami 融合范畴的电荷共轭进行规范化。

该构造对应于 $\mathbb{Z}_2$-等变化的 $\mathbb{Z}_k$ Tambara-Yamagami 范畴，这一构造已在例如 [57–59]中得到研究。我们遵循 [59]。简而言之，基于离散群 G 的 Tambara-Yamagami 范畴的$\mathbb{Z}_2$-等变化具有如下简单对象：β_h^t 的量子维数为 1，σ_g 对于任意满足 $g^2\neq 1$ 的 $g\in G$，其量子维数为 2，以及量子维数为 $\sqrt{|G|}$的 ρ^t。其中，$t=\pm 1$和 h 是 G 中满足$h^2=1$的元素，并且$\sigma_g=\sigma_{-g}$。融合规则见 [59]的方程（5.26）。[13]

专门取 $G=\mathbb{Z}_k$，令 k 为奇数，并将群写成加法形式，其元素为$\{0,1,2,\cdots k-1\}$，唯一满足 $2h=0$ 的元素 h 是 $h=0$。因此，我们有量子维数为 1 的简单对象 $\beta^{\pm}$、σ_1、σ_2、量子维数为 2 的 $\cdots\sigma_{(k-1)/2}$，以及量子维数为 $\sqrt{k}$ 的 $\rho^{\pm}$。与表11比较，并沿用 [59]，，我们观察到其谱和融合规则与 Spin$(k)_2$完全一致。因此，我们得出结论：Spin$(k)_2$ ×Spin$(k)_2$可以通过代数 $\mathcal{B}_k$ 进行规范化，从而得到一个配备有 Spin$(k)_2$ 融合范畴的全纯共形场论。Spin$(k)_2$ 中位于 Rep(D$_k$) 子融合环之外的额外线 $\rho^{\pm}$，源于规范化电荷共轭之前就存在的 $\mathbb{Z}_k$ 对偶线；这既恢复了此前对 $k=13$所作的观察，也将其加以推广。图8总结了这一一般情形。

[12]不难验证，对电荷共轭进行规范化是 $\mathbb{Z}_2$ 在（5.4）中的规范化的逆操作。参见 [76] 其中给出了证明这一事实的明确计算。[13]请注意，[59] 中的（5.26）第一行第二个方程应当写作 $[\rho^t][\sigma_g]=[\rho^t]+[\rho^{-t}]$。我们感谢 D. E. Evans 向我们确认了这一点。

致谢

我们感谢 B. Rayhaun 的有益交流。DGS 获哈佛大学学者协会资助。CC 和 DGS 获西蒙斯全球范畴对称性合作项目、美国能源部资助项目 5-29073 以及斯隆基金会资助。JH 获美国国家科学基金会资助项目 PHY-2310635。

一份 $c = 24$ 全纯共形场论 [9] 的 Schellekens 列表

No.	$\dim(V_1)$	自旋-1 代数	No.	$\dim(V_1)$	自旋-1 代数
0	0	—	36	132	$\mathrm{A}_{8,2}\mathrm{F}_{4,2}$
1	24	$\mathrm{U}(1)^{24}$	37	144	$(\mathrm{A}_{4,1})^6$
2	36	$(\mathrm{A}_{1,4})^{12}$	38	144	$(\mathrm{C}_{4,1})^4$
3	36	$\mathrm{D}_{4,12}\mathrm{A}_{2,6}$	39	144	$\mathrm{D}_{6,2}\mathrm{C}_{4,1}(\mathrm{B}_{3,1})^2$
4	36	$\mathrm{C}_{4,10}$	40	144	$\mathrm{A}_{9,2}\mathrm{A}_{4,1}\mathrm{B}_{3,1}$
5	48	$(\mathrm{A}_{1,2})^{16}$	41	156	$(\mathrm{B}_{6,2})^2$
6	48	$(\mathrm{A}_{2,3})^6$	42	168	$(\mathrm{D}_{4,1})^6$
7	48	$(\mathrm{A}_{3,4})^3\mathrm{A}_{1,2}$	43	168	$(\mathrm{A}_{5,1})^4\mathrm{D}_{4,1}$
8	48	$\mathrm{A}_{5,6}\mathrm{C}_{2,3}\mathrm{A}_{1,2}$	44	168	$\mathrm{E}_{6,2}\mathrm{C}_{5,1}\mathrm{A}_{5,1}$
9	48	$(\mathrm{A}_{4,5})^2$	45	168	$\mathrm{E}_{7,3}\mathrm{A}_{5,1}$
10	48	$\mathrm{D}_{5,8}\mathrm{A}_{1,2}$	46	192	$(\mathrm{A}_{6,1})^4$
11	48	$\mathrm{A}_{6,7}$	47	192	$\mathrm{D}_{8,2}(\mathrm{B}_{4,1})^2$
12	60	$(\mathrm{C}_{2,2})^6$	48	192	$(\mathrm{C}_{6,1})^2\mathrm{B}_{4,1}$
13	60	$\mathrm{D}_{4,4}(\mathrm{A}_{2,2})^4$	49	216	$(\mathrm{A}_{7,1})^2(\mathrm{D}_{5,1})^2$
14	60	$\mathrm{F}_{4,6}\mathrm{A}_{2,2}$	50	216	$\mathrm{D}_{9,2}\mathrm{A}_{7,1}$
15	72	$(\mathrm{A}_{1,1})^{24}$	51	240	$(\mathrm{A}_{8,1})^3$
16	72	$(\mathrm{A}_{3,2})^4(\mathrm{A}_{1,1})^4$	52	240	$\mathrm{C}_{8,1}(\mathrm{F}_{4,1})^2$
17	72	$\mathrm{A}_{5,3}\mathrm{D}_{4,3}(\mathrm{A}_{1,1})^3$	53	240	$\mathrm{E}_{7,2}\mathrm{B}_{5,1}\mathrm{F}_{4,1}$
18	72	$\mathrm{A}_{7,4}(\mathrm{A}_{1,1})^3$	54	264	$(\mathrm{D}_{6,1})^4$
19	72	$\mathrm{D}_{5,4}\mathrm{C}_{3,2}(\mathrm{A}_{1,1})^2$	55	264	$(\mathrm{A}_{9,1})^2\mathrm{D}_{6,1}$
20	72	$\mathrm{D}_{6,5}(\mathrm{A}_{1,1})^2$	56	288	$\mathrm{C}_{10,1}\mathrm{B}_{6,1}$
21	72	$\mathrm{C}_{5,3}\mathrm{G}_{2,2}\mathrm{A}_{1,1}$	57	300	$\mathrm{B}_{12,2}$
22	84	$\mathrm{C}_{4,2}(\mathrm{A}_{4,2})^2$	58	312	$(\mathrm{E}_{6,1})^4$
23	84	$(\mathrm{B}_{3,2})^4$	59	312	$\mathrm{A}_{11,1}\mathrm{D}_{7,1}\mathrm{E}_{6,1}$
24	96	$(\mathrm{A}_{2,1})^{12}$	60	336	$(\mathrm{A}_{12,1})^2$
25	96	$(\mathrm{D}_{4,2})^2(\mathrm{C}_{2,1})^4$	61	360	$(\mathrm{D}_{8,1})^3$
26	96	$(\mathrm{A}_{5,2})^2\mathrm{C}_{2,1}(\mathrm{A}_{2,1})^2$	62	384	$\mathrm{E}_{8,2}\mathrm{B}_{8,1}$
27	96	$\mathrm{A}_{8,3}(\mathrm{A}_{2,1})^2$	63	408	$\mathrm{A}_{15,1}\mathrm{D}_{9,1}$
28	96	$\mathrm{E}_{6,4}\mathrm{C}_{2,1}\mathrm{A}_{2,1}$	64	456	$\mathrm{D}_{10,1}(\mathrm{E}_{7,1})^2$
29	108	$(\mathrm{B}_{4,2})^3$	65	456	$\mathrm{A}_{17,1}\mathrm{E}_{7,1}$
30	120	$(\mathrm{A}_{3,1})^8$	66	552	$(\mathrm{D}_{12,1})^2$
31	120	$(\mathrm{D}_{5,2})^2(\mathrm{A}_{3,1})^2$	67	624	$\mathrm{A}_{24,1}$
32	120	$\mathrm{E}_{6,3}(\mathrm{G}_{2,1})^3$	68	744	$(\mathrm{E}_{8,1})^3$
33	120	$\mathrm{A}_{7,2}(\mathrm{C}_{3,1})^2\mathrm{A}_{3,1}$	69	744	$\mathrm{D}_{16,1}\mathrm{E}_{8,1}$
34	120	$\mathrm{D}_{7,3}\mathrm{A}_{3,1}\mathrm{G}_{2,1}$	70	1128	$\mathrm{D}_{24,1}$
35	120	$\mathrm{C}_{7,2}\mathrm{A}_{3,1}$			

B 三维拓扑量子场论与可凝聚代数概述

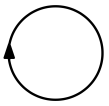
本附录简要概述了正文中用于规范化三维拓扑量子场论里的阿贝尔及不可逆一形式对称性的技术，这一过程也称为任意子凝聚。为建立相关记号，我们总结了任意子的代数理论中的若干概念。我们遵循 [46], 其他有用的参考资料包括[20, 63, 77]和 [43]，以更全面地介绍任意子凝聚。

三维拓扑量子场论由一组有限的数据定义。首先，拓扑量子场论用一组有限的基本拓扑线算符来描述，这些算符称为任意子 a。任何其他线算符都可以表示为任意子的直和。拓扑量子场论还由一组融合规则定义，这些规则规定了任意子彼此如何融合，

$$a \times b = \sum_c N_{ab}^c \, c \,, \tag{B.1}$$

其中， N_{ab}^c 是非负整数，表示任意子 a 和b 融合为任意子 c的不同方式的数量。任意子的融合满足交换律和结合律，并且总存在一个单位任意子“1”，使得 $1 \times a = a \times 1 = a$。此外，每个任意子 a 都有唯一的共轭任意子，记作$\bar{a}$ ，其定义性质为 $a \times \bar{a} = 1 + \cdots$。若任意子与其共轭融合后只得到单位任意子，则称其为可逆，即 $a \times \bar{a} = 1$。这类任意子也称为阿贝尔任意子，因为可逆任意子在融合运算下构成一个阿贝尔群。若 $a \times \bar{a}$ 除单位任意子外还包含其他任意子，则a 称为不可逆。

可由融合规则（B.1）定义的一个重要量是量子维数 d_a ，它是任意子 a的量子维数，可以理解为 a的平凡结的期望值：

$d_a =$  . (B.2)

d_a 是下式的唯一正实数解

$$d_a d_b = \sum_c N_{ab}^c \, d_c \tag{B.3}$$

其中， $d_1 = 1$ 对应单位任意子。在三维拓扑量子场论与二维共形场论的对应关系中，它们也可以用模 S 矩阵的分量定义：

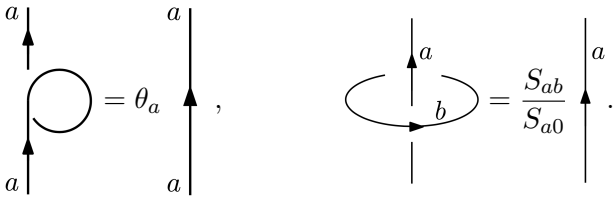
$$d_a = \frac{S_{a0}}{S_{00}} \,, \tag{B.4}$$

其中 0 表示单位主场。模张量范畴/三维拓扑量子场论的总量子维数$\mathcal{C}$ 定义为

$$\dim(\mathcal{C}) = \sum_{a \in \mathcal{C}} d_a^2 \,. \tag{B.5}$$

三维拓扑量子场论中的任意子可以彼此编织。这一性质由两个量来概括：任意子 a 的拓扑自旋 θ_a 以及模 S-矩阵 S_{ab}

任意子 a和 b之间:



(B.6)

如果可以通过体区—边界对应关系建立与二维有理共形场论数据的对应，那么任意子集合 a 对应于该有理共形场论的主场 $\theta_a = e^{2\pi i h_a}$，其中 h_a 表示相应主场的共形权重，而 S_{ab} 则与有理共形场论中通常的模 S矩阵一致。我们通常用 h_a 而非 θ_a 来表示一条线的拓扑自旋。如果 $\theta_a = 1$，相应的线 a 就称为玻色子。比值 S_{ab}/S_{a0} 称为任意子 b 绕 a的编织；当 b为阿贝尔时，它是一个相位。

要完整规定一个三维拓扑量子场论，还需要指定所谓的 F 符号和 R 符号，它们编码了任意子某些结合律和交换律性质。我们在讨论中不会用到这些符号，更多信息请参阅前述参考文献。

现在我们来刻画三维拓扑量子场论中的可规范化对称性。对于阿贝尔任意子 a，其可规范化的充要条件是它的拓扑自旋平凡，$\theta_a = 1$ ($h_a \in \mathbb{Z}$)，且凝聚任意子的集合具有平凡的相互编织 [1]。

为了确定规范化这种阿贝尔对称性后的三维拓扑量子场论的谱，我们遵循 [68, 69] 的三步规范化规则:

- 移除所有与凝聚的阿贝尔任意子发生非平凡编织的线。此类被移除的线通常称为受禁闭的。
- 识别所有剩余的、可通过与凝聚的阿贝尔任意子融合而彼此不同的线。这一步是形成规范轨道。
- 将所有在与 s 凝聚的阿贝尔任意子融合下保持不变的剩余线 a ，分裂为规范化理论中的 s 条不同的线。

将这一形式体系应用于验证层级-秩对偶时，阿贝尔任意子凝聚（即对阿贝尔一形式对称性进行规范化）可归结为先检查凝聚任意子 $\theta_a = 1$ ，再应用上述三步程序。该算法将是我们研究阿贝尔任意子凝聚的主要工具。规范化后，模 S-矩阵和融合规则可如 [78] 中所述确定。

更一般地，我们必须考虑对不可逆一形式对称性进行规范化，这也称为非阿贝尔任意子凝聚。在这种情况下，我们在三维拓扑量子场论$\mathcal{C}$ 中进行规范化的对象称为可凝聚代数，在文献中也称为连通 étale 代数或交换弗罗贝尼乌斯代数。可凝聚代数是任意子的形式和:

$$\mathcal{A} = \sum_{a \in \mathcal{C}} n_a \, a \,, \tag{B.7}$$

其中 n_a 为非负整数，且恒等线的重数始终为一： $1 \in \mathcal{A}$, $n_1 = 1$。举个简单的例子，当我们对构成群的阿贝尔玻色子进行规范化时，

相应的可凝聚代数为： G

$$\mathcal{A} = \sum_{g \in G} g \,. \tag{B.8}$$

T规范化后得到的拓扑量子场论记作 $\mathcal{C}/\mathcal{A}$，具体记法视上下文而定，也可记作 $\mathcal{C}^0_{\mathcal{A}}$.

可凝聚代数必须满足三个约束。

- 它只包含玻色线

$$a \in \mathcal{A} \Longrightarrow \theta_a = 1. \tag{B.9}$$

- 系数 n_a 与融合相容

$$n_a n_b \leq \sum_c N_{ab}^c n_c \,. \tag{B.10}$$

- 凝聚后所得模张量范畴的总量子维数由原模张量范畴的维数和可凝聚代数的维数决定，具体为

$$\dim(\mathcal{C}/\mathcal{A}) = \dim(\mathcal{C}^0_{\mathcal{A}}) = \frac{\dim(\mathcal{C})}{\dim(\mathcal{A})^2} \tag{B.11}$$

with

$$\dim(\mathcal{A}) = \sum_a n_a \, d_a. \tag{B.12}$$

在特殊情形下，若 $\dim(\mathcal{C}) = \dim(\mathcal{A})^2$，使得 $\dim(\mathcal{C}/\mathcal{A}) = 1$，则称 $\mathcal{A}$ 为拉格朗日代数。在 $\mathcal{C}$ 中规范化 $\mathcal{A}$，会得到一个具有平凡任意子数据但手征中心荷相同的理论。换言之，这是一个纯引力陈-西蒙斯理论。在半个时空上对拉格朗日代数进行规范化，可为 $\mathcal{C}$ 提供一个拓扑边界。

严格来说，可凝聚代数自带一个乘法（余乘法）映射的定义，该映射满足某些结合律和交换律性质。不过，通常要找到这样的乘法映射是一项艰巨的任务。满足上述约束本身已是极具挑战性的工作，因此在实际应用中，我们主要将这些约束用作必要条件，以检验涉及非阿贝尔任意子凝聚的能级-秩对偶。关于可凝聚代数的完整定义，请参阅前文献。

既然我们已经确定了可凝聚代数为实现规范化必须满足的性质，接下来便来刻画规范化后得到的拓扑量子场论 $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ 。具体可按如下方式进行。首先， $\mathcal{C}$ 中的任意子 a 可以分裂为 $\mathcal{C}/\mathcal{A}$的线算符，具体如下：

$$a \longrightarrow \sum_i n_a^i \, a_i, \tag{B.13}$$

其中 n_a^i 为非负整数。并非所有 a_i 在（B.13）中都对应独立的线算符。凝聚会强制将其中一些 a_i 彼此等同（详见第 3.4 节中的两个例子）。此外，在这种分裂中，我们必须区分真实的（即非禁闭的）线算符与非真实的（即受禁闭的）线算符。

一种实用的方法如下。我们首先称，若某个 a_i 在某个 中有一个 提升 $\mathcal{C}$，则它出现在某个 $a \in \mathcal{C}$ 的分裂中。若给定的 a_i 可提升至多个 $a \in \mathcal{C}$，且其中一些 a 的拓扑自旋不同，则对应的 a_i 会受到禁闭。例如，从表9 可以看出，$\mathbf{E}_{7\text{ 中的元素 }(2w_6)_1}$ 可提升至 $\mathbf{E}_{7,3}$ 中的（$2\mathbf{w}_6$）和（$\mathbf{w}_2$），且这两条线的拓扑自旋不同，这意味着（$2\mathbf{w}_6$）$_1$受到禁闭。当所有提升的拓扑自旋都相同时，我们将对应的a_i 认定为 $\mathcal{C}/\mathcal{A}$ 的非禁闭真实线算符。

我们至少可以在许多实际例子中据以确定上述分裂与识别的一致性条件如下。可凝聚代数中的简单任意子总是在分裂中包含恒等线的一个分量： $\mathcal{A} = \sum_{a\in\mathcal{C}} n_a\, a$,

$$a \in \mathcal{A} \Longrightarrow a \to\ n_a\, 1 + \cdots . \tag{B.14}$$

此外，分量 a_i 受到以下一组一致性条件的约束：

- $a \longrightarrow \sum_i n_a^i\, a_i \Longrightarrow d_a \longrightarrow \sum_i n_a^i\, d_{a_i}$
- $a \longrightarrow \sum_i n_a^i\, a_i \Longrightarrow \overline{a} \longrightarrow \sum_i n_a^i\, \overline{a}_i$.
- $a \times b = \sum_c N_{ab}^c\, c \Longrightarrow \left(\sum_i n_a^i\, a_i\right) \times \left(\sum_j n_b^j\, b_j\right) = \sum_k \sum_c N_{ab}^c n_c^k\, c_k$.

我们假设，在进行非阿贝尔任意子凝聚时，非禁闭激发的融合范畴以及所有线算符（包括受禁闭和非禁闭的线算符）的融合范畴，都满足标准条件：结合律、存在唯一的恒等线，以及存在唯一的共轭对，且该共轭对融合为恒等线的方式唯一。

C 任意子数据概要

为便于快速查阅，本附录总结了正文中多次出现的一些任意子数据。

$\mathrm{SU}(N)_1$

我们总结的第一个模张量范畴是 $\mathrm{SU}(N)_1$。该理论由 N 条线组成，其共形权重/拓扑自旋为：

$$h_i = \frac{i(N-i)}{2N}, \quad i = 0, \ldots, N-1. \tag{C.1}$$

这些线满足 $\mathbb{Z}_N$融合规则： $i \times j = i + j$ 模 N，而模 S-矩阵为：

$$S_{ij} = \frac{1}{\sqrt{N}} \omega^{ij}. \tag{C.2}$$

其中 $\omega = e^{2\pi i/N}$。显然，从这个表达式可以看出，所有线的量子维数均为 1。

自旋$(\nu)_1$

对于奇数 ν，MTC Spin$(\nu)_1$ 始终由三条线组成 $\mathbf{1}$，v，σ，其共形权重/拓扑自旋为：

$$h_1 = 0, \quad h_v = 1/2, \quad h_\sigma = \nu/16, \tag{C.3}$$

融合规则：

$$v \times v = 1, \quad v \times \sigma = \sigma \times v = \sigma, \quad \sigma \times \sigma = 1 + v. \tag{C.4}$$

以及量子维数

$$d_1 = 1, \quad d_v = 1, \quad d_\sigma = \sqrt{2}. \tag{C.5}$$

$\mathrm{G}_{2,1}$ & $\mathrm{F}_{4,1}$

$\mathrm{G}_{2,1}$ 和 $\mathrm{F}_{4,1}$ 模张量范畴都只有一条非平凡线 τ，其量子维数为$\phi = (1+\sqrt{5})/2$，拓扑自旋为：

$$h_\tau = \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \tag{C.6}$$

分别对于 $\mathrm{G}_{2,1}$ 和 $\mathrm{F}_{4,1}$。融合规则为

$$\tau \times \tau = 1 + \tau. \tag{C.7}$$

注意到 $\mathrm{G}_{2,1}$ 和 $\mathrm{F}_{4,1}$ 彼此满足层级-秩对偶 [39]。更确切地说：

$$\mathrm{G}_{2,1} \cong \mathrm{F}_{4,-1} - 16\,\mathrm{CS}_{\mathrm{grav}}\,. \tag{C.8}$$

D 玻色$\mathrm{SU}(k)_1$的时间反演不变性

在本附录中，为完整起见，我们证明：作为一种玻色理论，当 k 为奇数时，SU$(k)_1$ 拓扑量子场论具有时间反演不变性，当且仅当 -1 是模 k 的二次剩余。关于研究阿贝尔陈-西蒙斯理论时间反演的其他工作，参见[52, 55]。

首先，回顾一下：如果存在任意子 i 的一个置换 P，它保持融合规则不变：$i \times j = k \to P(i) \times P(j) = P(k)$，并且使任意子的拓扑自旋反转：$\theta_{P(i)} = \theta_i^*$，那么阿贝尔拓扑量子场论具有时间反演对称性。若 SU$(k)_1$具有时间反演不变性，则存在 q 使得：

$$\frac{q(k-q)}{2k} = -\frac{(k-1)}{2k} \mod 1, \tag{D.1}$$

或者等价地

$$q(k-q) + k - 1 = z2k, \tag{D.2}$$

对于某个整数 z。重新整理后，我们得到：

$$(q + 1 - 2z)k - q^2 = 1, \tag{D.3}$$

这就是 -1 成为模 k的二次剩余的条件。反过来，如果我们假设 -1 是模 k的二次剩余，那么存在整数 p, q 使得 $pk - q^2 = 1$。

注意，由于 k 为奇数， p 和 q 的奇偶性必定不同。给定这些整数，我们可以定义：

$$z := \frac{(q-p)+1}{2}, \tag{D.4}$$

由于 q 和 p 的奇偶性不同，因此这是一个整数。于是，我们有

$$(q+1-2z)k - q^2 = 1 \iff q(k-q) + (k-1) = z2k, \tag{D.5}$$

由此可得所需性质：

$$\frac{q(k-q)}{2k} = -\frac{(k-1)}{2k} \mod 1, \tag{D.6}$$

这是将 $\mathbb{Z}_k$ 的生成元映射到另一个自旋相反的任意子的条件。有了这一点，就可以轻松验证其余各条线也会相应地发生置换。

参考文献

[1] *D. Gaiotto*、*A. Kapustin*、*N. Seiberg* 和 *B. Willett*，《广义全局对称性》，*JHEP 02*（*2015*） 172, [*arXiv:1412.*5148].[2] *T. Creutzig*、*J. F. R. Duncan* 和 *W. Riedler*，《自对偶顶点算子超代数与超共形场论》，《物理学杂志 *A*》*51*（*2018*），第 3 034001, [期 *arXiv:1704.*03678].[3] *P. Boyle Smith*、*Y.-H. Lin*、*Y. Tachikawa* 和 *Y. Zheng*，《中心荷为 ≤ 16 的手征费米子共形场论分类》， [*arXiv:2303.*16917].[4] *S. Mukhi* 和 *B. C. Rayhaun*，《具有两个主场且中心荷小于 *25* 的幺正有理共形场论分类》，《数学物理通讯》*401*（*2023*），第 *2* 期，*1899–1949*，[*arXiv:2208.*05486].[5] *B. C. Rayhaun*，《小亏格中的玻色有理共形场论、手征费米子化与对称性／子代数对偶》， [*arXiv:2303.*16921].[6] *G. Höhn* 和 *S. Möller*，《中心荷至多为 24, [的自对偶顶点算子超代数分类》， 17190]*arXiv:2303.*[7] *S. Möller* 和 *B. C. Rayhaun*，《顶点算子代数上的等价关系 *I*：亏格》，[*arXiv:2408.*07117].[8] *S. Möller* 和 *B. C. Rayhaun*，《顶点算子代数上的等价关系 *II*：*Witt* 等价与轨形》， [*arXiv:2410.*18166].[9] *A. N. Schellekens*，《亚纯 $C = 24$ 共形场论》，《数学物理通讯》*153*（*1993*）*159*–186, [*hep-th/*9205072].[10] *J. H. Conway* 和 *N. J. A. Sloane*，《球堆积、格与群》，数学科学基础丛书第 *290* 卷 [数学科学基础原理]。施普林格出版社，纽约，第 *3* 版，*1999* 年。另有 *E. Bannai*、*R. E. Borcherds*、*J. Leech*、*S. P. Norton*、*A. M. Odlyzko*、*R. A. Parker*、*L. Queen* 和 *B. B. Venkov* 的补充贡献。[11] *J. van Ekeren*、*S. Möller* 和 *N. R. Scheithauer*，《全纯顶点算子代数的构造与分类》，*Journal für die reine und angewandte Mathematik*（克雷勒数学杂志）*2020*（*2017*年*11*月）*61–99*。

[12] G. Höhn，《关于月光模块的亏格》，[arXiv:1708.05990].[13] J. van Ekeren、C. H. Lam、S. Möller 和 H. Shimakura，《Schellekens 列表与非常奇异公式》，《数学进展》380（2021年3月）107567。[14] S. Möller 和 N. Scheithauer，《Leech格顶点算子代数的维数公式与广义深洞》，《数学年刊》197（2023年1月）。[15] G. Höhn 和 S. Möller，《从 Niemeier格系统性构造 Schellekens 顶点算子代数的轨形构造》，《伦敦数学会会刊》106（2022），第 4 期，3162–3207。[16] S. Möller 和 N. R. Scheithauer，《中心荷 24 的全纯顶点算子代数的几何分类》，《代数与数论》18（2024），第 10 期，1891–1922。[17] J. Kaidi、Z. Komargodski、K. Ohmori、S. Seifnashri 和 S.-H. Shao，《 2+1维拓扑量子场论中的高阶中心荷与拓扑边界》，SciPost Phys. 13（2022），第 3 期 067，[arXiv:2107.13091].[18] E. Witten，《量子场论与琼斯多项式》，《数学物理通讯》121（1989）351–399。[19] S. Elitzur、G. W. Moore、A. Schwimmer 和 N. Seiberg，《关于 Chern-Simons-Witten 理论的正则量子化的评论》，《核物理B》326（1989）108–134。[20] J. Fuchs、I. Runkel 和 C. Schweigert，《拓扑场论构造有理共形场论关联函数 1：配分函数》，《核物理B》646（2002）353–497, [hep-th/0204148].[21] D. Gaiotto 和 J. Kulp，《轨形群胚》，JHEP 02（2021） 132, [arXiv:2008.05960].[22] L. Kong 和 H. Zheng，《二维拓扑序的无能隙边界与富化幺半范畴》，《核物理B》927（2018年2月）140–165。[23] L. Kong 和 H. Zheng，《二维拓扑序无能隙边界的数学理论。第一部分》，JHEP 02（2020） 150, [arXiv:1905.04924].[24] F. Apruzzi、F. Bonetti、I. García Etxebarria、S. S. Hosseini 和 S. Schafer-Nameki，《弦论中的对称性拓扑场论》，《数学物理通讯》402（2023），第 1 期，895–949，[arXiv:2112.02092].[25] F. Apruzzi、I. Bah、F. Bonetti 和 S. Schafer-Nameki，《来自全息与膜的不可逆对称性》，《物理评论快报》130（2023），第 12 121601, [期 arXiv:2208.07373].[26] J. Kaidi、K. Ohmori 和 Y. Zheng，《不可逆缺陷的对称性拓扑场论》，《数学物理通讯》404（2023），第 2 期 1021–1124, [arXiv:2209.11062].[27] D. S. Freed、G. W. Moore 和 C. Teleman，《量子场论中的拓扑对称性》，[arXiv:2209.07471].[28] C.-M. Chang、Y.-H. Lin、S.-H. Shao、Y. Wang 和 X. Yin，《二维中的拓扑缺陷线与重整化群流》，JHEP 01（2019）026，[arXiv:1802.04445].[29] Y.-H. Lin 和 S.-H. Shao，《怪兽共形场论的对偶缺陷》，《物理学杂志 A》54（2021），第 6 期065201, [arXiv:1911.00042].[30] H. Fosbinder-Elkins 和 J. A. Harvey，《模不变群与缺陷McKay–Thompson级数》，《物理学杂志 A》58（2025），第 39 395201, [期 arXiv:2408.16263]。

[31] *H. Fosbinder-Elkins* 和 *J. A. Harvey*，《一类 *Schellekens* 理论中的超共形对称性》，[*arXiv:2509.08941*].[32] *J.-B. Bae*、*J. A. Harvey*、*K. Lee*、*S. Lee* 和 *B. C. Rayhaun*，《具有散在群对称性的共形场论》，《数学物理通讯》*388 (2021*年*)*，第 *1* 期，*1–105*，[*arXiv:2002.02970*].[33] *Y.-Z. Huang*、*A. Kirillov* 和 *J. Lepowsky*，《编织张量范畴与顶点算子代数的扩张》，《数学物理通讯》*337 (2015*年*)*，第 *3* 期，*1143*–1159, [*arXiv:1406.3420*].[34] *A. Kirillov Jr* 和 *V. Ostrik*，《关于 *mckay* 对应的 *q*-类比及 *sl2* 共形场论的 *ADE* 分类》，《数学进展》*171 (2002*年*)*，第 *2* 期，*183–227*。[35] *G. Höhn*，《顶点算子代数的属与三维拓扑量子场论》，《菲尔兹研究所通讯》*39 (2003*年*)*，*89*。[36] *P.-S. Hsin* 和 *N. Seiberg*，《能级/秩对偶与陈-西蒙斯-物质理论》，*JHEP 09 (2016*年*)* 095, [*arXiv:1607.07457*].[37] *O. Aharony*、*F. Benini*、*P.-S. Hsin* 和 *N. Seiberg*，《具有 SO 和 USp 规范群的陈-西蒙斯-物质对偶》，*JHEP 02 (2017*年*)* 072, [*arXiv:1611.07874*].[38] *C. Córdova*、*P.-S. Hsin* 和 *N. Seiberg*，《正交规范群陈-西蒙斯物质理论中的全局对称性、反项与对偶》，*SciPost Phys. 4 (2018*年*)*，第 *4* 期021, [*arXiv:1711.10008*].[39] *C. Córdova*、*P.-S. Hsin* 和 *K. Ohmori*，《例外陈-西蒙斯-物质对偶》，*SciPost Phys. 7 (2019*年*)*，第 4 056, [期*arXiv:1812.11705*].[40] *J. Frohlich*、*J. Fuchs*、*I. Runkel* 和 *C. Schweigert*，《带状范畴的对应》，*Adv. Math. 199 (2006*年*)*，*192*–329, [*math/0309465*].[41] *F. A. Bais* 和 *J. K. Slingerland*，《凝聚诱导的拓扑有序相之间的相变》，《物理评论*B*辑》*79 (2009*年*)* 045316, [*arXiv:0808.0627*].[42] *I. S. Eliëns*、*J. C. Romers* 和 *F. A. Bais*，《任意子理论中玻色凝聚的图示方法》，《物理评论*B*辑》*90 (2014*年*)*，第 19 195130, [期*arXiv:1310.6001*].[43] *L. Kong*，《任意子凝聚与张量范畴》，《核物理*B*》*886 (2014*年*)*，*436–482*，[*arXiv:1307.8244*].[44] *F. Burnell*，《任意子凝聚及其应用》，《凝聚态物理年度评论》*9 (2018*年*3*月*)*，*307–327*。[45] *C. Córdova* 和 *D. García-Sepúlveda*，《非可逆任意子凝聚与能级-秩对偶》，[*arXiv:2312.16317*].[46] *C. Córdova* 和 *D. García-Sepúlveda*，《通过任意子凝聚构造拓扑余集及其在有能隙 *QCD* 中的应用》$_2$, [*arXiv:2412.01877*].[47] *L. Kong*、*Z.-H. Zhang*、*J. Zhao* 和 *H. Zheng*，《高阶凝聚理论》，[*arXiv:2403.07813*].[48] *Z. D. Shi*、*C. Zhang* 和 *S. Todadri*，《掺杂晶格非阿贝尔量子霍尔态》，*SciPost Phys. 19 (2025*年*)*，*150*。[49] *C. Zhang*、*A. Vishwanath* 和 *X.-G. Wen*，《通过任意子凝聚构造非阿贝尔分数量子霍尔态的层级》，《物理评论*B*辑》*112 (2025*年*9*月*)*，*125116*。

[50] *L. Bhardwaj*、*D. Pajer*、*S. Schafer-Nameki* 和 *A. Warman*，《具有不可逆对称性的无能隙 *SPT* 与自发对称性破缺相的哈斯图》，*SciPost Phys. 19 (2025*年*)*，第 *4* 期，*113*，[*arXiv:2403.*00905].[51] *L. Bhardwaj*、*L. E. Bottini*、*D. Pajer* 和 *S. Schafer-Nameki*，《俱乐部三明治：具有不可逆对称性的无能隙相与相变》，*SciPost Phys. 18 (2025*年*)*，第 *5* 期156, [*arXiv:2312.*17322].[52] *D. Delmastro* 和 *J. Gomis*，《阿贝尔陈-西蒙斯理论的对称性与算术》，*JHEP 03 (2021*年*)* 006, [*arXiv:1904.*12884].[53] *C. Córdova*、*P.-S. Hsin* 和 *N. Seiberg*，《$(2+1)d$中的时间反演对称性、反常与对偶》，*SciPost Phys. 5 (2018*年*)*，第 1 006, [期*arXiv:1712.*08639].[54] *M. Cheng*，《拓扑晶体超导体表面拓扑序的微观理论》，*Physical Review Letters 120 (2018*年*)*，第 *3* 期，*036801*。[55] *R. Geiko* 和 *G. W. Moore*，《三维陈-西蒙斯-威滕理论何时具有时间反演对称性？》，*Annales Henri Poincare 25 (2024*年*)*，第 *1* 期，*673–714*，[*arXiv:2209.*04519].[56] *R. Thorngren* 和 *Y. Wang*，《融合范畴对称性 *II*：$c = 1$ 及其以后的范畴性》，[*arXiv:2106.*12577].[57] *E. Ardonne*、*M. Cheng*、*E. C. Rowell* 和 *Z. Wang*，《亚幺正模张量范畴的分类》，*Journal of Algebra 466 (2016*年*11*月*)*，*141–146*。[58] *E. Ardonne*、*P. E. Finch* 和 *M. Titsworth*，《亚幺正融合范畴的分类》，*Symmetry 13 (2021*年*11*月*)*，*2102*。[59] *D. E. Evans* 和 *T. Gannon*，《*Tambara-Yamagami*、环群、丛与 *KK* 理论》，*Adv. Math. 421 (2023*年*)*，*109002*。[60] *Y. Choi*、*D.-C. Lu* 和 *Z. Sun*，《规范化不可逆对称性下的自对偶性》，[*arXiv:2310.*19867].[61] *O. Diatlyk*、*C. Luo*、*Y. Wang* 和 *Q. Weller*，《规范化不可逆对称性：二维量子场论中的拓扑界面与广义轨形群胚》，[*arXiv:2311.*17044].[62] *Y. Choi*、*B. C. Rayhaun*、*Y. Sanghavi* 和 *S.-H. Shao*，《关于边界、反常与不可逆对称性的若干评述》，*Phys. Rev. D 108 (2023*年*)*，第 12 125005, [期*arXiv:2305.*09713].[63] *F. Benini*、*C. Córdova* 和 *P.-S. Hsin*，《关于 *2*-群全局对称性及其反常》，*JHEP 03 (2019*年*)* 118, [*arXiv:1803.*09336].[64] *A. Davydov*、*M. Müger*、*D. Nikshych* 和 *V. Ostrik*，《非退化编织融合范畴的 *Witt* 群》，*Journal für die reine und angewandte Mathematik (*克雷勒数学杂志*) 2013 (2013*年*)*，第 *677* 期，*135–177*。[65] *I. Cong*、*M. Cheng* 和 *Z. Wang*，《物质拓扑相中有能隙边界的哈密顿量与代数理论》，《数学物理通讯》*355 (2017*年*)*，*645–689*，[*arXiv:1707.*04564].[66] *C. Córdova*、*D. García-Sepúlveda* 和 *K. Ohmori*，《陈-西蒙斯物质理论中的拓扑场论希格斯化相变与不可逆对称性》，[*arXiv:2504.*03614].[67] *B. Schellekens*，*“Kac。” https://www.nikhef.nl/~t58/Site/Kac.html*，*2006*年。[68] *G. W. Moore* 和 *N. Seiberg*，《驯服共形动物园》，*Phys. Lett. B 220 (1989*年*)*，*422–430*。

[69] *P.-S. Hsin*、*H. T. Lam* 和 *N. Seiberg*，《一形式全局对称性及其在三维和四维中的规范化》，*SciPost Phys. 6*（*2019*），*no.* 3 039, [*arXiv:1812.*04716].[70] *P.-S. Hsin* 和 *S.-H. Shao*，《*(2+1)* 维中的洛伦兹对称性分数化与对偶》，*SciPost Phys. 8*（*2020*） 018, [*arXiv:1909.*07383].[71] *R. Dijkgraaf* 和 *E. Witten*，《拓扑规范理论与群上同调》，《数学物理通讯》*129*（*1990*）*393*。[72] *C. Córdova*、*D. B. Costa* 和 *P.-S. Hsin*，《有限群规范理论中的不可逆对称性》，*SciPost Phys. 18*（*2025*），*no.* 1 019, [*arXiv:2407.*07964].[73] *C. Córdova*、*D. B. Costa* 和 *P.-S. Hsin*，《作为有限群规范理论中凝聚缺陷的不可逆对称性》， [*arXiv:2412.*16681].[74] *A. N. Schellekens* 和 *N. P. Warner*，《*Kac–Moody*代数的共形子代数》，*Phys. Rev. D 34*（*1986*年*11*月）*3092–3096*。[75] *F. Alexander Bais* 和 *P. G. Bouwknegt*，《玻色弦的子群截断分类》，《核物理*B*》*279*（*1987*），*no. 3*，*561–570*。[76] *M. Barkeshli*、*P. Bonderson*、*M. Cheng* 和 *Z. Wang*，《对称性分数化、缺陷与拓扑相的规范化》，*Phys. Rev. B 100*（*2019*），*no. 11*，*115147*，[*arXiv:1410.*4540].[77] *A. Kitaev*，《精确求解模型中的任意子及其他》，*Annals Phys. 321*（*2006*），*no. 1*，*2*–111, [*cond-mat/*0506438].[78] *J. Fuchs*、*A. N. Schellekens* 和 *C. Schweigert*，《所有简单流扩张的矩阵*S*》

s,

《核物理*B*》**473** (1996年) 323–366, [hep-th/9601078].