arXiv:2512.24477v1 [physics.optics] 30 Dec 2025

蜂窝光子晶体中光子霍尔效应的数学理论

Wei Li * Junshan Lin † Jiayu Qiu‡ Hai Zhang §

摘要

本文建立了光子霍尔效应的数学理论，并证明了两种蜂窝光子晶体界面处导引电磁波的存在。这种导引波类似于电子系统中的边缘态：它由拓扑霍尔效应诱发，沿界面传播，但不会在体介质中传播。我们从一种对称蜂窝光子晶体出发，该晶体在布里渊区的高对称点 K 和 K' 处存在狄拉克点，并为周期介质引入两类扰动。这些扰动解除狄拉克简并，在点 K 和 K' 处形成谱带谷，其拓扑相定义明确，且取决于扰动参数的符号。通过采用层势方法和谱分析，我们研究了两种蜂窝光子晶体拼接在一起时，界面处导引波存在的条件。特别是，我们阐明了界面模的存在与施加于界面两侧周期介质的扰动性质之间的关系。

1 引言

1.1 背景

拓扑绝缘体的最新进展为稳健地引导经典波开辟了新途径。在拓扑绝缘体中，绝缘性的体电子材料会在其表面支持局域边缘态，这些边缘态不受背向散射和系统无序的影响[4, 13, 24]。通过在光子结构中模拟拓扑绝缘体中的量子霍尔效应，并利用有源元件破坏光子系统的时间反演对称性；或者借助量子谷霍尔效应或自旋霍尔效应的类似机制，利用无源元件破坏光子系统的空间对称性，也可以实现此类特性[14, 15, 20, 21, 22, 23, 9, 30, 28, 29]。以这种方式设计的光子晶体具有非平庸的拓扑相，并支持沿介质界面传播的局域电磁波模态，这种现象称为光子霍尔效应。

一般而言，光子霍尔效应建立在具有特定对称性的周期介电介质之上，例如具有蜂窝晶格的光子晶体。相应椭圆算子的谱带结构会出现狄拉克点，此处两条色散曲面线性交叉。对于蜂窝光子晶体，狄拉克点通常出现在布里渊区的高对称点

*德保罗大学数学科学系，芝加哥，伊利诺伊州 60614。 wei.li@depaul.edu.

†奥本大学数学与统计学系，奥本，阿拉巴马州 36849。 jzl0097@auburn.edu.

‡苏黎世联邦理工学院数学系，Rämistrasse 101，CH-8092 苏黎世，瑞士。jiayu.qiu@sam.math.ethz.ch.§香港科技大学数学系，香港九龙清水湾，香港特别行政区，中国。 haizhang@ust.hk.

， K 和 K'。通过对高对称周期介质引入特定扰动，破坏光子系统的时间反演对称性或反演对称性，狄拉克点处的简并便会解除。同时，色散曲面的局部极值出现在 K 和 K'，从而形成谱带谷。谷位置K 和 K' 附近的贝里曲率承载着周期介质的拓扑相。事实上，可以通过对 K 和 K'周围的贝里曲率积分来定义谷陈数；并且可以证明，周期介质受到方向相反的两种扰动时，在 K 或 K'处会产生符号相反的陈数。当两个在 K 或 K' 处具有相反谷陈数的光子晶体相互连接时，其界面处能够支持局域电磁波模态。

本文旨在建立一种数学理论，研究两个形成谱带谷的蜂窝光子晶体连接在一起时，界面（边缘）模存在的条件。界面两侧的蜂窝光子晶体都是从具有狄拉克点的周期介质经扰动得到的。这些扰动可以属于同一类，也可以属于两种不同的类别。我们考察引入扰动后狄拉克点附近谱隙的打开情况，以及在布里渊区的 K 和 K' 点形成谱带谷的过程。研究表明，当扰动参数的符号反转时，贝里曲率的符号也会反转。随后证明，当相接的周期介质受到各种扰动时，联合光子结构中会出现从 K 和 K' 分岔出的界面（边缘）模；详情参见定理 6 和推论7。本研究为实验上已在 [20, 21, 30, 28]中探索的磁光光子霍尔效应和谷霍尔效应提供了严格的数学理论。在后续论文中，我们将建立数学理论，研究依赖于双重简并狄拉克点以及周期介质几何扰动的光子自旋霍尔效应。

我们想指出，近年来，关于霍尔效应的数学理论以及石墨烯中拓扑边缘态的存在性，已经取得了重大进展；例如，参见 [8, 11, 18]。其中，作者利用畴壁模型研究了连续型薛定谔算子和耦合边缘算子。这些模型假设两个体介质在一个远大于结构周期的长度尺度上通过绝热方式“连接”起来。[8, 11, 18]中针对边缘算子进行了双尺度分析，从而得到了缓慢变化振幅所满足的有效狄拉克方程。在本文中，我们研究光子晶体模型，其中两个不同的周期介质沿界面直接连接，因而不再存在尺度分离。因此，为畴壁模型发展出的多尺度展开法无法直接用于研究边缘模态，本文所考虑的耦合结构中的波也不再能由有效狄拉克算子描述。为应对偏微分方程模型中系数的不连续性以及尖锐界面的存在所带来的谱分析新挑战，我们采用了基于层势理论、渐近分析和广义鲁歇定理相结合的数学框架。此外，我们的结果还意味着拓扑光子晶体的体边对应。更确切地说，界面模的数量由界面两侧体不变量（谷陈数）之差决定。关于使用不同技术研究其他几类偏微分方程模型中的体边对应，我们 refer to [2, 7, 26, 31]及其中的参考文献。

1.2 主要结果

1.2.1 周期椭圆算子

我们考虑一族用于模拟蜂窝光子晶体中横向磁波（TM波）传播的椭圆算子，其中电矢量位于传播平面内。该周期微分算子定义为

$$\mathcal{L}(\varepsilon,\delta) := -\nabla \cdot A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})\nabla, \tag{1}$$

其中，材料张量 $A(\varepsilon,\ \delta;\mathbf{x})$ 依赖于两个参数 ε 和 δ，分别表示式 (3) 和假设 5 中所指定周期介质的一类扰动。

蜂窝晶格记为 $\Lambda := \mathbb{Z}\mathbf{e}_1 \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2 := \{\ell_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2 :\ \ell_1,\ell_2 \in \mathbb{Z}\}$，其中晶格向量为 $\mathbf{e}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^T$ 和 $\mathbf{e}_2 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, 1\ 2)^T$。此处及下文中，$\mathcal{C}_z := \{t_1\mathbf{e}_1 + \ell_2\mathbf{e}_2 : \ell_1,\ell_2 \in [-1/2, 1/2)\}$ 表示图1（左）所示晶格的基本胞。倒格子由 $\Lambda^* = \{2\pi\ell_1\boldsymbol{\beta}_1 + 2\pi\ell_2\boldsymbol{\beta}_2 :\ \ell_1,\ell_2 \in \mathbb{Z}\}$ 给出，其中倒格矢 $\boldsymbol{\beta}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)^T$ 和 $\boldsymbol{\beta}_2 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, 1)^T$ 满足 $\mathbf{e}_i \cdot \boldsymbol{\beta}_j = \delta_{ij}$，其中 $i,j = 1,2$。Λ^* 的六边形基本胞，即布里渊区，记为 $\mathcal{B}_z$，如图1（右）所示。

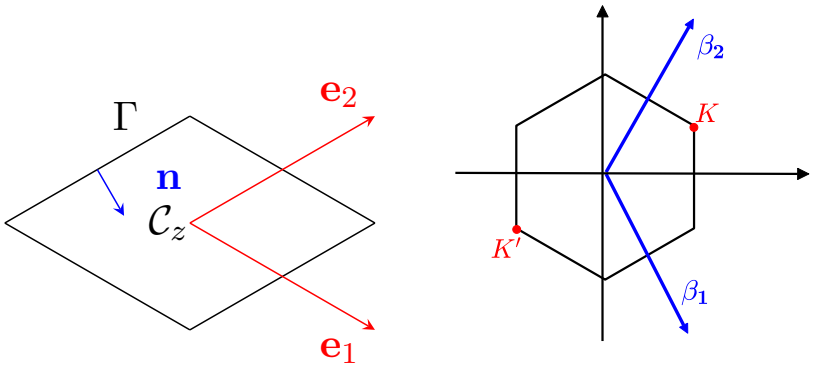

图1：基本胞 $\mathcal{C}_z$（左）和布里渊区 $\mathcal{B}$（右）。

设 R 为角度为 $\frac{2\pi}{3}$ 的顺时针旋转矩阵，F 为关于 x_2 轴的反射矩阵，定义如下：

$$R\mathbf{x} := \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}\mathbf{x}, \quad F\mathbf{x} := \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\mathbf{x}. \tag{2}$$

对于每个 2×2 正交矩阵 O，其诱导的函数变换定义为 s

$$\mathcal{O}f(\mathbf{x}) := f(O^{-1}\mathbf{x}).$$

假设1 。材料张量 $A(\varepsilon,\delta;\ \cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{M}_{2\times 2})$ 具有以下性质 *s:*

1. 椭圆 城市：存在一个常数 $\gamma > 0$，使得对于所有 $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ 以及所有 $\xi \in \mathbb{R}^2$ ，

$$\xi^T A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})\xi \geq \gamma|\xi|^2.$$

2. 厄米性： $A(\varepsilon,\delta;\ \mathbf{x})$ 满足 $A(\varepsilon,\delta;\ \mathbf{x})^{T} = A(\varepsilon,\delta;\ \mathbf{x})$。

3. 蜂窝周期性： 该张量具有 Λ 周期性，使得

$$A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x}+\mathbf{e}) = A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x}) \quad \textit{for all } \mathbf{e}\in\Lambda.$$

4. $\frac{2\pi}{3}$ 旋转不变性：

$$A(\varepsilon,\delta;R^{-1}\mathbf{x}) = R^{-1}A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})R.$$

为简洁起见，我们将未扰动算子记为

$$\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(0,0),$$

它具有以下进一步的对称性。

假设 2. 未扰动物质张量 $A_0(\mathbf{x}) := A(0,0;\mathbf{x})$具有以下对称性：

1. ***Reflection invariance:*** $A_0(F^{-1}\mathbf{x}) = F^{-1}A_0(\mathbf{x})F.$
2. 时间反演/共轭不变性： $A_0(\mathbf{x}) = \overline{A_0(\mathbf{x})}.$

关于张量 $A_0(\mathbf{x})$ 所满足的对称性示意图，请参见图3。设 $K := 2\pi(\frac{1}{\sqrt{3}}, 1_3) = 2\pi(\frac{1}{3}\boldsymbol{\beta}_1 + \frac{2}{3}\boldsymbol{\beta}_2)$ 和 $K' := -K$是布里渊区中的两个高对称点，如图1所示。在一般的非简并条件下，$\mathcal{L}_0$ 的谱带结构呈现狄拉克点（K,λ_*）和（K',λ_*）。更具体地说，$\mathbf{p}_* = K$附近的色散关系可表示为

$$(\lambda-\lambda_*)^2 = m_*^2\,|\mathbf{p}-K|^2 + O(|\mathbf{p}-K|^3),$$

其中， λ_* 是算子 $\mathcal{L}_0$ 的一个二重特征值。更多细节请参见定理10。

假设3 （沿方向 $\boldsymbol{\beta}$的无折叠条件）。 设 $\boldsymbol{\beta}\in\mathbb{R}^2$ 为一个固定的布洛赫波矢， λ_* 表示 K 或 K'处的狄拉克特征频率。对于任意形式为$\mathbf{p} = K + \ell\boldsymbol{\beta}$ 且满足 $\ell\in\mathbb{R}$的准动量， $\mathcal{L}_0$ 的谱带仅在以下条件成立时取值 λ_*：

$$\mathbf{p}\in(K+\Lambda^*)\cup(K'+\Lambda^*).$$

此条件确保沿 $\boldsymbol{\beta}$ 方向不存在能带折叠。

注4。 数值证据表明，对于由对比度足够高的介电材料构成的光子晶体，假设*3*成立；参见图*2*。在定理 *6*和推论*7*中，我们分别假设当 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 = (\frac{1}{\sqrt{3}}, -1)^T$和 $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1^a := (0,-2)^T$时，无折叠条件成立。

式（1）中定义的周期椭圆算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\delta)$ 是由 $\mathcal{L}_0$ 扰动得到的。在主阶上， ε和 δ中的张量 $A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})$ 的扰动由以下导数描述

$$C(\mathbf{x}) := \partial_\varepsilon A(\varepsilon,0;\mathbf{x})\big|_{\varepsilon=0}, \quad B(\mathbf{x}) := \partial_\delta A(0,\delta;\mathbf{x})\big|_{\delta=0}. \tag{3}$$

矩阵 C 和 B 保持厄米性和 $2\pi/3$–旋转对称性，如假设1所述。我们进一步假设 C 和 B 满足以下性质：

假设 5。 矩阵 $C, B\in L^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{M}_{2\times2})$ 满足

1. ***Reflection anti-invariance:*** $C(F^{-1}\mathbf{x}) = -F^{-1}C(\mathbf{x})F,\ B(F^{-1}\mathbf{x}) = -F^{-1}B(\mathbf{x})F.$
2. 时间反演不变性／反不变性： $\overline{C} = C,\ \overline{B} = -B.$

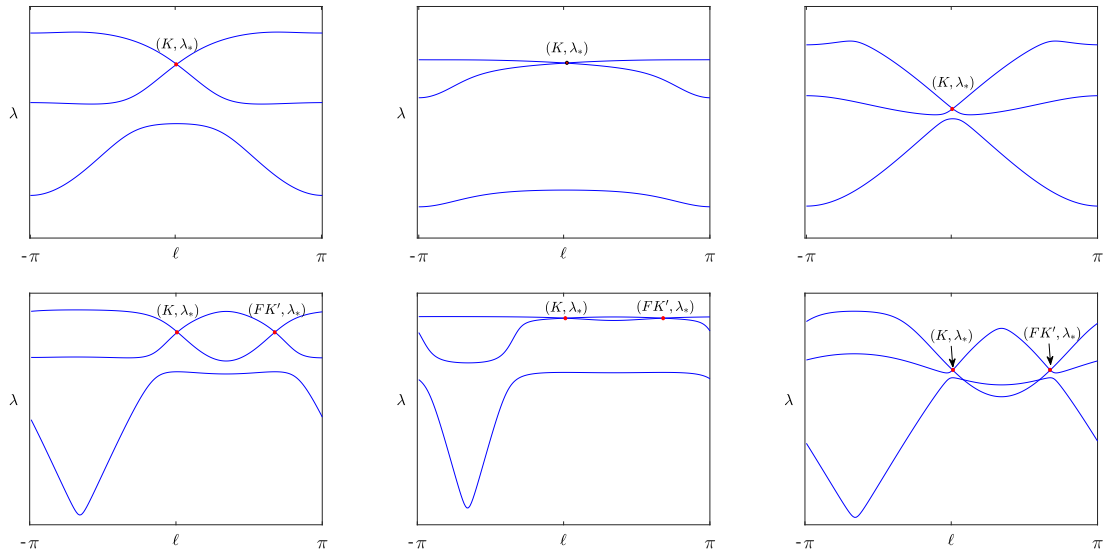

图2：当 $\mathbf{p} \in \{K+\ell\boldsymbol{\beta}, \ell \in [-\pi,\pi]\}$ 时， $\mathcal{L}_0$ 的谱带对应于由图3（左）所示的无限排列夹杂物构成的光子晶体。材料张量 $A(\mathbf{0},\ \mathbf{0};\mathbf{x}) = a\,\chi_D(\mathbf{x})$，其中 $\mathbf{x} \in \mathcal{C}_z$， $D \in \mathcal{C}_z$ 是一个在 R 和 F 作用下保持不变的利普希茨区域。上： $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1 := (\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1)^T$；下： $\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\beta}_1^a := (\mathbf{0},\ -2)^T$。当 $a = \frac{1}{30}$ 和 $\frac{1}{100}$ 时，前两列中的谱满足无折叠条件。当 $a = \frac{1}{15}$ 时，最后一列中的谱不满足无折叠条件。

1.2.2 联合算子的界面模

令 $\gamma := \{t\mathbf{e}_2 :\ t \in \mathbb{R}\}$ 表示沿着 $\mathbf{e}_2$的直线。我们考虑在 γ的左侧和右侧定义的椭圆算子如下：

$$\mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\delta_L,\varepsilon_R,\delta_R) := \begin{cases} \mathcal{L}(\varepsilon_L,\delta_L), & \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2^{\perp} < 0; \\ \mathcal{L}(\varepsilon_R,\delta_R), & \mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2^{\perp} > 0. \end{cases} \tag{4}$$

算子 $\mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 与沿之字形界面拼接两个光子晶体所形成的联合介质相关，这两个光子晶体的系数分别为 $A(\varepsilon_L,\ \delta_L;\ \cdot)$ 和 $A(\varepsilon_R,\ \delta_R;\ \cdot)$（见图3右侧）。考虑与算子 $\mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 相关的弱解较为方便。为此，我们引入以下半双线性型

$$\begin{aligned} \langle v, \mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\delta_L,\varepsilon_R,\delta_R)u\rangle_{\mathbb{R}^2} := &\int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2^{\perp}<0} \overline{\nabla v(\mathbf{x})}\cdot A(\varepsilon_L,\delta_L;\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x} \\ &+ \int_{\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_2^{\perp}>0} \overline{\nabla v(\mathbf{x})}\cdot A(\varepsilon_R,\delta_R;\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}. \end{aligned} \tag{5}$$

界面沿$\mathbf{e}_2$方向呈周期性。关于此周期性的单胞为 $\Omega := \bigcup_{m\in\mathbb{Z}}(\mathcal{C}_z + m\mathbf{e}_1)$，这是沿$\mathbf{e}_1$ 方向的无限条带区域。定义函数空间

$$H := \left\{u \in H^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2) : u \in H^1(\Omega)\right\}. \tag{6}$$

算子 $\mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$的一个界面模是满足以下条件的函数 $u \in H$

$$\begin{cases} \mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\delta_L,\varepsilon_R,\delta_R)u = \lambda u, \\ u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_2) = e^{ik_\parallel}u(\mathbf{x}) \end{cases} \tag{7}$$

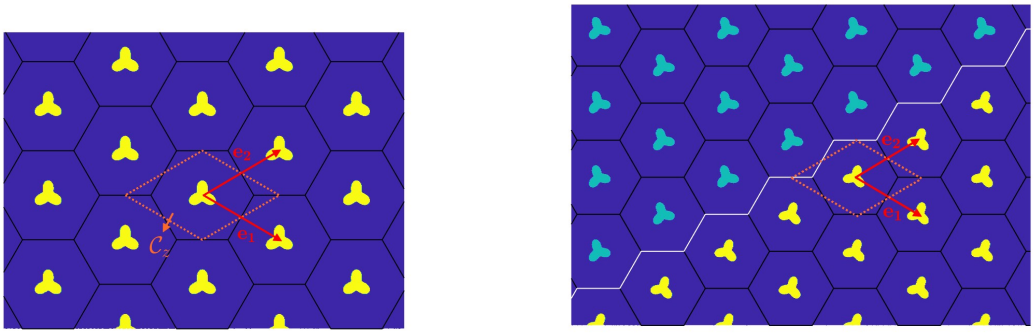

图3：左：椭圆算子 $\mathcal{L}_0 := \mathcal{L}(0,\ 0)$ 所对应的介质，其张量 $A_0(\mathbf{x}) := A(0,\ 0,\ ;\ \cdot)$ 满足假设1和假设2。右：定义椭圆算子 $\mathcal{L}^{\text{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 的联合蜂窝结构所在的介质。两个周期介质的界面 γ 沿 $\mathbf{e}_2$ 方向。 $\mathcal{L}_0$ 的扰动 $(\varepsilon_L,\ \delta_L)$ 和 $(\varepsilon_R,\ \delta_R)$ 分别位于界面的两侧。

对于某个 λ，$k_{\|} \in \mathbb{R}$。在上文中，$k_{\|}$ 是沿界面方向 $\mathbf{e}_2$ 的准动量，而 λ是特征值。注意，对于 $u \in H$，有 $|u(\mathbf{x})| \to 0$当 $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{e}_1| \to \infty$时成立。也就是说，界面模沿界面方向 $\mathbf{e}_2$ 传播，同时沿横向衰减。

为清晰起见，在全文中我们假设扰动参数满足 $\varepsilon_j \cdot \delta_j = 0$，其中 $j = L,\ R$。本文的主要结果概述如下：

定理 6. 设 $k_{\|}^* := K \cdot \mathbf{e}_2$，且 $\mathfrak{d}$ 是 $(0,\ 1)$ 中任意一个常数。假设*3*沿着 β_1 成立，并且命题*11*中定义的两个常数 t_1 和 t_2 均非零。

情形*1*。$(\varepsilon_L, \delta_L) = (\varepsilon, 0)$ 和 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (-\varepsilon, 0)$：若 $k_{\|} = k_{\|}^*$（或 $k_{\|} = -k_{\|}^*$），则当 $|\varepsilon| \ll 1$时，H 中恰好存在一个特征值为 $\lambda \in (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)$ 的界面模。

情形*2*。$(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 和 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (0, -\delta)$：若 $k_{\|} = k_{\|}^*$（或 $k_{\|} = -k_{\|}^*$），则当 $|\delta| \ll 1$时，H 中恰好存在一个特征值为 $\lambda \in (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_2\delta|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_2\delta|)$ 的界面模。

情形 *3.* $(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 和 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (\varepsilon, 0)$：假设 ε和 δ足够小，而 $\rho := \frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta}$ 固定。若 $\rho > 0$，则在 $k_{\|} = k_{\|}^*$处不存在界面模，但在 $k_{\|} = -k_{\|}^*$ 处恰有一个界面模，其特征值为 $\lambda \in (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|) \cap (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_2\delta|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_2\delta|)$。若 $\rho < 0$，则在 $k_{\|} = k_{\|}^*$ 处恰有一个边缘模态，其特征值为 $\lambda \in (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|) \cap (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_2\delta|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_2\delta|)$，但在 $k_{\|} = -k_{\|}^*$处不存在边缘模态。

上述所有特征值均满足 $\lambda = \lambda_* + o(\max(|\varepsilon|, |\delta|))$。

如图4所示，沿之字形界面对界面模进行分析的方法可以扩展到具有扶手椅型界面的联合介质。为此，将蜂窝晶格表示为 $\Lambda := \mathbb{Z}\mathbf{e}_1^a \oplus \mathbb{Z}\mathbf{e}_2^a$，其中新的晶格向量

$$\mathbf{e}_1^a = \mathbf{e}_1 = (\frac{\sqrt{3}}{2}, -\frac{1}{2})^T, \quad \mathbf{e}_2^a := \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 = (\sqrt{3}, 0)^T.$$

扶手椅型界面的方向沿着$\mathbf{e}_2^a$，因此相应的界面算子和谱问题分别表示为式（4）和式（7）的形式，其中$\mathbf{e}_2$ 被$\mathbf{e}_2^a$替换。注意，

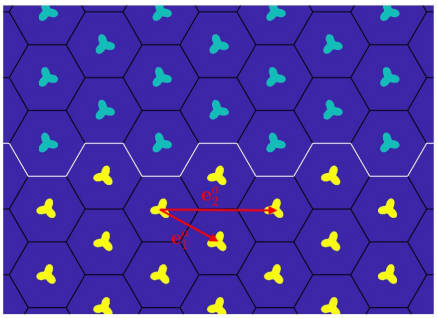

图4：具有沿$\mathbf{e}_2^a$方向的扶手椅型界面的联合蜂窝结构介质。

$K\cdot\mathbf{e}_2^a=2\pi$ 和 $K'\cdot\mathbf{e}_2^a=-2\pi$，根据 $e^{ik_\parallel}$ 的周期性，它们均等价于 0。定义$k^*_{\parallel}{}^a:=0$。那么，沿扶手椅型界面在 $k^*_{\parallel}{}^a$ 处的边缘模态由以下推论给出：

推论7. 令 $k^*_{\parallel}{}^a=0$ 和 $\mathfrak{d}$ 为 (0,1) 中任意的常数。假设*3*沿 β_1成立，且命题*11*中定义的两个常数 t_1 和 t_2 均非零。

情形*1.* $(\varepsilon_L,\delta_L)=(\varepsilon,0)$ 和 $(\varepsilon_R,\delta_R)=(-\varepsilon,0)$：若 $k_\parallel=k^*_{\parallel}{}^a$，则在 H 中恰有两个特征值为 $\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)$ 的界面模，当 $|\varepsilon|\ll1$ 时。

情形*2*。$(\varepsilon_L,\delta_L)=(0,\delta)$ 和$(\varepsilon_R,\delta_R)=(0,-\delta)$：若 $k_\parallel=k^*_{\parallel}{}^a$，则当 $|\delta|\ll1$ 时，H 中恰有两个界面模，其特征值为 $\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$。

情形 *3*。$(\varepsilon_L,\delta_L)=(0,\delta)$ 和$(\varepsilon_R,\delta_R)=(\varepsilon,0)$：假设 ε 和 δ 足够小，而 $\rho:=\frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta}$ 固定。存在且仅存在一个界面模，位于 $k_\parallel=k^*_{\parallel}{}^a$，其特征值为 $\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)\cap(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$。

以上所有特征值均满足 $\lambda=\lambda_*+o(\max(|\varepsilon|,|\delta|)$。

为使行文清晰，在论文余下部分中，我们将对 (7) 进行谱分析，并证明定理 6。推论7的证明采用相同的思路。

1.3 满足假设的材料示例

下面讨论上述周期介质的一种实现方式。该光子晶体由无限阵列的介电夹杂物构成，这些夹杂物嵌入均匀背景中。更具体地，设 $D\subset\mathcal{C}_z$ 是一个在旋转 R 和反射 F 下保持不变的利普希茨区域，使得 $R(D)=D$ 且 $F(D)=D$。考虑材料张量

$$A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})=a\,\chi_D\big(R^\varepsilon\mathbf{x}\big)+\delta\begin{pmatrix}0&-\mathrm{i}\\ \mathrm{i}&0\end{pmatrix}\chi_D(\mathbf{x})\quad\text{for}\quad\mathbf{x}\in C_z,$$
$$A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x}+\mathbf{e})=A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})\quad\text{for }\mathbf{e}\in\Lambda.$$

上述公式中， a 是一个正的常数，表示夹杂物的介电常数； χ_D 是区域 D 的特征函数，即当$\mathbf{x} \in D$ 时， $\chi_D(\mathbf{x}) = 1$ ，否则为 0； R^ε 表示描述顺时针旋转 ε 角的旋转矩阵，定义为

$$R^\varepsilon = \begin{pmatrix} \cos\varepsilon & \sin\varepsilon \\ -\sin\varepsilon & \cos\varepsilon \end{pmatrix}.$$

特别地，当没有扰动（$\varepsilon = \delta = 0$）时，我们有

$$A(0,0;\mathbf{x}) = a\,\chi_D(\mathbf{x}), \quad \text{for } \mathbf{x} \in C_z; \quad A(0,0;\mathbf{x}+\mathbf{e}) = A(0,0;\mathbf{x}) \quad \text{for } \mathbf{e} \in \Lambda.$$

这对应于由 $\bigcup_{\mathbf{e}\in\Lambda}(D+\mathbf{e})$ 定义的含有介电包 inclusions 的光子晶体。这两种扰动如下所示:

1. ε-扰动（几何扰动）：该项

$$a\,\chi_D\big(R^\varepsilon\mathbf{x}\big)$$

表示将夹杂物旋转 ε 角度。这意味着在主阶近似下，小幅旋转可表示为

$$C(\mathbf{x}) = \frac{d}{d\varepsilon}A(\varepsilon,0;\mathbf{x})\Big|_{\varepsilon=0},$$

根据链式法则，可写为

$$C(\mathbf{x}) = \nabla A(0,0;\mathbf{x}) \cdot J\mathbf{x}.$$

在上述公式中,

$$J = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

是与无穷小旋转相对应的标准旋转矩阵。换言之，对于 $A(0,\ 0;\ \mathbf{x})$ 的每个分量，我们有

$$C_{k,l}(\mathbf{x}) = \nabla A_{k,l}(0,0;\mathbf{x}) \cdot J\mathbf{x}.$$

2. δ-扰动（光磁扰动）：项

$$\delta \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix} \chi_D(\mathbf{x})$$

通过向夹杂物中掺入光磁材料并施加强度与 δ [28] 成正比的磁场，从而改变材料性质。一阶近似下，这会产生扰动张量

$$B(\mathbf{x}) = \chi_D(\mathbf{x}) \begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}.$$

总之， ε-扰动通过 R^ε 的作用使夹杂物旋转，其首阶项由 C 描述。该扰动破坏椭圆算子的反射对称性。 δ-扰动引入了反厄米贡献，体现了磁光掺杂，并由 B 表示。该扰动破坏时间反演对称性和反射对称性。

引理 8. 矩阵 A、 B 和 C 满足假设 *2* 和 *5*。

该引理的证明见附录 A。

1.4 概述

论文的其余部分安排如下。第 2 节研究周期波算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 的能带结构。特别地，我们讨论当 ε 或 δ 非零时，布里渊区高对称点处狄拉克简并的抬升以及谱隙的开启。第 3 节介绍扰动周期光子结构在无限条带区域中的格林函数，并给出其在狄拉克点附近的渐近行为。第 4 节专门讨论联合波算子 $\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 的界面模。我们为特征值问题建立边界积分方程，并对积分算子进行渐近分析，以证明定理 6。

2 周期算子的能带结构与Berry曲率

2.1 Floquet-Bloch理论

按照标准的Floquet-Bloch理论分析椭圆算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 的谱。下面简要概述，并请参阅 [16] 了解更多详情。为此，我们定义具有准动量 $\mathbf{p}\ \in \mathcal{B}$ 的函数空间如下：

$$H^1_{\mathbf{p}} := \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) : u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i) = e^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i}u(\mathbf{x})\}.$$

当且仅当 $\tilde{u}(\mathbf{x}) := e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}u(\mathbf{x})\ \in H^1_{\mathbf{0}}$ 时，成立 $u \in H^1_{\mathbf{p}}$。引入自伴算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta,\ \mathbf{p})$：$H^1_{\mathbf{0}} \times H^1_{\mathbf{0}} \to \mathbb{C}$，定义如下：

$$\mathcal{L}(\varepsilon,\delta,\mathbf{p}) := -(\nabla+\mathrm{i}\mathbf{p})\cdot A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})(\nabla+\mathrm{i}\mathbf{p}). \tag{8}$$

那么，对于 $u,\ v \in H^1_{\mathbf{p}}$，且 $\tilde{u}(\mathbf{x})\ = e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}u(\mathbf{x})$ 和 $\tilde{v}(\mathbf{x})\ = e^{-\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}v(\mathbf{x})$，有

$$\begin{aligned}\langle v, \mathcal{L}(\varepsilon,\delta)u\rangle_{\mathcal{C}_z} &:= \int_{\mathcal{C}_z} \overline{\nabla v(\mathbf{x})}\cdot A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})\nabla u(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &= \int_{\mathcal{C}_z} \overline{(\nabla+\mathrm{i}\mathbf{p})\tilde{v}(\mathbf{x})}\cdot A(\varepsilon,\delta;\mathbf{x})(\nabla+\mathrm{i}\mathbf{p})\tilde{u}(\mathbf{x}))\,d\mathbf{x}\\ &=: \langle\tilde{v}, \mathcal{L}(\varepsilon,\delta,\mathbf{p})\tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z}.\end{aligned} \tag{9}$$

算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 的谱带结构由所有特征对 $(\mathbf{p}\ \lambda)\ \in \mathcal{B}\times\mathbb{R}$ 给出，其中存在解 $(\lambda,\ u)\ \in \mathbb{R}\times H^1_{\mathbf{p}}$ 满足特征值问题

$$\langle v, \mathcal{L}(\varepsilon,\delta)u\rangle_{\mathcal{C}_z} = \lambda\langle v, u\rangle_{\mathcal{C}_z} \quad \forall v \in H^1_{\mathbf{p}}. \tag{10}$$

根据 (9)，这等价于求特征对 $(\mathbf{p}\ \lambda)\ \in\ \mathcal{B}\times\mathbb{R}$，使得存在$\tilde{u} \in H^1_{\mathbf{0}}$，满足

$$\langle\tilde{v}, \mathcal{L}(\varepsilon,\delta,\mathbf{p})\tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z} = \lambda\langle\tilde{v}, \tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z} \quad \forall\tilde{v} \in H^1_{\mathbf{0}}. \tag{11}$$

对于每个$\mathbf{p}\ \in\ \mathcal{B}$，根据自伴椭圆算子的谱理论，$\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta,\ \mathbf{p})$ 的谱由一列可数的实特征值 $\lambda_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})$（能带函数）组成，并按递增顺序排列：

$$\lambda_{1,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}) \le \lambda_{2,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}) \le \lambda_{3,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}) \le \cdots. \tag{12}$$

相应的特征函数 $u_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{x};\ \mathbf{p})$ 的归一化方式为 $\|u_{n,\ \varepsilon,\ \delta}\|_{L^2(\mathcal{C}_z)}\ =\ 1$。这里$\lambda_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})$ 和 $u_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\cdot,\ \mathbf{p})$ 被选为关于$\mathbf{p}$的分段解析函数。

在本节余下部分，我们首先说明当 $\varepsilon = \delta = 0$ 时， $\mathcal{L}_0$ 的能带结构在布里渊区的高对称点 K 和 K'处具有线性交叉简并。更准确地说，两条色散曲面在$\mathbf{p} = K$ 或 K'处线性交叉，形成狄拉克锥。接着，我们说明当 $\varepsilon \neq 0$或 $\delta \neq 0$时，描述扰动介质的算子 $\mathcal{L}(\varepsilon, \delta)$ 中的狄拉克简并会被解除。

2.2 算子 $\mathcal{L}_0$ 的狄拉克点

定义

$$H^1_{\mathbf{p},n} := \{u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2) : u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_i) = e^{\mathrm{i}\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_i}u(\mathbf{x}), \mathcal{R}u(\mathbf{x}) = \tau^n u(\mathbf{x})\}, \quad \tau = e^{\mathrm{i}2\pi/3}. \tag{13}$$

由于算子 $\mathcal{L}_0$ 的对称性，在满足以下假设时，高对称点 K 和 K' 处存在狄拉克点。

假设 9（非简并条件）。设以下条件成立。

1. $\lambda_* \in \mathbb{R}$ 是 $\mathcal{L}_0$ 在 $H^1_{K,1}$ 上的单特征值，对应的特征函数为 $w_1(\mathbf{x}) \in H^1_{K,1}$。不失一般性，可取 w_1，使得 $\|w_1\|_{L^2(\mathcal{C}_z)} = 1$。
2. λ_* 是 $\mathcal{L}_0$ 限制在$H^1_{K,\,2}$上的单特征值，其特征函数为 $w_2(\mathbf{x}) \in H^1_{K,\,2}$。此外， $w_2(\mathbf{x}) = Fw_1(\mathbf{x}) := w_1(F\mathbf{x})$。
3. λ_* 不是 $\mathcal{L}_0$ 限制在$H^1_{K,\,0}$上的特征值。
4. 有

$$m_* := \frac{1}{2}\left|\overline{\left\langle w_1, (A_0\frac{1}{\mathrm{i}}\nabla + \frac{1}{\mathrm{i}}\nabla\cdot A_0)w_2\right\rangle}_{\mathcal{C}_z} \cdot \begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}\right| \neq 0. \tag{14}$$

在假设9下，我们有以下关于狄拉克点存在性的定理。该定理还刻画了狄拉克点附近色散关系和特征空间的局部行为。证明基于扰动论证和弗雷德霍姆择一定理。为简洁起见，详情请参阅 [3, 18, 5, 19] 。

定理10。假设假设9成立。则(K, λ_*) 是 $\mathcal{L}_0$的一个狄拉克点。$\mathcal{L}_0$ 的色散关系(10) 具有如下形式

$$(\lambda - \lambda_*)^2 = m_*^2\,|\mathbf{p} - K|^2 + O(|\mathbf{p} - K|^3),$$

其中 $m_* \in \mathbb{R}$， $m_* > 0$ 如(14)中所定义。此外，狄拉克点(K, λ_*) 处的特征空间基可选为 w_1 和 w_2，它们满足$\|w_i\|_{L^2(\mathcal{C}_z)=1}$ 并且

$$Rw_1(\mathbf{x}) := w_1(R^{-1}\mathbf{x}) = \tau w_1(\mathbf{x}) \quad Rw_2(\mathbf{x}) := w_2(R^{-1}\mathbf{x}) = \tau w_2(\mathbf{x}) \quad w_2(\mathbf{x}) = Fw_1(\mathbf{x}) := w_1(F\mathbf{x}),$$

其中 $\tau = e^{i\frac{2\pi}{3}}$ 。—

(K', λ_*) 也是 $\mathcal{L}_0$ 的一个狄拉克点。$\mathcal{L}_0$ 的色散关系(10) 可写为

$$(\lambda - \lambda_*)^2 = m_*^2\,|\mathbf{p} - K'|^2 + O(|\mathbf{p} - K'|^3).$$

狄拉克点(K, λ_*) 处的特征空间由以下向量张成

$$w_1'(\mathbf{x}) := \bar{w}_2(\mathbf{x}), \quad w_2'(\mathbf{x}) := \bar{w}_1(\mathbf{x}), \tag{15}$$

其具有以下对称性:

$$Rw_1'(\mathbf{x}) := w_1'(R^{-1}\mathbf{x}) = \tau w_1'(\mathbf{x}), \quad Rw_2'(\mathbf{x}) := w_2'(R^{-1}\mathbf{x}) = \overline{\tau} w_2'(\mathbf{x}), \quad w_2'(\mathbf{x}) = w_1'(F\mathbf{x}).$$

2.3 算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 的狄拉克简并解除与贝里曲率

2.3.1 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 附近的狄拉克点处带隙打开

设 $(\mathbf{p}\ \lambda_*)$ 为算子 $\mathcal{L}_0$ 的狄拉克点，其中 $\mathbf{p}\ = K$ 或 K'。不失一般性，假设该狄拉克点由算子的第 n_0 条和第 (n_0+1) 条色散曲面形成。为方便记号，以下按如下方式将特征对 $(\lambda_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})$ $u_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p}))$ 记为 $(\lambda_{\tilde{n},\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})\ u_{\tilde{n},\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p}))$：

$$\begin{aligned}
&\lambda_{\tilde{1},\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})=\lambda_{n_0,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}),\quad \lambda_{\tilde{2},\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})=\lambda_{n_0+1,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}),\\
&\lambda_{\tilde{n},\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})=\lambda_{n+2,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})\ \text{for}\ n<n_0,\\
&\lambda_{\tilde{n},\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})=\lambda_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p})\ \text{for}\ n>n_0+1.
\end{aligned}$$

此处及下文中，我们将采用上述标记 $(\lambda_{\tilde{n},\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})\ u_{\tilde{n},\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p}))$ 来表示 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$ 的谱带。不过，为简化记号，我们略去波浪号，仍将其记为 $(\lambda_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p})\ \ u_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p}))$。

命题11。 定义 $\tilde{\mathbf{w}}:=(e^{-iK\cdot\mathbf{x}}w_1, e^{-iK\cdot\mathbf{x}}w_2)$ 和 $\tilde{\mathbf{w}}':=(e^{-iK'\cdot\mathbf{x}}w_1', e^{-iK'\cdot\mathbf{x}}w_2')$。在 K 处，存在 t_1、$t_2\in\mathbb{R}$ 和 $\theta_*\in\mathbb{C}$，使得

$$\langle\tilde{\mathbf{w}},\boldsymbol{\beta}_1\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K}=\begin{pmatrix}0&\overline{\theta_*}\\ \theta_*&0\end{pmatrix},\tag{16a}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}},\boldsymbol{\beta}_2\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K}=\begin{pmatrix}0&\tau\overline{\theta_*}\\ \overline{\tau}\theta_*&0\end{pmatrix},\tag{16b}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}},\partial_\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon,0,K)\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix}t_1&0\\ 0&-t_1\end{pmatrix},\tag{16c}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}},\partial_\delta\mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}=\begin{pmatrix}t_2&0\\ 0&-t_2\end{pmatrix}.\tag{16d}$$

在 K' 处，

$$\langle\tilde{\mathbf{w}}',\boldsymbol{\beta}_1\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{\mathbf{w}}'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K'}=\begin{pmatrix}0&-\overline{\theta_*}\\ -\theta_*&0\end{pmatrix},\tag{17a}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}}',\boldsymbol{\beta}_2\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{\mathbf{w}}'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K'}=\begin{pmatrix}0&-\tau\overline{\theta_*}\\ -\overline{\tau}\theta_*&0\end{pmatrix},\tag{17b}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}}',\partial_\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon,0,K')\tilde{\mathbf{w}}'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0}=\begin{pmatrix}-t_1&0\\ 0&t_1\end{pmatrix},\tag{17c}$$

$$\langle\tilde{\mathbf{w}}',\partial_\delta\mathcal{L}(0,\delta,K')\tilde{\mathbf{w}}'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}=\begin{pmatrix}t_2&0\\ 0&-t_2\end{pmatrix}.\tag{17d}$$

证明。 根据 (8) 中 $\mathcal{L}(\varepsilon,\delta,\mathbf{p})$ 的定义，我们有

$$\begin{aligned}
\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})|_{\mathbf{p}=K}&=-\mathrm{i}A(\mathbf{x})(\nabla+\mathrm{i}K)-\mathrm{i}\big((\nabla+\mathrm{i}K)\cdot A(\mathbf{x})\big)^t,\\
\partial_\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon,0,K)|_{\varepsilon=0}&=-(\nabla+\mathrm{i}K)\cdot C(\mathbf{x})(\nabla+\mathrm{i}K),\\
\partial_\delta\mathcal{L}(0,\delta,K)|_{\delta=0}&=-(\nabla+\mathrm{i}K)\cdot B(\mathbf{x})(\nabla+\mathrm{i}K).
\end{aligned}\tag{18}$$

将 K 替换为 K' 时，这些关系仍然成立。

我们首先考虑 $\mathbf{p} = K$。利用式（18），可得

$$\langle \tilde{w}_i, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_j\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} = \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_i(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}. \tag{19}$$

由假设1的厄米性可得

$$\overline{\langle \tilde{w}_i, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_j\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}} = \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_j(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \langle \tilde{w}_j, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_i\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}. \tag{20}$$

$\langle \tilde{\mathbf{w}}\ \partial_\delta \mathcal{L}(0,\ \delta,\ K)\ \tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}$ 的对角元互为相反数，因为

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{w}_2,\partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_2\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} &= \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_2(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_2(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla\big(w_1(F\mathbf{x})\big)})^t B(\mathbf{x})\nabla\big(w_1(F\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_1|_{F\mathbf{x}}})^t FB(\mathbf{x})F\nabla w_1|_{F\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} = -\int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_1|_{F\mathbf{x}}})^t B(F\mathbf{x})\nabla w_1|_{F\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \\
&= -\langle \tilde{w}_1, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_1\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}.
\end{aligned}$$

为处理非对角元，我们注意到，由于 $H^1_{\mathbf{0}}$ 和$\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta,\ \mathbf{p})$具有 Λ-周期性，因此有

$$\langle \tilde{w}_2, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_1\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} = \langle \tilde{w}_2, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_1\rangle_{E}|_{\delta=0}. \tag{21}$$

非对角元为零，因为

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{w}_2,\partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_1\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} &= \int_{E} (\overline{\nabla w_2(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_1(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{E} (\overline{\nabla w_2|_{R^{-1}\mathbf{x}}})^t B(R^{-1}\mathbf{x})\nabla w_1|_{R^{-1}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{E} (\overline{R^{-1}\nabla\big(w_2(R^{-1}\mathbf{x})\big)})^t B(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1}\nabla\big(w_1(R^{-1}\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} \\
&= \tau^2 \int_{E} (\overline{\nabla\big(w_2(\mathbf{x})\big)})^t RB(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1}\nabla\big(w_1(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} = \tau^2 \int_{E} (\overline{\nabla\big(w_2(\mathbf{x})\big)})^t B(\mathbf{x})\nabla\big(w_1(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} \\
&= \tau^2 \langle \tilde{w}_2, \partial_\delta \mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_1\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}.
\end{aligned}$$

因此，(16d)成立。

ε 导数的形式为

$$\langle \tilde{w}_i, \partial_\varepsilon \mathcal{L}(\varepsilon,0,K)\tilde{w}_j\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0} = \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_i(\mathbf{x})})^t C(\mathbf{x})\nabla w_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}.$$

同样的计算可得到（16c）。

对于$\mathbf{p}$ 导数，

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{w}_i, \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{w}_j\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K} &= \int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(\mathbf{x})}A(\mathbf{x})\nabla w_j(\mathbf{x}) + \mathrm{i}w_j(\mathbf{x})A(\mathbf{x})^t\overline{\nabla w_i(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \\
&= \int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(\mathbf{x})}A(\mathbf{x})\nabla w_j(\mathbf{x}) + \mathrm{i}w_j(\mathbf{x})A(\mathbf{x})\overline{\nabla w_i(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}.
\end{aligned}$$

我们首先证明对角元为零。将 E分解为 $E = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$，其中$\mathbf{x} \in C_2$当且仅当 $R\mathbf{x} \in C_1$，且$\mathbf{x} \in C_3$当且仅当 $R^2\mathbf{x} \in C_1$。我们有

$$\begin{aligned}
\int_{C_2} \overline{w_i(\mathbf{x})}A(\mathbf{x})\nabla w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} &= \int_{C_1} \overline{w_i(R^{-1}\mathbf{x})}A(R^{-1}\mathbf{x})\nabla w_i|_{R^{-1}\mathbf{x}}\, d\mathbf{x} \\
&= \int_{C_1} \overline{w_i(R^{-1}\mathbf{x})}A(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1}\nabla\big(w_i(R^{-1}\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x} = \int_{C_1} \overline{w_i(\mathbf{x})}R^{-1}A(\mathbf{x})\nabla\big(w_i(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x}
\end{aligned}$$

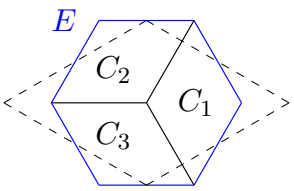

图5：六边形 E 表示蜂窝晶格 Λ的另一个基本域（参见图1）。六边形 E的顶点由 $\frac{\sqrt{3}}{3}(\cos\ \theta_j,\ \sin\ \theta_j)$给出，其中 $\theta_j = \frac{j\pi}{3}$对于$j = 1, \cdots, 6$。 E可分解为如上所示的 $E = C_1 \sqcup C_2 \sqcup C_3$，其中 $C_j = R^{-(j-1)}C_1$。显然， E 在旋转映射 R下保持不变。

类似地，

$$\int_{C_3} \overline{w_i(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}) \nabla w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = \int_{C_1} \overline{w_i(\mathbf{x})} (R^{-1})^2 A(\mathbf{x}) \nabla \big(w_i(\mathbf{x})\big)\, d\mathbf{x}$$

Thus

$$\int_E \overline{w_i(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}) \nabla w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = (I + R^{-1} + (R^{-1})^2) \int_{C_1} \overline{w_i(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}) \nabla w_i(\mathbf{x})\, d\mathbf{x} = 0.$$

非对角元互为复共轭，因为

$$\overline{\int_{\mathcal{C}_z} \overline{w_i(\mathbf{x})} A(\mathbf{x}) \nabla w_j(\mathbf{x})\, d\mathbf{x}} = \int_{\mathcal{C}_z} w_i(\mathbf{x}) \overline{A(\mathbf{x}) \nabla w_j(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_z} w_i(\mathbf{x}) A(\mathbf{x}) \overline{\nabla w_j(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x}.$$

接下来，利用 $\boldsymbol{\beta}_2 = R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1$，我们得到沿 β_1 和 β_2方向的$\mathbf{p}$ 导数之间的以下关系

$$\begin{aligned}
&\langle \tilde{w}_i, \boldsymbol{\beta}_2 \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(0,0,\mathbf{p}) \tilde{w}_j \rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K} \\
=&\int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(\mathbf{x})} (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(\mathbf{x}) \nabla w_j(\mathbf{x}) + \mathrm{i} w_j(\mathbf{x}) (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(\mathbf{x}) \overline{\nabla w_i(\mathbf{x})}\, d\mathbf{x} \\
=&\int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(R^{-1}\mathbf{x})} (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(R^{-1}\mathbf{x}) \nabla w_j|_{R^{-1}\mathbf{x}} + \mathrm{i} w_j(R^{-1}\mathbf{x}) (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(R^{-1}\mathbf{x}) \overline{\nabla w_i|_{R^{-1}\mathbf{x}}}\, d\mathbf{x} \\
=&\int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(R^{-1}\mathbf{x})} (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(R^{-1}\mathbf{x}) R^{-1} \nabla \big(w_j(R^{-1}\mathbf{x})\big) + \mathrm{i} w_j(R^{-1}\mathbf{x}) (R^{-1}\boldsymbol{\beta}_1)^t A(R^{-1}\mathbf{x}) \overline{R^{-1} \nabla \big(w_i(R^{-1}\mathbf{x})\big)}\, d\mathbf{x} \\
=&\tau \int_E -\mathrm{i}\overline{w_i(\mathbf{x})} \boldsymbol{\beta}_1^t A(\mathbf{x}) \nabla \big(w_j(\mathbf{x})\big) + \mathrm{i} w_j(\mathbf{x}) \boldsymbol{\beta}_1^t A(\mathbf{x}) \overline{\nabla \big(w_i(\mathbf{x})\big)}\, d\mathbf{x} \\
=&\tau \langle \tilde{w}_1, \boldsymbol{\beta}_1 \cdot \nabla_{\mathbf{p}} \mathcal{L}(0,0,\mathbf{p}) \tilde{w}_2 \rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K}
\end{aligned}$$

当$\mathbf{p} = K'$时，利用假设 5 并按照上述相同的步骤，可以证明

式 (17) 中的矩阵与式 (16) 具有相同的形式。此外，根据式 (15)，可得

$$\begin{aligned}
\langle \tilde{w}_1', \nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{w}_2'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K'} &= \int_{\mathcal{C}_z} -\mathrm{i}\overline{w_1'(\mathbf{x})}A(\mathbf{x})\nabla w_2'(\mathbf{x}) + \mathrm{i}w_2'(\mathbf{x})A(\mathbf{x})\overline{\nabla w_1'(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} \\
&= \int_{\mathcal{C}_z} -\mathrm{i}w_2(\mathbf{x})A(\mathbf{x})\overline{\nabla w_1(\mathbf{x})} + \mathrm{i}\overline{w_1(\mathbf{x})}A(\mathbf{x})\nabla w_2(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} \\
&= -\langle \tilde{w}_1, \nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0,0,\mathbf{p})\tilde{w}_2\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K}. \\
\langle \tilde{w}_1', \partial_\delta\mathcal{L}(0,\delta,K')\tilde{w}_1'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} &= \int_{\mathcal{C}_z} (\overline{\nabla w_1'(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_1'(\mathbf{x})\,d\mathbf{x} = \int_{\mathcal{C}_z} (\nabla w_2(\mathbf{x}))^t B(\mathbf{x})\overline{\nabla w_2(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} \\
&= -\int_{\mathcal{C}_z} \overline{(\overline{\nabla w_2(\mathbf{x})})^t B(\mathbf{x})\nabla w_2(\mathbf{x})}\,d\mathbf{x} = -\overline{\langle \tilde{w}_2, \partial_\delta\mathcal{L}(0,\delta,K)\tilde{w}_2\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0}}. \\
\langle \tilde{w}_1', \partial_\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon,0,K')\tilde{w}_1'\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0} &= \overline{\langle \tilde{w}_2, \partial_\varepsilon\mathcal{L}(\varepsilon,0,K)\tilde{w}_2\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0}}.
\end{aligned}$$

□

假设 12。此处及下文中，我们假设 $t_1 \neq 0$ 和 $t_2 \neq 0$，这确保了如后文所述，当 ε 或 δ 非零时，狄拉克点处会打开谱带隙。

现在，当 $\delta \neq 0$ 或 $\varepsilon \neq 0$时，我们研究算子 $\mathcal{L}(\varepsilon, \delta)$ 的谱带。将 K 和 K' 附近的准动量参数化为

$$\mathbf{p}(K;\ell,\mu) := K + \ell\boldsymbol{\beta}_1 + \mu\boldsymbol{\beta}_2 \quad \text{and} \quad \mathbf{p}(K';\ell,\mu) := K' + \ell\boldsymbol{\beta}_1 + \mu\boldsymbol{\beta}_2.$$

引入两个函数

$$L_1(\varepsilon,\ell,\mu) := \frac{\theta_*(\ell+\mu\bar{\tau})}{|\varepsilon t_1| + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}}, \tag{22}$$

and

$$L_2(\delta,\ell,\mu) := \frac{\theta_*(\ell+\mu\bar{\tau})}{|\delta t_2| + \sqrt{\delta^2 t_2^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}}. \tag{23}$$

引入扰动时，K 和 K' 附近的色散关系及相应特征函数由以下命题描述。更具体地说，命题 13 和命题 14 描述了关于 ε 且满足 $\delta = 0$时的扰动谱带。命题 15 和命题 16 描述了关于 δ 且满足 $\varepsilon = 0$时的谱带扰动。命题 13-16 的证明见附录 B。

回顾一下，从狄拉克点扰动得到的色散关系的两条分支记为λ_1、ε、δ(p) 和 λ_2、ε、δ(p)。相应的归一化特征函数记为u_n、ε、δ(p)，其中 $n = 1$，2。命题中的大-O 记号具有如下含义。特征函数展开式（25）和（26）中的第一项 $O(\varepsilon,\ell,\mu)$（或特征函数展开式（31）和（32）中的第一项 $O(\delta,\ell,\mu)$）在 $H^1(\mathcal{C}_z)$ 范数下的阶为 max(|ε|, |ℓ|, |μ|)（或分别为 max(|δ|, |ℓ|, |μ|)）。展开式中的另一项 $O(\varepsilon,\ell,\mu)$（或分别为 $O(\delta,\ell,\mu)$）是复数，其阶为 max(|ε|, |ℓ|, |μ|)（或分别为 max(|δ|, |ℓ|, |μ|)）。

命题 13. 若 $\delta = 0$ 和 $|\varepsilon| \ll 1$，则谱问题 (10) 在 K 附近满足：

(i) 色散关系可展开为

$$\begin{aligned}\lambda_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \lambda_* - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\varepsilon,\ell,\mu)),\\ \lambda_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \lambda_* + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\varepsilon,\ell,\mu)).\end{aligned} \tag{24}$$

(ii) 当 $t_1\varepsilon > 0$ 时，相应的布洛赫模态具有以下形式

$$\begin{aligned}u_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \left(-\overline{L_1(\varepsilon,\ell,\mu)}w_1 + w_2 + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}},\\ u_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= (w_1 + L_1(\varepsilon,\ell,\mu)w_2 + O(\varepsilon,\ell,\mu))\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}}.\end{aligned} \tag{25}$$

当 $t_1\varepsilon < 0$ 时，相应的布洛赫模态具有以下形式

$$\begin{aligned}u_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= (w_1 - L_1(\varepsilon,\ell,\mu)w_2 + O(\varepsilon,\ell,\mu))\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}},\\ u_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \left(\overline{L_1(\varepsilon,\ell,\mu)}w_1 + w_2 + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}}.\end{aligned} \tag{26}$$

命题 14. 若 $\delta = 0$ 且 $|\varepsilon| \ll 1$，则谱问题 (10) 在 K' 附近满足：

(i) 色散关系可展开为

$$\begin{aligned}\lambda_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \lambda_* - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\varepsilon,\ell,\mu)),\\ \lambda_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \lambda_* + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\varepsilon,\ell,\mu)).\end{aligned} \tag{27}$$

(ii) 当 $t_1\varepsilon > 0$ 时，相应的布洛赫模态具有以下形式

$$\begin{aligned}u_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \left(w_1' + L_1(\varepsilon,\ell,\mu)w_2' + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}},\\ u_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \left(-\overline{L_1(\varepsilon,\ell,\mu)}w_1' + w_2' + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}}.\end{aligned} \tag{28}$$

当 $t_1\varepsilon < 0$ 时，相应的布洛赫模态具有以下形式

$$\begin{aligned}u_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \left(\overline{L_1(\varepsilon,\ell,\mu)}w_1' + w_2' + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}},\\ u_{2,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu)) &= \left(w_1' - L_1(\varepsilon,\ell,\mu)w_2' + O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}}.\end{aligned} \tag{29}$$

命题 15。 如果 $\varepsilon = 0$ 和 $\delta \ll 1$，则谱问题 (10) 在 K附近满足：

(i) 色散关系可展开为

$$\begin{aligned}\lambda_{1,0,\delta}(\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \lambda_* - \sqrt{\delta^2 t_2^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\delta,\ell,\mu)),\\ \lambda_{2,0,\delta}(\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) &= \lambda_* + \sqrt{\delta^2 t_2^2 + |\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\delta,\ell,\mu)).\end{aligned} \tag{30}$$

(ii) 当 $t_2\delta>0$ 时，相应的布洛赫模态具有如下形式

$$\begin{aligned}u_{1,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu))&=\left(-\overline{L_2(\delta,\ell,\mu)}w_1+w_2+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}},\\u_{2,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu))&=(w_1+L_2(\delta,\ell,\mu)w_2+O(\delta,\ell,\mu))\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}}.\end{aligned}\tag{31}$$

当 $t_2\delta<0$ 时，相应的布洛赫模态具有如下形式

$$\begin{aligned}u_{1,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu))&=(w_1-L_2(\delta,\ell,\mu)w_2+O(\delta,\ell,\mu))\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}},\\u_{2,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu))&=\left(\overline{L_2(\delta,\ell,\mu)}w_1+w_2+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}}.\end{aligned}\tag{32}$$

命题16. 若 $\varepsilon=0$ 且 $\delta\ll1$，则谱问题 (10) 在 K' 附近满足：

(i) 谱问题 (10) 的色散关系具有如下展开：

$$\begin{aligned}\lambda_{1,0,\delta}(\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\lambda_*-\sqrt{\delta^2t_2^2+|\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\delta,\ell,\mu)),\\\lambda_{2,0,\delta}(\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\lambda_*+\sqrt{\delta^2t_2^2+|\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}(1+O(\delta,\ell,\mu)).\end{aligned}\tag{33}$$

(ii) 当 $t_2\delta>0$ 时，相应的布洛赫模态具有如下形式

$$\begin{aligned}u_{1,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\left(\overline{L_2(\delta,\ell,\mu)}w_1'+w_2'+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}},\\u_{2,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\left(w_1'-L_2(\delta,\ell,\mu)w_2'+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}}.\end{aligned}\tag{34}$$

当 $t_2\delta<0$ 时，相应的布洛赫模态具有如下形式

$$\begin{aligned}u_{1,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\left(w_1'+L_2(\delta,\ell,\mu)w_2'+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}},\\u_{1,0,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K';\ell,\mu))&=\left(-\overline{L_2(\delta,\ell,\mu)}w_1'+w_2'+O(\delta,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_2(\delta,\ell,\mu)|^2+O(\delta,\ell,\mu)}}.\end{aligned}\tag{35}$$

注17. 根据命题*13-16*和假设*3*，我们观察到，对于任意$\mathfrak{d}\in(0,1)$，沿布里渊区中的 $\boldsymbol{\beta}_1$ 方向，若 $\mathbf{p}(\ell)=K+\ell\boldsymbol{\beta}_1$，则当 $\varepsilon\neq0$ 且 $\delta=0$ 时，$\mathcal{L}(\varepsilon,\delta)$ 的谱会打开一个带隙$(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)$；当 $\varepsilon=0$ 且 $\delta\neq0$ 时，$\mathcal{L}(\varepsilon,\delta)$ 的谱会打开一个带隙$(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$。沿 $\mathbf{p}(\ell)=K'+\ell\boldsymbol{\beta}_1$ 的情况也相同。

注 18。 我们将布洛赫模态的周期部分记为 $\tilde{u}_{n,\varepsilon,\delta}:=e^{-i\mathbf{p}\cdot\mathbf{x}}u_{n,\varepsilon,\delta}\in H^1_{\mathbf{0}}$。如附录 *B* 所示，它们的渐近展开与上述命题中 $u_{n,\varepsilon,\delta}$ 的展开形式相同，只需将 w_1 和 w_2 分别替换为它们的周期部分 $\tilde{w}_1$ 和 $\tilde{w}_2$。例如，当 $t_1\varepsilon>0$ 和 $\delta=0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(K;\ell,\mu))=\left(-\overline{L_1(\varepsilon,\ell,\mu)}\tilde{w}_1+\tilde{w}_2+O(\varepsilon,\ell,\mu)\right)\frac{1}{\sqrt{1+|L_1(\varepsilon,\ell,\mu)|^2+O(\varepsilon,\ell,\mu)}}.\tag{36}$$

2.3.2 K 和 K'处的贝里曲率

利用命题 13–16 中布洛赫模态的渐近展开，我们可以计算高对称点 K 和 K' 处的贝里曲率。特别地，贝里曲率的符号可以根据介质的扰动来确定，具体如下。

回顾一下，特征函数 $\tilde{u}(\cdot;\mathbf{p}) \in H^1_{\mathbf{0}}$ 的周期部分由准动量 $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$参数化。贝里联络定义为 $\mathbf{A}(\mathbf{p}) = (A_1(\mathbf{p})\ A_2(\mathbf{p}))$，其中$A_j(\mathbf{p}) = \mathbf{i}\langle \tilde{u}(\mathbf{p})\ \partial_{p_j}\tilde{u}(\mathbf{p})\rangle_{\mathcal{C}_z}$对于 $j = 1, 2$ [27]。动量空间中沿闭合回路 ℓ的贝里相位为线积分

$$\phi := \oint_{\ell} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{p}.$$

Th贝里曲率（即单位面积的贝里相位）为（参见 [27]）

$$\Theta(\mathbf{p}) = \partial_{p_1} A_2(\mathbf{p}) - \partial_{p_2} A_1(\mathbf{p}) = -2\ \mathrm{Im}\langle \partial_{p_1}\tilde{u}(\mathbf{p}), \partial_{p_2}\tilde{u}(\mathbf{p})\rangle_{\mathcal{C}_z}. \tag{37}$$

命题 19。 考虑周期算子 $\mathcal{L}(\varepsilon, 0)$ 和 $\mathcal{L}(0, \delta)$，当 ε 且 δ 非零时，它们在 λ_* 处具有谱带隙。与紧邻 λ_* 下方谱带的特征函数相关联的贝里曲率 $\Theta(K)$ 和 $\Theta(K')$ 的符号总结如下表：

算子		$\Theta(K)$	$\Theta(K')$
$\mathcal{L}(\varepsilon, 0)$	$t_1\varepsilon > 0$	$+$	$-$
	$t_1\varepsilon < 0$	$-$	$+$
$\mathcal{L}(0, \delta)$	$t_2\delta > 0$	$+$	$+$
	$t_2\delta < 0$	$-$	$-$

证明。 设与谱带正下方的布洛赫模态相关联的周期部分为 $\tilde{u}(\mathbf{x}; \mathbf{p}(K, \ell, \mu))$，其中 $\mathbf{p}(K; \ell, \mu) := K + \ell\boldsymbol{\beta}_1 + \mu\boldsymbol{\beta}_2$。由（37）以及变量代换，贝里曲率为

$$\Theta(\mathbf{p}) = \frac{-2}{\det[\boldsymbol{\beta}_1, \boldsymbol{\beta}_2]}\ \mathrm{Im}\ \langle \partial_\ell \tilde{u}(\cdot, \mathbf{p}), \partial_\mu \tilde{u}(\cdot, \mathbf{p})\rangle_{\mathcal{C}_z} \tag{38}$$

当 $\ell, \mu \ll 1$。

我们考虑算子 $\mathcal{L}(\varepsilon, 0)$，算子 $\mathcal{L}(0, \delta)$ 的证明类似。根据命题 13 和注 18，当 $t_1\varepsilon > 0$ 时，布洛赫模态具有如下展开

$$\tilde{u}(\cdot, \mathbf{p}(K, \ell, \mu)) = \left(-\overline{L_1(\varepsilon, \ell, \mu)}\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2 + O(\varepsilon, \ell, \mu)\right) \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1(\varepsilon, \ell, \mu)|^2 + O(\varepsilon, \ell, \mu)}}.$$

经简单计算可得

$$\begin{aligned}\langle \partial_\ell \tilde{u}, \partial_\mu \tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z} &= (\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}})(\partial_\ell \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}}) \\ &+ \left(\overline{L_1}\partial_\mu \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}}\partial_\mu \overline{L_1}\right)\left(L_1 \partial_\ell \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}} + \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1|^2}}\partial_\ell L_1\right) + O(\varepsilon, \ell, \mu).\end{aligned} \tag{39}$$

相比之下，当 $t_1\varepsilon < 0$ 时，布洛赫模态达到展开

$$\tilde{u} = (\tilde{w}_1 - L_1(\varepsilon, \ell, \mu)\tilde{w}_2 + O(\varepsilon, \ell, \mu)) \frac{1}{\sqrt{1 + |L_1(\varepsilon, \ell, \mu)|^2 + O(\varepsilon, \ell, \mu)}}.$$

这导致

$$\langle\partial_\ell\tilde{u},\partial_\mu\tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z}=(\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}})(\partial_\ell\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}})$$
$$+\left(L_1\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\mu L_1\right)\left(\overline{L_1}\partial_\ell\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}+\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\ell\overline{L_1}\right)+O(\varepsilon,\ell,\mu). \tag{40}$$

由于 (39) 和 (40) 中的第一项为实数，第二项互为复共轭，因此当 $t_1\varepsilon>0$ 和 $t_1\varepsilon<0$时，贝里曲率 $\Theta(K)$ 符号相反。类似的计算表明，当 $t_1\varepsilon>0$ 和 $t_1\varepsilon<0$时，贝里曲率 $\Theta(K')$ 的符号相反。

现在我们来计算 $\Theta(K)$ 的符号。事实上，对 (39) 中的第二项进行直接计算可得

$$\begin{aligned}
&|L_1|^2\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\ell\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}+\frac{1}{1+|L_1|^2}\partial_\mu\overline{L_1}\partial_\ell L_1\\
&+\frac{\overline{L_1}}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\mu\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\ell L_1+\frac{L_1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\ell\frac{1}{\sqrt{1+|L_1|^2}}\partial_\mu L_1\\
=&\frac{1}{(1+|L_1|^2)^2}\partial_\mu\overline{L_1}\partial_\ell L_1+\text{real terms}\\
=&\frac{\overline{\tau}|\theta_*|^2|\varepsilon t_1|}{\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}}\left(|\varepsilon t_1|+\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2|\ell+\mu\bar{\tau}|^2}\right)^2+\text{real terms}.
\end{aligned}$$

因此，当 $t_1\varepsilon>0$ 和 $\delta=0$时，$\Theta(K)>0$。 □

2.3.3 色散关系的光滑参数化

对于沿之字形界面的准动量 $k_\parallel^*=K\cdot\mathbf{e}_2$，我们将满足 $\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2=k_\parallel^*$ 的布洛赫波矢集合 $\mathbf{p}\in\mathbb{R}^2$ 参数化为 $\mathbf{p}(\ell):=K+\ell\boldsymbol{\beta}_1$。回顾一下，算子 $\mathcal{L}(\varepsilon,\delta)$ 沿方向 $\mathbf{p}(\ell)$ 的谱带记为

$$\lambda_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}(\ell)),u_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell)), \tag{41}$$

其中，$\lambda_{n,\,\varepsilon,\,\delta}(\mathbf{p}(\ell))$ 关于 $\ell\in\mathbb{R}$ 分段解析，而 $u_{n,\,\varepsilon,\,\delta}(\mathbf{p}(\ell))$ 在 $H^1(\mathcal{C}_z)$ 中分段解析。接下来我们引入色散曲面的另一种参数化，

$$\mu_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}(\ell)),v_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell)), \tag{42}$$

使得 $\mu_{n,\,\varepsilon,\,\delta}(\mathbf{p}(\ell))$ 是解析的，并且 $v_{n,\,\varepsilon,\,\delta}(\mathbf{p})$ 对于 $\ell\in(-\pi,\ \pi)$ 在 $H^1(\mathcal{C}_z)$ 中是解析的。

当 $\varepsilon\neq0$ 或 $\delta\neq0$时，由于对于 $\ell\in(-\pi,\pi)$，$\mu_{1,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))<\mu_{2,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))$，因此两种标记方式一致：$\mu_{n,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))=\lambda_{n,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))$，$v_{n,\varepsilon,\delta}(\mathrm{x};\mathrm{p}(\ell))=u_{n,\varepsilon,\delta}(\mathrm{x};\mathrm{p}(\ell))$ 对于 $n=1,\ 2$。

当 $\varepsilon=\delta=0$, $\mu_{1,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))$ 和 $\mu_{2,\varepsilon,\delta}(\mathrm{p}(\ell))$ 在狄拉克点 $\mathrm{p}(0)=K$ 相交时，因此$\lambda_{1,0,0}(\mathrm{p}(\ell,0))$ 和 $\lambda_{2,0,0}(\mathrm{p}(\ell,0))$ 不具有解析性。在下面的引理中，我们给出谱带 $\mu_{1,0,0}(\mathrm{p}(\ell,0))$ 和 $\mu_{2,0,0}(\mathrm{p}(\ell,0))$，以及相应的布洛赫模态 $v_{n,\varepsilon,\delta}(\mathrm{x};\mathrm{p}(\ell))$，使其关于 ℓ 具有解析性。为简化记号，当下标 ε,δ 均为零时，我们省略它们。

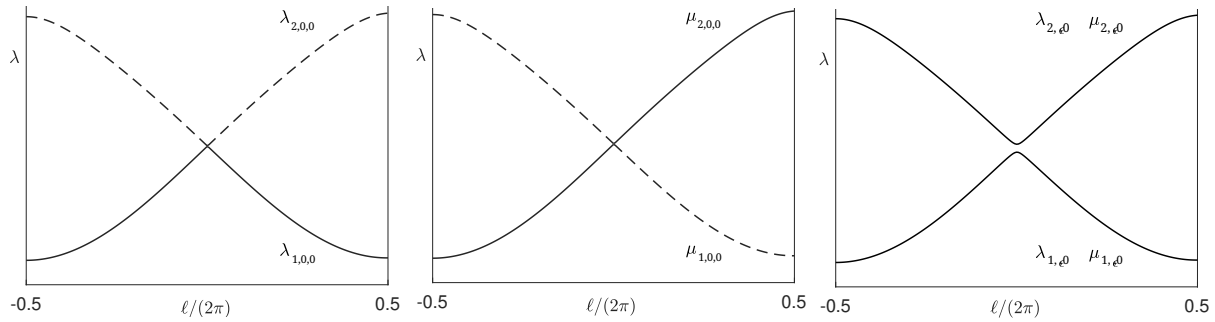

图6：当 $\delta = 0$时能带本征值的标记：$\mu_{n,\varepsilon,0}$ 是光滑分支，而$\lambda_{n,\varepsilon,0}$ 是分段光滑的。当 $\varepsilon \neq 0$, $\mu_{n,\varepsilon,0} = \lambda_{n,\varepsilon,0}$ 对于 $n = 1,2$。

引理20. 定义 $\mathbf{p}(\ell) := K + \ell\boldsymbol{\beta}_1$。当 $\ell \in \mathbb{R}$ 足够小时，

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{p}(\ell)) &= \lambda_* + |\theta_*|\ell(1 + O(\ell)) \quad \textit{(increasing in } \ell\textit{)}, \\ \mu_2(\mathbf{p}(\ell)) &= \lambda_* - |\theta_*|\ell(1 + O(\ell)) \quad \textit{(decreasing in } \ell\textit{)}. \end{aligned} \tag{43}$$

相应的布洛赫模态选取为

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x}; \mathbf{p}(\ell)) &= \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1 + w_2 + O(\ell) \right) \frac{1}{\sqrt{2 + O(\ell)}}, \\ v_2(\mathbf{x}; \mathbf{p}(\ell)) &= \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1 - w_2 + O(\ell) \right) \frac{1}{\sqrt{2 + O(\ell)}}. \end{aligned} \tag{44}$$

在上述引理中，$O(\ell)$ 项紧随 w_2 和 w_2'，它们是 $H^1(\mathcal{C}_z)$ 范数为 $|\ell|$ 阶的函数。其余 $O(\ell)$ 项是复数，其 $\mathbb{C}$ 范数为 $|\ell|$ 阶。令 $v_i := v_i(\mathbf{x}; K)$。因此，

$$\begin{cases} v_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1 + w_2 \right) \\ v_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1 - w_2 \right) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\theta_*}{|\theta_*|} (v_1 + v_2) \\ w_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} (v_1 - v_2) \end{cases}. \tag{45}$$

注释 21. 当 ε 和 δ 中恰有一个为零时，对于 $n = 1, 2$，存在依赖于 ℓ 的相位因子 α_n，使得 $\|u_n(\cdot, \mathbf{p}(\ell, 0)) - \alpha_n u_{n,\varepsilon,\delta}(\cdot, \mathbf{p}(\ell, 0))\|_{H^1(\mathcal{C}_z)} = O(\varepsilon, \delta)$ 对充分小的 ℓ 一致成立。

如以下引理所述，在高对称点 K' 附近也有类似的关系。

引理 22. 定义 $\mathbf{p}(\ell) := K' + \ell\boldsymbol{\beta}_1$。当 $\ell \in \mathbb{R}$ 充分小时，

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathbf{p}(\ell)) &= \lambda_* + |\theta_*|\ell(1 + O(\ell)) \quad \textit{(increasing in } \ell\textit{)}, \\ \mu_2(\mathbf{p}(\ell)) &= \lambda_* - |\theta_*|\ell(1 + O(\ell)) \quad \textit{(decreasing in } \ell\textit{)}. \end{aligned} \tag{46}$$

相应的布洛赫模态选取为

$$\begin{aligned} v_1(\mathbf{x}; \mathbf{p}(\ell)) &= \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1' - w_2' + O(\ell) \right) \frac{1}{\sqrt{2 + O(\ell)}}, \\ v_2(\mathbf{x}; \mathbf{p}(\ell)) &= \left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|} w_1' + w_2' + O(\ell) \right) \frac{1}{\sqrt{2 + O(\ell)}}. \end{aligned} \tag{47}$$

令 $v_i' := v_i(\mathbf{x}; K')$。由此可得

$$\begin{cases} v_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|}w_1' - w_2'\right) \\ v_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{\overline{\theta_*}}{|\theta_*|}w_1' + w_2'\right) \end{cases}, \quad \begin{cases} w_1' = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\theta_*}{|\theta_*|}(v_1' + v_2') \\ w_2' = \frac{1}{\sqrt{2}}(-v_1' + v_2') \end{cases}. \tag{48}$$

3 无限条带中的格林函数

3.1 格林函数的表示

考虑沿$\mathbf{e}_1$ 方向、具有之字形界面的联合介质中的无限条带区域 $\Omega := \cup_{m\in\mathbb{Z}}(\mathcal{C}_z + m\mathbf{e}_1)$。为纳入式（7）中沿界面方向$\mathbf{e}_2$ 的准周期边界条件，我们引入函数空间

$$\mathcal{H}^1_{k_\parallel}(\Omega) := \{u|_\Omega, u \in H^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2), u(\mathbf{x}+\mathbf{e}_2) = e^{\mathrm{i}k_\parallel}u(\mathbf{x})\} \quad \text{for } k_\parallel \in [0, 2\pi]. \tag{49}$$

令 $G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$ 为 Ω 中满足沿$\mathbf{e}_2$ 方向准周期条件的格林函数。我们按照 [12] 中的推导，利用极限吸收原理，将格林函数表示为第 2.3.1 节和第 2.3.3 节所示的布洛赫模态的形式。

考虑 Ω 中具有吸收项的以下问题：

$$\langle v, \mathcal{L}(\varepsilon,\delta)u\rangle_\Omega - (\lambda + \mathrm{i}\sigma)\langle v, u\rangle_\Omega = \langle f, u\rangle_\Omega \quad \text{for all } v \in \mathcal{H}^1_{k_\parallel}(\Omega). \tag{50}$$

这里，$\langle\cdot,\cdot\rangle_\Omega$ 表示 $H^1(\Omega)$-$H^{-1}(\Omega)$ 配对，$f \in L^2(\Omega)$，且 σ 为正的常数。当$\sigma \to 0^+$时，预解算子 $(\mathcal{L}(\varepsilon,\delta) - (\lambda+\mathrm{i}\sigma))^{-1}$ 的核定义了格林函数 $G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)$，它满足

$$\begin{cases} (-\nabla\cdot A(\mathbf{x})\nabla - \lambda)G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda) = \delta(\mathbf{x}-\mathbf{y}) & \mathbf{x}\in\Omega, \\ G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_2,\mathbf{y};\lambda) = e^{\mathrm{i}k_\parallel}G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda) & \text{for } \mathbf{x}\in\Gamma_-, \\ \partial_{\nu_2}G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x}+\mathbf{e}_2,\mathbf{y};\lambda) = e^{\mathrm{i}k_\parallel}\partial_{\nu_2}G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda) & \text{for } \mathbf{x}\in\Gamma_-. \end{cases} \tag{51}$$

这里 $\Gamma_- := \{-\frac{1}{2}\mathbf{e}_2 + \ell\mathbf{e}_1, \ell\in\mathbb{R}\}$ 以及 $\nu_2 = (0, -1, 0)$。

满足 $k_\parallel = k_\parallel^* := K\cdot\mathbf{e}_2$ 准周期条件的格林函数具有以下形式。令$\mathbf{p}(\ell) := K + \ell\beta_1$，其参数化了所有满足$\mathbf{p}\cdot\mathbf{e}_2 = k_\parallel^*$的$\mathbf{p}$ 值。当 $\varepsilon = \delta = 0$ 时，格林函数的形式为

$$\begin{aligned} G^{0,0}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda_*) = &\sum_{n\geq 3}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{\overline{v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))}v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\,d\ell + \sum_{n=1,2}\frac{1}{2\pi}\mathrm{p.v.}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{\overline{v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))}v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\,d\ell \\ &+ \frac{\mathrm{i}}{2|\theta_*|}\overline{v_1(\mathbf{y};K)}v_1(\mathbf{x};K) + \frac{\mathrm{i}}{2|\theta_*|}\overline{v_2(\mathbf{y};K)}v_2(\mathbf{x};K), \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega. \end{aligned} \tag{52}$$

在上述内容中，μ_n 和 v_n 是特征值和特征函数，它们在 ℓ 中解析，如公式（42）和引理20所述。我们将此格林函数中的积分记为

$$\tilde{G}^{0,0}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda_*) := \sum_{n\geq 3}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{\overline{v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))}v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\,d\ell + \sum_{n=1,2}\frac{1}{2\pi}\mathrm{p.v.}\int_{[-\pi,\pi]}\frac{\overline{v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))}v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\,d\ell. \tag{53}$$

当 ε 和 δ 中恰有一个为0，且 λ 位于 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ \delta)$、$(\lambda_* - |t_1\varepsilon|,\ \lambda_* + |t_1\varepsilon|)$或$(\lambda_* - |t_2\delta|,\ \lambda_* + |t_2\delta|)$的带隙中时，格林函数具有以下形式

$$G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{2\pi} \int_{[-\pi,\pi]} \frac{\overline{v_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))} v_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda}\, d\ell, \quad \mathbf{x},\mathbf{y}\in\Omega. \tag{54}$$

再次，μ_n 和 v_n 是关于 ℓ解析的特征值和特征函数。已知$G^{\varepsilon,\ \delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y};\ \lambda)$ 随着 $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1|\to\infty$ [12]呈指数衰减。

注 *23.* $k^*_{\parallel}{}' = K'\cdot\boldsymbol{e}_2$ 沿 $\boldsymbol{e}_2$ 准周期的格林函数，类似地通过进行以下两项替换来定义：首先，使用 $\boldsymbol{p}(\ell) := K' + \ell\beta_1$；其次，使用 $v_1'(\cdot, K')$ 和 $v_2'(\cdot, K')$ 代替 $v_1(\cdot, K)$ 和 $v_2(\cdot, K)$。所得格林函数分别记为 $G^{0,0,\prime}(x, y;\ \lambda_*)$,$\tilde{G}^{0,0,\prime}(x, y;\lambda_*)$ 和 $G^{\varepsilon,\delta,\prime}(x, y;\ \lambda)$。

3.2 层势的渐近行为

我们利用第 3 节中所示的格林函数展开，推导单层势的渐近展开。更确切地说，设 $\lambda = \lambda_* + |\varepsilon|\, h$，其中 $|\varepsilon|$ 较小，并满足 $|h| \ll \mathfrak{d}|t_1|$，且 $\mathfrak{d}\in(0,\ 1)$ 是一个固定常数。在此情形下，格林函数的奇点出现在

$$\mu_{n,\varepsilon,\delta}(\mathbf{p}(\ell)) \approx \lambda \approx \lambda_*, \ \text{ for } n = 1, 2$$

并且 $\mathbf{p}(\ell)$ 接近 K 或 K'。在这些奇点附近，$t_1\varepsilon$ 或 $t_2\delta$ 中符号的变化会导致特征模态 $v_{n,\ \varepsilon,\ \delta}(\mathbf{p}(\ell))$ 发生显著变化，如命题 13 至 16 所示。

为了研究 ε 或 δ 较小时层势的行为，我们研究边界积分算子 $\mathcal{S}^{\varepsilon,\ 0}(\lambda)$ 和 $\mathcal{S}^{0,\ \delta}$，其核分别为 $G^{\varepsilon,\ 0}(\mathbf{x},\ \mathbf{y};\lambda)$ 和 $G^{0,\ \delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y};\lambda)$。根据式 (54)，单层势 $\mathcal{S}^{\varepsilon,\ 0}(\lambda)$ 具有如下谱表示：

$$\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda)\phi := \int_\Gamma G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\phi(\mathbf{y})\, ds_{\mathbf{y}} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n\geq 1}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{\langle\phi, v_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(\ell))\rangle}\, v_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda}\, d\ell. \tag{55}$$

这里，指标 $n = 1,\ 2$ 对应于在 λ_* 相交的两条能带，而 $n\geq 3$ 表示其他能带，如第 2.3.1 节所述。配对 $\langle\phi,\ v_{n,\ \varepsilon,\ 0}(\cdot;\ \mathbf{p}(\ell))\rangle$ 表示 $\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$-$\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ 配对，其中的空间定义见 (62)。我们可以证明，当 $t_1\varepsilon\to 0$ 且符号固定时，以下算子极限成立：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda_* + |\varepsilon|h)\phi = \tilde{\mathcal{S}}^{0,0}(\lambda_*)\phi \\ + \beta_1(h)\Big[\overline{\langle\phi, v_1\rangle}\, v_1 + \overline{\langle\phi, v_2\rangle}\, v_2\Big] \\ + \operatorname{sgn}(t_1\varepsilon)\xi_1(h)\Big[\overline{\langle\phi, v_1\rangle}\, v_2 + \overline{\langle\phi, v_2\rangle}\, v_1\Big] + o(1),\end{aligned} \tag{56}$$

其中，$\tilde{\mathcal{S}}^{0,\ 0}$ 是核为 $\tilde{G}^{0,\ 0}$ 的边界积分算子，并且

$$\beta_1(h) = \frac{1}{2|\theta_*|}\frac{h}{\sqrt{t_1^2 - h^2}}, \qquad \xi_1(h) = \left|\frac{t_1}{2\theta_*}\right|\frac{1}{\sqrt{t_1^2 - h^2}}. \tag{57}$$

(56) 的推导基于将 (54) 中的 ℓ 积分分解为三部分：

1. **狄拉克点附近的前两条能带（$|\ell| \le |\varepsilon|^{1/3}$）：**
在.....的范围内

$$|\ell| \le |\varepsilon|^{1/3},$$

利用局部展开

$$\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) = \lambda_* + (-1)^{n-1}\sqrt{t_1^2 + |\theta_*|^2\ell^2}\,\Big(1 + O(\varepsilon,\ell)\Big).$$

因此，减去谱参数后，我们得到

$$\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) - (\lambda_* + \varepsilon h) = (-1)^{n-1}\sqrt{t_1^2 + |\theta_*|^2\ell^2} - \varepsilon h + O(\varepsilon,\ell).$$

通过变量替换和对称性论证（特别是注意到涉及 $L_1(\mathbf{1},\ \ell)$ 的项关于 ℓ 为奇函数，因而相互抵消），可得

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{2}\int_{-|\varepsilon|^{1/3}}^{|\varepsilon|^{1/3}} \frac{\overline{\langle \phi, v_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(\ell))\rangle}\, v_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_* - \varepsilon h}\, d\ell \\ &\qquad \longrightarrow \beta_1(h)\Big[\overline{\langle \phi, v_1\rangle}\, v_1 + \overline{\langle \phi, v_2\rangle}\, v_2\Big] + \operatorname{sgn}(t_1\varepsilon)\xi_1(h)\Big[\overline{\langle \phi, v_1\rangle}\, v_2 + \overline{\langle \phi, v_2\rangle}\, v_1\Big].\end{aligned}$$

2. **远离狄拉克点（$|\ell| > |\varepsilon|^{1/3}$）时的前两条能带：**
当 ℓ 远离简并点时，分母一致地与 0 保持正距离。应用控制收敛定理可得

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n=1}^{2}\int_{|\ell|>|\varepsilon|^{1/3}} \frac{\overline{\langle \phi, v_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(\ell))\rangle}\, v_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_* - \varepsilon h}\, d\ell \longrightarrow \sum_{n=1,2}\frac{1}{2\pi}\mathrm{p.v.}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\overline{\langle \phi, v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))\rangle} v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\, d\ell.$$

3. **高能带（$n \ge 3$）：**
由于谱参数 $\lambda_* + \varepsilon h$ 与这些能带始终保持一致的间隔，直接运用微扰论证可知，它们的贡献收敛于未扰动算子的相应项：

$$\frac{1}{2\pi}\sum_{n\ge 3}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\overline{\langle \phi, v_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(\ell))\rangle}\, v_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_{n,\varepsilon,0}(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_* - \varepsilon h}\, d\ell \longrightarrow \sum_{n\ge 3}\frac{1}{2\pi}\int_{[-\pi,\pi]} \frac{\overline{\langle \phi, v_n(\mathbf{y};\mathbf{p}(\ell))\rangle} v_n(\mathbf{x};\mathbf{p}(\ell))}{\mu_n(\mathbf{p}(\ell)) - \lambda_*}\, d\ell$$

汇总上述每一项的极限算子，我们推导出渐近展开（56）。注意，通过标准的解析与微扰技术，可在适当的索伯列夫空间中实现一致收敛（从 $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $H^{1/2}(\Gamma)$）。

对边界积分算子 $\mathcal{S}^{0,\delta}(\lambda)$ 也可进行类似分析。其谱表示与（54）类似，并可得到如下形式的渐近展开：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{0,\delta}(\lambda_* + |\delta|h)\phi = \tilde{\mathcal{S}}^{0,0}(\lambda_*)\phi &\\ + \beta_2(h)\Big[\overline{\langle \phi, v_1\rangle}\, v_1 + \overline{\langle \phi, v_2\rangle}\, v_2\Big] &\\ + \operatorname{sgn}(t_2\delta)\xi_2(h)\Big[\overline{\langle \phi, v_1\rangle}\, v_2 + \overline{\langle \phi, v_2\rangle}\, v_1\Big] + o(1),&\end{aligned} \tag{58}$$

其中

$$\beta_2(h) = \frac{1}{2|\theta_*|}\frac{h}{\sqrt{t_2^2 - h^2}}, \qquad \xi_2(h) = \left|\frac{t_2}{2\theta_*}\right|\frac{1}{\sqrt{t_2^2 - h^2}}. \tag{59}$$

注 24. 上述分析表明，格林函数 $G^{\varepsilon,0}$ 在 $\varepsilon=0$附近发生相变，其特征由(56)中的系数 $\xi_1(h)$ 表征；而格林函数 $G^{0,\delta}$在 $\delta=0$附近发生相变，其特征由(58)中的系数 $\xi_2(h)$ 表征。

4 联合光子晶体的界面模

本节考虑谱问题 (7)，并证明定理 6。定理 6 中各情形的证明方法相似。为简明起见，我们仅给出情形 3 的证明，并简要讨论另外两种情形的证明。

4.1 谱问题

由于 $\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 沿方向 $\mathbf{e}_2$，呈周期性，Floquet-Bloch理论表明，只需考虑沿 $\mathbf{e}_2$ 方向的拟周期问题。引入算子 $\mathcal{L}^{\mathrm{int}}_{k_\parallel}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$，它是 $\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(\varepsilon_L,\ \delta_L,\ \varepsilon_R,\ \delta_R)$ 在 $\mathcal{H}^1_{k_\parallel}(\Omega)$ 上的限制。

我们考虑从狄拉克点分岔出的界面模，其准动量将接近 $k^*_\parallel := K\cdot\mathbf{e}_2=\frac{4\pi}{3}$ 或 $k^{*,\prime}_\parallel = K'\cdot\mathbf{e}_2=-\frac{4\pi}{3}$。从 K 分岔出的界面模是一个特征函数 $u\in\mathcal{H}^1_{k^*_\parallel}(\Omega)$，满足对于某个 $\lambda\in\mathbb{R}$，

$$\langle v,\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(\varepsilon_L,\delta_L,\varepsilon_R,\delta_R)u\rangle_\Omega=\lambda\langle v,u\rangle_\Omega,\quad \text{for all } v(\mathbf{x})\in\mathcal{H}^1_{k^*_\parallel}(\Omega). \tag{60}$$

并且从 K' 分岔出的界面模是特征函数 $u\in\mathcal{H}^1_{k^{*,\prime}_\parallel}(\Omega)$，满足某个$\lambda\in\mathbb{R}$，

$$\langle v,\mathcal{L}^{\mathrm{int}}(\varepsilon_L,\delta_L,\varepsilon_R,\delta_R)u\rangle_\Omega=\lambda\langle v,u\rangle_\Omega,\quad \text{for all } v(\mathbf{x})\in\mathcal{H}^1_{k^{*,\prime}_\parallel}(\Omega). \tag{61}$$

我们证明定理 6 的情形 3，其中 $(\varepsilon_L,\ \delta_L)=(0,\ \delta)$ 且 $(\varepsilon_R,\ \delta_R)=(\varepsilon,\ 0)$.

4.2 谱问题的积分方程表述

设 $\Gamma:=\{t\mathbf{e}_2,\ -\frac12\le t<\frac12\}$ 为条带区域 Ω 中两个光子晶体的界面。对于$s\in\mathbb{R}$，在 Γ 上定义拟周期Sobolev空间 $\mathcal{H}^s(\Gamma)$，如下：

$$\mathcal{H}^s(\Gamma):=\left\{u(\mathbf{x}_0+t\mathbf{e}_2)=\sum_{n\in\mathbb{Z}}a_n e^{\mathrm{i}k^*_\parallel t}e^{\mathrm{i}2\pi nt}:\|u\|^2_{\mathcal{H}^s(\Gamma)}:=\sum_{n\in\mathbb{Z}}|a_n|^2(1+|n|^2)^s\right\}, \tag{62}$$

其中 $\mathbf{x}_0=-\frac12\mathbf{e}_1-\frac12\mathbf{e}_2$。

令 λ 位于 $\mathcal{L}(\varepsilon,\ 0)$ 和 $\mathcal{L}(0,\ \delta)$ 沿 $\mathbf{p}(\ell)=K+\ell\boldsymbol{\beta}_1$ 的公共间隙内，其中 ε 或 δ 非零（参见注17）。也就是说，$\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)\cap(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$，其中 $\mathfrak{d}\in(0,\ 1)$。令 $\mathbf{n}=(n_1,\ -\frac{\sqrt3}{2})$ 为指向右侧的 Γ 的单位法向量。对于 $(\psi,\ \phi)\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$，我们定义单层势和双层势：

$$\begin{aligned}\mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\phi(\mathbf{x})&:=\int_\Gamma G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\phi(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}},\quad \mathbf{x}\notin\Gamma,\\ \mathcal{D}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\psi(\mathbf{x})&:=\int_\Gamma \partial_{n_{\mathbf{y}}}G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\psi(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}}\quad \mathbf{x}\notin\Gamma,\end{aligned} \tag{63}$$

其中 $G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\ \mathbf{y};\lambda)$ 是格林函数，它们沿 $\mathbf{e}_2$ 准周期，如式 (54) 中所定义。单层势 $\mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\phi(\mathbf{x})$ 可连续延拓至 Γ，并定义了一个从 $\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ 的有界整数算子，我们仍将其记为 $\mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}$。给定 $(\psi,\ \phi)\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$，我们还定义积分算子

$$\begin{aligned}\mathcal{K}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\psi(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \partial_{n_{\mathbf{y}}} G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\psi(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{x}\in\Gamma,\\ \mathcal{K}^{*,\varepsilon,\delta}(\lambda)\phi(\mathbf{x}) &:= \int_\Gamma \partial_{n_{\mathbf{x}}} G^{\varepsilon,\delta}(\mathbf{x},\mathbf{y};\lambda)\phi(\mathbf{y})\,ds_{\mathbf{y}} \quad \mathbf{x}\in\Gamma.\end{aligned} \tag{64}$$

可以证明，$\mathcal{K}^{\varepsilon,\delta}:\ \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\to\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ 和 $\mathcal{K}^{*,\varepsilon,\delta}:\ \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)\to\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 是有界的。

取层势的极限，当 $\mathbf{x}\to\Gamma$ 时，成立以下跳跃关系 [6]：

$$\begin{aligned}[\mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}\psi(\lambda)]_\pm &= \mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\psi,\\ [\partial_n\mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\psi]_\pm &= \mp\frac{1}{2}\psi + \mathcal{K}^{*,\varepsilon,\delta}(\lambda)\psi,\\ [\mathcal{D}^{\varepsilon,\delta}\phi(\lambda)]_\pm &= \pm\frac{1}{2}\phi + \mathcal{K}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\phi,\\ [\partial_n\mathcal{D}^{\varepsilon,\delta}(\lambda)\phi]_\pm &=: \mathcal{N}^{\varepsilon,\delta}\phi.\end{aligned} \tag{65}$$

在上文中，下标 $-$ 和 $+$ 分别表示层势从左侧和右侧趋近 $\mathbf{x}\to\Gamma$ 时的极限，符号 ∂_n 表示法向导数，而 $\mathcal{N}^{\varepsilon,\delta}:H^{1/2}(\Gamma)\to H^{-1/2}(\Gamma)$ 是一个定义良好的有界算子。

假设 $u(\mathbf{x})$ 是 $\mathcal{L}^{\mathrm{int}}_{k_\parallel^*}(0,\ \delta,\ \varepsilon,\ 0)$ 的一个界面模，其特征值为 $\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)\cap(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$。设 $u|_\Gamma\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)$ 和 $\partial_n u|_\Gamma\in\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 分别为 u 的迹和 u 在 Γ 上的法向导数。由格林公式可知，u 在无限条带 Ω 中具有以下表示：

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases}\big[\mathcal{D}^{\varepsilon,0}(\lambda)u|_\Gamma\big](\mathbf{x}) - \big[\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda)\partial_n u|_\Gamma\big](\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \text{ on the right of } \Gamma,\\ -\big[\mathcal{D}^{0,\delta}(\lambda)u|_\Gamma\big](\mathbf{x}) + \big[\mathcal{S}^{0,\delta}\partial_n u|_\Gamma(\lambda)\big](\mathbf{x}) & \text{for } \mathbf{x} \text{ on the left of } \Gamma.\end{cases} \tag{66}$$

这里我们利用了以下事实：$u\in\mathcal{H}^1_{k_\parallel^*}(\Omega)$，尤其是应用格林公式时 $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{e}_1|\to\infty$ 时 u 的衰减。从 Γ 的任一侧取极限，可得到以下两个积分方程系统：

$$\begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathcal{K}^{\varepsilon,0}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} & -\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda) \\ \mathcal{N}^{\varepsilon,0}(\lambda) & -\mathcal{K}^{*,\varepsilon,0}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma\end{pmatrix}, \tag{67}$$

and

$$\begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{K}^{0,\delta}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} & \mathcal{S}^{0,\delta}(\lambda) \\ -\mathcal{N}^{0,\delta}(\lambda) & \mathcal{K}^{*,0,\delta}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma\end{pmatrix}. \tag{68}$$

反之，假设 $\lambda\in(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_1\varepsilon|)\cap(\lambda_*-\mathfrak{d}|t_2\delta|,\ \lambda_*+\mathfrak{d}|t_2\delta|)$。令 $(\psi,\ \phi)\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$，它不一定是界面 Γ 上某个界面模的柯西数据。我们在无限条带 Ω 中将 $u(\mathbf{x})$ 定义为单层势和双层势的组合：

$$u(\mathbf{x}) = \begin{cases}[\mathcal{D}^{\varepsilon,0}(\lambda)\psi](\mathbf{x}) - [\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda)\phi](\mathbf{x}) & \text{on the right of } \Gamma,\\ -[\mathcal{D}^{0,\delta}(\lambda)\psi](\mathbf{x}) + [\mathcal{S}^{0,\delta}(\lambda)\phi](\mathbf{x}) & \text{on the left of } \Gamma.\end{cases} \tag{69}$$

要使上述定义的 u 成为界面模，我们只需保证 Γ 两侧值和法向导数的连续性，表示为：

$$\begin{pmatrix} \mathcal{K}^0(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} & -\mathcal{S}^{\varepsilon,0}(\lambda) \\ \mathcal{N}^{\varepsilon,0}(\lambda) & -\mathcal{K}^{*,\varepsilon,0}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathcal{K}^{0,\delta}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} & \mathcal{S}^{0,\delta}(\lambda) \\ -\mathcal{N}^{0,\delta}(\lambda) & \mathcal{K}^{*,0,\delta}(\lambda)+\frac{1}{2}\mathcal{I} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \neq 0. \tag{70}$$

定义作用于 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 上的积分算子

$$\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \begin{pmatrix} -\mathcal{K}^{\varepsilon,\delta}(\lambda) & \mathcal{S}^{\varepsilon,\delta}(\lambda) \\ -\mathcal{N}^{\varepsilon,\delta}(\lambda) & \mathcal{K}^{*,\varepsilon,\delta}(\lambda) \end{pmatrix}, \tag{71}$$

and

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda), \quad \mathbb{T}_t^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := -\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda)+\mathbb{I}, \quad \mathbb{T}_n^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda)-\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda)+\mathbb{I}, \tag{72}$$

其中，$\mathbb{I}$ 是恒等算子。根据 (67)、(68) 和 (70)，我们得到关于界面模的以下引理。

引理 25. 假设 $(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 且 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (\varepsilon, 0)$。令 $\mathfrak{d} \in (0, 1)$ 且 $\lambda \in (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_1\varepsilon|) \cap (\lambda_* - \mathfrak{d}|t_2\delta|, \lambda_* + \mathfrak{d}|t_2\delta|)$。

(i) 存在满足 (60) 的界面模 u，当且仅当存在 $(\psi, \phi) \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 使得

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta}(\lambda) \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbb{T}_t^{\varepsilon,\delta}(\lambda) \begin{pmatrix} \psi \\ \phi \end{pmatrix} \neq 0. \tag{73}$$

此外，*(73)* 的每个解都会产生一个由 (69) 表示的界面模。

(ii) 若 u 是满足 (60) 的界面模，则 $0 \neq (u|_\Gamma, \partial_n u|_\Gamma) \in \mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 满足

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta}(\lambda) \begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma \end{pmatrix} = 0, \quad \mathbb{T}_n^{\varepsilon,\delta}(\lambda) \begin{pmatrix} u|_\Gamma \\ \partial_n u|_\Gamma \end{pmatrix} = 0. \tag{74}$$

注 *26.* 在 K' 处，我们仿照 *(71)* 和 *(72)* 中的定义，定义 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda)$，$\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,s\ \prime}$，$\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,t\ \prime}$ 以及 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,n\ \prime}$；其中层势中的格林函数 $G^{\varepsilon,\delta}$ 替换为 $G^{\varepsilon,\delta,\prime}$。我们还仿照 *(71)* 定义 $\tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*)$ 和 $\tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*)$；其中层势中的格林函数分别替换为 $\tilde{G}^{0,0,\prime}(x, y; \lambda_*)$ 和 $\tilde{G}^{0,0,\prime}(x,y;\lambda_*)$。

注 27. 当$(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 且$(\varepsilon_R, \delta_R) = (0, -\delta)$时，也可以建立积分方程表述；当$(\varepsilon_L, \delta_L) = (\varepsilon, 0)$ 且$(\varepsilon_R, \delta_R) = (-\varepsilon, 0)$时亦然。对于前一种情况，引理 *25* 仍然成立，其中积分算子定义为

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{-\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda), \quad \mathbb{T}_t^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := -\mathbb{T}^{-\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{I}, \quad \mathbb{T}_n^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{-\varepsilon,0}(\lambda)-\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda)+\mathbb{I}.$$

对于后者，引理 *25* 对由下式定义的积分算子成立：

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{0,-\delta}(\lambda)+\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda), \quad \mathbb{T}_t^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := -\mathbb{T}^{0,-\delta}(\lambda)+\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda)+\mathbb{I}, \quad \mathbb{T}_n^{\varepsilon,\delta}(\lambda) := \mathbb{T}^{0,-\delta}(\lambda)-\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda)+\mathbb{I}.$$

4.3 极限算子

本小节中，我们推导积分算子 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta}_{s}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta}_{t}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta}_{n}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,\prime}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,\ \prime}_{s}$, $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,\ \prime}_{t}$ 和 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\delta,\ \prime}_{n}$ 的渐近展开。为此，我们先引入几个记号。对于 $\vec{\phi}=(\psi,\phi)\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$，在 K 处，令

$$c_i(\vec{\phi}):=\overline{\langle\phi,v_i\rangle}_\Gamma-\langle\partial_n v_i,\psi\rangle_\Gamma, \tag{75}$$

其中 v_i 在注释 21 中定义。我们还记

$$\vec{v}_i:=\begin{pmatrix} v_i|_\Gamma \\ \partial_n v_i|_\Gamma\end{pmatrix},\quad i=1,2, \tag{76}$$

并定义算子

$$\mathbb{P}\vec{\phi}:=c_1(\vec{\phi})\vec{v}_1+c_2(\vec{\phi})\vec{v}_2, \tag{77}$$

$$\mathbb{Q}\vec{\phi}:=c_2(\vec{\phi})\vec{v}_1+c_1(\vec{\phi})\vec{v}_2. \tag{78}$$

类似地，在 K' 处，定义

$$c_i'(\vec{\phi}):=\overline{\langle\phi,v_i'\rangle}_\Gamma-\langle\partial_n v_i',\psi\rangle_\Gamma, \tag{79}$$

其中 v_i' 在注释 21 中定义。我们还记

$$\vec{v}_i':=\begin{pmatrix} v_i'|_\Gamma \\ \partial_n v_i'|_\Gamma\end{pmatrix},\quad i=1,2, \tag{80}$$

并定义算子

$$\mathbb{P}'\vec{\phi}:=c_1'(\vec{\phi})\vec{v}_1'+c_2'(\vec{\phi})\vec{v}_2', \tag{81}$$

$$\mathbb{Q}'\vec{\phi}:=c_2'(\vec{\phi})\vec{v}_1'+c_1'(\vec{\phi})\vec{v}_2'. \tag{82}$$

定义这些函数

$$\begin{aligned}\beta_1(h)&:=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{h}{\sqrt{t_1^2-h^2}},\quad \beta_2(h):=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{h}{\sqrt{t_2^2-h^2}},\\ \xi_1(h)&:=\left|\frac{t_1}{2\theta_*}\right|\frac{1}{\sqrt{t_1^2-h^2}},\quad \xi_2(h):=\left|\frac{t_2}{2\theta_*}\right|\frac{1}{\sqrt{t_2^2-h^2}}.\end{aligned} \tag{83}$$

按照第3.2节中的步骤，可以得到当 $\varepsilon\to0$ 或 $\delta\to0$时，$\mathcal{S}^{\varepsilon,\ \delta}$, $\mathcal{K}^{\varepsilon,\ \delta}$, $\mathcal{K}^{*,\ \varepsilon,\ \delta}$和 $\mathcal{N}^{\varepsilon,\ \delta}$ 的极限算子。特别地，积分算子 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta}$ 的极限总结如下列命题所示。当 $\delta=0$时，详细计算请参见[32] 。

命题28。 假设*3*在 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $t_1\neq0$成立。令 $\mathfrak{d}\in(0,1)$ 为一个常数。则对于满足 $|h|<\mathfrak{d}|t_1|$ 的 $h\in\mathbb{C}$，当 $t_1\varepsilon\to0^{\pm}$时，下列极限一致成立：

$$\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda_*+|\varepsilon|h)\to\tilde{\mathbb{T}}^{0,0}(\lambda_*)+\beta_1(h)\mathbb{P}\pm\xi_1(h)\mathbb{Q}, \tag{84}$$

其中，收敛是指从 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$的算子范数收敛。

命题 29. 假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $t_1 \neq 0$成立。令 $\mathfrak{d} \in (0,1)$ 为一个常数。则对满足 $|h| < \mathfrak{d}|t_1|$ 的 $h \in \mathbb{C}$，当 $t_1\varepsilon \to 0^{\pm}$ 时，以下极限一致成立：

$$\mathbb{T}^{\varepsilon,0,\prime}(\lambda_* + |\varepsilon|h) \to \tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*) + \beta_1(h)\mathbb{P}' \mp \xi_1(h)\mathbb{Q}', \tag{85}$$

其中，收敛是按照从 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$的算子范数来理解的。

命题 30。 设假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $t_2 \neq 0$成立。设 $\mathfrak{d} \in (0,1)$ 为一个常数。那么，对于满足 $|h| < \mathfrak{d}|t_2|$ 的 $h \in \mathbb{C}$，当 $t_2\delta \to 0^{\pm}$时，以下极限一致成立：

$$\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda_* + |\delta|h) \to \tilde{\mathbb{T}}^{0,0}(\lambda_*) + \beta_2(h)\mathbb{P} \pm \xi_2(h)\mathbb{Q}, \tag{86}$$

其中，收敛是按照从 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$的算子范数来理解的。

命题 31。 设假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$ 和 $t_2 \neq 0$成立。设 $\mathfrak{d} \in (0,1)$ 为一个常数。那么，对于满足 $|h| < \mathfrak{d}|t_2|$ 的 $h \in \mathbb{C}$，当 $t_2\delta \to 0^{\pm}$时，以下极限一致成立：

$$\mathbb{T}^{0,\delta,\prime}(\lambda_* + |\delta|h) \to \tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*) + \beta_2(h)\mathbb{P}' \pm \xi_2(h)\mathbb{Q}', \tag{87}$$

其中，收敛是指从 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$ 到 $\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma) \times \mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)$的算子范数收敛。

注 32。 值得注意的是，命题 *28* 至 *31* 中极限算子的形式，与 (16) 和(17)中给出的椭圆算子的 ε 和 δ 阶导数，或由命题 *19* 得到的 K 和 K' 处贝里曲率的相对符号，密切相关。更确切地说，位于 (85) - (87)中算子 $\mathbb{Q}$ 和$\mathbb{Q}'$ 前面的乘法算子 $\xi_1(h)$ 和 $\xi_2(h)$的符号，取决于(16) 和(17)中矩阵的(1,1) 项的符号。例如，在 K 和 K'处， ε 阶导数的(1,1) 项分别为 t_1 和 $-t_1$，而 δ 阶导数的该项分别为 t_2 和 t_2。

4.4 极限算子的性质

为便于证明定理 6，我们计算式 (72) 中定义的算子的极限。为清晰起见，我们给出 $\rho = \frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta} > 0$、 $t_1\varepsilon > 0$ 和 $t_2\delta > 0$ 时的详细推导。对于 $\rho > 0$、 $t_1\varepsilon < 0$ 和 $t_2\delta < 0$ 的情形，以及 $\rho < 0$ 的情形，极限算子的推导也类似。

引理 33. 设$(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 且$(\varepsilon_R, \delta_R) = (\varepsilon, 0)$，并且 $\mathfrak{d} \in (0, 1)$ 为常数。假设$\rho = \frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta} > 0$、 $t_1\varepsilon > 0$ 和 $t_2\delta > 0$。若假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$成立，那么在 $k_\parallel = k_\parallel^*$ 处，当 ε 和 δ 趋于零而 ρ 固定时，对于满足$|h| < \mathfrak{d}|t_1|$的 $h \in \mathbb{C}$，以下收敛一致成立：

$$T_n^{\varepsilon,\delta}(\lambda_* + |\varepsilon|h) \to \left(\beta_1(h) - \beta_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{P} + \left(\xi_1(h) - \xi_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{Q} + \mathbb{I} =: \mathbb{U}_n(h). \tag{88}$$

当 $k_\parallel = -k_\parallel^*$ 处的 ε 和 δ 趋于零而 ρ 固定时，对于满足 $|h| < \mathfrak{d}|t_1|$ 的 $h \in \mathbb{C}$，以下收敛是一致的：

$$\begin{aligned}
&T_s^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_* + |\varepsilon|h) \to 2\tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*) + \left(\beta_1(h) + \beta_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{P} - \left(\xi_1(h) - \xi_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{Q} + \mathbb{I} =: \mathbb{U}_s'(h),\\
&T_t^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_* + |\varepsilon|h) \to \left(\beta_1(h) - \beta_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{P} + \left(\xi_1(h) + \xi_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{Q} + \mathbb{I} =: \mathbb{U}_t'(h),\\
&T_n^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_* + |\varepsilon|h) \to -\left(\beta_1(h) - \beta_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{P} - \left(\xi_1(h) + \xi_2(\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right| h)\right)\mathbb{Q} + \mathbb{I} =: \mathbb{U}_n'(h).
\end{aligned} \tag{89}$$

证明。 首先，考虑 $k_{\|}=k_{\|}^{*}$。 由于 $t_1\varepsilon>0$ 和 $t_2\delta>0$，根据命题28–30，我们得到

$$\mathbb{T}^{\varepsilon,0}(\lambda_*+|\varepsilon|h_1)\to\tilde{\mathbb{T}}^{0,0}(\lambda_*)+\beta_1(h_1)\mathbb{P}+\xi_1(h_1)\mathbb{Q}, \tag{90}$$

$$\mathbb{T}^{0,\delta}(\lambda_*+|\delta|h_2)\to\tilde{\mathbb{T}}^{0,0}(\lambda_*)+\beta_2(h_2)\mathbb{P}+\xi_2(h_2)\mathbb{Q}. \tag{91}$$

选择

$$h_1=h,\quad h_2=\left|\frac{\varepsilon}{\delta}\right|h, \tag{92}$$

使两个能量相等 $\lambda_*+|\varepsilon|h_1=\lambda_*+|\delta|h_2=\lambda_*+|\varepsilon|h$。注意，由于 t_1 和 t_2 是常数，固定 ρ 意味着 $\frac{\varepsilon}{\delta}$ 也固定。(88) 中的关系由 (72) 中 $\mathbb{T}^{\varepsilon,\ n}{}^{\delta}(\lambda)$ 的定义得出。

接下来，考虑 $k_{\|}=-k_{\|}^{*}$。 由于 $t_1\varepsilon>0$ 和 $t_2\delta>0$，根据命题29–31，我们得到

$$\mathbb{T}^{\varepsilon,0,\prime}(\lambda_*+|\varepsilon|h_1)\to\tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*)+\beta_1(h_1)\mathbb{P}'-\xi_1(h_1)\mathbb{Q}', \tag{93}$$

$$\mathbb{T}^{0,\delta,\prime}(\lambda_*+|\delta|h_2)\to\tilde{\mathbb{T}}^{0,0}(\lambda_*)+\beta_2(h_2)\mathbb{P}'+\xi_2(h_2)\mathbb{Q}'. \tag{94}$$

采用与 (92) 中相同的选择，(89) 中的关系由注 26 中 $T^{\varepsilon,\ \delta,\ s}{}'$, $T^{\varepsilon,\ \delta,\ t}{}'$ 和 $T^{\varepsilon,\ \delta,\ n}{}'$ 的定义得出。 □

极限算子的性质由以下两个引理陈述 s.

引理 34. 在(88) 中定义的算子 $\mathbb{U}_n(h)$ 是一族指标为零的 ***Fredholm*** 算子，它关于 h 解析，且不取任何特征值。

证明。设定

$$a=\frac{|t_1\varepsilon|}{|t_2\delta|}=|\rho|,\quad\text{and}\quad b=\frac{h}{|t_1|}, \tag{95}$$

采用（92）中的选择，我们得到

$$\begin{aligned}
\beta_1(h_1)&=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{h}{\sqrt{t_1^2-h^2}}=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{b}{\sqrt{1-b^2}},\\
\beta_2(h_2)&=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{ah}{\sqrt{t_1^2-(ah)^2}}=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{ab}{\sqrt{1-(ab)^2}},\\
\xi_1(h_1)&=\frac{|t_1|}{2|\theta_*|}\frac{1}{\sqrt{t_1^2-h^2}}=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{1}{\sqrt{1-b^2}},\\
\xi_2(h_2)&=\frac{|t_1|}{2|\theta_*|}\frac{1}{\sqrt{t_1^2-(ah)^2}}=\frac{1}{2|\theta_*|}\frac{1}{\sqrt{1-(ab)^2}}.
\end{aligned}$$

众所周知， $c_i(\vec{v}_j)$ 与 $\vec{v}_j$ 通过 Γ [12] 的能流有关

$$c_i(\vec{v}_j)=(-1)^{n-1}|\theta_*|\delta_{i,j}. \tag{96}$$

基于 $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$,

$$\mathbb{P}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\mathrm{i}|\theta_*|(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathbb{Q}(\vec{v}_1,\vec{v}_2)=\mathrm{i}|\theta_*|(\vec{v}_1,\vec{v}_2)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}.$$

由于 $\mathbb{P}$ 和 $\mathbb{Q}$ 的值域均为 $\mathrm{span}\{\vec{v}_1,\vec{v}_2\}$，因此 h 是 $\mathbb{U}_n(h)$ 的特征值的必要条件是 $b=h/|t_1|$ 为以下定义的 M_n 的特征值：

$$M_n(b)=\mathrm{i}|\theta_*|\begin{pmatrix}\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2) & -(\xi_1(h_1)-\xi_2(h_2))\\ \xi_1(h_1)-\xi_2(h_2) & -(\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}x_--2\mathrm{i} & -y_-\\ y_- & -x_--2\mathrm{i}\end{pmatrix}, \tag{97}$$

其中

$$x_\pm:=\frac{b}{\sqrt{1-b^2}}\pm\frac{ab}{\sqrt{1-(ab)^2}},\quad y_\pm:=\frac{1}{\sqrt{1-b^2}}\pm\frac{1}{\sqrt{1-(ab)^2}}. \tag{98}$$

为求出 $M_n(h)$ 的特征值，我们计算

$$\det(M_n(b))=0\iff y_-^2=x_-^2+4. \tag{99}$$

右侧方程成立的必要条件是

$$b^2(1-a)^2=0, \tag{100}$$

这意味着 $b=0$ 或 $a=1$。然而，在这两种情况下，$x_-=y_-=0$ 并且 $\det(M_n(b))\neq 0$。因此，$M_n(b)$ 没有特征值。 □

引理 35. 定义于 (89) 中的算子族 $\mathbb{U}'_s(h)$、$\mathbb{U}'_n(h)$ 和 $\mathbb{U}'_t(h)$ 是指标为零且关于 h 解析的 *Fredholm* 算子族。对于这三个算子中的每一个，其唯一的特征值是 $h=0$，且其重数为 2。

证明。类似于 (96)，我们有以下关系

$$c'_i(\vec{v}'_j)=(-1)^{n-1}|\theta_*|\delta_{i,j}. \tag{101}$$

基于 $\vec{v}'_1$，$\vec{v}'_2$，

$$\mathbb{P}'(\vec{v}'_1,\vec{v}'_2)=\mathrm{i}|\theta_*|(\vec{v}'_1,\vec{v}'_2)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix},\quad \mathbb{Q}'(\vec{v}'_1,\vec{v}'_2)=\mathrm{i}|\theta_*|(\vec{v}'_1,\vec{v}'_2)\begin{pmatrix}0&-1\\1&0\end{pmatrix}. \tag{102}$$

此外，[32] 中证明了

$$\mathrm{Ker}\ \tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*)=X',\quad \mathrm{Ran}\ \tilde{\mathbb{T}}^{0,0,\prime}(\lambda_*)=Y',$$

其中

$$X':=\mathrm{span}\{\vec{v}'_1,\vec{v}'_2\},\quad Y':=\{\vec{\phi}\in\mathcal{H}^{1/2}(\Gamma)\times\mathcal{H}^{-1/2}(\Gamma)\},c'_i(\vec{\phi}')=0,i=1,2\}. \tag{103}$$

因此，$\mathbb{U}'_s(h)$、$\mathbb{U}'_n(h)$ 和 $\mathbb{U}'_t(h)$ 的核是 X' 的子空间，其特征问题可化简为 3×3 矩阵的特征值问题：

$$\begin{aligned}
M'_s(b)=&\mathrm{i}|\theta_*|\begin{pmatrix}\beta_1(h_1)+\beta_2(h_2) & \xi_1(h_1)-\xi_2(h_2)\\ -(\xi_1(h_1)-\xi_2(h_2)) & -(\beta_1(h_1)+\beta_2(h_2))\end{pmatrix},\\
M'_t(b)=&-\mathrm{i}|\theta_*|\begin{pmatrix}\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2) & \xi_1(h_1)+\xi_2(h_2)\\ -(\xi_1(h_1)+\xi_2(h_2)) & -(\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix},\\
M'_n(b)=&\mathrm{i}|\theta_*|\begin{pmatrix}\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2) & \xi_1(h_1)+\xi_2(h_2)\\ -(\xi_1(h_1)+\xi_2(h_2)) & -(\beta_1(h_1)-\beta_2(h_2))\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}
\end{aligned} \tag{104}$$

这些矩阵根据式 (98) 中定义的量可写成以下形式:

$$\begin{aligned} M_s'(b) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} x_+ & y_- \\ -y_- & -x_+ \end{pmatrix}, \\ M_t'(b) &= -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} x_- + 2\mathrm{i} & y_+ \\ -y_+ & -x_- + 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \\ M_n'(b) &= \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} x_- - 2\mathrm{i} & y_+ \\ -y_+ & -x_- - 2\mathrm{i} \end{pmatrix} = \overline{M_t'(b)}. \end{aligned} \tag{105}$$

为求出 M_s'、 M_t'和 M_n'的特征值，我们计算

$$\det(M_s'(b)) = 0 \iff (x_+)^2 = (y_-)^2,$$

$$\det(M_t'(b)) = 0 \iff \det(M_n) = 0 \iff (x_-)^2 - (y_+)^2 + 4 = 0.$$

两个等式均可化简为

$$b^2(1+a)^2 = 0, \tag{106}$$

当且仅当 $b = 0$时，该式成立。也就是说， $h = 0$ 是$M_s'(b)$、 $M_t'(b)$和 $M_n'(b)$各自唯一的特征值。

接下来，我们求 $h = 0$处这些矩阵的核与重数。计算

$$\begin{aligned} &\frac{d}{db}x_\pm = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}^3} \pm \frac{a}{\sqrt{1-a^2b^2}^3}, \qquad \frac{d^2}{db^2}x_\pm = \frac{3b}{\sqrt{1-b^2}^5} \pm \frac{3a^3b}{\sqrt{1-a^2b^2}^5}, \\ &\frac{d}{db}y_\pm = \frac{b}{\sqrt{1-b^2}^3} \pm \frac{a^2b}{\sqrt{1-a^2b^2}^3}, \qquad \frac{d^2}{db^2}y_\pm = \frac{1}{\sqrt{1-b^2}^5}(1+2b^2) \pm \frac{a^2}{\sqrt{1-a^2b^2}^5}(1+2a^2b^2). \end{aligned} \tag{107}$$

因此，在 $h = 0$处，

$$M_s'(0) = \frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{db}M_s'(0) = \frac{\mathrm{i}(1+a)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \tag{108}$$

$$M_n'(0) = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2 \\ -2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}, \quad \frac{d}{db}M_n'(0) = -\frac{\mathrm{i}(1-a)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \frac{d^2}{db^2}M_n'(0) = -\frac{\mathrm{i}(1+a^2)}{2}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于 $M_s(b)$，我们注意到 $\mathrm{Ker}(M_s(0)) = \mathbb{R}^2$。对于每个非零向量$(A,\ B)^t \in \mathbb{R}^2$，以及任意一个在 b 中解析且满足$(A(0)\ B(0))^t = (A,\ B)^t$的向量函数$(A(b)\ B(b))^t$，我们有

$$\frac{d}{db}\left(M_s(h)\begin{pmatrix} A(b) \\ B(b) \end{pmatrix}\right)|_{b=0} = \frac{\mathrm{i}(1+a)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix} \neq 0.$$

因此，$\mathrm{Ker}(M_s'(0))$ 中的每个向量的秩均为 1，且 $M_s(b)$ 的重数等于 2。

对于 $M_n(b)$，我们观察到 $\mathrm{Ker}(M_n(0)) = \mathrm{span}\{(\mathrm{i},\ 1)^t\}$。对于任意在 b 中解析且满足 $(A(0)\ B(0))^t = (\mathrm{i},\ 1)^t$ 的向量函数 $(A(b)\ B(b))^t$，我们有

$$\frac{d}{db}\left(M_n(h)\begin{pmatrix} A(b) \\ B(b) \end{pmatrix}\right)|_{b=0} = -\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix} 2\mathrm{i} & 2 \\ -2 & 2\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{d}{db}A(0) \\ \frac{d}{db}B(0) \end{pmatrix} - \frac{\mathrm{i}(1-a)}{2}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

当且仅当以下条件成立时，此表达式等于零

$$\frac{d}{db}B(0) = -\mathrm{i}\frac{d}{db}A(0) - \mathrm{i}\frac{1-a}{2}.$$

最后，注意到

$$\frac{d^2}{db^2}\left(M_n(h)\begin{pmatrix}A(b)\\B(b)\end{pmatrix}\right)|_{b=0}=-\frac{\mathrm{i}}{2}\begin{pmatrix}2\mathrm{i}&2\\-2&2\mathrm{i}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d^2}{db^2}A(0)\\\frac{d^2}{db^2}B(0)\end{pmatrix}$$
$$-\mathrm{i}(1-a)\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{d}{db}A(0)\\-\mathrm{i}\frac{d}{db}A(0)-\mathrm{i}\frac{1-a}{2}\end{pmatrix}-\frac{\mathrm{i}(1+a^2)}{2}\begin{pmatrix}0&1\\-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{i}\\1\end{pmatrix}.$$

上述量仅在以下条件下为零

$$\begin{pmatrix}1+a^2\\\mathrm{i}((1-a)^2-(1+a^2))\end{pmatrix}\in\mathrm{span}\{\begin{pmatrix}1\\\mathrm{i}\end{pmatrix}\},$$

而 $a>0$ 永远不满足该条件。因此，向量 $(\mathrm{i},\ 1)^t$ 的秩为 2，且 $M_n'(b)$ 的重数等于 2。由此可知，$\mathrm{Ker}(M_s'(0))$ 中唯一的向量 $(\mathrm{i},\ 1)^t$ 的秩为 2，且 $M_n(b)$ 的重数等于 2。

□

注 36。 当 $a=1$ 时，(104) 中的矩阵退化为

$$M_s'(b)=i|\theta_*|\beta_1(h_1)\begin{pmatrix}1&0\\-0&-1\end{pmatrix},\quad M_t'(b)=-i|\theta_*|2\xi_1(h_1)\begin{pmatrix}0&0\\-0&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}.$$

这是我们先前工作 *[32]* 中讨论的情形。

4.5 主要结果定理6的证明

为清晰起见，我们首先给出情形 3 的证明。此外，我们还将重点讨论 $\rho=\frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta}\succ 0$、 $t_1\varepsilon>0$ 和 $t_2\delta>0$。

首先，考虑 $k_{\|}=k_{\|}^*$ 并定义 $V:=\{h\in\mathbb{C},|h|<\mathfrak{d}|t_1|\}$。根据引理 34， $\mathbb{U}_n(h)$ 在 V 中不取任何特征值。由于 $T^{\varepsilon,\delta}{}_{,s}(\lambda_*+\varepsilon h)$ 在 V 中解析，且在 V 的某个邻域内一致收敛于 $\mathbb{U}_n$，广义鲁歇定理 [1] 推出， $T^{\varepsilon,\delta}{}_{,s}(\lambda_*+\varepsilon h)$ 在 V 中没有特征值。因此，在 $k_{\|}=k_{\|}^*$ 处不存在边缘态。

接下来，在 $k_{\|}=-k_{\|}^*$ 处，对于算子 $T^{\varepsilon,\delta,}{}_s{}'(\lambda_*+\varepsilon h)$、 $T^{\varepsilon,\delta,}{}_t{}'(\lambda_*+\varepsilon h)$ 以及 $T^{\varepsilon,\delta,}{}_n{}'(\lambda_*+\varepsilon h)$，我们有以下引理，这些算子定义见注 26。该证明沿用引理 7.8 以及 [32] 中命题 7.5、7.6 和 7.11 的类似思路，承接引理 35 中关于极限算子的论证。为简洁起见，此处省略证明。

引理 37。 考虑定理 *6* 的情形 *3*。假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$ 成立。设 $\rho=\frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta}>0$、$t_1\varepsilon>0$ 和 $t_2\delta>0$。令 $\mathfrak{d}\in(0,\ 1)$ 为一个常数。当 ε 和 δ 足够小时，而 ρ 固定时，对于 $|h_0|<\mathfrak{d}|t_1|$，每个非平凡的 $\vec{\phi}\in$ 核 $(\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta,\ s}{}'(\lambda_*+\varepsilon h_0))$ 的秩均为 1。此外，$\mathbb{T}^{\varepsilon,\ \delta,\ s}{}'(\lambda_*+\varepsilon h_0)$ 仅当 $h_0=o(1)$ 为 $\varepsilon\to 0$ 时才可能具有非平凡核。

引理 38。 考虑定理 *6* 的情形 *3*。假设*3*沿着 $\boldsymbol{\beta}_1$ 成立。设 $\rho=\frac{t_1\varepsilon}{t_2\delta}>0$、$t_1\varepsilon>0$ 和 $t_2\delta>0$。令 $\mathfrak{d}\in(0,\ 1)$ 为一个常数。当 ε 和 δ 足够小时，而 ρ 固定时，对于 $|h_0|<\mathfrak{d}|t_1|$，该系统

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_*+\varepsilon h)\vec{\phi}=0\quad and\quad \mathbb{T}_n^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_*+\varepsilon h)\vec{\phi}=0 \tag{109}$$

至多有一个解$(h,\vec{\phi})$。系统也同样如此

$$\mathbb{T}_s^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_*+\varepsilon h)\vec{\phi}=0\quad and\quad \mathbb{T}_t^{\varepsilon,\delta,\prime}(\lambda_*+\varepsilon h)\vec{\phi}=0. \tag{110}$$

现在考虑区域 $V := \{h \in \mathbb{C}, |h| < \mathfrak{d}|t_1|\}$。根据引理 35， $\mathbb{U}'_s(h)$ 在 V 中的重数为 2。由于 $\mathbb{U}'_s$、 $\mathbb{T}^\varepsilon$、$\delta(\lambda_* + |\varepsilon|h)$ 在 V 中解析，且收敛在 V 的某个邻域内一致，因此广义鲁歇定理 [1] 表明，当 ε 充分小时， V 中的重数为 2。根据引理 37， $\mathbb{T}^\varepsilon$、δ、$_s$ $'(\lambda_* + |\varepsilon|h)$ 在 V 中有两个不同的特征值，每个特征值对应的核维数均为 1。将这两个特征值$\vec{}$ $\vec{}$及其核记为 $(h_{0,i}, \phi_{0,i})$、 $i = 1$、2。如果 $\phi_{0,\ i}$ 中没有一个通过 (69) 产生边缘态，则这与 (109) 至多有一个解相矛盾。如果 $\vec{\phi}_{0,\ i}$ 各自都通过 (69) 产生边缘态，则这与 (110) 至多有一个解相矛盾。因此，恰好存在一个具有$k_\parallel = -k_\parallel^*$的边缘模态。

对于定理 6 中情形 1 和情形 2 的证明，可以按照上述相同步骤，通过对界面上的积分算子进行渐近分析来分析界面模。特别是，当界面两侧的扰动方向相反时，无论是 $(\varepsilon_L, \delta_L) = (\varepsilon, 0)$ 和 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (-\varepsilon, 0)$，还是 $(\varepsilon_L, \delta_L) = (0, \delta)$ 和 $(\varepsilon_R, \delta_R) = (0, -\delta)$，利用注 32 中的观察，我们可以得到一组具有与 (89) 相同结构的积分算子，其中 $|\rho| = 1$ 同时出现在 $k_\parallel = k_\parallel^*$ 和 $k_\parallel = -k_\parallel^*$ 处。因此，采用上述相同的论证并利用 Gohberg-Sigal 理论，可推出界面模的存在性及其重数。

致谢

W. Li 部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-2532730 的资助。J. Lin 部分获得美国国家科学基金会项目 DMS-2410645 和奥本大学研究支持计划的资助。H. Zhang 部分获得香港研究资助局项目 GRF 16307024 和 GRF 16301625 的资助。

附录 A 引理8的证明

证明。 我们只证明

$$FC(F\mathbf{x})F = -C(\mathbf{x}), \quad RC(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1} = C(\mathbf{x}),$$

因为其他关系都显然成立。首先,

$$\begin{aligned} C_{k,l}(F\mathbf{x}) &= \nabla A_{k,l}|_{F\mathbf{x}} \cdot JF\mathbf{x} = \big(F\nabla\big(A_{k,l}(F\mathbf{x})\big)\big)^t JF\mathbf{x} \\ &= \big(\nabla\big(A_{k,l}(F\mathbf{x})\big)\big)^t FJF\mathbf{x} = -\nabla\big(A_{k,l}(F\mathbf{x})\big) \cdot J\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Thus

$$FC(F\mathbf{x})F = -\nabla\big(FA(F\mathbf{x})F\big) \cdot J\mathbf{x} = -\nabla A(\mathbf{x}) \cdot J\mathbf{x} = -C(\mathbf{x}),$$

并且上面的第一个恒等式成立。对于第二个恒等式，经过直接计算可得

$$\begin{aligned} C_{k,l}(R^{-1}\mathbf{x}) &= \nabla A_{k,l}|_{R^{-1}\mathbf{x}} \cdot JR^{-1}\mathbf{x} = \big(R^{-1}\nabla\big(A_{k,l}(R^{-1}\mathbf{x})\big)\big)^t JR^{-1}\mathbf{x} \\ &= \big(\nabla\big(A_{k,l}(R^{-1}\mathbf{x})\big)\big)^t RJR^{-1}\mathbf{x} = \nabla\big(A_{k,l}(R^{-1}\mathbf{x})\big) \cdot J\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Thus

$$RC(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1} = \nabla\big(RA(R^{-1}\mathbf{x})R^{-1}\big) \cdot J\mathbf{x} = \nabla A(\mathbf{x}) \cdot J\mathbf{x} = C(\mathbf{x})$$

□

附录 B 命题 13–16 的证明

特征值问题 (10) 等价于求解 $(\lambda, \tilde{u}) \in \mathbb{C} \times H_{\mathbf{0}}^1(\mathcal{C}_z)$，使得

$$\langle \tilde{v}, \mathcal{L}(\varepsilon, \delta, \mathbf{p})\tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z} = \lambda \langle \tilde{v}, \tilde{u}\rangle_{\mathcal{C}_z} \quad \text{for all } v \in H_{\mathbf{0}}^1(\mathcal{C}_z). \tag{111}$$

利用 Lyapunov–Schmidt 约化，并遵循 [32], 中命题 4.3 的证明，可由矩阵确定特征对的主阶行为

$$\mathcal{M} := \varepsilon\langle \tilde{\mathbf{w}}, \partial_\varepsilon \mathcal{L}(\varepsilon, 0, K_*)\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\varepsilon=0} + \delta\langle \tilde{\mathbf{w}}, \partial_\delta \mathcal{L}(0, \delta, K_*)\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\delta=0} + \langle \tilde{\mathbf{w}}, (\ell\boldsymbol{\beta}_1 + \mu\boldsymbol{\beta}_2))\cdot\nabla_{\mathbf{p}}\mathcal{L}(0, 0, \mathbf{p})\tilde{\mathbf{w}}\rangle_{\mathcal{C}_z}|_{\mathbf{p}=K_*} - \lambda^{(1)} I, \tag{112}$$

其中，I 是 2×2 单位矩阵，而 $\lambda^1 = \lambda - \lambda_*$。这里，$\lambda$ 的主阶项取 $\mathbb{R}$-范数，特征函数 $\tilde{u}_{n,\,\varepsilon,\,\delta}$ 的主阶项则取 $H^1(\mathcal{C}_z)$ 范数。在以下小节中，我们根据 $t_1\varepsilon$ 和 $t_2\delta$ 的符号，计算当 $\varepsilon \neq 0$ 或 $\delta \neq 0$ 时，在 K 和 K' 处色散对的主阶项。

B.1 关于 ε 的 K 处扰动特征对

在 K 处，当 $\varepsilon \neq 0$ 和 $\delta = 0$ 时，(112) 中的矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} t_1\varepsilon - \lambda^{(1)} & \overline{\theta_*}(\ell + \mu\tau) \\ \theta_*(\ell + \mu\tau) & -t_1\varepsilon - \lambda^{(1)} \end{pmatrix}.$$

当 $\lambda^{(1)} = \pm\sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}$ 时，其行列式为零。在较高特征值 $\lambda^{(1)} = \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}$, 处，矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2} & \overline{\theta_*}(\ell + \mu\tau) \\ \theta_*(\ell + \mu\tau) & -t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2} \end{pmatrix},$$

且特征空间由以下向量张成

$$\left(t_1\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}, \theta_*(\ell + \mu\tau)\right) \text{ or } \left(\overline{\theta_*}(\ell + \mu\tau), -t_1\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}\right).$$

At 较小的特征值 $\lambda^{(1)} = -\sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}$, 矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} t_1\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2} & \overline{\theta_*}(\ell + \mu\tau) \\ \theta_*(\ell + \mu\tau) & -t_1\varepsilon + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2} \end{pmatrix},$$

且特征空间由以下向量张成

$$\left(t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}, \theta_*(\ell + \mu\tau)\right) \text{ or } \left(\overline{\theta_*}(\ell + \mu\tau), -t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}\right).$$

注意 $\sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2} \geq |t_1\varepsilon|$，等号在 $\ell = \mu = 0$ 时成立。定义 ne

$$L_1(\varepsilon, \ell, \mu) := \frac{\theta_*(\ell + \mu\tau)}{|\varepsilon t_1| + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}}.$$

因此，对于所有 $t_1\varepsilon$,

$$\lambda_{1,\varepsilon,0} \sim \lambda_* - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}, \quad \lambda_{2,\varepsilon,0} \sim \lambda_* + \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell + \mu\tau)^2}. \tag{113}$$

当 $t_1\varepsilon > 0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (-\overline{L_1}\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2}, \quad \tilde{u}_{2,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\tilde{w}_1 + L_1\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2}, \tag{114}$$

and when $t_1\varepsilon < 0$,

$$\tilde{u}_{1,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\tilde{w}_1 - L_1\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2}, \quad \tilde{u}_{2,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\overline{L_1}\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2}. \tag{115}$$

这里，符号 $\sim$表示等于，精确到 O 阶（$|\varepsilon|$，$|\ell|$，$|\mu|$）。最后，利用

$$u_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) = e^{\mathrm{i}K\cdot\mathbf{x}}\tilde{u}_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)), \quad w_n = e^{\mathrm{i}K\cdot\mathbf{x}}\tilde{w}_n, \tag{116}$$

and

$$u_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;\ell,\mu)) = e^{\mathrm{i}\mathbf{p}(K;\ell,\mu)\cdot\mathbf{x}}\tilde{u}_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) = u_{n,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) + O(\ell,\mu), \tag{117}$$

我们得到关系式 (25) 和 (26)。

B.2 关于 δ 的 K 处受扰特征对

在 K 处，当 $\varepsilon = 0$ 和 $\delta \neq 0$ 时，(112) 中的矩阵具有如下形式

$$\begin{pmatrix} t_2\delta - \lambda^{(1)} & \overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau) \\ \theta_*(\ell+\mu\tau) & -t_2\delta - \lambda^{(1)} \end{pmatrix}.$$

定义

$$L_2(\delta,\ell,\mu) := \frac{\theta_*(\ell+\mu\tau)}{|\delta t_2| + \sqrt{\delta^2 t_2^2 + |\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}}.$$

我们得到，当 $t_2\delta > 0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (-\overline{L_2}\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2}, \quad \tilde{u}_{2,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\tilde{w}_1 + L_2\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2}, \tag{118}$$

and when $t_2\delta < 0$,

$$\tilde{u}_{1,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\tilde{w}_1 - L_2\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2}, \quad \tilde{u}_{2,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K;0,0)) \sim (\overline{L_2}\tilde{w}_1 + \tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2}. \tag{119}$$

B.3 关于 ε 的 K' 处受扰特征对

在 K' 处，当 $\varepsilon \neq 0$ 和 $\delta = 0$ 时，(112) 中的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix} -t_1\varepsilon - \lambda^{(1)} & -\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau) \\ -\theta_*(\ell+\mu\tau) & t_1\varepsilon - \lambda^{(1)} \end{pmatrix}.$$

对于 $\lambda^{(1)} = +\sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}$,，其给出 $u_{2,\varepsilon,0}$，矩阵为

$$\begin{pmatrix} -t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2} & -\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau) \\ -\theta_*(\ell+\mu\tau) & t_1\varepsilon - \sqrt{\varepsilon^2 t_1^2 + |\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2} \end{pmatrix}.$$

特征空间由以下向量张成

$$\left(-t_1\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2},-\theta_*(\ell+\mu\tau)\right)\text{ or }\left(-\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau),t_1\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}\right).$$

对于 $\lambda^{(1)}=-\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}$,，得到 $u_{1,\,\varepsilon,\,0}$，矩阵为

$$\begin{pmatrix}-t_1\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2} & -\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau)\\ -\theta_*(\ell+\mu\tau) & t_1\varepsilon+\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}\end{pmatrix}.$$

而特征空间由以下向量张成

$$\left(-t_1\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2},-\theta_*(\ell+\mu\tau)\right)\text{ or }\left(-\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau),t_1\varepsilon-\sqrt{\varepsilon^2t_1^2+|\theta_*|^2(\ell+\mu\tau)^2}\right).$$

因此，当 $t_1\varepsilon>0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\tilde{w}_1+L_1\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2},\quad \tilde{u}_{2,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(-\overline{L_1}\tilde{w}_1+\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2},\tag{120}$$

而当 $t_1\varepsilon<0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\overline{L_1}\tilde{w}_1+\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2},\quad \tilde{u}_{2,\varepsilon,0}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\tilde{w}_1-L_1\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_1|^2}.\tag{121}$$

B.4 关于 δ 的 K′ 处扰动特征对

在 K' 处，当 $\varepsilon=0$ 和 $\delta\neq0$ 时，式 (112) 中的矩阵形式为

$$\begin{pmatrix}t_2\delta+\lambda^{(1)} & -\overline{\theta_*}(\ell+\mu\tau)\\ -\theta_*(\ell+\mu\tau) & -t_2\delta+\lambda^{(1)}\end{pmatrix}.\tag{122}$$

我们得到，当 $t_2\delta>0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\overline{L_2}\tilde{w}_1+\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2},\quad \tilde{u}_{2,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\tilde{w}_1-L_2\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2},\tag{123}$$

以及当 $t_2\delta<0$ 时，

$$\tilde{u}_{1,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(\tilde{w}_1+L_2\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2},\quad \tilde{u}_{2,0,\delta}(\cdot;\mathbf{p}(K';0,0))\sim(-\overline{L_2}\tilde{w}_1+\tilde{w}_2)/\sqrt{1+|L_2|^2}.\tag{124}$$

参考文献

[1] H. Ammari、B. Fitzpatrick、H. Kang、M. Ruiz、S. Yu 和 H. Zhang，《光子学与声子学中的数学与计算方法》，数学调查与专著，第235卷，美国数学会，罗得岛州，2018年。

[2] G. Bal，拓扑绝缘体的连续体与界面描述，《数学物理杂志》，**60**（2019），081506。

[3] G. Berkolaiko、A. Comech，石墨烯能谱中的对称性与狄拉克点，《谱理论杂志》，**8**（2018），1099–1147。

[4] *B. A. Bernevig* 和 *T. L. Hughes*，《拓扑绝缘体与拓扑超导体》，普林斯顿大学出版社，*2013* 年。[5] *M. Cassier* 和 *M. Weinstein*，蜂窝结构中的高对比度椭圆算子，《多尺度建模与仿真》，*19*（*2021*），*1784–1856*。[6] *D. Colton* 和 *R. Kress*，《散射理论中的积分方程方法》，工业与应用数学学会，*2013* 年。[7] *A. Drouot*，连续蜂窝晶格的体边对应，《通信与偏微分方程》，*44*（*2019*），*1406–1430*。[8] *A. Drouot* 和 *M. Weinstein*，边缘态与谷霍尔效应，《数学进展》，*368*（*2020*），*107142*。[9] *S. Raghu* 和 *F. D. M. Haldane*，光子晶体中量子霍尔效应边缘态的类比，《物理评论*A*辑》，*78*（*2008*），*033834*。[10] *C. Fefferman* 和 *M. Weinstein*，蜂窝晶格势与狄拉克点，《美国数学会杂志》，*25*（*2012*），*1169–1220*。[11] *C. Fefferman*、*J. Lee-Thorp* 和 *M. Weinstein*，蜂窝结构中的界面态，《偏微分方程年刊》，*2*（*2016*），*12*。[12] *S. Fliss* 和 *P. Joly*，周期波导中时谐波动方程的解：渐近行为与辐射条件，《理性力学与分析档案》，*219*，*2016*，*349–386*。[13] *M. Hasan* 和 *C. Kane*，专题综述：拓扑绝缘体，《现代物理评论》，*82*（*2010*）：*3045*。[14] *A. Khanikaev*、*S. Mousavi*、*W. Tse*、*M. Kargarian*、*A. MacDonald* 和 *G. Shvets*，光子拓扑绝缘体，《自然·材料》，*12*（*2013*），*233–239*。[15] *A. Khanikaev*、*R. Fleury*、*S. Mousavi* 和 *A. Alu*，角动量偏置类石墨烯谐振器晶格中的拓扑稳健声传播，《自然·通讯》，*6*（*2015*），*8260*。[16] *P. Kuchment*，偏微分方程的弗洛凯理论，*60*，*Birkhäuser*出版社，*2012* 年。[17] *P. Kuchment* 和 *J. Taskinen*，周期波导中时谐波动方程的解：渐近行为与辐射条件，《纯粹与应用泛函分析》，*7*（*2022*），*721–731*。[18] *J. Lee-Thorp*、*M. Weinstein* 和 *Y. Zhu*，具有蜂窝对称性的椭圆算子：狄拉克点、界面态及其在光子石墨烯中的应用，《理性力学与分析档案》，*232*（*2019*），*1–63*。[19] *W. Li*、*J. Lin* 和 *H. Zhang*，不可穿透障碍物蜂窝晶格的狄拉克点，《工业与应用数学学会应用数学杂志》，*83*（*2023*），第*1546–1571*页。[20] *L. Lu*、*J. Joannopoulos* 和 *M. Soljačić*，拓扑光子学，《自然·光子学》，*8*（*2014*），*821–829*。

[21] *T. Ma* 和 *G. Shvets*，《全硅谷霍尔光子拓扑绝缘体》，《新物理学杂志》*18*（*2016*），*025012*。[22] *G. Ma*、*M. Xiao* 和 *C-T Chan*，《声学与机械系统中的拓扑相》，《自然·物理评论》*1*（*2019*），*281–294*。[23] *T. Ozawa* 等，《拓扑光子学》，《现代物理评论》*91*（*2019*）：*015006*。[24] *X-L. Qi* 和 *S.-C. Zhang*，《拓扑绝缘体与超导体》，《现代物理评论》*83*（*2011*），*1057*。[25] *J. Qiu*、*J. Lin*、*P. Xie* 和 *H. Zhang*，《从狄拉克点分岔的波导中界面模的数学理论》，《数学科学通讯》，即将刊出。[26] *G. C. Thiang* 和 *H. Zhang*，《具有反演对称性的一维拓扑材料的体-界面对应》，《英国皇家学会会刊*A*辑》*479*（*2023*），*20220675*。[27] *D. Vanderbilt*，《电子结构理论中的贝里相位：电极化、轨道磁化与拓扑绝缘体》，剑桥大学出版社，*2018*。[28] *C. Wang*、*J. Joannopoulos* 和 *M. Soljačić*，《单向无背向散射拓扑电磁态的观测》，《自然》*461*（*2009*），*772–775*。[29] *L. Wu* 和 *X. Hu*，《利用介电材料实现拓扑光子晶体的方案》，《物理评论快报》*114*（*2015*），*223901*。[30] *Z. Yang* 等，《拓扑声学》，《物理评论快报》*114*（*2015*），*114301*。[31] *Guillaume Bal*，《连续拓扑绝缘体分类与体-边对应》，*2024*，*arXiv:2412.00919*。[32] *Wei Li*、*Junshan Lin*、*Jiayu Qiu*、*Hai Zhang*，《具有破缺的反射对称性的蜂窝拓扑光子晶体的数学理论》，*2024*，*arXiv:2405.03238*