arXiv:2512.24535v1 [math.RT] 31 Dec 2025

关于 Kadar-Yu 代数的半单性判据与非半单表示论

B Morris 和 P Martin

2026年1月1日

摘要

Kadar–Yu 代数是一系列受物理启发的代数塔，在 Brauer 代数与 Temperley–Lieb 代数之间进行插值。Brauer 代数和 Temperley–Lieb 代数的复表示论如今已相当完善，二者分别以不同方式与 Kazhdan–Lusztig 理论相联系。KY 代数的半单表示论也已得到理解，因此，例如，它在双阶乘与卡特兰组合领域之间进行插值。然而，非半单表示论在很大程度上仍未解决，整体上比 Brauer 情形（本身已颇具挑战）更为困难。本文确定了标准模的反变形式之格拉姆矩阵行列式的广义切比雪夫型形式。

这推广了 Temperley–Lieb 代数（及许多相关代数）的单位根范式，并以多种方式在此范式与 Brauer 代数的“整数范式”之间进行插值。

标准模的格拉姆行列式提供了大量关于标准模之间态射的信息，并充分运用了重拼塔（ToR）强大的同调工具，其中适当的格拉姆行列式为 ToR 提供了“自举”机制。与 Brauer 和 TL 情形一样，其表示论具有浓厚的仿射室几何风格，但 KY 情形为整体几何框架引出了一种耐人寻味的推广。

目录

1 引言 31.1 符号与术语表.4

2 预备知识 5

2.1 $J_{l,\ n}$ 代数及其一些关键性质.5 2.2 关于$J_{l,\ n}$ 的标准模.7 2.2.1 回顾 Specht 模的约定.8 2.2.2 标准模约定.10 2.2.3 标准模上的逆变形式.11 2.3 关于 Rollet 图.13 2.3.1 Gram 行列式装饰的 Rollet 图——预备知识 15

3 单杯标准模的 Gram 行列式 16

3.1 关于切比雪夫多项式（用于格拉姆行列式） . . . . . 16 3.1.1 爬升性质. 17 3.2 单杯标准模的 Gram 行列式 . . . . . 18 3.2.1 单杯格拉姆矩阵.18 3 2 2 $\mathcal{S}_\lambda$ 19 . . 何 3 2 3 $^{(n)}$ λ 21 时为一维.关于一般情形的 Gram 行列式 $D_{(n-2,\lambda)}$ . . . . . 3.3 定理 3.19 的应用：多项式与示例 28

4 多项式的根 $P_n^{(\lambda)}$ 32

4.1 递增级数的恒等式.32 4.2 $P_n^{(\lambda)}$ 的根.33

5 带 Gram 行列式标记的 Rollet 图 35

5.1 臂性质的陈述与猜想 5.2.1.36 5.2 关于已证明部分的证明.37 5.2.1 $l=-1$ 的装饰的 Rollet 图.37 5.3 示例.39 5.3.1 $l=0$ 的装饰的 Rollet 图. 39 5.3.2 $l=1$ 的装饰的 Rollet 图. . . . . 42 5.3.3 $l=2$ 的装饰的 Rollet 图. 45

6 表示论 47

6.1 一般性.47 6.1.1 $l=0$ 的自举.47 6.1.2 一般 l 的自举.49 6.2 情形 $l=-1$ .52 6.3 表示论——情形 $l=0$ .54 6.3.1 子情形 $\alpha=1$ .54 6.3.2 子情形 $(\alpha^2+\alpha-4)\ =0$ .56

A 行列式计算：一般结构定理方法 59A.1 史密斯标准形如何？.65

1 引言

统计力学模型的实际计算通常围绕转移矩阵方法展开（例如参见 [2, 3, 16, 17, 20, 5]及其中的参考文献）。转移矩阵方法则依赖于傅里叶分析方法与代数方法的结合（附带说明：从数学角度考虑可积性工具的倾向并非普遍适用——大多数在物理上有趣的模型并不可积，但大多受益于平移对称性/傅里叶方法以及谱论/表示论方法）。例如，XXZ自旋链、二维波茨模型、六顶点模型等，其计算工具中都包含 Temperley–Lieb 代数 [19] 。近年来，拓扑量子计算等动机推动了人们对拓扑相以及具有边界掺杂的系统之统计力学模型的兴趣（例如参见 [8, 10] 及其中的参考文献）。与均匀系统一样，我们也可以考察这些情形中的代数层面。此类例子颇为有趣，但本文将重点关注 [12] 中给出的构造，因此称为“Kadar–Yu”代数。在该构造中，对每个整数 $l \geq -1$，都有一个代数塔 $J_l = J_l(\alpha)$；随后，对取自基域的参数 α 的每个取值，也各有一个这样的代数塔。（此处默认的基域为 $\mathbb{C}$。）在统计力学中，指标 l 决定掺杂向体相渗透的深度，但这种渗透由拓扑而非度量控制。在代数上，它决定一组Brauer生成元中哪些子集会出现。

从表示论的角度来看，KY 代数本身也颇具研究价值。我们已经提到过 Temperley–Lieb，而 Brauer代数 [4] 和分拆代数 [17] 既作为传递矩阵代数出现（参见例如 [9, 14, 15]及其中的参考文献），也是表示论中直接研究的对象。例如，Temperley–Lieb 和 Brauer代数的非半单表示论可以看作由 Kazhdan–Lusztig 理论中适当的不同情形所控制。所得理论在基本不变量方面存在很大差异，因此 KY 代数提供了在这些情形之间进行插值的机会，从而得以研究几何表示论本身，正如我们将要看到的那样。

本文聚焦于表示论。一项关键的技术结果是定理 3.19。原则上，该定理将每个塔 J_l 的“自举”格拉姆矩阵的计算，归结为每个 $\lambda \vdash l + 2$只需计算一个固定多项式和两个初始多项式，而这些计算都很常规。随后，我们通过一组全面的示例来说明这一点（见第3.3节）。该定理和这些示例引出了两个关键问题：首先，如何刻画根（类似于用单位根刻画经典切比雪夫多项式）——见第4节；其次，如何从这一自举出发运行拼接塔方案，以获得表示论——见第6节。为此，尤其需要

原则上还需要确定：对于“单杯”标准模存在子模的情形（由行列式消失标示），该子模的结构是什么。对于本文研究的代数，我们在第6.1.1–6.1.2节证明，几乎所有情形下，除具有相同标记分拆的无杯模外，没有其他模能够映入；并且该无杯模是一个重数为 1 的合成因子。

一个引人入胜的问题是，如何确定的不仅是自举行列式，还有所有标准行列式。事实上，这正是论文最初的目标之一。这一点在此处十分重要，原因有很多。首先，这些代数$J_{l,\ n}$呈现出种类繁多的同调复杂性，因此为理解从格拉姆行列式到 Cartan 分解矩阵的转变提供了良好的研究平台，其中也包括同调分次（例如模中因子的 Loewy 深度等）。从一开始，所有行列式合在一起就包含大量信息；如何以通俗易懂的方式呈现这些信息，甚至是一个挑战——这本身就很有意思，因为它引出了这样一个问题：表示论的全局极限性质如何将极限上方纤维中的局部线性数据统一起来。在 $l = -1$ （Temperley–Lieb）情形中，确实存在一个显著的性质，使我们不仅能够确定自举行列式，还能确定所有标准行列式（我们将在 §5.2 中回顾这一性质）。这促使我们在一般情形下考察边缘顶点函数 。事实上，经验观察发现，这样一来，结果的呈现方式大为简化。此外，结果最终都归结为用与之前相同的多项式表示的式子。在 §5 中，我们回顾 $l = -1$ 情形，并总结相关数据，展示这一方法如何推广。

（附带说明：既然我们已经有了自举行列式，原则上另一种方法是从通过重叠塔所确定的表示论出发，反向推导出其他格拉姆行列式——这或许能直接与广义 Kazhdan–Lusztig 理论建立联系。要实现总体目标，最终的挑战将是理解从两个方向着手研究的问题；不过，我们会将这种完整性降格为后续工作的目标。）

我们的计算在技术层面还引出了另一组非常引人入胜的问题。这些计算的关键在于切比雪夫级数的某些性质，我们在此将其称为“渐增”。这些性质对于表示论十分重要，因为它们决定了非半单性参数值所构成的（离散但丰富的）子集的性质。因此，它们推广了经典情形中的“单位根”现象（而且这种推广必然相当深刻）。这是在 Temperley–Lieb 型表示论与 Brauer 型表示论之间实现所期望插值的关键部分。不过，切比雪夫方面本身也具有内在的趣味性，正如我们将在第 4 节看到的那样。

1.1 记号与术语表

参见表 1。

记号	简短描述	其中定义为
$\mathcal{B}(n,\ m)$	全体（$n,\ m$）布劳尔分拆	2.1
$p \mapsto p^*$	自然映射 $*$： $\mathcal{B}(n,\ m) \to \mathcal{B}(m,\ n)$（图的垂直翻转）	2.3
$J_{l,n}$	秩为 n 、高度为 l 的 Kadar–Yu 代数	2.9
J_l	高度为 l 的 Kadar–Yu 范畴	2.9
$\Delta^n_{(p,\ \lambda)}$	$J_{l,\ n}$ 的标准模，其中 l 固定，指标为 $(p,\ \lambda)$	2.20
$\Gamma(\Delta^n_{(p,\ \lambda)})$	Δ^n的格拉姆矩阵 $_{p,\lambda}$ 相对于给定基	2.26
$\mathtt{D}^{(n)}_{(x)}$	$\Gamma(\Delta^n$的格拉姆行列式 $_{(p,\ \lambda)}$) 相对于给定基	2.26
Λ_n	n的整数分拆集合	2.28
$\Lambda_{l,n}$	J_l的标准模的指标集 $_{,n}$	2.15
$\Lambda_{l,\infty}$	全局/大 n 极限中的标准模的指标集	2.29
$\mathcal{S}_\lambda$	Σ_n 的 Specht 模（某个 n）（指标为 $\lambda \in \Lambda_n$）	2.2.3
Σ_n	秩为 n的对称群	
u_{ij}	固定 $n_\circ$ 杯（位于 $\{i,j\}$） $\mathcal{B}$（$n,\ n-2$）的元素	3.9
$\mathsf{u}_{ij}\mathsf{u}^*_{i'j'}$	固定 $n_\circ$ 杯帽（位于 $\{i,j\},\{i',j'\}$）元素，属于 $\mathcal{B}(n,n)$	3.9

表 1：符号表

2 预备知识

2.1 代数 $J_{l,n}$ 及其若干关键性质

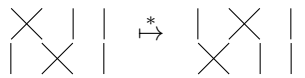
本小节简要回顾在[12] 中构造的代数 $J_{l,n}$，并概述这些代数的一些性质，这些性质将在后续小节中用到。关于$J_{l,n}$ 的详细介绍，请读者参阅原始文献 [12]。

(2.1) 固定整数 $n, m \geq 0$。类型为 (n,m) 的 Brauer 分划是集合 $\{1,\dots,n\} \sqcup \{1',\dots,m'\}$ 的一个二元分拆（我们使用带撇标签来区分这两个集合中的元素）。令 $\mathcal{B}(n,m)$ 表示所有此类分拆构成的集合（注意，除非 $n \equiv m$ 为偶数，否则 $\mathcal{B}(n,m)$ 为空）。

我们用 $\mathcal{B}^r(n,m)$ 表示 $\mathcal{B}(n,m)$ 中至多含有 r 对形如 $\{i,j'\}$ 的分拆所构成的子集（称为传播线）；并用 $\mathcal{B}^{=r}(n,m)$ 表示恰好含有 r 条传播线的分拆所构成的子集。

(2.2) 分拆 $p \in \mathcal{B}(n,\ m)$ 可用 Brauer 图表示如下。Brauer 图由一个矩形区域组成，其上边（下边）从左至右依次标有未加撇号（加撇号）的标签，并在其中绘制曲线，将属于同一部分的标签连接起来。Brauer 图中的曲线只会在其内部有限次横截相交，且不会出现三重点。我们经常滥用记号，用 Brauer 图来表示其对应的分拆。

(2.3) 我们用 $p \mapsto p^*$ 表示映射 $*$：$\mathcal{B}(n,m) \to \mathcal{B}(m,n)$，它对应于图的垂直翻转，因此会将带撇号的换成不带撇号的。示例：



特别要注意的是，在 $\mathcal{B}(n,n)$ 中有一个对称群 Σ_n 的副本（目前仅作为集合），实际上它恰好是 $\mathcal{B}^{=n}(n,n)$，而在这里，翻转会将群中的一个元素变为其逆元。

(2.4) 固定一个交换环 $\mathbb{K}$ ——默认取 $\mathbb{K}=\mathbb{C}$。固定 $\alpha\in\mathbb{K}$。令 $Br(n,m)$ 表示以 $\mathcal{B}(n,m)$ 为基的自由 $\mathbb{K}$-模。将 Brauer 范畴 $Br = Br(\alpha)$ 定义为三元组 $(\mathbb{N}_0, Br(\ ,\ )\circ)$，其中对于 $(p_1,p_2)\in Br(n,m)\times Br(m,l)$，复合通过线性扩张以下公式定义

$$p_1\circ p_2=\alpha^{d_{p_1,p_2}}p_1\#p_2.$$

这里，$p_1\#p_2\in Br(n,l)$ 是将 p_1 和 p_2的任意两个图竖直并置（ p_1 位于 p_2之上）后确定的结果 Brauer 分划，而 d_{p_1,p_2} 是任意此类并置中闭曲线的数量。为简洁起见，我们采用乘法记号 $p_1\circ p_2=p_1\,p_2$。

(2.5) *-映射扩张为一个反变函子 $(\ )^*:\ Br(\alpha)\ \to\ Br(\alpha)$，其在对象上的作用为 $n^*=n$；而 $(\ )^*:\ Br(n,m)\ \to Br(m,n)$ 则由将 2.3 中的映射线性扩张得到。

(2.6) 注意，范畴 Br 具有由对象上的 $n\otimes m=n+m$给出的幺半结构，其中 $p_1\otimes p_2$ 是图的水平并置。

(2.7) Brauer 图的高度 定义为嵌入曲线所有交点的最大高度，如 [12, §2.2]所示。若一个图没有交点，则其高度定义为 -1。

(2.8) Brauer 分划 $p\in\mathcal{B}(n,m)$ 的高度定义为表示 p 的所有图中高度的最小值。用 $ht(p)$ 表示 p 的高度。

(2.9) 固定一个整数 $l\geq -1$。令 $J_l(n,m)$ 表示以.....为基的自由 $\mathbb{K}$-模

$$\mathcal{B}_l(n,m)\ :=\ \{p\in\mathcal{B}(n,m)\mid ht(p)\leq l\}.$$

在 [12, 定理 3.4] 中证明了，对于任意的 $(p_1,p_2)\ \in\ \mathcal{B}(n,m)\ \times\ \mathcal{B}(m,l)$，$ht(p_1\#p_2)\ \leq$ $\max(ht(p_1)\ ht(p_2))$，因此，对每个 l，$J_l:=(\mathbb{N}_0, J_l(\ ,\ )\circ)$ 定义了 Br 的一个子范畴。

沿用 2.1 的记号，令 $J_l^p(n,m)$ 表示由至多含 p 条传递曲线的图所张成的 $J_l(n,m)$ 的子模，并令 $J_l^{=p}(n,m)$ 表示由恰含 p 条传递曲线的图所张成的子模。

令 $J_{l,n}:=J_l(n,n)$ 表示 J_l 的自同态代数，其中 $J_{l\ ,n}^{p}=J_l^p(n,n)$，类似地，$J_{l\ ,n}^{=p}=J_l^{=p}(n,n)$。我们将 $\mathbb{K}$-代数 $J_{l,n}$ 称为 Kadar-Yu 代数。

(2.10) 在 [1] 中证明了$J_{l,\ n}$ 作为代数由通常的“杯盖”Temperley-Lieb 生成元 $e_i=\mathrm{u}_{i,\ i+1}\mathrm{u}^*_{i,\ i+1}$（其中 $i=1,\ .....,\ n-1$，使用 3.2.1 中的记号）以及基本换位 $s_j=(j\ \ j+1)$（当$j=1,\ .....,\ l+1$时）生成（即 $s_j\in\Sigma_{l+2}$）。

注 2.11。当 $l = -1$时，范畴 J_{-1} 可视为 Temperley-Lieb范畴，因为在此情形下，所有二元分拆都可以通过无交叉的图来实现。

(2.12) 请注意，范畴 Br 上的幺半积 $\otimes$ 不会下降为 J_l 上的幺半积（除非 $l = -1$），因为例如， $ht(id_n \otimes p) = ht(p) + n$ 在$ht(p) \geq 0$的条件下成立。不过，为了便于实现我们的目标，使用张量记号会很方便。例如，给定 $x \in J_l(a, b)$，我们有 $x \otimes id_n \in J_l(a + n, b + n)$。

接下来，我们定义两个伴随，它们对于研究代数 $J_{l,n}$的表示论至关重要。

(2.13) 注意，存在一个自然的代数嵌入$J_{l,n} \hookrightarrow J_{l,n+1}$ ，其定义为$x \mapsto x \otimes id_1$。我们将 $Res^{J_l,J_l}{}_{n}^{n+1}{}_{,}: J_{l,n+1} - \text{mod} \to J_{l,n} - \text{mod}$ 记作相应的“限制”函子，而将 $Ind^{J_l,J_l}{}_{n}^{n+1}{}_{,}: J_{l,n} - \text{mod} \to J_{l,n+1} - \text{mod}$ 记作其伴随“诱导”函子。

(2.14) 存在一个“整体化”函子 $G : J_{l,n} - mod \to J_{l,n+2} - mod$，定义如下

$$G(M) = J_l(n + 2, n) \otimes_{J_{l,n}} M.$$

它的伴随“局部化”函子为 $F : J_{l,n+2} - mod \to J_{l,n} - mod$ ，定义如下

$$F(M) = J_l(n, n + 2) \otimes_{J_{l,n+2}} M.$$

注意， $F \circ G = id$，因为 $J_l(n, n + 2) \circ J_l(n + 2, n) = J_{l,n}$。因此 G 是一个嵌入。另一方面

$$J_l(n + 2, n) \circ J_l(n, n + 2) = J_l^n(n + 2, n + 2) \subsetneq J_{l,n+2}.$$

注意，这是 $J_{l,n+2}$ 的一个真双边理想，并且商$J_{l,n+2}/J_l^n(n + 2, n + 2)$ $\cong \mathbb{K}\Sigma_{\min(l+2,n+2)}$。

(2.15) 例如，可以利用 2.14 中的函子证明以下结论（参见 [12]）；我们将在 2.20 中回顾其显式构造。差一个同构，标准$J_{l,n}$-模可以由集合索引

$$\Lambda_{l,n} = \{(p, \lambda) \mid p \in \mathbb{N}_0,\ n - p \in 2\mathbb{N}_0,\ \lambda \vdash \min(p, l + 2)\}. \tag{2.1.1}$$

并且对于 $\alpha \in \mathbb{C}^\times$ 单模，它们由同一个集合进行编号。

2.2 关于$J_{l,\ n}$的标准模

为统一此处的约定，我们回顾标准模及其逆变形式的定义。为此，我们首先需要确定关于 Σ_nSpecht 模的约定，其中 Σ_n 是对称群。注意，对称群 $\mathbb{K}$-代数的范畴是 Br的幺半子范畴。

固定 $l,\ n$。取 p，使得 $n - p = 2k$ 对某个 $k \geq 0$ 成立，且 $r \in \{0, 1, ..., min(p, l+2)\}$。令 c_λ 为 $\mathbb{Q}\Sigma_r$ 中任意满足以下条件的元素： $\mathbb{C}\Sigma_r$ Specht 模 $\mathcal{S}_\lambda \cong$

$\mathbb{C}\Sigma_r \mathsf{c}_\lambda$ （这里 Σ_0 是平凡群）。那么，$\mathsf{c}_\lambda \otimes 1_{p-r} \in \mathbb{Q}\Sigma_p$ 可以通过显然的包含映射视为 $J_l(p,\ p)$ 的一个元素，前提是 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$。如 [12] 中所述

$$\Delta^n_{(p,\lambda)} \ \cong \ J_l(n,p)(\mathsf{c}_\lambda \otimes 1_{p-r})/J_l^{p-2}(n,p)$$

其中 $(p,\lambda) \in \Lambda_{l,n}$ 依照 2.1.1； $J_l^{p-2}(p,n)$ 依照 2.9。

现在，选择 c_λ 来精确确定 $\Delta^n_{(p,\lambda)}$ 将更为方便。

2.2.1 回顾 Specht 模的约定

(2.16) 令 E_n 表示对称群 Σ_n 的通常对称化子（ $\mathbb{Q}\Sigma_n$ 中诱导出平凡模的唯一幂等元）；F_n 表示反对称化子。我们将用 E_n 和 $F_n \in \mathbb{Z}\Sigma_n$ 表示未归一化的版本。于是，对于 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m) \vdash n$，定义

$$\mathsf{E}_\lambda = \mathsf{E}_{\lambda_1} \otimes \mathsf{E}_{\lambda_2} \otimes ... \otimes \mathsf{E}_{\lambda_m}$$

并且，令 $\lambda' = (\lambda'_1, \lambda'_2, ..., \lambda'_{m'})$ 表示共轭分拆，定义

$$\mathsf{F}_\lambda = \mathsf{F}_{\lambda'_1} \otimes \mathsf{F}_{\lambda'_2} \otimes ... \otimes \mathsf{F}_{\lambda'_{m'}}$$

注意，利用 (2.5) 中的 $*$，有 $\mathsf{E}^*_\lambda = \mathsf{E}_\lambda$ 和 $\mathsf{F}^*_\lambda = \mathsf{F}_\lambda$。回顾一下，存在一个（最短的） $w' \in \Sigma_n$，使得

$$E_\lambda \mathbb{C}\Sigma_n F_\lambda = \mathbb{C} E_\lambda w' F_\lambda \tag{2.2.1}$$

对于 $F_\lambda w E_\lambda$ （带 $w' = w^{-1}$ 的情形）也同理。注意，将 E_λ, F_λ 替换为任意共轭元或标量倍数后，这些一维性性质仍然成立。令 $C_\lambda = F_\lambda w E_\lambda$。

由 (2.2.1) 可知，对于任意 $a \in \mathbb{C}\Sigma_n$，存在唯一的 $f(a) \in \mathbb{C}$，由下式定义：

$$E_\lambda w' F_\lambda a F_\lambda w E_\lambda = f(a) E_\lambda w' F_\lambda w E_\lambda.$$

注意， f 确实取决于归一化。若要在 $\mathbb{Z}\Sigma_n$中进行运算，那么 E_λ 和 F_λ 应采用未归一化的版本。

对于每一种归一化选择，都有一个形式 $(-,-)$：$\mathbb{C}\Sigma_n C_\lambda \times \mathbb{C}\Sigma_n C_\lambda \to \mathbb{C}$，由下式定义：

$$(aC_\lambda)^* bC_\lambda = C^*_\lambda a^* bC_\lambda = (aC_\lambda, bC_\lambda) E_\lambda w' F_\lambda w E_\lambda, \tag{2.2.2}$$

它是对称的、双线性的，并且相对于 $*$ 是反变的，因为 $(gaC_\lambda, bC_\lambda) = (aC_\lambda, g^* bC_\lambda)$。

令 $\mathcal{S}_\lambda$ 表示 $\mathbb{C}\Sigma_n$-模（实际上也是左理想）

$$\mathcal{S}_\lambda = \mathbb{C}\Sigma_n F_\lambda w E_\lambda = \mathbb{C}\Sigma_n C_\lambda \tag{2.2.3}$$

- 这就是 Specht 模（在同构意义下）。令 d_λ 表示分拆 λ 的钩长，从而特别地，$\dim(\mathcal{S}_\lambda) = d_\lambda$。

存在各种同构的实现方式。其中一些比另一些更适合我们的目标。例如，我们可以从 λ=(21) 的杨模开始，其形式为 $Y_{21} \cong \mathbb{C}\Sigma_3 E'_{21}$，其中 $E'_{21} = E_{12} := (E_1 \otimes E_2)$。（这仅仅意味着，无需使用 w，$F_{21}E'_{21}$ 与 $F_{21}wE_{21}$ 同余。）因此，$F_{21}E'_{21}$ 诱导出一个左子理想，并且很容易看出它是适当的。事实上，$\mathbb{C}\Sigma_3 F_{21}E'_{21} = \mathbb{C}\{F_{21}E'_{21}$,(23)$F_{21}E'_{21}\}$。关于该形式的、以此基表示的版本，首先由 $(F_{21}E'_{21})^* F_{21}E'_{21} = E'_{21}F_{21}^2 E'_{21} = 2E'_{21}F_{21}E'_{21}$ 给出，接着由 $(F_{21}E'_{21})^*$(23)$F_{21}E'_{21} = E'_{21}F_{21}(23)F_{21}E'_{21} = E'_{21}(1 -$(12))(23)$F_{21}E'_{21} = E'_{21}F_{21}E'_{21}$ 给出，因为 E'_{21}(12)(23)$F_{21} = 0$。如果我们选择由 $f(a)E'_{21}F_{21}E'_{21}$ 归一化的输出，那么此时格拉姆矩阵如下所示：

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \qquad\qquad \Gamma_x = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 6x^2 \end{pmatrix}$$

注意，若要使基元素彼此正交，可以将 (23)$F_{21}E'_{21}$替换为 $(x.1 + y.$(23)$)F_{21}E'_{21}$ 并乘以 $y = -2x$。这样就得到上面的第二个格拉姆矩阵。注意，按照惯例，可以去掉整体因子 2；但此处的归一化要求将基环从 $\mathbb{Z}$扩张，例如扩张到 $\mathbb{C}$。

回想一下，杨模 Y_{21} 的一组基可以写成以下字的集合：211、121、112。在最简单的版本中，它们分别是 E'_{21}、(12)E'_{21} 和 (32)(12)E'_{21}。我们将字 211 等图示为沿着平面中的方向 e_1 和 e_2 前进。具体来说，我们将坐标轴定向为 e_1 指向右上方，e_2 指向右下方。因此，经过一次初步且便利的基变换，我们得到：

$E'_{21} \mapsto 211 \mapsto$ 
$F_{21}E'_{21} = (1 - (12))E'_{21} \mapsto 121 \mapsto$ 

- 在 (12) 位置添加一个方框（注意，因子 $(x1 + y$(12)) 原则上可以有任意 x，y，其中 $y \neq 0$ 保证线性无关；所选系数使该元素生成一个子模）；

$$(23)(1 - (12))E'_{21} \mapsto 112 \mapsto$$ 

(2.17) 为了方便起见，我们希望有一个 Specht 模的基，它相对于我们将在 §3.2.1 中使用的形式是正交归一的。举例来说，考虑这个基（另见 (3.2.8)）$\{C_{12}, \frac{1}{\sqrt{3}}(-1.1 + 2.(23))C_{12}\}$。由 Γ_x 可知，这确实是正交的。

(2.18) 对于正整数 n 和分拆 $\lambda \vdash n$，我们定义 Young 对称化子的一个等价约定：

$$\mathsf{C}_\lambda := a_\lambda \, E_\lambda w' F_\lambda w E_\lambda \in \mathbb{C}\Sigma_n, \tag{2.2.4}$$

其中 $a_\lambda \in \mathbb{Q}$ 的选取满足 $\mathsf{C}_\lambda^2 = \mathsf{C}_\lambda$。那么 $\mathbb{C}\Sigma_n \mathsf{C}_\lambda$ 同构于 Specht 模 $\mathbb{C}\Sigma_n \mathsf{C}_\lambda \simeq \mathcal{S}_\lambda$。此外，我们注意到 $\mathsf{C}_\lambda^* = \mathsf{C}_\lambda$。在本文余下部分中，我们将采用这一约定。

2.2.2 标准模约定

(2.19) 现在固定 l 并考虑 $\lambda \vdash r \leq l+2$。注意，对于 $p \geq r$，我们有 $\mathsf{C}_\lambda \otimes id_{p-r} \in J_{l,p}$，其中 C_λ 如 (2.2.4) 所示。固定 p，定义

$$c_\lambda = \mathsf{C}_\lambda \otimes id_{p-r}. \tag{2.2.5}$$

例如，当 $p \geq 3$

$$c_{(2,1)} = \frac{1}{6}(e+(12))(e-(13))(e+(12)) \otimes id_{p-3} \in J_{l=1,p}.$$

使用置换的循环记号。

(2.20) 基本上与 [12] 中相同（这里我们要求 $\mathbb{Q} \subset \mathbb{K}$，而 [12] 不要求），我们将 $J_{l,n}$ 的标准模定义为（固定 l）：

$$\Delta^n_{(p,\lambda)} := J_l(n,p)c_\lambda / J_l^{p-2}(n,p)$$

其中 $(p,\lambda) \in \Lambda_{l,n}$ 按照 2.1.1；$J_l^{p-2}(p,n)$ 按照 2.9；而 c_λ 的定义与 (2.2.5) 中相同。

(2.21) 对于任何满足 $m \geq p$ 的 $x \in J_l(m,p)$，我们常滥用记号，直接用 $x\,c_\lambda$ 表示模 $\Delta^m_{(p,\lambda)}$ 中相应的元素，也就是说，$x\,c_\lambda$ 表示类 $x\,c_\lambda + J_l^{p-2}(m,p)$。特别地，对于任意 $\xi \in \Delta^n_{(p,\lambda)}$ 和 $x \in J_l(m,n)$，我们有 $x\xi \in \Delta^m_{(p,\lambda)}$，因为我们可以将 $\xi = yc_\lambda$ 写成某个 $y \in J_l(n,p)$，从而 $x\xi = (xy)c_\lambda$。

采用这一记号，我们观察到，例如，对于 $(p,\ \lambda) \in \Lambda_{l,\ p}$，

$$\Delta^p_{(p,\lambda)} = J_{l,p}c_\lambda = (\mathbb{C}\Sigma_r \mathsf{C}_\lambda) \otimes id_{p-r} \overset{\mathbb{C}\Sigma_r - mod}{\simeq} \mathcal{S}_\lambda \tag{2.2.6}$$

其中 $\lambda \vdash r$。后者是一个 $\mathbb{C}\Sigma_r$-模同构。

(2.22) 设 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 是 Σ_r Specht 模 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组基（因此 $\lambda \vdash r$）。由 (2.2.6)，这确定了 $\Delta^{p}{}_{(p,\ \lambda)}$ 的一组基，即 $b_i \mapsto b_i \otimes id_{p-r}$；我们滥用记号，简记 b_i 为元素 $b_i \in \Delta^{p}{}_{(p,\ \lambda)}$（同样，对于任意元素 $x \in \mathbb{C}\Sigma_r$，我们将元素 $x \otimes id_{p-r} \in J_{r-2,\ p}$ 记作 x，因此可以理解等式 $\mathbb{C}\Sigma_r \subset J_{r-2,\ p}$）。因此，我们可以将 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组基视为 $\Delta^{p}{}_{(p,\ \lambda)}$ 的一组基（对任意 p）。我们将在 §3 中反复用到这一事实。

(2.23) 按照 [12], ，我们给出如下标准模的一组基：固定 $\lambda \vdash r \leq p$，并令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组基，将其视为 $\Delta^{p}{}_{(p,\ \lambda)}$ 的一组基。对于任意满足 $n \equiv p$ 模 2 的 $n \geq p$，模 $\Delta^n_{(p,\lambda)}$ 的一组基为

$$\{u\,b_i \mid b_i \in \mathcal{B},\ u \in J_l^{||}(n,p)\} \tag{2.2.7}$$

其中，$J_l^{||}(n,\ p)$ 是类型为 $(n,\ p)$ 的“半图”集合，由 $J_l(n,\ p)$ 中那些具有 p 两两不相交的传播线的图组成（参见 [12,

4.7] [1]）。对于 $k \geq 0$， $J_l(p+2k,\ p)$ 中的半图由 k 个“杯”（即图顶端连接未加撇标签的部分或曲线）确定。因此，我们将模 $\Delta^{n=p+2k}{}_{(p,\ \lambda)}$ 称为 k-杯模。我们将形式为 (2.2.7) 的基称为图基。请注意，所有图基都通过基变换（在 $\mathbb{C}$ 上）相互关联，因为它们仅取决于 $\mathcal{S}_\lambda$ 的 $\mathbb{C}$- 基的选取。

2.2.3 标准模上的逆变形式

从这里到 §6，我们取 $\mathbb{K} = \mathbb{C}[\alpha]$。

(2.24) 形式 $\langle\ ,\ \rangle : \Delta^n_{p,\lambda} \times \Delta^n_{p,\lambda} \to \mathbb{C}[\alpha]$ 由下式定义

$$(ac_\lambda)^* bc_\lambda = c_\lambda a^* bc_\lambda \ = \ \langle ac_\lambda, bc_\lambda\rangle c_\lambda. \tag{2.2.8}$$

此形式是对称的、双线性的，并且关于 * 反变；也就是说，对任意 $x \in J_{l,n}$，都有 $\langle xac_\lambda, bc_\lambda\rangle = \langle ac_\lambda, x^* bc_\lambda\rangle$。

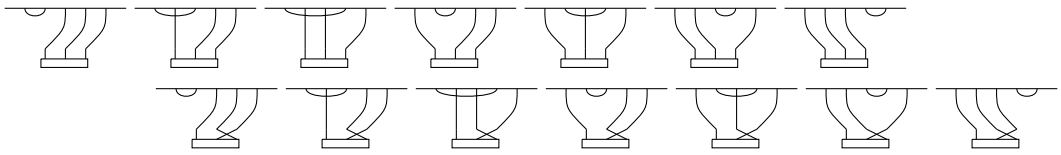
(2.25) 注意，当 $p = n$ 时，我们有 $\Delta^p{}_{p\ ,\lambda} \overset{\mathbb{C}}{\simeq} \mathcal{S}_\lambda$，此处的形式可能与 (,) 中的形式不同，参见 (2.2.2)。特别地，注意到 $\langle c_\lambda, c_\lambda\rangle = 1$。此外，由于 $\mathcal{S}_\lambda$ 在复数域上是单的（作为一个 Σ_r-模），$\Delta^p{}_{(p,\lambda)}$ 是单的（作为一个 $J_{r-2,n}$ 模），因此形式 $\langle\ ,\ \rangle$ 是非退化的。因此，可以为 $\mathcal{S}_\lambda$ 选取一组基（我们将其视为$\Delta^p{}_{(p,\lambda)}$的一组基），使其关于此形式正交归一。这就是我们所说的 $\mathcal{S}_\lambda$ 的正交归一基。

(2.26) 我们用 $\Gamma(\Delta^n_{(p,\lambda)})$表示格拉姆矩阵（在给定的图基下），并且仿照例如 [11], ，记作

$$\mathtt{D}^n_{(p,\lambda)} \ := \ \det(\Gamma(\Delta^n_{(p,\lambda)})) \tag{2.2.9}$$

表示格拉姆行列式。由于 $\Gamma(\Delta^n_{(p,\lambda)})$的元素是关于 α的多项式，因此$\mathtt{D}^n_{(p,\lambda)} \in \mathbb{C}[\alpha]$。有时我们写作$\mathtt{D}^n_{(p,\lambda)}(\alpha)$以强调这一点。由2.23可知，$\mathtt{D}^n_{(p,\lambda)}(\alpha)$在相差一个复标量的意义下定义。

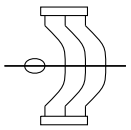
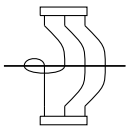
(2.27) 考虑 $J_{1,5}$-模 $\Delta^5_{(3,(21))^\circ}$ 通过选取 $\mathcal{S}_{(2,1)}$ 的一组基 $\{\mathtt{C}_{(2,1)}, (2\ 3)\mathtt{C}_{(2,1)}\}$，我们可以给出该模的如下图基，其中接收三条传播线的矩形框表示幂等元 $\mathtt{C}_{(2,1)}$。



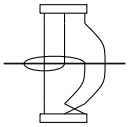
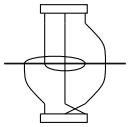
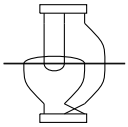
(2.2.10)

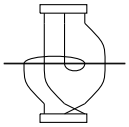
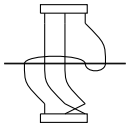
[1]从这里的记号转换为 [12]中的记号时， $J_l^{||}(n,p)$变为 $J_l^{||}(n,p,p)$

两个图基元素上形式的值，是通过对其中一个图应用 *（将其上下翻转）、将两个图沿垂直方向并置，并计算相应的标量来确定的。因此，以示意方式，我们计算

 $= \alpha,$  $= 1.$

等等。特别是

 $= -\frac{1}{2},$  $= -\frac{1}{2},$  $= 0,$

 $= -\frac{1}{2},$  $= -\frac{1}{2}.$

下面给出 $\Delta^5_{(3,(21))}$ 的格拉姆矩阵，其中对 $\mathcal{S}_{(2,1)}$ 采用 3.2.8 中的标准正交基（顺序与 (2.2.10) 相同，但将 (2 3)$\mathbb{C}^{(2,1)}$替换为 $\frac{2}{\sqrt{3}}((2\ 3) + \frac{1}{2}e)\mathbb{C}^{(2,1)}$）：

$$\begin{pmatrix}
\alpha & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & \alpha & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 1 & \alpha & 0 & 1 & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\
1 & 1 & 0 & \alpha & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 & -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} \\
0 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & \alpha & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha & 1 & -1 & 1 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \alpha & 1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 1 & \alpha & 0 & 1 & -1 & -\frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & \alpha & 1 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & -1 & 0 & 1 & 1 & \alpha & 1 & \frac{1}{2} \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 1 & \alpha & 1 \\
0 & 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \alpha
\end{pmatrix}$$

通过直接计算，我们得到：

$$\mathtt{D}^5_{(3,(21))} = (\alpha-2)^3\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha^4-7\alpha^2+3)^2,$$
$$\mathtt{D}^6_{(4,(21))} = (\alpha-2)^3\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha-1)^2\alpha^2(\alpha+1)^2\left(\alpha^2-7\right)^2.$$

2.3 关于 Rollet图

回忆一下，重叠塔 [6] 是代数嵌入序列$A_n \hookrightarrow A_{n+1}$ 以及幂等元嵌入序列 $eA_{n+j}e \cong A_n$的组合，其中 j ——通常是 $j = 2$ ——使得表示范畴存在一个全局极限；在我们的情形中，这个极限沿着来自 (2.14) 的函子取得。（还要回忆一下，这种设置出现在多种背景下。最初，它是相应统计力学模型中热力学极限的代数类比；在李结构涉及施尔-韦尔对偶时，它也是李几何表示论在对偶侧的一个像；此外，它还可以视为琼斯基本构造的一种非半单推广。）全局极限分解为 j 个分支——这里确实有 2 个分支。

本节回顾我们的代数塔的 Rollet 图，以及它们与 Δ-模的组合联系。

(2.28) 记 Λ_n 为 n的整数分拆集合。（因此，该集合为 S_n 的复不可约表示的同构类提供指标。）

(2.29) $J_{l,n}$ 的标准模的通常 [12] 指标集为

$$\Lambda_{l,n} = \{(p, \lambda) \mid p \in \mathbb{N}_0,\ n - p \in 2\mathbb{N}_0,\ \lambda \vdash \min(p, l + 2)\}$$

注意，$\Lambda_{l,n} \hookrightarrow \Lambda_{l,n+2}$。特别地，当 n 足够大时，我们有

$$\Lambda_{l,n+2} \ = \ \Lambda_{l,n} \cup (\Lambda_{l+2} \times \{n + 2\})\,.$$

我们定义$\Lambda_{l,\infty} = \cup_{n=1}^{\infty} \Lambda_{l,n}$。

(2.30) 我们的代数一般而言是非半单的（事实上，在我们感兴趣的情形中确实如此）。不过，每个代数都构成一个布劳尔模系统，其交换环三角（整环—分式域—模环）如下所示。整环是关于不定元 α 的复多项式环（也可以将其提升为考虑整系数多项式和双重模性，但这里我们仍讨论复数情形）。分式域是有理函数域 $\mathbb{C}(\alpha)$。模环则是将 α 取为某个给定复数后，由整环得到的复数域。我们注意到，我们的代数在分式域上是半单的，因此在一般情形下也是如此。因此，特别地，（在整环上定义的） Δ-模一般而言是单模；并且它们构成格罗滕迪克群的一组基。从这个意义上说，我们的塔具有一个用于限制Δ-模的布拉特利图（一般情况下表示滤过／特征标因子，而非直和项）。

（**2.31**）回忆一下 [6]，重叠塔（ToR）是一个代数塔，其代数之间既通过包含关系关联，又通过幂等元局部化关联；相应的 Rollet 图是关于该局部化的 Bratelli 图的投影。记 $\mathcal{R}_l$ 为代数塔 $J_{l,-} =(J_{l,n})_{n\in\mathbb{N}_0}$ 的 Rollet 图（Bratelli 图的投影），其中采用了来自（2.14）的通常幂等元局部化。

$\emptyset$ – □ – □ – □ – □ – □ – ...

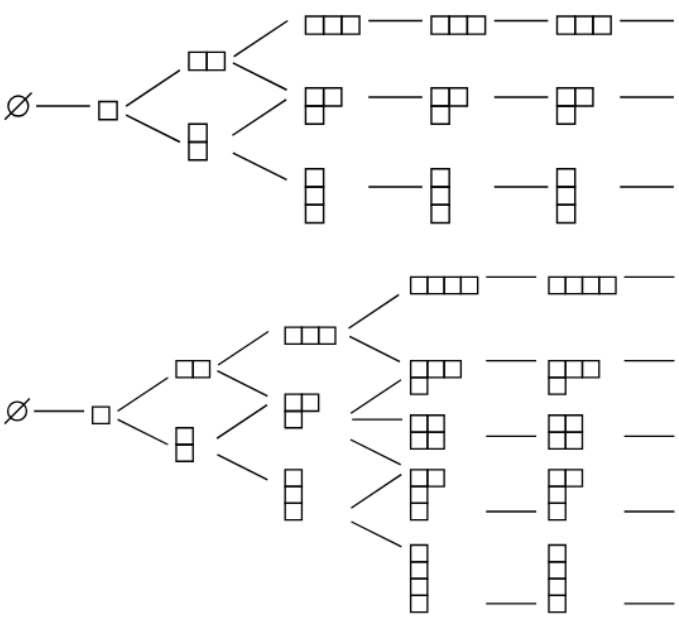


图 1：Rollet 图/图示 $\mathcal{R}_{-1}$、 $\mathcal{R}_1$ 和 $\mathcal{R}_2$。（ $\mathcal{R}_0$见 5.3.1。）例如，在 $\mathcal{R}_2$ 中，图的头部是前五列；肩部为第 5 列；第 5 列及其右侧的列为臂部。

该图 $\mathcal{R}_l$ 的顶点集是形如（p, λ）$\in \Lambda_{l,\infty}$的有序对集合。当且仅当（交换这两个有序对不会产生影响） $p' = p + 1$，且 λ' 可以由 λ 添加一个方框得到，或者 $\lambda' = \lambda$时，才存在一条边（p, λ） – （p', λ'）。

“Rollet 图”只是将 Rollet 图按顶点权重p 从左到右递增的方式绘制出来；然后仅写作 λ 表示（p, λ）（因为现在可以根据上下文还原 p）。

(2.32) 将与 Young 图一致的子图称为该图的头部；将图中剩余部分称为该图的**臂部**，因此每个 $\lambda \vdash l + 2$对应一个 λ臂；而将头部中作为臂部起点的最后几个顶点称为该图的**肩部**。

(2.33) 示例。塔$J_{-1,\ n}$对应的 Rollet 图示 $\mathcal{R}_{-1}$、塔$J_{1,\ n}$ 对应的 $\mathcal{R}_1$，以及塔 $J_{2,\ n}$ 对应的 $\mathcal{R}_2$，均见图 1。

Rollet 图编码了标准模限制规则，具体来说，是滤过因子。因此，我们特别有以下结论。

(2.34) 标签为 $v=(p,\lambda)$ 的 $J_{l,n}$ 的标准模维数，等于图 $\mathcal{R}_l$ 上从 $\emptyset$ 到 v 长度为 n 的游走数量。

(2.35) 在 $l=-1$ 情形下，p 决定了（p，λ），因此标签只需使用 p。从 0（即 $(0,\emptyset)$）到 p（即 $(p,\ )$ 的长度为 n 的游走，可以用来为相应的 Temperley–Lieb 标准模给出一个基（实际上，这类有用的基有多个不同的选择）。由此，或者直接地，我们可以给出相应的矩阵表示，进而开始看出仿射区域几何在这一情形中的作用（仿射区域几何，尤其是仿射-A_1 型——直线上的仿射反射群，在李表示论中自然出现，因此可以认为它是通过施尔-韦尔对偶在这里出现的；不过我们也可以直接理解它）。

构造如下 [17]。首先，我们将图嵌入 $\mathbb{R}$ 中，使顶点成为整数点的一个子集：于是，嵌入图中从 0 到 λ 的游走与 λ 标准模的基相对应（有多种对应方式，见 §A）。在合适的基下，当 α 是切比雪夫多项式的根时，超过几何界限的游走会解耦——形成一个子模，因而给出一个从另一个标准模（记作 λ'）映入的映射。可以将这个映入映射组织为标签 λ'，使其成为 λ 在仿射反射群的一种适当实现（取决于 α）作用下的像。可视化图示见 §6。

2.3.1 带 Gram 行列式标记的 Rollet 图——预备知识

正如引言（见 §1）所述，我们的首要目标是确定 Kadar–Yu 表示论的基本不变量，即 Cartan 分解矩阵。这并不容易！[2] 因此，我们还有一些中间目标。具体而言，从余标准模到标准模的态射给出了分解矩阵的部分数据；而这些态射的部分数据，则由相应的逆变形式的格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^n_{(\lambda,p)})$（取某个合适的基）给出。最后，只需考虑它们的行列式：

$$\mathtt{D}^n_{(p,\lambda)} \ := \ \det(\Gamma(\Delta^n_{(\lambda,p)})) \tag{2.3.1}$$

即使是格拉姆行列式，也代表着海量的复杂数据，因此带来了一个实际问题：如何组织和呈现已有成果。

一般而言，‘Gram 行列式装饰的’ Rollet 图 $\mathcal{R}_l^{\Delta}$是如 2.31 中那样的 Rollet 图 $\mathcal{R}_l$，并在每个顶点上附加 Gram 行列式纤维。我们也将纳入以这种方式呈现的结果。不过，这种表示包含的信息相当繁复。我们将从 $l=-1$ 情形看到，对于给定的 l，只附加如下定义的‘边缘顶点函数’纤维，就能极大简化这些数据

[2]（20世纪，Brauer 针对有限特征域上的对称群提出了相应问题；后来，他开始怀疑这个问题一般而言无法解决，于是转而提出了复数域上的 Brauer 代数问题。这个问题随后悬而未决逾 50 年，直到 21 世纪才得以解决。从整体上看，Kadar-Yu问题无疑更难。）

如下。边缘顶点函数为

$$\mathcal{V}^{n}_{(p.\lambda)} := \frac{\mathtt{D}^{(n=p+2m)}_{(p,\lambda)}}{\prod_{\substack{v\ adjacent\\ to\ (p,\lambda)\ in\ \mathcal{R}_l}} \mathtt{D}^{(n-1)}_{(v)}} \tag{2.3.2}$$

- 回忆一下， p 是传播线的数量。在新的装饰图中，行列式纤维被替换为这个 $\mathcal{V}$，当 m 变化时——如果它确实依赖于 m的话。因此，我们也会以这种方式呈现一些结果。我们用$\mathcal{R}_l^{\mathcal{V}}$表示这个特定的装饰 Rollet 图。

(2.36) 最后，我们还可以呈现一个信息量更少的内容：取一条穿过 $\mathcal{R}_l^{\mathcal{V}}$的特定截面，对应于固定的 m （即图的图基中固定数量的“杯”），记为 $\mathcal{R}_l^{(m)}$ 。

穿过 $\mathcal{R}_l^{\curlywedge}$的相应截面记为 $\mathcal{R}_l^{m}$。

请注意，如果我们能确定边缘顶点函数，就能通过递推确定 Gram 行列式。因此，下一步是研究边缘函数。为了给出它们的闭式表达，使用切比雪夫多项式会很方便。特别是，这将引出“自举”的单杯情形。因此，在§3.2，尤其是§3.1中，我们汇集了所需的运算。

然后在 §5.1 中，我们将讨论一般情形。

3 单杯标准模的 Gram 行列式

本节中，我们考察 $J_{l,\ n}$ 标准模$\Delta^{n}_{(n-2,\lambda)}$ 的格拉姆行列式。主要结果是 §3.2.3 中的定理 3.19；通过计算前两种情形（即 $n=l+4,\ l+5$），我们可以得到 $\Delta^{n}_{(n-2,\lambda)}$ 关于 n 的级数表达的闭式；这两种情形唯一确定了一个切比雪夫多项式级数 $P_n^{(\lambda)}$，借此我们可以表示每个行列式。我们应用该定理，计算所有满足 $l\le 2$的 $\lambda\vdash l+2$ 以及 $l\le 7$的情形 $\lambda=(l+1,\ 1)$，$(l+1,\ 1)^{\ T}$ 下该行列式的闭式。多项式$P_n^{(\lambda)}$展现出一些值得注意的性质，我们将在第3.3节开始记录这些性质。我们在 §4 中研究这些多项式的根的分布。

3.1 关于切比雪夫多项式（用于 Gram 行列式）

如果函数级数 $P=\{P_n\}_{n\in\mathbb{Z}}$ 满足切比雪夫递推，我们就称其为“切比雪夫级数”：

$$P_{n+1}(x)=xP_n(x)+P_{n-1}(x), \tag{3.1.1}$$

（例如参见 [17, §6.3.3]及其中的参考文献；另可参见例如 [13]）。当然，这意味着原则上可以由任意两个连续的值确定该级数，

P_i 和 P_{i+1}。经典情况下，这些值为 $i = 0$，我们很快就会回顾这一点。若存在某个 i，使得 $P_n = P'_{n+i}$，则两个级数 P，P' 称为“平行”。

(3.1) 注意，如果任意两个相邻的函数 P_i 和 P_{i+1} 是（整系数）多项式，那么所有 P_n 都是多项式。此外，若对某个 i，$\deg(P_{i+1}) = \deg(P_i) + 1$，则对所有 $k > i$，$\deg(P_{k+1}) = \deg(P_k) + 1$；进一步，若 P_{i+1} 还是首一的，那么对所有 $k > i$，P_k 也都是首一的。

(3.2) 如果多项式切比雪夫级数 P 的所有项之间不存在非平凡（即 次数 > 0）公因子（等价地，任意两个相邻项之间不存在这样的公因子），我们就称该级数为“约化的”。

任意多项式级数 P 都是某个约化的多项式级数 P' 的（多项式）倍数；从 P 中去掉任意两个相邻项之间的最大公因子，即可得到 P'。

(3.3) 记 $\mathbf{P}^{a,\ b}$ 为初始条件为 $\mathbf{P}_0^{a\ b} = a,$ 和 $\mathbf{P}_1^{a\ b} = b,$ 的切比雪夫级数。

我们可以稍微滥用一下记号，并且在 i 固定的前提下，将以 $\mathbf{P}_i^{a\ b} = a,$ 开始的平行级数记作 $\mathbf{P}^{a,b}$。

正如我们将会看到的，对于一般级数，显式使用 $\mathbf{P}^{a,b}$ 记号在实际操作中往往很繁琐（因为 a 可能是一个很长的表达式），因此我们主要将此记号用于抽象运算。对于一些有趣的情形，我们则采用更具体的记号，如 §3.2 所示。

(3.4) 经典初始条件为 $P_0(x) = 0$ 和 $P_1(x) = 1$，由此得到 $P_2(x) = x$；$P_3(x) = x^2 - 1$；$P_4(x) = x(x^2 - 2)$；依此类推。用我们的 $\mathbf{P}^{a,b}$ 记号表示，这个经典级数为 $\mathbf{P}^{0,1}$。

(3.5) 为方便起见，我们令 $P^U := \mathbf{P}^{0,1}$，因为这个级数与经典的“U 型”切比雪夫多项式级数 U 有关，它可以由恒等式定义

$$U_n(\cos(\theta))\sin(\theta) = \sin((n+1)\theta), \tag{3.1.2}$$

由 $P_n^U(x) = U_{n-1}(x/2)$ 得出。多项式 U_n 和 P_n^U 对于 $n < 0$ 定义良好；上述公式在此仍然成立。事实上，可以利用这些公式确定

$$P_{-n}^U(x) = -P_n^U(x), \tag{3.1.3}$$

任意 $n \in \mathbb{Z}$。

(3.6) 注意，$\{P_1^U(x)\ P_2^U(x)\ \dots\}$ 是多项式环 $\mathbb{C}[x]$ 的一个 $\mathbb{C}$-基。

3.1.1 递增性质

本节讨论切比雪夫级数最终可能具备的一种性质。

(3.7) 设 P 是一个切比雪夫级数。对于某个整数 N，若该级数 P 是多项式且为约化的，并且对于 $n \geq N$，P_n 是首一的，且 $\deg(P_{n+1}) = \deg(P_n) + 1$，则称该级数具有“关于 $n \geq N$ 的爬升性质”。这样的级数由 N 及比值 $P_{N+1}(x)/P_N(x)$（一个有理函数）唯一确定。

(3.8) 假设多项式级数 P 具有关于 $n \geq N$ 的递增性质，且假设 $d = \deg(P_N)$。那么存在唯一的系数 a_k，b_i，$b'_j \in \mathbb{C}$，使得

$$P_N(x) = \sum_{k=-(d+1)}^{d+1} a_k P_k^U(x) = \sum_{i=1}^{d+1} b_i P_i^U(x),$$
$$P_{N+1}(x) = \sum_{k=-(d+1)}^{d+1} a_k P_{k+1}^U(x) = \sum_{j=1}^{d+2} b'_j P_j^U(x).$$

可以按如下方式确定 a_k：首先求解系数 b_i 和 b'_j ——根据 3.6，它们是唯一的。然后利用 (3.1.3)，我们得到以下将 a_k 与 b_i 和 b'_j 联系起来的满秩线性方程组：

$$b_k = a_k - a_{-k}, \quad b'_{d+2} = a_{d+1}, \quad b'_{d+1} = a_d, \quad b'_{k'} = a_{k'-1} - a_{-(k'+1)},$$

对于 $k = 1, \ldots, d+1$ 和 $k' = 1, \ldots, d$。特别地，P_N 和 P_{N+1} 的首一性意味着 $a_{d+1} = 1$ 和 $a_{-(d+1)} = 0$。

由于关系 (3.1.1) 是线性的，因此对于任意 $l \in \mathbb{Z}$，都有

$$P_{N+l}(x) = \sum_{k=-(d+1)}^{d+1} a_k P_{k+l}^U(x) = P_{d+1+l}^U(x) + \sum_{k=-d}^{d} a_k P_{k+l}^U(x). \tag{3.1.4}$$

3.2 单杯标准模的 Gram 行列式

这里我们考察标准模 $\Delta_{(p,\lambda)}^n$ 对于 $n = p + 2$ 的 Gram 行列式。

3.2.1 单杯 Gram 矩阵

如 [12, 命题 4.22], 所示，我们可以利用相应 Specht 模 $\mathcal{S}^\lambda$ 的基以及半图 $J_l^{||}(n, p)$（参见 2.20），为给定的 l 构造左模 $\Delta_{(p,\lambda)}^n$ 的一组基。事实上，这对任意 p 都成立；但如果像这里一样 $p = n - 2$，那么后面的半图完全由单个“杯”的位置决定，因此我们将这些 $\Delta_{(p,\lambda)}^n$ 称为“单杯模”。

(3.9) 固定 l 和 n，记 u_{ij}，其中 $i < j$ 是半图 $\mathsf{u}_{ij} \in J_l^{||}(n, n-2)$，其杯连接位置 i 和 j。例如，当 $n = 7$ 时，我们有

$\mathsf{u}_{24} =$  $\in J_1^{||}(7, 5).$

注意，如果 $j = i + 1$，则 $ht(\mathsf{u}_{ij}) = -1$；否则 $ht(\mathsf{u}_{ij}) = j - 3$。

(3.10) 用 $\mathsf{B}^{(l,n)}$ 作为半图集合 $J_l(n, n-2)$ 的简写。于是有

$$\mathsf{B}_{(l,n)} = \{\mathsf{u}_{12}, \mathsf{u}_{23}, \ldots, \mathsf{u}_{n-1,n}\} \cup \left(\bigcup_{k=3}^{\min n, l+3} \mathsf{B}_k \right), \tag{3.2.1}$$

其中 $\mathsf{B}_k := \{\mathfrak{u}_{j,\ k} \mid j = 1,\ \ldots\ldots,\ k-2\}$。注意，$\mathsf{B}_k$ 恰好是高度为 $k-3$ 的单杯半图。

(3.11) 注意，对于 $n \geq l+3$，我们有 $\mathsf{B}^{(l,n+1)} = \mathsf{B}_{(l,n)} \cup \{\mathfrak{u}_{n,n+1}\}$。

(3.12) 固定 l 和 $\lambda \vdash l+2$。当 $n \geq l+4$ 时，考虑 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 的一组基，将其视为 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组基（参见 2.22），其中 $b_i = x_i c_\lambda$ 对于某个 $x_i \in \mathbb{C}\Sigma_{l+2} \subset J_{l,n}$，且 c_λ 如 (2.2.5) 所述。于是 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)}$ 的一组基可表示为

$$\mathsf{B}^n_{(n-2,\lambda)} := \{\mathfrak{u}_{jk} b_i \mid \mathfrak{u}_{jk} \in \mathsf{B}_{(l,n)},\ b_i \in \mathcal{B}\}. \tag{3.2.2}$$

(3.13) 对于 $n \geq l+4$，现在我们考虑 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)}$ 上的形式 $\langle\ ,\ \rangle$。形式 $\langle \mathfrak{u}_{jk} b_i, \mathfrak{u}_{j'k'} b_{i'} \rangle$ 的值由下式确定

$$c_\lambda x^*_{i'} \mathfrak{u}^*_{j'k'} \mathfrak{u}_{jk} x_i c_\lambda = \langle b_i \mathfrak{u}_{jk}, b_{i'} \mathfrak{u}_{j'k'} \rangle c_\lambda.$$

需要考虑三种情形，即 $|\{j,k,j',k'\}| = 2,\ 3,\ 4$。第一种情形下 $\mathfrak{u}^*_{j'k'}\mathfrak{u}_{jk} = \alpha e$，第二种情形下 $\mathfrak{u}^*_{j'k}\mathfrak{u}_{jk} = \sigma$，其中 $\sigma \in \Sigma_{l+2}$。最后一种情形下，$\mathfrak{u}^*_{j'k'}\mathfrak{u}_{jk}$ 有 $p-2$ 条传播线。因此我们得到

$$\langle \mathfrak{u}_{jk} b_i, \mathfrak{u}_{j'k'} b_{i'} \rangle = \begin{cases} \alpha \langle x_i, x_{i'} \rangle, & |\{i,j,i',j'\}| = 2, \\ \langle \sigma x_i, x_{i'} \rangle, & |\{i,j,i',j'\}| = 3, \text{ where } \sigma = \mathfrak{u}^*_{j'k'}\mathfrak{u}_{jk}, \\ 0, & \text{otherwise.} \end{cases}$$

其中 $\langle\ ,\ \rangle$ 在此也表示 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)} c_\lambda \simeq \mathcal{S}_\lambda$ 上的形式（参见 2.20）。相对于该形式，将 $\mathcal{S}_\lambda$ 换成标准正交基后，我们注意到 α 仅出现在矩阵的主对角线上。特别地，$\Gamma(\Delta^n_{(n-2,\lambda)})$ 现在具有如下形式

$$\Gamma(\Delta^n_{(n-2,\lambda)})(\alpha) = \alpha \mathrm{I} + \Gamma(\Delta^n_{(n-2,\lambda)})', \tag{3.2.3}$$

其中 $\Gamma(\Delta^n_{(n-2,\lambda)})' = \Gamma(\Delta^n_{(n-2,\lambda)})|_{\alpha=0}$ 是一个实对称矩阵。正如 [1]，中所观察到的，这意味着当 α 不在实数轴上时，形式 $\langle\ ,\ \rangle$ 是非退化的。

对于形如 $\mathfrak{u}_{j,\ j+1} b_i$ 的 $l+3 < j < n$ 基元素，只有与形如 $\mathfrak{u}_{j',\ j'+1} b_{i'}$ 的元素之间的配对非零，其中 $j' = j,\ j \pm 1$，我们可以计算

$$\langle \mathfrak{u}_{j,j+1} b_i, \mathfrak{u}_{j',j'+1} b_{i'} \rangle = \delta_{ii'}(\alpha \delta_{jj'} + \delta_{j+1,j'} + \delta_{j-1,j'}). \tag{3.2.4}$$

方程（3.2.4）揭示了我们的格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^n_{(p,\lambda)})$ 的一项重要性质。

3.2.2 当 $\mathcal{S}_\lambda$ 为一维时

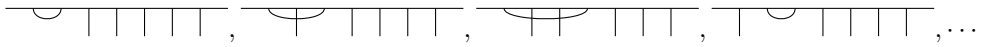
此情形的基础理论见 [12, 11]。本节将对此进行回顾，为 §3.2.3 中的一般情形做准备，并给出超出此前计算范围的示例。

首先假设 $\mathcal{S}_\lambda$ 是一维的，即 $\lambda=(p)$ 或 (1^p)，因此 $\Delta^n_{(p,\lambda)}$ 的基为 $\{\mathrm{u}_{ij}c_\lambda\}_{ij}$，其中 $\mathrm{u}_{ij}\in B_{(n,l)}$。此外，它自然分为两个“阶段”，在这两个阶段中，形式 $\langle\ ,\ \rangle$表现出不同的行为；第一阶段称为“头部”，由满足 $j\le l+4$ 的基元素 $\mathrm{u}_{ij}c_\lambda$ 组成；第二阶段称为“尾部”，由满足 $j>l+4$ 的相同元素组成。限制在头部上的格拉姆矩阵是稠密矩阵，而在尾部上则是三对角矩阵（按适当顺序排列时）。此外，头部与尾部元素之间的配对只有一种非零情形，即 $\langle \mathrm{u}_{l+3,\ l+4}c_\lambda,\ \mathrm{u}_{l+4,\ l+5}c_\lambda\rangle=1$。

(3.14) 为了说明这一现象，下面给出 $J_{1,13}$-模$\Delta^{(13)}{}_{(11,\lambda)}$在 $\lambda=(3)$ 或 $\lambda=(1^3)$（分别取 $\epsilon=1$ 或 $\epsilon=-1$）时的格拉姆矩阵：

$$\left(\begin{array}{ccccccc|cccccccc}
\alpha&1&\epsilon&1&\epsilon&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&\alpha&1&1&0&\epsilon&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\epsilon&1&\alpha&0&1&\epsilon&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
1&1&0&\alpha&1&1&0&0&0&0&0&0&0&0&0\\
\epsilon&0&1&1&\alpha&1&\epsilon&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&\epsilon&\epsilon&1&1&\alpha&1&0&0&0&0&0&0&0&0\\
0&0&1&0&\epsilon&1&\alpha&1&0&0&0&0&0&0&0\\
\hline
0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1&0\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha&1\\
0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&0&1&\alpha
\end{array}\right).\qquad(3.2.5)$$

基 $\mathrm{u}_{ij}c_\lambda$ 按字典序排列，因此



矩阵中的线条将头部和尾部分隔开。

(3.15) 更一般地，对于任意 $n>l+4$ 和 $\lambda=(l+2),(1^{l+2})$，将基按相同方式排列后，矩阵 $\Gamma(\Delta^{n+1}{}_{(n-1,\lambda)})$ 具有如下形式

$$\left(\begin{array}{ccccc|cc}
&&&&&0&0\\
&\Gamma\big(\Delta^{n-1}_{(n-3,\lambda)}\big)&&&&\vdots&\vdots\\
&&&&&0&0\\
&&&&&1&0\\
\hline
0&\dots&0&1&&\alpha&1\\
0&\dots&0&0&&1&\alpha
\end{array}\right).\qquad(3.2.6)$$

要计算这样的行列式 $\mathrm{D}^{(n+1)}{}_{(n-1,\lambda)}\ \lambda$，我们可以沿

最后一行展开，得到递归公式

$$\mathtt{D}^{(n+1)}_{(n-1,\lambda)}(\alpha) = \alpha \left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\Gamma(\Delta^{(n-1)}_{(n-3,\lambda)})$}} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{} & \vdots \\ \hline 0 \quad \ldots & 0 \quad 1 & \alpha \end{array}\right| - \left|\begin{array}{c|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\multirow{2}{*}{$\Gamma(\Delta^{(n-1)}_{(n-3,\lambda)})$}} & 0 \\ \multicolumn{2}{c|}{} & \vdots \\ \hline 0 \quad \ldots & 0 \quad 1 & 1 \end{array}\right|$$

$$= \alpha\, \mathtt{D}^{(n)}_{(n-2,\lambda)}(\alpha) - \mathtt{D}^{(n-1)}_{(n-3,\lambda)}(\alpha). \tag{3.2.7}$$

也就是说，行列式 $\mathtt{D}^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$满足 n (3.1.1) 中的切比雪夫递推。换言之，由第3.1节可得

$$\mathtt{D}^{(n)}_{(n-2,\lambda)} = \mathtt{P}^{a,b}_n$$

其初始条件为 $a = \mathtt{D}^{(l+4)}{}_{(l+2,\lambda)}$ 和 $b = \mathtt{D}^{(l+5)}{}_{(l+3,\lambda)}$，分别对应 $n = l+4$ 和 $n = l+5$。我们将在第3.3节中应用这一结果，为 $0 \le l \le 12$ 时的情形 $\lambda = (l+2), (1^{l+2})$ 给出所有 Gram 行列式的显式公式。

3.2.3 关于一般 λ 的 Gram 行列式 $\mathtt{D}^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$

当 $\mathcal{S}_\lambda$ 不一定是一维时，我们可以按如下方式进行。本节中，我们给出格拉姆行列式的形式因式分解。在第3.3节中，我们确定这些因子。

(3.16) 假设 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 是 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组标准正交基，并将其视为 $\Delta^n_{(n,\lambda)}$ 的一组标准正交基（参见 2.22），其中采用我们的逆变形式 $\langle\ ,\ \rangle_\circ$ -请注意，这要求我们在对称群的分裂域上进行研究。事实上，我们还将更进一步，在此处于 $\mathbb{C}$ 上进行研究。更确切地说，我们是在 $\mathbb{C}[\alpha]$ 上进行研究，因此，例如，我们无法为$\Delta^n_{(p,\lambda)}$取一组标准正交基。

公式 (3.2.4) 表明，对于 $\Delta^n_{(p,\lambda)}$，我们可以将基划分为头部和尾部，每个基元素 $b_i \in \mathcal{B}$ 都有类似的行为。在这种情形下，属于不同头部的元素之间的形式值可能有非零项。例如，当 $\lambda = (2,\ 1)$ 时，通过选择基

$$\mathcal{B}_{(21)} \ = \ \{b_1 = c_\lambda,\ b_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}((23) + \frac{1}{2}e)c_\lambda\} \tag{3.2.8}$$

对于 $\mathcal{S}_\lambda$，并按照三元组 $(i,\ j,\ k)$ 对 $\mathtt{u}_{j,\ k}b_i$ 进行字典序排列，我们得到图 2 中的格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^8_{(6,\lambda)})$ 的表达式。

我们还可以通过沿着对应于尾部末端的行展开，得到行列式的归纳公式。具体步骤如下。

(3.17) 对于任意分拆，以及满足$n_k \ge l+4$的整数 $\boldsymbol{n} = (n_1,\ n_2,\ \ldots\ldots,\ n_{d_\lambda})$，我们引入集合

$$\mathtt{B}^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})} := \{b_i\mathtt{u}_{jk} \mid i = 1, \ldots, d_\lambda,\ \ \mathtt{u}_{jk} \in \mathtt{B}_{(l,n_i)}\}.$$

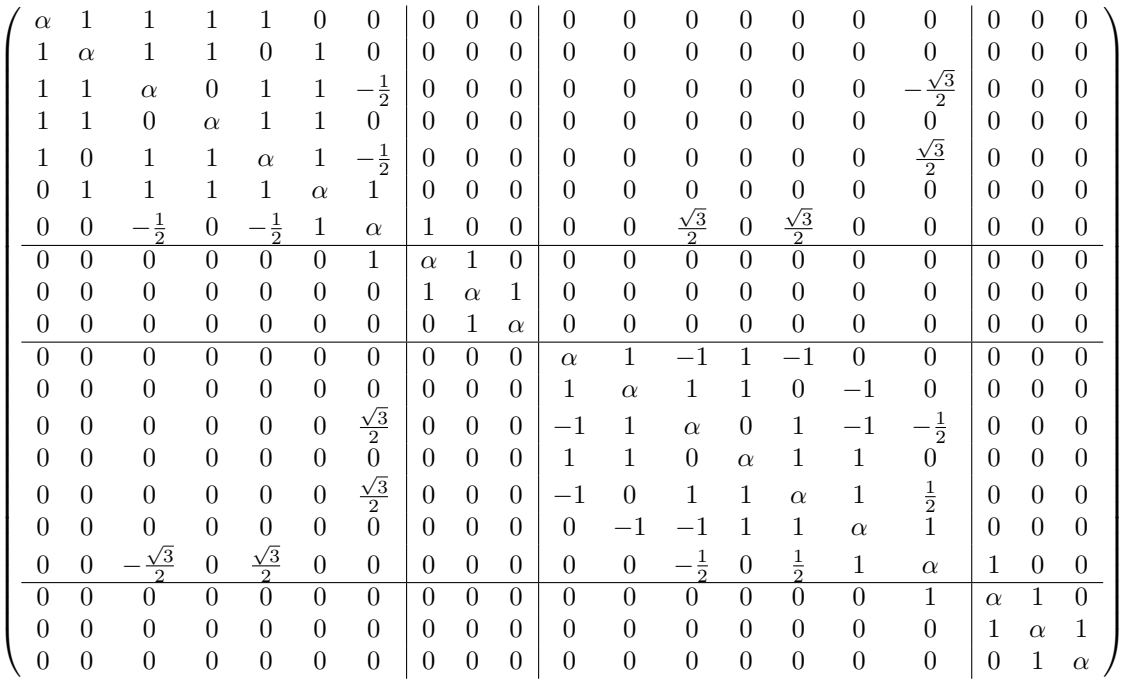


图 2：格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^8_{(6,(2,1))})$

我们可以将 $\mathsf{B}^{(\lambda)}{}_{(l,\ \boldsymbol{n})}$ 视为基 $\mathsf{B}^n_{(n-2,\lambda)}$ 的子集，其中 $\Delta^n_{(p,\lambda)}$满足 $n=\max(\boldsymbol{n})$。事实上

$$\mathsf{B}^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n}=(n,n,\ldots,n))} \ = \ \mathsf{B}^n_{(n-2,\lambda)}.$$

因此，我们可以考虑如下形式的矩阵 $\langle\,,\ \rangle$ 作用在$\mathsf{B}^{(\lambda)}{}_{(l,\ \boldsymbol{n})}\times\mathsf{B}^{(\lambda)}{}_{(l,\ \boldsymbol{n})}$ - 将此矩阵记为

$$\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})} := \langle \text{-}, \text{-}\rangle|_{\mathsf{B}^\lambda_{l,\boldsymbol{n}}\times\mathsf{B}^\lambda_{l,\boldsymbol{n}}}.$$

该矩阵包含与每个 $b_i\in\mathcal{B}$ 对应的头部，但通常每个这样的 b_i 都可能有长度不同的尾部。

沿任意尾部末端所在的行展开行列式（假设该尾部足够长），即可验证行列式的多重序列 $\det(\Gamma^{(\lambda)}_{l\ \boldsymbol{n}\ ,\ })$ 满足切比雪夫递推 (3.1.1)，且该递推作用于 $\boldsymbol{n}$ 的每个分量。更准确地说，我们已经证明

命题 3.18. 固定 l，并令 $\lambda\vdash l+2$。设 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_{d_\lambda})$ 如前所述，并令 $e_k\in\mathbb{Z}^{d_\lambda}$ 表示初等向量。那么我们有

$$\det(\Gamma^{(\lambda)}_{l,\boldsymbol{n}+2e_k}) = \alpha\det(\Gamma^{(\lambda)}_{l,\boldsymbol{n}+e_k}) - \det(\Gamma^{(\lambda)}_{l,\boldsymbol{n}}). \tag{3.2.9}$$

□

也就是说，由 (3.3) 可得，

$$\det(\Gamma^{(\lambda)}_{l,\boldsymbol{n}}) = \mathtt{P}^{a,b}_{n_k} \tag{3.2.10}$$

对于某个 a，b 它通常可能取决于基元素 b_k，以及整数 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$，其中

$$\boldsymbol{n}_{\setminus k} := (n_1, n_2, ..., n_{k-1}, n_{k+1}, ..., n_{d_\lambda}). \tag{3.2.11}$$

具体而言

$$a = \det\left(\Gamma^{(\lambda)}_{l,(n_1,\dots,n_{k-1},l+4,n_{k+1},\dots,n_{d_\lambda})}\right),$$
$$b = \det\left(\Gamma^{(\lambda)}_{l,(n_1,\dots,n_{k-1},l+5,n_{k+1},\dots,n_{d_\lambda})}\right).$$

由 (3.2.3) 可知，a 和 b 是首一多项式，且满足 $\deg(b) = \deg(a) + 1$。因此，$\mathtt{P}^{a,\,b}$ 可以写成

$$\mathtt{P}^{a,b} \;=\; c\,\mathtt{P}^{a',b'} \tag{3.2.12}$$

其中 a 和 b 有最大的（首一）公因子 c，并且 $a' = a/c$ 和 $b' = b/c$。对于如此选取的 c，级数 $\mathtt{P}^{a',\,b'}$ 对 $n \geq l+4$ 具有渐增性质（参见 3.7）。

§3.2.3 的其余部分将用于证明以下结果，该结果表明，每个单杯行列式都由低秩时的两个行列式通过切比雪夫递推确定（而这两个行列式又可通过直接计算求得，我们将在 §3.3 中加以说明）：

定理 3.19. 固定 l。对于任意 $\lambda \vdash l+2$，存在一个首一多项式 $C^{(\lambda)}$，以及一个对 $n \geq l+4$ 具有渐增性质的多项式级数 $P^{(\lambda)}_n$（参见 *3.7*），使得对于 $n \geq l+4$（因此也适用于 *Rollet* 图 $\mathcal{R}_l$ 的 λ-臂，参见 *2.32*）

$$\mathtt{D}^n_{(n-2,\lambda)}(\alpha) = C^{(\lambda)}(\alpha)(P^{(\lambda)}_n(\alpha))^{d_\lambda}, \tag{3.2.13}$$

相差一个整体复标量，其中 d_λ =维数($\mathcal{S}_\lambda$)。

首先，我们将使用以下引理。

引理 3.20. 固定 l。对于每个 $\lambda \vdash l+2$，存在唯一的（相差一个多项式因子）元素 $\xi_\lambda \in \Delta^{(l+4)}{}_{(l+2,\lambda)}$，其系数属于 $\mathbb{C}[\alpha]$，使得

$$\mathtt{u}^*_{ij}\,\xi_\lambda = 0,\ for\ (i,j) \neq (l+3, l+4), \qquad \mathtt{u}^*_{l+3,l+4}\,\xi_\lambda \;=\; D(\alpha)c_\lambda. \tag{3.2.14}$$

对于某个标量 $D(\alpha) \in \mathbb{C}[\alpha]$。这里，$\mathtt{u}_{ij} \in B_{(l,l+4)}$ 按照（3.2.1），$(\,)^*$ 如 *2.5* 所述，而 $c_\lambda \in J_l$（$l+2$、$l+2$）如 *2.2.5* 所述（另见 *6.1.2*）。

证明。在本证明中，令 $\Delta = \Delta^{(l+4)}{}_{(l+2,\ \lambda)}$。并令 $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$的一组正交归一（相对于 $\langle\ ,\ \rangle$）基，因此也是$\Delta^n_{n,\ \lambda}$的一组基，使得$b_1 = \mathsf{C}_\lambda \in \mathbb{C}\Sigma_{l+2}$。

对于任意 $\xi \in \Delta$，表达式 $\mathfrak{u}^*_{ij}\,\xi \in \Delta^{(l+2)}_{l+2\ \lambda(,)}$。因此，元素 $\mathfrak{u}^*_{ij}\xi$ 可以唯一地表示为 b_k 的线性组合。也就是说，$\mathfrak{u}^*_{ij}\,\xi = \sum a_k b_k$，其中系数 a_i 由下式确定：

$$a_k = \langle b_k, \mathfrak{u}^*_{ij}\,\xi\rangle = \langle \mathfrak{u}_{ij} b_k, \xi\rangle.$$

其中，第一个等式使用了 $\Delta^n_{n,\lambda}$ 的形式，第二个等式随后使用了 $\Delta^n_{n-2,\lambda}$ 的形式。根据（3.2.2），将 ξ 在基 $\mathsf{B}^n_{n-2,\lambda}$ 中展开：$\xi = \sum_{i,j,k}[\xi]_{i,j,k}\,\mathfrak{u}_{i,j}b_k$。因此，与（2.24）进行比较，方程（3.2.14）可以分量形式写成

$$\Gamma(\Delta)\cdot[\xi_\lambda] = \ D(\alpha)\ e_{l+3,l+4,1}, \qquad (\star)$$

其中 $e_{l+3,l+4,1}$ 是初等列向量（其各项均为 0，但与基元素 $\mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_1$ 对应的位置除外，该位置的值为 1）。

注意，例如由 (3.2.3) 可知，矩阵 $\Gamma(\Delta)$ 通常可逆（即将 α 视为形式参数，并在有理函数域 $\mathbb{C}(\alpha)$ 上进行运算）。因此，对于任意因子$D(\alpha)$，方程 $(\star)$ 都有唯一解，其系数为$[\xi_\lambda]_{i,\ j,\ k} \in \mathbb{C}(\alpha)$。如有必要，将 ξ_λ 乘以这些系数的一个公分母，我们只需改变该因子。因此，我们得到所需的 ξ_λ，满足 $\mathfrak{u}^*_{l+3,\ l+4}\,\xi_l = D(\alpha)c_\lambda$。 □

(3.21) 将基域 $\mathbb{C}$ 通过把 α 取特定复数值来进行特化后，我们注意到，ξ_λ 也可能满足 $\mathfrak{u}^*_{l+3,\ l+4}\,\xi_l = 0$（即当 α 是分母 $D(\alpha)$ 的一个根时）。

(3.22) 令 $\xi_\lambda \in \Delta^{(l+4)}{}_{(l+2,\ \lambda)}$ 如引理 3.20 所述——即取 λ-臂中的第一个单杯标准模。再令 $\mathcal{B} = \{b_1, b_2, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$的一个标准正交基，其中 $b_k = x_k\,\mathsf{C}_\lambda$ 且 $x_k \in \mathbb{C}S_{l+2}$。对于 $k = 1、2、\ldots\ldots、\ d_\lambda$，定义

$$\xi^{(b_k)}_\lambda := (x_k\mathsf{C}_\lambda \otimes \mathrm{id}_2)\,\xi_\lambda \in \Delta^{(l+4)}_{(l+2,\lambda)}, \qquad (3.2.15)$$

将 C_λ 视为 $\mathbb{C}\Sigma_{l+2} \subset J_{l,l+2}$ 中的一个元素。现在我们断言，$\xi^{(b_k)\ \lambda}$ 满足以下条件：

引理 3.23。固定 l，令 $\lambda \vdash l+2$。令 $\mathcal{B}$ 和 $\xi^{(b_k)\ \lambda} \in \Delta^{(l+4)}_{l+2\ (,\lambda)}$ 如 *3.22* 中所述。则 $\xi^{(b_k)\ \lambda}$ 的系数属于 $\mathbb{C}[\alpha]$，且满足：

1. 基向量 $\mathfrak{u}_{l+3,\ l+4}\,b_{k'}$ 在 $\xi^{(b_k)\ \lambda}$ 中的系数除非满足 $k' = k$，否则为零。此外，$\mathfrak{u}_{l+3,\ l+4}\,b_k$ 的系数与 b_k无关。*2.* 形式 $\langle\xi^{(b_k)}_\lambda, \mathfrak{u}_{i,\ j}\,b_{k'}\rangle$ 除非 $(i,j) = (l+3, l+4)$ 且满足 $k' = k$，否则为零。此外，$\langle\xi^{(b_k)}_\lambda, \mathfrak{u}_{l+3,\ l+4}b_k\rangle$ 与 k无关。

证明。首先，由于 ξ_λ 在 $\mathbb{C}[\alpha]$ 中具有系数，且由于 x_i，$\mathsf{C}_\lambda \in \mathbb{C}\Sigma_{l+2}$，可知 $\xi^{(b_k)}{}_\lambda$ 的系数属于 $\mathbb{C}[\alpha]$。

对于任意满足 $j < l+4$ 的杯 $\mathsf{u}_{i,j}$，复合映射 $(x_i\mathsf{C}_\lambda\otimes\mathrm{id}_2)\mathsf{u}_{i,j}$ 可以写成如下形式的线性组合：$\sum_{i'<j'<l+4}\mathsf{u}_{i',j'}x_{i',j'}$，其中 $x_{i',j'}\in\mathbb{C}\Sigma_{l+2}$；这是通过将杯沿每个置换向上"拉"得到的。因此，$\xi^{(b_k)}{}_\lambda$ 中形如 $\mathsf{u}_{l+3,l+4}b_{k''}$ 的基向量，唯一的贡献来自其中形如 $\mathsf{u}_{l+3,l+4}b_{k'}$ 的基向量。计算

$$\begin{aligned}(x_k\mathsf{C}_\lambda\otimes\mathrm{id}_2)\mathsf{u}_{l+3,l+4}b_{k'} &= \mathsf{u}_{l+3,l+4}(x_k\mathsf{C}_\lambda x_{k'}c_\lambda)\\ &= \langle ec_\lambda, b_{k'}\rangle\ \mathsf{u}_{l+3,l+4}x_k\mathsf{C}_\lambda c_\lambda\\ &= \langle ec_\lambda, b_{k'}\rangle\ \mathsf{u}_{l+3,l+4}b_k,\end{aligned}$$

（利用 $\mathsf{C}_\lambda c_\lambda = c_\lambda$ 这一事实）可知，$\mathsf{u}_{l+3,l+4}\,b_{k''}$ 的系数（在 $\xi^{(b_k)}{}_\lambda$ 中）除非 $k''=k$，否则为 0；在此情形下，我们有

$$\left[\xi_\lambda^{(b_k)}\right]_{l+3,l+4,k} = \sum_{k'}[\xi_\lambda]_{l+3,l+4,k'}\,\langle ec_\lambda, b_{k'}\rangle,$$

显然，这与 k 无关，从而证明了引理的第 1 部分。

为了证明第 2 部分，我们首先注意到，对于任意 $i<j<l+4$，$\mathsf{u}^*_{i,j}(x_k\mathsf{C}_\lambda\otimes\mathrm{id}_2)$ 可以写成如下形式的线性组合：$\sum_{i'<j'<l+4}x_{i',j'}\mathsf{u}^*_{i',j'}$，其中 $x_{i',j'}\in\mathbb{C}\Sigma_{l+2}$（这是通过将盖沿每个置换向下"拉"得到的）。因此，由 (3.2.14) 可知，对于任意这样的 $i<j$，我们有 $\mathsf{u}^*_{i,j}\xi^{(b_k)}{}_\lambda = 0$，特别地，对于任意 k'，有 $\langle \mathsf{u}_{i,j}b_{k'}, \xi^{(b_k)}{}_\lambda\rangle = 0$。当 $(i,j)=(l+3,l+4)$ 时，我们有

$$\begin{aligned}c_\lambda x^*_{k'}\mathsf{u}^*_{l+3,l+4}\xi^{(b_k)}_\lambda &= c_\lambda x^*_{k'}\mathsf{u}^*_{l+3,l+4}(x_k\mathsf{C}_\lambda\otimes\mathrm{id}_2)\,\xi_\lambda,\\ &= (c_\lambda\, x^*_{k'}\, x_k\, \mathsf{C}_\lambda)\mathsf{u}^*_{l+3,l+4}\,\xi_\lambda\\ &= \langle b_{k'}, b_k\rangle\mathsf{C}_\lambda\mathsf{u}^*_{l+3,l+4}\,\xi_\lambda = \delta_{k,k'}D(\alpha)c_\lambda,\end{aligned}$$

在最后一行中，我们用到了 b_k、$\mathsf{C}_\lambda c_\lambda = c_\lambda$ 和 $\mathsf{u}^*_{l+3,l+4}\,\xi_\lambda = D(\alpha)c_\lambda$ 的正交性（根据 3.20 ）。因此可以看出

$$\langle \mathsf{u}_{l+3,l+4}b_{k'}, \xi^{(b_k)}_\lambda\rangle = \delta_{k,k'}D(\alpha),$$

这就完成了证明，因为 $D(\alpha)\in\mathbb{C}[\alpha]$ 显然独立于 k。 □

现在我们应用这个引理来证明以下结论：

引理 3.24. 固定 l，令 $\lambda\vdash l+2$。令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$的一组标准正交基，令 $\boldsymbol{n}=(n_1,\ldots,n_{d_\lambda})$ 为一个满足对所有 k 都有 $n_k\geq l+4$ 的 d_λ 元整数组，并令 $\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})}$ 如 *3.17* 中所述。那么对于每个 $k=1,\ldots,d_\lambda$，存在一个首一多项式 $C^{(\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}$ 和一个具有 $n\geq l+4$ 的递增性质的多项式级数 $P_n^{(\lambda)}$（参见 *3.7*），使得

$$det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})}) \;=\; C^{(\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}(\alpha)\;P^{(\lambda)}_{n_k}(\alpha),$$

其中 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$ 如(3.2.11)中所述。特别地， $P^{(\lambda)}_{n_k}$ （因此 $C^{(\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}$）与基向量 $b_k \in \mathcal{B}$ 无关。此外， $P^{(\lambda)}_{n_k}$ 不依赖于整数 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$。

证明。 行列式 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})}$的首一性、其次数以及命题 3.18 中建立的递推表明，对于每个这样的 k，我们可以写成

$$\det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})}) = C^{(b_k,\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}(\alpha) P^{(b_k,\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}_{n_k}(\alpha),$$

其中 $C^{(b_k,\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}(\alpha)$ 是一个首一多项式，而 $P^{(b_k,\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k}}{}_{)\ n}(\alpha)$ 是一个具有递增性质的多项式级数，适用于 $n \geq l+4$。一般而言， $P^{(b_k,\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k})\, n_k}(\alpha)$ 可能依赖于 b_k 和整数 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$；因此，本证明的关键在于证明事实并非如此。为此，只需验证对于任意 $k = 1,\ldots,d_\lambda$ 以及整数 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$ 的任意选取，该序列具有相同的“初始条件”，即

$$P^{(b_k,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}_{l+4}(\alpha) = a(\alpha), \qquad P^{(b_k,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}_{l+5}(\alpha) = b(\alpha),$$

对于不依赖于 b_k 和 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$ 的多项式 a, b。此外，根据 3.7，只需证明比值

$$\frac{P^{(b_k,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}_{l+4}(\alpha)}{P^{(b_k,\boldsymbol{n}_{\setminus k})}_{l+5}(\alpha)} = \frac{a(\alpha)}{b(\alpha)} = \frac{\det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,(n_1,\ldots,n_{k-1},l+4,n_{k+1},\ldots,n_{d_\lambda}))})}{\det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,(n_1,\ldots,n_{k-1},l+5,n_{k+1},\ldots,n_{d_\lambda}))})}, \tag{3.2.16}$$

与 b_k 和 $\boldsymbol{n}_{\setminus k}$ 无关。

假设在必要时重新排序 $\mathcal{B}$，使得 $k = d_\lambda$。现在，对于一个 $(d_\lambda - 1)$ 元组 $\boldsymbol{n'} = (n'_1, \ldots\ldots, n'_{d_\lambda - 1})$，其中对所有 k' 都有 $n'_{k'} \geq l+4$，考虑矩阵$\Gamma := \Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\ (\boldsymbol{n'},\ l+5))}$。根据计算式 (3.2.4)，它具有如下形式

$$\Gamma = \Gamma^{(\lambda)}_{(l,(\boldsymbol{n'},l+5))} = \left(\begin{array}{c|c} \Gamma^{(\lambda)}_{(l,(\boldsymbol{n'},l+4))} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & \ldots & 0 & 1\end{matrix} & \alpha \end{array}\right). \tag{3.2.17}$$

由引理 3.23 第 2 部分可知，格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^{(l+4)}{}_{(l+2,\ \lambda)}) = \Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\ \boldsymbol{\iota'})}$ 的行（其中 $\boldsymbol{l'}$ 是一个所有元素均为 $l+4$ 的 d_λ 元组）的下述线性组合得到行向量

$$\begin{aligned}\sum_{i,j,k} \left[\xi^{(b_{d_\lambda})}_\lambda\right]_{i,j,k} R_{\mathsf{u}_{i,j} b_k} &= \langle \xi^{(b_{d_\lambda})}_\lambda, \mathsf{u}_{l+3,l+4}\, b_{d_\lambda}\rangle\, e_{l+3,l+4,d_\lambda} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & \langle \xi^{(b_{d_\lambda})}_\lambda, \mathsf{u}_{l+3,l+4}\, b_{d_\lambda}\rangle \end{pmatrix}\end{aligned}$$

其中 $e_{i,\ j,\ k}$ 表示初等向量。此外，根据 3.23 的第 1 部分，该组合不包含 $k < d_\lambda$对应的行 $R_{\mathsf{u}_{l+3,\ l+4} b_k}$。由于该行

$R'_{\mathfrak{u}_{i,\ j}b_k}$ 中 $j < l+4$ 的矩阵 Γ 对应的行 $R_{\mathfrak{u}_{i,\ j}b_k}$ 可由格拉姆矩阵 $\Gamma(\Delta^{(l+4)}{}_{(l+2,\lambda)})$ 中相应的行得到：将任何以尾部中某个元素（即形如 $\mathfrak{u}_{i,\ j}b_k$ 且满足 $j > l+4$的元素）为标签的列置零。由此可知，矩阵 Γ 中相应行的相同组合得到行向量

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle & \left[\xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}\right]_{l+3,l+4,d_\lambda} \end{pmatrix}.$$

因此，将 Γ 的最后一行乘以 $\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,\ l+4}b_{d_\lambda}\rangle$ 后，我们可以应用一系列行化简来展示等式

$$\begin{aligned}
\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle \det(\Gamma) &= \left|\begin{array}{c|c} \Gamma^{(\lambda)}_{(l,(\boldsymbol{n'},l+4))} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & \dots & 0 & \langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle\end{matrix} & \alpha\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle \end{array}\right| \\
&= \left|\begin{array}{c|c} \Gamma^{(\lambda)}_{(l,(\boldsymbol{n'},l+4))} & \begin{matrix}0\\ \vdots \\ 0\\ 1\end{matrix} \\ \hline \begin{matrix}0 & \dots & 0 & 0\end{matrix} & \alpha\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle - \left[\xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}\right]_{l+3,l+4,d_\lambda} \end{array}\right| \\
&= \left(\alpha\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle - \left[\xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}\right]_{l+3,l+4,d_\lambda}\right) \det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,(\boldsymbol{n'},l+4))}).
\end{aligned}$$

与（3.2.16）比较，我们现在得到

$$\frac{P_{l+4}^{(b_{d_\lambda},\boldsymbol{n'})}(\alpha)}{P_{l+5}^{(b_{d_\lambda},\boldsymbol{n'})}(\alpha)} = \frac{\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle}{\left(\alpha\langle \xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}, \mathfrak{u}_{l+3,l+4}b_{d_\lambda}\rangle - \left[\xi_\lambda^{(b_{d_\lambda})}\right]_{l+3,l+4,d_\lambda}\right)},$$

这显然与 $\boldsymbol{n'}$ 无关，并且根据引理 3.23，与 b_{d_λ} 无关。证明完毕。

□

现在应用此引理来证明：

命题 3.25。固定 l，令 $\lambda \vdash l+2$。令 $\mathcal{B}$ 为 $\mathcal{S}_\lambda$ 的一组标准正交基，令 $\boldsymbol{n} = (n_1, \dots, n_{d_\lambda})$ 为一个 d_λ 元整数元组 $n_k \geq l+4$，并令 $\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})}$ 如 *3.17* 中所述。存在一个首一多项式 $C^{(\lambda)}$ 和一个具有 $n \geq l+4$ 爬升性质的多项式级数 $P_n^{(\lambda)}$（参见 *3.7*），使得

$$det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})}) = C^{(\lambda)}(\alpha)\prod_{k=1}^{d_\lambda} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha).$$

证明。由引理 3.24 可知，每个 $P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 都整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})})$。只需证明 $\prod_{k=1}^{d_\lambda} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})})$，因为届时与引理 3.24 中的因子分解比较可得

$$C^{(\lambda)}(\alpha)\prod_{k\neq k'} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha) = C^{(\lambda,\boldsymbol{n}_{\setminus k'})}(\alpha),$$

对于每个 $k'=1,\ldots,d_\lambda$，这表明 $C^{(\lambda)}(\alpha)$ 与所有整数$n_{k'}$均无关。

反设对于某个 $\boldsymbol{n}$，$\prod_{k=1}^{d_\lambda} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 不整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})})$。对基 $\mathcal{B}$ 进行重新排序后，必存在某个整数 $2\le d\le d_\lambda$，使得对于任意与 $\boldsymbol{n}$ 在前 $(d-1)$ 项相同的 d_λ 元组 $\boldsymbol{n'}$，$\prod_{k=1}^{d-1} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 都整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n'})})$；然而，$\prod_{k=1}^{d} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 不整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})})$。由假设可知 $\prod_{k=1}^{d-1} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$ 整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\boldsymbol{n})})$，且 $P_{n_d}^{(\lambda)}(\alpha)$ 也必定整除该行列式，因此这两个因子必定存在非平凡的“重叠”。也就是说，我们必须能够写成

$$\det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})}) = A(\alpha)B(\alpha)C(\alpha)D(\alpha),$$

其中 $D(\alpha)$ 的次数为正，且不整除 $A(\alpha)$，使得 $B(\alpha)D(\alpha) = P_{n_d}^{(\lambda)}(\alpha)$，且 $C(\alpha)D(\alpha) = \prod_{k=1}^{d-1} P_{n_k}^{(\lambda)}(\alpha)$。但由引理 3.24 可知，

$$\det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n}+e_d)}) = A(\alpha)C(\alpha)P_{n_d+1}^{(\lambda)}(\alpha).$$

由于 $C(\alpha)D(\alpha)$ 必须整除 $\det(\Gamma^{(\lambda)}{}_{(l,\ \boldsymbol{n}+e_d)})$，而 D 不整除 A，因此 D 必须整除 $P_{n_d+1}^{(\lambda)}$。于是，由切比雪夫递推可知，D 是序列 $P_n^{(\lambda)}$ 的一个非平凡公因子，这与假设矛盾。 □

现在，我们可以将定理 3.19 作为命题 3.25 的一个特化来证明：

定理 *3.19* 的证明。对于任意 $n\ge l+4$，令 $\boldsymbol{n}$ 为 d_λ-元组，取 $\boldsymbol{n}=(n,\ n,\ \ldots\ldots,\ n)$，得到

$$\mathtt{D}^{(n)}_{(n-2,\lambda)} = \det(\Gamma^{(\lambda)}_{(l,\boldsymbol{n})}) = C^{(\lambda)}(\alpha)(P_n^{(\lambda)}(\alpha))^{d_\lambda},$$

如所愿。 □

3.3 定理 3.19 的应用：多项式及示例

在本小节中，我们通过直接计算低秩（即 $n=l+4$、$l+5$）情形，将定理 3.19 应用于求得 $J_{l,\ n}$-模 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)}$ 在 $n\ge l+4$ 条件下、满足所有 $l\le 2$ 情形时的 Gram 行列式闭式。我们还研究

情形 $\lambda=(l+2)$、(1^{l+2})、$(l+1,1)\vdash l+2$ 和 $\lambda=(l+1,1)^T\vdash l+2$，其中 $l>0$。
我们先举例说明满足 $\mathcal{S}_\lambda$ 为 1 维的 λ。
(3.26) 对于 $l=0$，直接计算可得

$$\mathtt{D}^{(4)}_{(2,(2))}=(\alpha-1)\alpha\left(\alpha^2+\alpha-4\right),\qquad \mathtt{D}^{(5)}_{(3,(2))}=(\alpha-1)\left(\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2\right),$$
$$\mathtt{D}^{(4)}_{(2,(1^2))}=(\alpha-2)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+2),\quad \mathtt{D}^{(5)}_{(3,(1^2))}=(\alpha-1)(\alpha+2)\left(\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1\right),$$

对于 $l=1$，我们考虑这里的行分拆和列分拆 λ。在这些情形下，直接计算可得

$$\mathtt{D}^{(5)}_{(3,(3))}=(\alpha-2)^2\alpha^2(\alpha+1)\left(\alpha^2+3\alpha-6\right),\quad \mathtt{D}^{(6)}_{(4,(3))}=(\alpha-2)^2\alpha^3\left(\alpha^3+4\alpha^2-4\alpha-10\right),$$
$$\mathtt{D}^{(5)}_{(3,(1^3))}=(\alpha-3)(\alpha-2)^2(\alpha+1)(\alpha+2)^3,\quad \mathtt{D}^{(6)}_{(4,(1^3))}=(\alpha-2)^2(\alpha+2)^3\left(\alpha^3-2\alpha^2-4\alpha+2\right).$$

因此，使用定理 3.19 中的记号，我们在这里有 $\mathtt{D}^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}=C^{(\lambda)}(\alpha)P^{(\lambda)}_n(\alpha)$，其中

$$C^{(2)}(\alpha)=(\alpha-1),\qquad C^{(1^2)}(\alpha)=(\alpha-1)(\alpha+2),$$
$$C^{(3)}(\alpha)=(\alpha-2)^2\alpha^2,\qquad C^{(1^3)}(\alpha)=(\alpha-2)^2(\alpha+2)^3,$$

而序列 $P^{(\lambda)}_n(\alpha)$ 完全由切比雪夫递推关系以及“初始条件”确定：

$$P^{(2)}_4(\alpha)=\alpha(\alpha^2+\alpha-4),\qquad P^{(2)}_5(\alpha)=\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2,$$
$$P^{(1^2)}_4(\alpha)=(\alpha-2)(\alpha+1),\qquad P^{(1^2)}_5(\alpha)=\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1,$$
$$P^{(3)}_5(\alpha)=(\alpha+1)\left(\alpha^2+3\alpha-6\right),\quad P^{(3)}_6(\alpha)=\alpha\left(\alpha^3+4\alpha^2-4\alpha-10\right),$$
$$P^{(1^3)}_5(\alpha)=(\alpha+1)\left(\alpha-3\right),\qquad P^{(1^3)}_6(\alpha)=\left(\alpha^3-2\alpha^2-4\alpha+2\right).$$

利用 3.8，我们可以显式写出每个多项式 $P^{(\lambda)}_n$。我们将在接下来的这一段中讨论这一点，并以一个一般公式处理更多情形。
(3.27) 通过直接计算 $\lambda=(l+2)$ 和 (1^{l+2}) 在 $-1\le l\le 12$ 和 $n=l+4,l+5$ 时的格拉姆矩阵 $\mathtt{D}^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$ $\lambda=$，我们得到（使用定理 3.19 的记号）

$$C^{(l'+2)}(\alpha)=(\alpha+(l'-1))^{l+1}(\alpha-2)^{\frac{1}{2}l'(l'+3)},\tag{3.3.1}$$
$$C^{(1^{l+2})}(\alpha)=(\alpha-(l+1))^{l+1}(\alpha+2)^{\frac{1}{2}(l+2)(l+1)},\tag{3.3.2}$$

and

$$P^{(l'+2)}_{l'+4+k}=P^U_{k+4}(\alpha)+(3l'+1)P^U_{k+3}(\alpha)+\left(2l'^2-l'-2\right)P^U_{k+2}(\alpha)$$
$$+(l'+1)((2l'-1)P^U_{k+1}(\alpha)-P^U_k(\alpha)),\tag{3.3.3}$$
$$P^{(1^{l+2})}_{l+4+k}=P^U_{k+3}(\alpha)-(l+1)(P^U_{k+2}(\alpha)+P^U_{k+1}(\alpha)).\tag{3.3.4}$$

这些公式已对 $-1\le l\le 12$ 和 $0\le l'\le 12$ 验证成立。

猜想 3.27.1。 公式 (3.3.1)、(3.3.2)、(3.3.3) 和 (3.3.4) 对所有$l \geq -1$ 和 $l' \geq 0$均成立。

（**3.28**）通过直接计算，并使用公式 **(3.3.3)** 和 **(3.3.4)**（包括$l,\ l' > 12$），我们得到:

$$P_{l'+4}^{(l'+2)} = (\alpha + l')\left(\alpha^2 + (2l'+1)\alpha - 2(l'+1)\right), \tag{3.3.5}$$

$$P_{l+4}^{(1^{l+2})} = (\alpha+1)(\alpha-(l+2)). \tag{3.3.6}$$

（**3.29**）如我们在 §2.2 中所见，对于 $l = 1$，我们有格拉姆行列式

$$\mathtt{D}_{(3,(2,1))}^{(5)} = (\alpha-2)^3\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha^4-7\alpha^2+3)^2,$$
$$\mathtt{D}_{(4,(2,1))}^{(6)} = (\alpha-2)^3\alpha(\alpha+2)(\alpha+4)(\alpha-1)^2\alpha^2(\alpha+1)^2\left(\alpha^2-7\right)^2.$$

将定理中的 **(3.2.13)** 与之比较，对于 $n \geq 5$，我们有

$$\mathtt{D}_{(n-2,(2,1))}^{(n)} = C^{(2,1)}(\alpha)(P_n^{(2,1)}(\alpha))^2,$$

由于 P^λ 是约化的，我们推得

$$C^{(2,1)}(\alpha) = (\alpha-2)^3\alpha(\alpha+2)(\alpha+4),$$

作为这两个行列式的最大公因子。因此我们推得 $P_n^{(2,1)} = \mathbf{P}_n^{a\ b}$. 其初始条件为（在 $n = 5 = l+4$ 和 $n = 6 = l+5$ 处）

$$a = \alpha^4 - 7\alpha^2 + 3, \qquad b = (\alpha-1)\alpha(\alpha+1)\left(\alpha^2-7\right).$$

利用 3.8，我们可以确定

$$P_n^{(2,1)} = P_n^U(\alpha) - 4P_{n-2}^U(\alpha) - 4P_{n-4}^U(\alpha) - 2P_{n-6}^U(\alpha).$$

(3.30) 类似地，对于 $l = 2$，通过直接计算低秩格拉姆行列式并应用定理 3.19，得到

$$C^{(3,1)}(\alpha) = (\alpha-3)^5(\alpha-2)^2(\alpha-1)^3(\alpha+1)^6(\alpha+4)(\alpha+6),$$
$$C^{(2,2)}(\alpha) = (\alpha-3)^3(\alpha-1)^6(\alpha+1)^3(\alpha+4)^4,$$
$$C^{(2,1,1)}(\alpha) = (\alpha-3)^6(\alpha-1)^3(\alpha+1)^5(\alpha+2)^3(\alpha+4)^4,$$

and

$$\begin{aligned} P_n^{(3,1)}(\alpha) &= P_n^U(\alpha) + 2P_{n-1}^U(\alpha) - 9P_{n-2}^U(\alpha) \\ &\quad - 4P_{n-5}^U(\alpha) - P_{n-6}^U(\alpha) - 2P_{n-7}^U(\alpha) - 3P_{n-8}^U, \\ P_n^{(2,2)}(\alpha) &= P_{n-2}^U(\alpha) - 2P_{n-3}^U(\alpha) - 5P_{n-4}^U(\alpha) + 6P_{n-5}^U(\alpha) - 3P_{n-6}^U(\alpha), \\ P_n^{(2,1,1)}(\alpha) &= P_{n-1}^U(\alpha) - 2P_{n-2}^U(\alpha) - 6P_{n-3}^U(\alpha) \\ &\quad + 6P_{n-4}^U(\alpha) - 2P_{n-5}^U(\alpha) + 2P_{n-6}^U(\alpha) - 3P_{n-7}^U(\alpha). \end{aligned}$$

(3.31) 对于 $2 < l \leq 7$，通过直接计算格拉姆行列式 $\mathbf{D}^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$（其中 $\lambda = (l+1,1),(l+1,1)^T$ 和 $n = l+4, l=5$），并应用定理 3.19，得到

$$
\begin{aligned}
C^{(4,1)}(\alpha) &= (\alpha-3)^{16}(\alpha-2)^5\alpha^{11}(\alpha+2)^{10}(\alpha+6)(\alpha+8) \\
C^{(l'+1,1)}(\alpha) &= (\alpha-3)^{(l'-1)(l+1)(l+3)/3}(\alpha-2)^{(l'-1)(l+2)/2}\alpha^{l'(l'+3)/2}(\alpha+(l'-3))^{l'(l'+1)/2} \\
&\quad \times (\alpha+(l'-1))^{(l'+1)(l'+2)/2}(\alpha+2l')(\alpha+2(l'+1)), \qquad (3.3.7)
\end{aligned}
$$

其中最后一个公式对 $l' \geq 4$ 有效，并且

$$
\begin{aligned}
C^{(l+1,1)^T}(\alpha) &= (\alpha+4)^{l(l+1)(l+2)/6}(\alpha+2)^{l(l+1)/2}(\alpha+1)^{(l-1)(l+1)(l+3)/3} \\
&\quad \times (\alpha-(l-1))^{l(l+1)/2}(\alpha-(l+1))^{(l+1)(l+2)/2}, \qquad (3.3.8)
\end{aligned}
$$

该式对 $l \geq 1$ 成立。相应的切比雪夫级数为

$$
\begin{aligned}
P^{(l''+1,1)}_{l''+4+k} &= P^U_{k+6}(\alpha) + 2(2l''-3)P^U_{k+5}(\alpha) + (5l''^2-21l''+13)P^U_{k+4}(\alpha) \\
&\quad + (l''-2)\left[\left(2l''^2-17l''+7\right)P^U_{k+3}(\alpha) - \left(6l''^2-19l''+5\right)P^U_{k+2}(\alpha)\right] \\
&\quad + 4\left(l''^3-6l''^2+8l''-1\right)P^U_{k+1}(\alpha) - (l''-3)\left(2l''^2-4l''-1\right)P^U_k(\alpha) \\
&\quad - (3l''^2-3l''-4)P^U_{k-1}(\alpha) - (l''+1)P^U_{k-2}(\alpha), \qquad (3.3.9)
\end{aligned}
$$

该式对 $l'' \geq 2$ 成立，并且

$$
\begin{aligned}
P^{(l+1,1)^T}_{l+4+k} &= P^U_{k+5}(\alpha) - 2(l-1)P^U_{k+4}(\alpha) + l(l-5)P^U_{k+3}(\alpha) + 3l(l-1)P^U_{k+2}(\alpha) \\
&\quad 2(l^2-2l-1)P^U_{k+1}(\alpha) + l(l-1)P^U_k(\alpha) - (l+1)P^U_{k-1}(\alpha), \quad (3.3.10)
\end{aligned}
$$

该式对 $l \geq 1$ 成立。

猜想 3.31.1。 公式 (3.3.7)、(3.3.8)、(3.3.9) 和 (3.3.10) 对所有$l \geq 1$、 $l' \geq 4$ 和 $l'' \geq 2$ 成立。

因此，我们注意到，在所有直接计算的情形中，定理 3.19 都可以加强如下。

命题 3.32. 对于 $\lambda \vdash l+2$，使得以下条件之一成立： $l \leq 2$； $\lambda = (l+2)$，<*style id='11'>*(1^{l+2})且 $-1 \leq l \leq 12$； $\lambda = (l+1,1)$，$(l+1,\ 1)^T$且 $1 \leq l \leq 7$，则定理 *3.19* 中的多项式 $C^{(\lambda)}$和 $P^{(\lambda)}_n$具有整数系数。此外，每个这样的$C^{(\lambda)}$ 都只有整数根。

猜想 3.32.1. 命题 *3.32* 对所有 $l \geq -1$ 和 $\lambda \vdash l+2$均成立。

注3.33。 对于给定的 l和 $\lambda \vdash l+2$，我们注意到，尽管多项式$P^{(\lambda)}_n$仅作为 $n \geq l+4$的 Gram 行列式中的因子出现，但带有 $n < l+4$ 的同一多项式级数由切比雪夫

递推唯一确定。对于我们已计算的情形，下面给出 $P^{(\lambda)}_{l+3}$和 $P^{(\lambda)}_{l+2}$：

$$P^{(2,2)}_5(\alpha) = (\alpha-3)(\alpha+1), \qquad P^{(2,2)}_4(\alpha) = 4(\alpha-2),$$
$$P^{(l+2)^T}_{l+3}(\alpha) = \alpha-(l+1), \qquad P^{(l+2)^T}_{l+2}(\alpha) = l+2,$$
$$P^{(l'+2)}_{l'+3}(\alpha) = (\alpha+l'-1)(\alpha+2(l'+1)), \qquad P^{(l'+2)}_{l'+2}(\alpha) = (l'+2)(\alpha+2l'),$$
$$P^{(l''+1,1)^T}_{l''+3}(\alpha) = (\alpha+2)(\alpha-(l''-1))(\alpha-(l''+1)), \quad P^{(l''+1,1)^T}_{l''+2}(\alpha) = (l''+2)(\alpha+1)(\alpha-l''),$$

其中这些公式适用于高度 $l \geq -1$、$l' \geq 0$ 和 $l'' \geq 1$。此外，当 $l \geq 2$ 时，我们有

$$P^{(l+1,1)}_{l+3}(\alpha) = (\alpha-2)(\alpha+l-3)(\alpha+l-1)(\alpha+2l),$$
$$P^{(l+1,1)}_{l+2}(\alpha) = (l+2)(\alpha+l-2)\left(\alpha^2+(2l-3)\alpha-2l\right).$$

值得注意的是，我们观察到，对于迄今计算的所有情形，$P^{(\lambda)}_{l+3}(\alpha)$ 都是首一的，只含整数根，并且（相差一个标量因子）整除 King 多项式（见 [7, §5.1]）。此外，在所有这些情形中，$P^{(\lambda)}_{l+3}(\alpha)$ 都含有一个整体整数因子 $l+2$；将其与 (3.3.5) 和 (3.3.6) 比较可知，对于 $l \geq 1$

$$P^{(l+1,1)^T}_{l+2}(\alpha) = (l+2)P^{(l)^T}_{l+2}(\alpha), \qquad P^{(l+1,1)}_{l+2} = (l+2)P^{(l)}_{l+2}(\alpha).$$

我们还注意到等式 $P_{(2,2)\,5}(\alpha) = P^{(1^3)}{}_5(\alpha)$ 和 $P_{(2,2)\,4}(\alpha) = 4P_{(1^3)\,4}(\alpha)$。

4 多项式 $P^{(\lambda)}_n$ 的根

在本节中，我们将对所考虑情形下多项式 $P^{(\lambda)}_n$的根的分布作一些观察。首先注意到，这些多项式的所有根都必须是实数；由于形式 $\langle\,,\,\rangle$ 在 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)}$ 上除实轴外均非退化（参见 3.13），因此我们得到：

推论 4.0.1。固定 l 并令 $\lambda \vdash l+2$。设 $C^{(\lambda)} \in \mathbb{C}[\alpha]$ 和 $P^{(\lambda)}_n \in \mathbb{C}[\alpha]$ 如定理 *3.19* 所述，且 $n \geq l+4$。那么 $C^{(\lambda)}$ 和 $P^{(\lambda)}_n$都有实根。

对于目前已计算的情形，我们将使用中值定理来给出根的取值范围。首先汇总一些具有递增性质的切比雪夫级数的恒等式会很有帮助，我们将在 §4.1 中进行这项工作。

4.1 渐增级数的恒等式

下文中，设 P 为一个切比雪夫级数。

(4.1) 设 P 对 $n \geq N$ 具有爬升性质，并进一步假设，对于某个 $k \in \mathbb{Z}$ 和 $x_0 \in \mathbb{C}$，有 $P_k(x_0) = 0$。由于该级数没有公因子，因此有 $P_{k\pm1}(x_0) \neq 0$。于是，切比雪夫递推表明

$$P_{k+n}(x_0) = P^U_n(x_0)P_{k+1}(x_0), \tag{4.1.1}$$

对任意 $n \in \mathbb{Z}$ 均成立。因此，具有爬升性质的级数只有在 x_0 满足 $P_N^U(x_0) = 0$ 时，才可能在 x_0 处有一个周期为 $N > 0$ 的重复根。

下面的引理将有助于我们（在 §4.2 中）分析 §3.2.3 中引入的多项式 $P_n^{(\lambda)}$ 的根的分布。

引理 4.2. 设 P_n 是一个对 $n \geq N$ 具有渐增性质的级数。设 k、k' 和 r 为满足 $r < k + k'$ 的正整数。则

$$P_{N+k}\left(2\cos\left(\frac{r\,\pi}{k+k'}\right)\right) = (-1)^r P_{N-k'}\left(2\cos\left(\frac{r\,\pi}{k+k'}\right)\right).$$

证明。 在本证明中令 $\theta = \pi/(k+k')$。利用 (3.1.2) 可得

$$\begin{aligned} P_{k+k'}^U\left(2\cos\left(r\,\theta\right)\right) &= \sin\left(r\,\pi\right)/\sin\left(r\,\theta\right) = 0, \\ P_{k+k'+1}^U\left(2\cos\left(r\,\theta\right)\right) &= \sin\left(r\,\pi + r\,\theta\right)/\sin\left(r\,\theta\right) = (-1)^r, \end{aligned}$$

注意到 $\sin(r\,\theta) \neq 0$。因此，根据 (4.1.1)，对于任意 $i \in \mathbb{Z}$，我们有

$$P_{k+k'+i}^U\left(2\cos\left(r\,\theta\right)\right) = (-1)^r P_i^U\left(2\cos(r\,\theta)\right). \tag{✞}$$

由 3.8 可得

$$\begin{aligned} P_{N+k}(2\cos(r\,\theta)) &= \sum_{i=-(d+1)}^{d+1} a_i P_{k+i}^U(2\cos(r\,\theta)) \\ &= (-1)^r \sum_{i=-(d+1)}^{d+1} a_i P_{-k'+i}^U(2\cos(r\,\theta)) \\ &= (-1)^r P_{N-k'}(2\cos(r\,\theta)), \end{aligned}$$

其中第二行使用了 (✞)，并将指标平移了 $i \mapsto i - k'$。 □

4.2 $P_n^{(\lambda)}$的根

(4.3) 首先，我们考虑无穷族级数 $P_n^{(l+2)^T}(\alpha)$（即在已验证的范围之外继续使用公式 (3.3.3)）。以$n = l + 4 + k$ 为参数，其中 $k \geq 0$，可知 $P_n^{(l+2)^T}(\alpha)$ 的次数为 $k + 2$。应用引理 4.2，并取 $k' = 2$，对于任意 $r = 1,\ \ldots\ldots,\ k+1$

$$P_n^{(l+2)^T}(x_r^{(k)}) = (-1)^r(l+2),$$

其中 $x_r^{(k)} := 2\cos(r\pi/(k+2))$。我们还可以确定

$$\begin{aligned} P_n^{(l+2)^T}(x_{k+2}^{(k)}) &= P_n^{(l+2)^T}(-2) = (-1)^{k+2}(4+k+l), \\ P_{l+4+k}^{(l+2)^T}(l+2) &= -P_k^U(l+2) < 0, \quad (l > -1), \\ \lim_{x\to\infty} P_n^{(l+2)^T}(x) &= \lim_{x\to\infty} x^{k+2} = +\infty. \end{aligned}$$

在第二行中，我们注意到 $l+2$ 是 $P_{l+4}^{(l+2)^T}$ 的一个根，并应用了 (4.1.1)。因此，通过应用中值定理可知，对于$l>-1$， $P_{l+4+k}^{(l+2)^T}(\alpha)$ 有 $k+2$ 个互不相同的实根 $y_r^{(k)}$，满足 $r=0,\ 1,\ \ldots\ldots,\ k+1$，且满足 $y_0^{(k)}>l+2$ 和

$$-2<y_{k+1}^{(k)}<x_{k+1}^{(k)}<y_k^{(k)}<x_k^{(k)}<\cdots<x_2^{(k)}<y_1^{(k)}<x_1^{(k)}<2.$$

(4.4) 现在考虑 $l>-1$ 时的无穷族 $P_n^{(l+2)}(\alpha)$。其次数为$k+3$（参数化方式相同，即 $n=l+4+k$）。这里我们计算（对于$r=1$、……、$k+1$）得到

$$\begin{aligned}P_n^{(l+2)}(\alpha)(x_r^{(k)})&=(-1)^r(l+2)(\alpha+2l),\\ P_n^{(l+2)}(\alpha)(x_0^{(k)})&=2(1+l)(2+l).\end{aligned}$$

对于 $l>0$，因子 $(\alpha+2l)$ 在 $(-2,\ 2)$ 上为正。因此，在这种情形下，中值定理表明， $P_{l+4+k}^{(l+2)}(\alpha)$ 至少有 $k+1$ 个不同的根，可写为 $z_r^{(k)}$，其中 $r=0,\ 1$、……、$k,$ 满足

$$-2<x_{k+1}^{(k)}<z_k^{(k)}<x_k^{(k)}<\cdots<x_1^{(k)}<z_1^{(k)}<x_1^{(k)}<z_0^{(k)}<x_0^{(k)}=2.$$

剩余根的分布（如果存在）取决于 k和 l的值。例如，当 $l>1$ 和 $n=l+4+k>6$ （ $l>1$时除有限多个情形外）， $P_{l+4+k}^{(l+2)}(\alpha)$ 还有两个根 $z_{k+1}^{(k)}$ 和 $z_{k+2}^{(k)}$，它们满足

$$-\infty<z_{k+2}^{(k)}<-2(l+1)<-2l<z_{k+1}^{(k)}<-(l+1).$$

通过使用 (4.1.1) 在 $k=-1,-2,$ 情形的（整数）根处对 $P_{l+4+k}^{(l+2)}$ 求值，并考察当 $|x|\to\infty$ 时的行为，即可确定这些界（参见 注3.33）。

(4.5) 我们可以使用类似的论证，得到级数$P_{(l+1,1)_n}$ 以及 $P_n^{(l+1,1)^T}$的根的界。这里， $P_{(l+1,1)\,l+4+k}$的次数为 $k+5$，而 $P_{(l+1\ 1\ ^T,)}$的次数为 $k+4$。注意到当 $l'>4$ 时， $P_{l+4+k}^{(l'+1,1}{}_{)\,l'+3}(\alpha)$ 在 $(-2,2)$ 上为负；当 $l>3$ 时，$P_{l+3}^{(l+1,1)}(\alpha)$ 在 $(-2,2)$ 上为正。应用引理 4.2 （此时取 $k'=1$），可得

$$\operatorname{sgn}(P_{l'+4+k}^{(l'+1,1)}(X_r^{(k)}))=-(-1)^r=-\operatorname{sgn}(P_{l+4+k}^{(l+1,1)^T}(X_r^{(k)})),$$

其中 $X_r^{(k)}:=2\cos(r\pi/(k+1))$，其中 $r=1,\ldots,k$，对于 l'和 l亦如此。因此，在每种情形下，我们都观察到 $k-1$ 个不同的根， $Y_{(k)r}\ \in(-2,2)$，其中 $r=1,\ldots,k-1$，满足

$$-2<X_k^{(k)}<Y_{k-1}^{(k)}<X_{k-1}^{(k)}<\cdots<X_2^{(k)}<Y_1^{(k)}<X_1^{(k)}<2.$$

通过明确验证，我们在每种情形下还观察到另外两个根
$X_1^{(k)} < Y_0^{(k)} < X_0^{(k)} = 2$ 和 $-2 = X_{k+1}^{(k)} < Y_k^{(k)} < X_k^{(k)}$

$$-(-1)^0 P_{l'+4+k}^{(l'+1,1)}(X_0^{(k)}) > 0, \qquad -(-1)^{k+1} P_{l'+4+k}^{(l'+1,1)}(X_{k+1}^{(k)}) > 0,$$
$$(-1)^0 P_{l+4+k}^{(l+1,1)^T}(X_0^{(k)}) > 0, \qquad (-1)^{k+1} P_{l+4+k}^{(l+1,1)^T}(X_{k+1}^{(k)}) > 0,$$

对于 l, l' 与之前一样，且 $k \geq 0$。

这使得至多还有四个 $P^{(l'+1,1}{}_n$ 根未得到解释，此外还有三个$P_n^{(l+1,1)^T}$。这些剩余的根可以通过在 $k = -1, -2$ 情形的（整数）根处求值来界定（参见注3.33），也可以通过考察渐近行为来界定。我们发现如下结果：$P_n^{(l+1,1)^T}$（其中 $l > 3$）还有三个根 $Y_{(k)\,k+1}, Y_{(k)\,-1}, Y_{(k)\,-2}$，它们满足

$$Y_{k+1}^{(k)} < -2 < 2 < l-1 < Y_{-1}^{(k)} < l < l+1 < Y_{-2}^{(k)},$$

而 $P^{(l'+1,1}{}_n$（其中 $l' > 4$）还有四个根 $Z_{k+3}^{(k)}, Z_{k+2}^{(k)}, Z_{k+1}^{(k)}, Z_{-1}^{(k)}$，它们满足

$$Z_{k+3}^{(k)} < -2l' < Z_{k+2}^{(k)} < -l'+1 < -l'+2 < Z_{k+1}^{(k)} < -l'+3 \leq -2 < 2 < Z_{-1}^{(k)}.$$

级数 $P_{6+k}^{(2,2)}(\alpha)$ 的根也可以用类似方法分析，但为简洁起见，我们省略这部分。基于我们在此处的观察，我们提出如下猜想：

猜想4.5.1。固定 l 并令 $\lambda \vdash l+2$。对于每个 $k \geq -1$，多项式$P_{(\lambda)\,l+4+k}$无平方因子。此外，当 k足够大时，$P_{l+4+k}^{(\lambda)}$在区间 $[-2,2]$之外有固定数量的根，并且集合

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} \{\alpha \in [-2,2] \mid P_{l+4+k}^{(\lambda)}(\alpha) = 0\},$$

在 $[-2,2]$ 中稠密。

5 Gram行列式装饰的Rollet图

定理 3.19 是计算 KY 代数表示论 ToR方法的“自举”数据时的主要技术结果。在 §6 中，我们将看到如何将其直接应用于表示论。不过，从一般表示论的角度来看，研究自举之外的 KY Gram矩阵也很有趣。在 $l = -1$ 情形中，存在一种非常简洁的模式，它与有限特征域上对称群的相应经典问题有关。这里我们将证明，这种模式可以推广到其他 l值。

在 §5.2.1 和 §A 中，我们回顾了 $l = -1$ 情形。由此可见，将 $\mathsf{D}_{(p,\lambda)}^n$ 表示为相应边缘顶点函数 $\mathcal{V}_{(p,\lambda)}^n$的形式是自然的；

而这个“修正”因子与适当次幂的相应切比雪夫多项式之比有关。在 §5.1 中，我们以一种形式化地推广到所有 l 的方式来表达这一点。在 §5.3.1-5.3.3 中，我们将其与直接计算的结果进行比较。

5.1 臂性质的陈述与猜想 5.2.1

（**5.1**）借助在 §3.2.3 中确定的多项式 $P_n^{(\lambda)}$，并受 $l=-1$ 公式 (A.0.1) 的证明（以及有限秩计算）的启发，我们可以定义

$$\mathcal{C}^n_{(p,\lambda)} = \prod_{\substack{(p+1,\mu)\ adjacent\\ to\ (p,\lambda)\ in\ \mathcal{R}_l}} \left(\frac{P_n^{(\mu)}}{P_{n-1}^{(\mu)}}\right)^{dim(\Delta^{n-1}_{(p+1,\mu)})} \tag{5.1.1}$$

- 至少对于 $(p,\ \lambda)$ 的取值，只要图形条件有意义即可。

$\mathcal{C}^n_{(p,\lambda)}$ 的用途源于指标取值范围；在此范围内，我们有恒等式 $\mathcal{V}^n_{(p,\lambda)} = \mathcal{C}^n_{(p,\lambda)}$（参见 2.3.2）。我们称之为臂性质。尤其请参见猜想 5.2.1。

本文讨论的一条关键定理（并由一个猜想推广）将边缘顶点函数 (2.3.2) 与 Rollet 图 2.31 的臂部联系起来，并涉及一族针对每个整数分拆定义的切比雪夫多项式。换言之，原则上，它提供了一种计算几乎所有 KY Gram 行列式的方法。

定理 5.2 (臂性质). 对 l、m 和 p 的充分条件，使得对于每个 $\lambda \vdash l+2$，具有 $p \geq l+2$ 和 $m \geq 1$ 的臂 $J_{l,p+2m}$ 标准模 $\Delta^{p+2m}{}_{(p,\lambda)}$ 满足臂性质 —— 也就是说，格拉姆行列式满足

$$\mathcal{V}^{n=p+2m}_{(p,\lambda)} = \mathcal{C}^{n=p+2m}_{(p,\lambda)} \tag{5.1.2}$$

根据（*2.3.2*）和（*5.1.1*），结果如下。对于 $m=1$，恒等式对所有l和 $p \geq l+3$都成立。对于 $l=-1$，恒等式对所有 $n=p+2m$都成立。对于 $l=0$，当 $m=2$ 和 $p \leq 8$时，以及当 $m=3$ 和 $p \leq 5$时，恒等式成立。对于 $l=1$，当 $m=2$ 和 $p \leq 7$时，恒等式成立。由于我们处于臂上，方程（*5.1.2*）等价于说

$$\mathtt{D}^{(n)}_{(p,\lambda)} \;=\; \left(\frac{P_n^{(\lambda)}}{P_{n-1}^{(\lambda)}}\right)^{d^{n-1}_{(p+1,\lambda)}} \prod_{\substack{v\ adjacent\\ to\ (p,\lambda)\ in\ \mathcal{R}_l}} \mathtt{D}^{(n-1)}_{(v)} \quad ,$$

其中

$$d^n_{(p,\lambda)} \;:=\; dim(\Delta^n_{(p,\lambda)}).$$

证明。 对于 $m=1$和 $p \geq l+3$，(5.1.2) 变为

$$\frac{\mathtt{D}^{(p+2)}_{(p,\lambda)}}{\mathtt{D}^{(p+1)}_{(p-1,\lambda)}} = \left(\frac{P_n^{(\lambda)}}{P_{n-1}^{(\lambda)}}\right)^{d^{p+1}_{(p+1,\lambda)}} ,$$

这由定理 3.19 得出，因为 $d^{p+1}{}_{(p+1,\lambda)} = d_\lambda$。

对于情形 $l = -1$，由 (A.0.1) 可知，对所有 n，臂性质都严格成立。对于其他情形，该恒等式在所示范围内可通过直接计算得到。 □

猜想 5.2.1。 公式 (5.1.2) 对所有 $l \geq -1$、 $p \geq l+2$ 和 $m \geq 1$均成立。

5.2 关于已证明部分的证明

5.2.1 装饰的 Rollet 图，针对 $l = -1$

图 3 展示了增添了标准 Gram 行列式纤维的 Rollet 图 $\mathcal{R}_{-1}$。（不耐烦的读者可直接跳到）图 8，查看表示论诠释的示意图。

图3已经相当密集。我们用这个情形来说明如何借助边缘顶点函数，更简洁地呈现这些信息。

(5.3) 为简洁起见，设 d_i =dim($\Delta^{(n-1)}{}_{(i,(1))}$)。那么 $\mathcal{R}^{\mathcal{V}}_{-1}$ 由下式给出

$$\alpha^{d_1} - \left(\tfrac{(\alpha-1)(\alpha+1)}{\alpha}\right)^{d_2} - \left(\tfrac{\alpha(\alpha^2-2)}{(\alpha-1)(\alpha+1)}\right)^{d_3} - \left(\tfrac{(\alpha^2-\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-1)}{\alpha(\alpha^2-2)}\right)^{d_4} - \left(\tfrac{\alpha(\alpha^2-1)(\alpha^2-3)}{(\alpha^2-\alpha-1)(\alpha^2+\alpha-1)}\right)^{d_5} - \cdots$$

- 其思路是完整地捕捉每个纤维：每个 d_i 都需要一个 n作为输入，因此该表达式给出了随 n 变化的纤维。也就是说，要还原纤维内部的结构，只需代入 n 和 p，即可求出 m。

例如，证明可见于 [18, 第10], 章，我们也在 §A 中附上了相关摘录。在这种情形下，切比雪夫多项式（经典）作为杨图几何的一部分出现（钩长等等——杨标准形量子化的工具），或者等价地，作为 Bratelli 图上的游走出现。

（虽然当然还存在其他可能的方法，而且尚不清楚那里的策略是否最有望推广到其他 l，但这种方法无疑启发了一种一般化，正如我们将看到的。）

(5.4) 例如，固定的 $m = (n-i)/2$ 切片（ $m = 1$ ）为：

$$\alpha^2 - \tfrac{(\alpha-1)^3(\alpha+1)^3}{\alpha^3} - \tfrac{\alpha^4(\alpha^2-2)^4}{(\alpha-1)^4(\alpha+1)^4} - \tfrac{(\alpha^2-\alpha-1)^5(\alpha^2+\alpha-1)^5}{\alpha^5(\alpha^2-2)^5} - \tfrac{(\alpha-1)^6\alpha^6(\alpha+1)^6(\alpha^2-3)^6}{(\alpha^2-\alpha-1)^6(\alpha^2+\alpha-1)^6} - \cdots$$

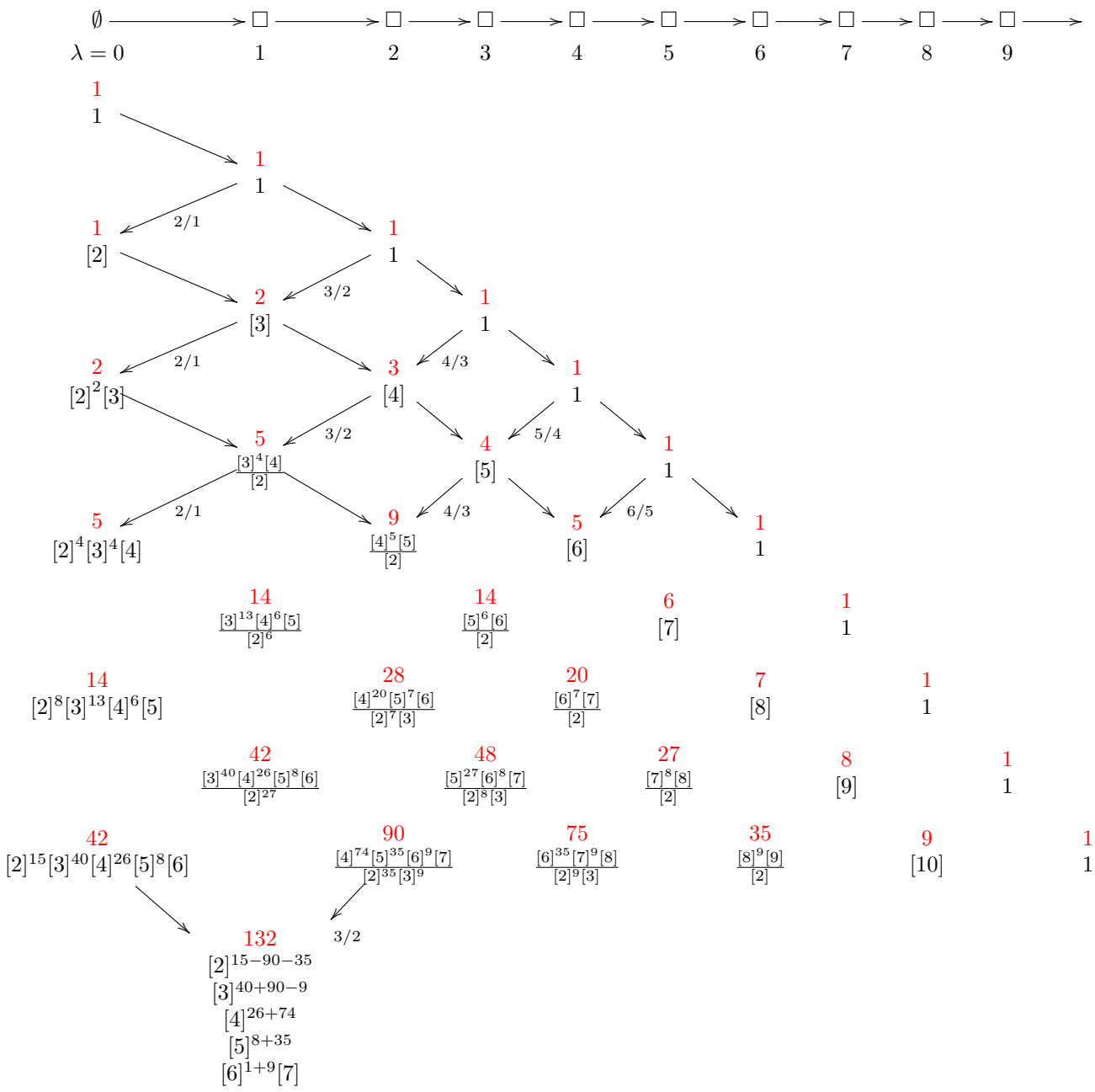


图3： $l = -1$ Rollet 图（上方）增加了许多标准 Gram 行列式（参数化方式如图8所示）——按秩递增 n向下排列，每个行列式位于其固定的标准模标签之下。这些节点纤维之间的边以示意方式表示它们如何由 [17]计算得出。

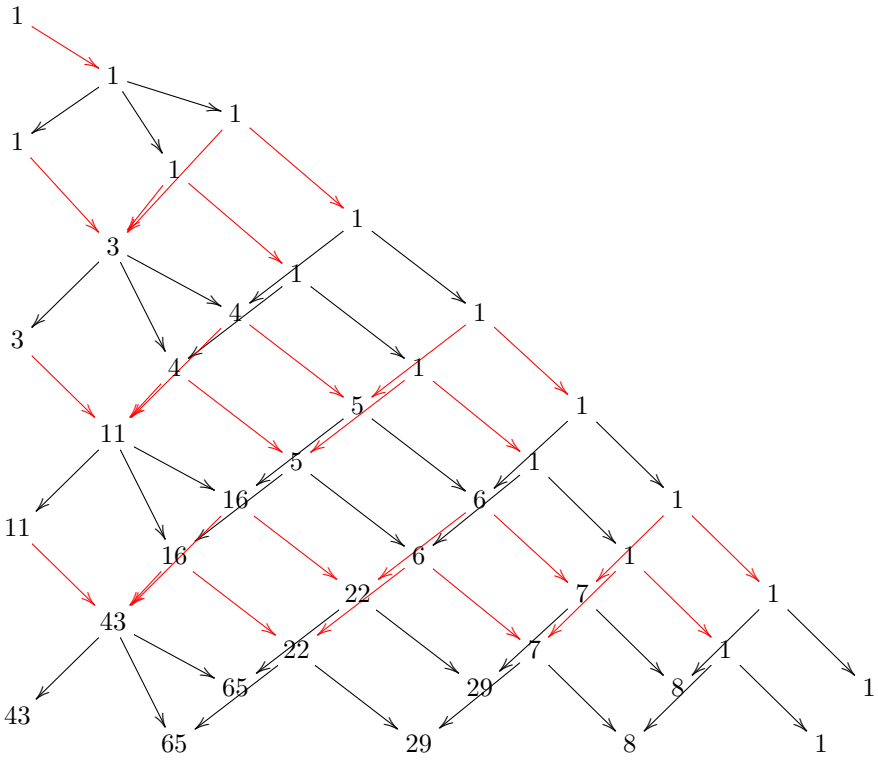


图4： $l = 0$的完整 Bratelli 图。从偶数 n 层指向奇数 n层的边标为红色，以便更清楚地区分各层。

5.3 示例

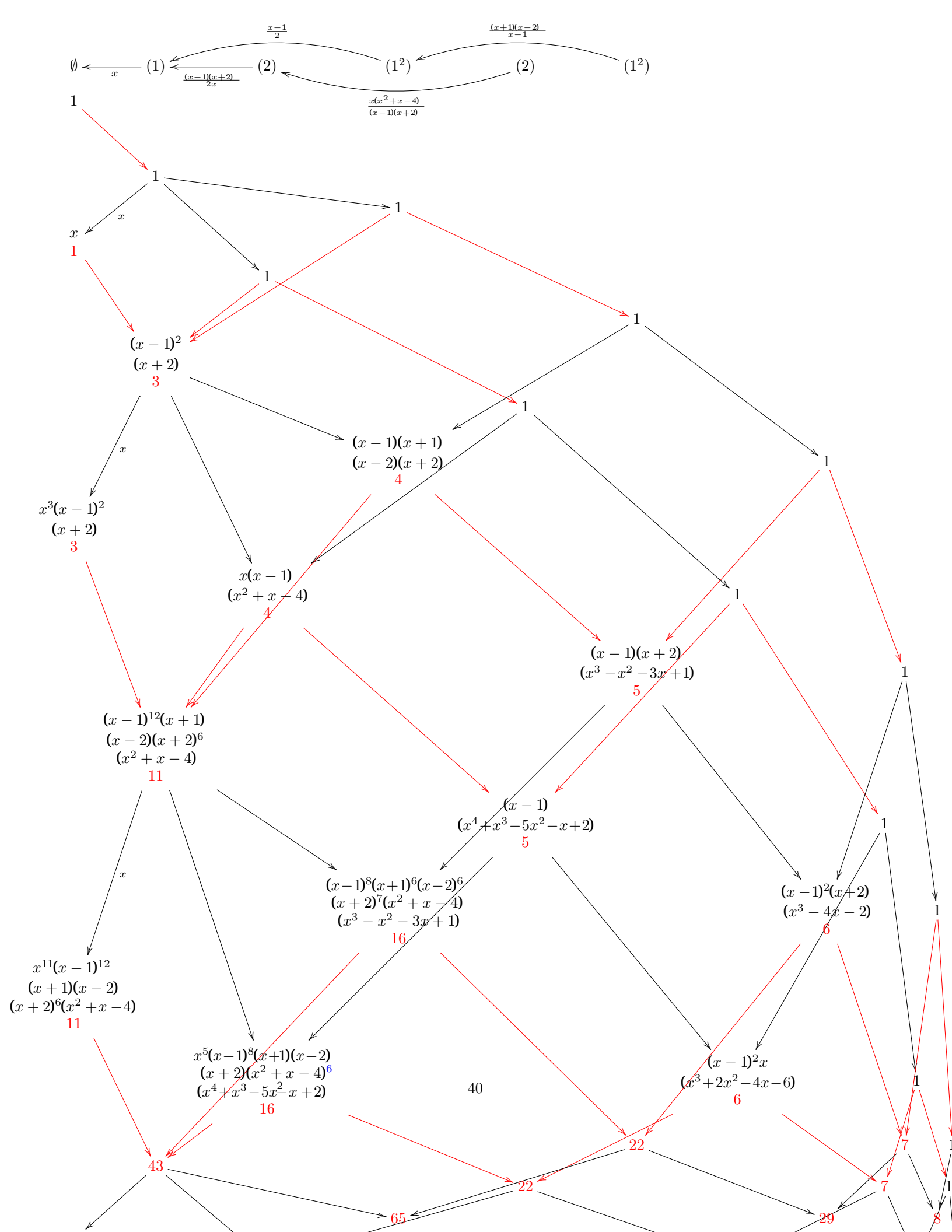
5.3.1 $l = 0$的装饰的 Rollet 图

这里给出一些 $l = 0$ 的装饰的 Rollet 图示例，以验证定理 5.2。首先，回顾一下 $l = 0$ 的未装饰的 Rollet 图如下：

$$\begin{array}{ccccccccc} & & (2) & - & (2) & - & (2) & - & \dots \\ \emptyset & - & (1) & & & & & & \\ & & & & (1^2) & - & (1^2) & - & (1^2) & - & \dots \end{array}$$

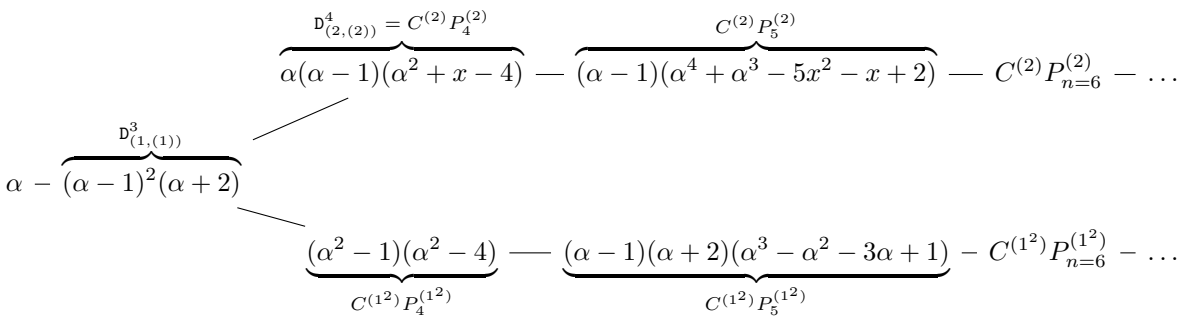
(5.5) 我们将再次使用标准模维数。 $l = 0$ 的标准模维数表如图4所示。

(5.6) $l = 0$ 的完整 Bratelli 图（给出格拉姆行列式，维数标注在下方并以红色显示）如图5所示。图中最顶端的一行表示


$\frac{x-1}{2}$
$\frac{(x+1)(x-2)}{x-1}$
$\emptyset$
x
(1)
(2)
(1^2)
(2)
(1^2)
$\frac{(x-1)(x+2)}{2x}$
$\frac{x(x^2+x-4)}{(x-1)(x+2)}$
1
1
1
x
1
1
1
$(x-1)^2$
$(x+2)$
3
1
1
x
$(x-1)(x+1)$
$(x-2)(x+2)$
4
1
$x^3(x-1)^2$
$(x+2)$
3
$x(x-1)$
(x^2+x-4)
4
1
$(x-1)(x+2)$
(x^3-x^2-3x+1)
5
1
1
$(x-1)^{12}(x+1)$
$(x-2)(x+2)^6$
(x^2+x-4)
11
$(x-1)$
$(x^4+x^3-5x^2-x+2)$
5
1
x
$(x-1)^8(x+1)^6(x-2)^6$
$(x+2)^7(x^2+x-4)$
(x^3-x^2-3x+1)
16
$(x-1)^2(x+2)$
(x^3-4x-2)
6
1
$x^{11}(x-1)^{12}$
$(x+1)(x-2)$
$(x+2)^6(x^2+x-4)$
11
$x^5(x-1)^8(x+1)(x-2)$
$(x+2)(x^2+x-4)^6$
$(x^4+x^3-5x^2-x+2)$
16
40
$(x-1)^2x$
(x^3+2x^2-4x-6)
6
1
43
22
7
1
22
7
1
65
29
8
1

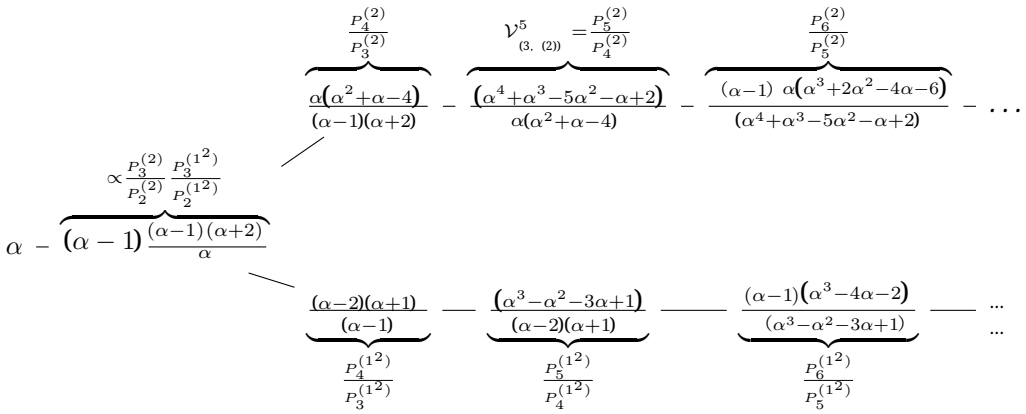
猜想的（除产生指数的维数外与 n 无关的）边因子。

命题 5.7。 *1*-杯积 *Gram* 行列式装饰图 $\mathcal{R}_0^1$ （如 *2.36* 所示）为



证明。 $p=0$，1 个顶点可通过直接计算得到。每条臂上的前两个顶点也可如此得到。此后，我们可以使用 3.1.1，尤其是 3.19 等，如上文所述，并注意此处 $\mathrm{di}\mathrm{m}(\Delta^n_{(n,\lambda)})=1$ 。 □

命题 5.8。 (*I*) 图 $\mathcal{R}_0^{(1)}$ （其中 (p,λ) 顶点为 $\mathcal{V}^{p+2}{}_{(p,\ \lambda)}$ ）由下式给出



(*II*) 图 $\mathcal{R}_0^{(2)}$ （即对于 $m=2$，因此对于顶点 $\emptyset$ 为 $n=4$ ；对于顶点（1）为 $n=5$ ；对于（2，（2））和（2，（1^2））为 $n=6$ ；对于（3，（2））和（3，（1^2））为 $n=7$ ；依此类推）

从（截至 $p=8$）：开始

$$\alpha^3 - \frac{(\alpha-1)^8(\alpha+2)^4}{\alpha^4} \begin{cases} \frac{\alpha^5\left(\alpha^2+\alpha-4\right)^5}{(\alpha-1)^5(\alpha+2)^5} - \overbrace{\frac{\left(\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2\right)^6}{\alpha^6(\alpha^2+\alpha-4)^6}}^{\mathcal{V}^7_{(3,(2))}=\left(\frac{P^{(2)}_5}{P^{(2)}_4}\right)^{d^6_{(4,(2))}}} - \frac{(\alpha-1)^7\alpha^7\left(\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha-6\right)^7}{(\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2)^7} - \cdots \\ \underbrace{\frac{(\alpha-2)^5(\alpha+1)^5}{(\alpha-1)^5}}_{\left(\frac{P^{(1^2)}_4}{P^{(1^2)}_3}\right)^{d^5_{(3,(1^2))}}} - \frac{\left(\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1\right)^6}{(\alpha-2)^6(\alpha+1)^6} - \frac{(\alpha-1)^7\left(\alpha^3-4\alpha-2\right)^7}{(\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1)^7} - \cdots \end{cases}$$

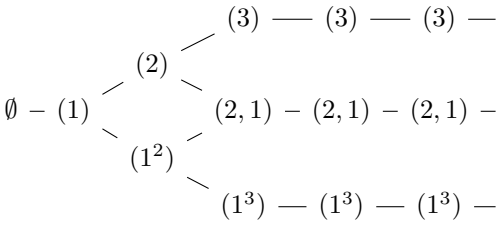
(III) 图 $\mathcal{R}_0^{(3)}$ 从（不计 $p=5$）开始：

$$\alpha^{11} - \frac{(\alpha-1)^{32}(\alpha+2)^{16}}{\alpha^{16}} \begin{cases} \frac{\alpha^{22}\left(\alpha^2+\alpha-4\right)^{22}}{(\alpha-1)^{22}(\alpha+2)^{22}} - \frac{\left(\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2\right)^{29}}{\alpha^{29}(\alpha^2+\alpha-4)^{29}} - \frac{(\alpha-1)^{37}\alpha^{37}\left(\alpha^3+2\alpha^2-4\alpha-6\right)^{37}}{(\alpha^4+\alpha^3-5\alpha^2-\alpha+2)^{37}} - \cdots \\ \frac{(\alpha-2)^{22}(\alpha+1)^{22}}{(\alpha-1)^{22}} - \frac{\left(\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1\right)^{29}}{(\alpha-2)^{29}(\alpha+1)^{29}} - \frac{(\alpha-1)^{37}\left(\alpha^3-4\alpha-2\right)^{37}}{(\alpha^3-\alpha^2-3\alpha+1)^{37}} - \cdots \end{cases}$$

证明。(I) 由 5.7 得出。(II、III) 目前，该命题仅适用于明确列出的情形。因此，证明可由直接计算得出。 □

5.3.2 装饰的 Rollet 图，$l=1$

这里我们给出一些装饰的 Rollet 图示例，以验证定理 5.2。首先，回顾一下 $l=1$ 对应的未装饰的 Rollet 图如下：



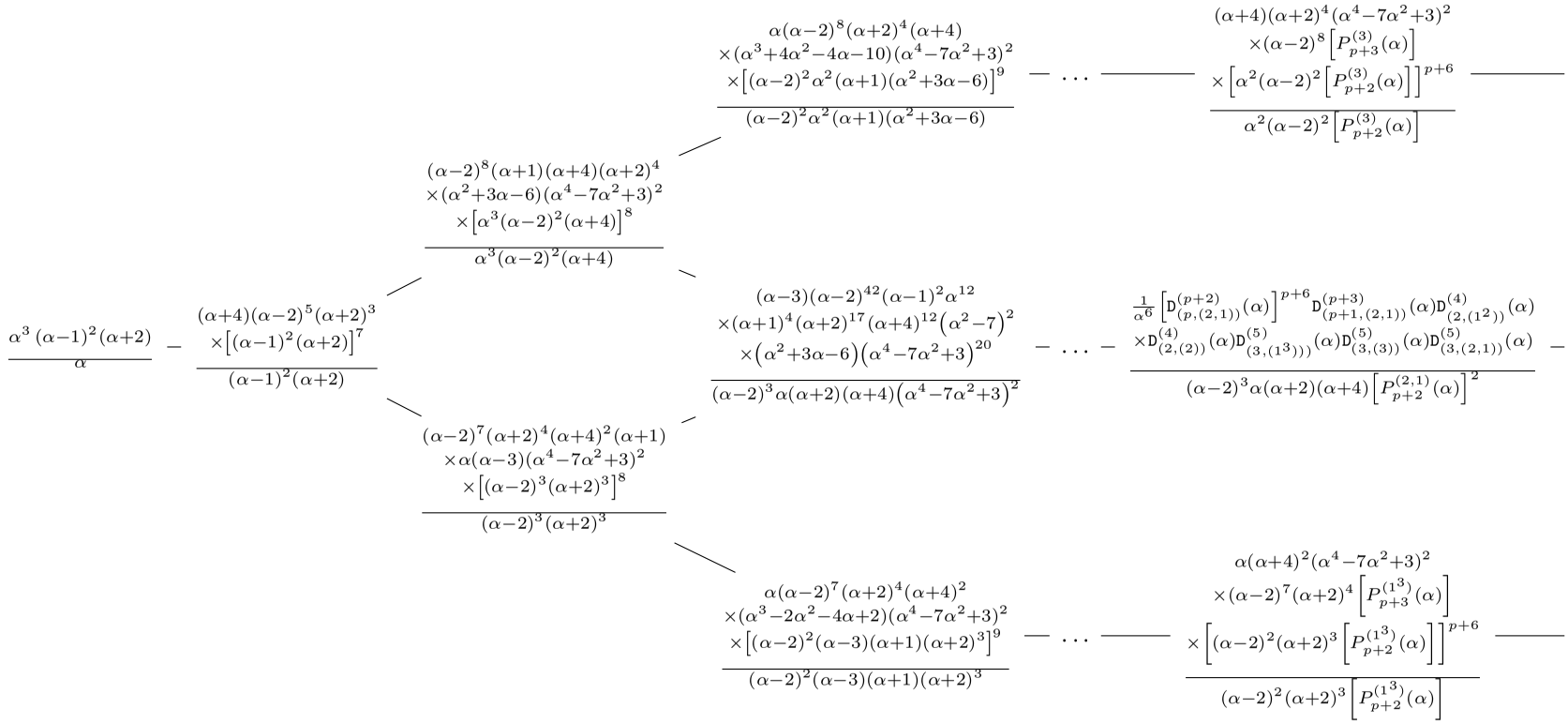
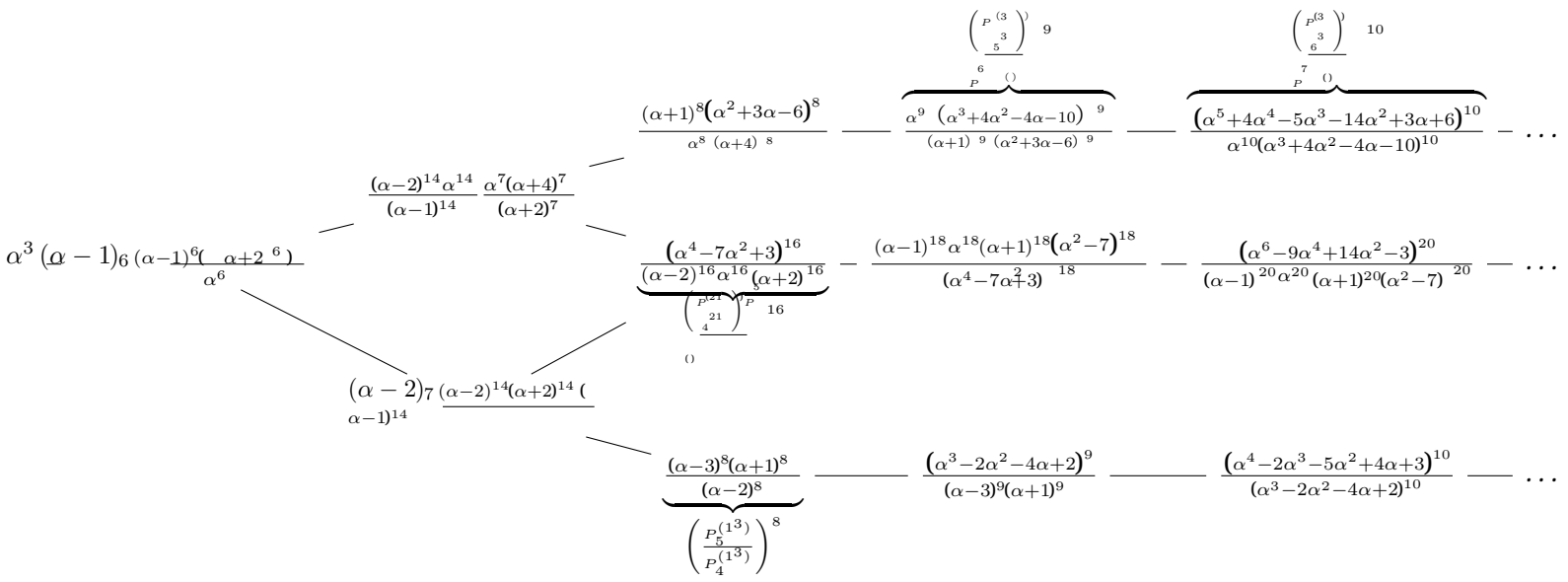


Figure 6: Gram decorated rollet graph for $l = 1$. We place two non-trivial determinants on each vertex (i.e. the cases $n = p+2, p+4$ on vertex (p, λ)). This general form of two cup determinants in the λ-arms for the row and column partitions is verified up to $p = 7$.

（**5.9**）我们现在根据 5.8 II 中的 $l=0$ 情形，通过直接计算纳入截面 $\mathcal{R}_1^{(2)}$ 穿过装饰的 Rollet 图 $\mathcal{R}_1^{\mathcal{V}}$。该计算完成了定理 5.2 中剩余的各个情形（ $p=7$ 情形被省略，因为它不适合放入页边空白处）。



其中 $P_n^{(\lambda)}$的计算方法见第3.3节（特别是参见3.26 和 3.29）。注意,

$$\mathcal{C}^6_{(2,(2))} = \left(\frac{P_4^{(21)}}{P_3^{(21)}}\right)^{14}\left(\frac{P_4^{(3)}}{P_3^{(3)}}\right)^{7} = \left(\frac{\alpha(\alpha^2-4)}{3(\alpha^2-1)}\right)^{14}\left(\frac{\alpha(\alpha+4)}{3(\alpha+2)}\right)^{7} \propto (\alpha+2)^{14}\,\mathcal{V}^6_{(2,(2))}$$

$$\mathcal{C}^6_{(2,(1^2))} = \left(\frac{P_4^{(21)}}{P_3^{(21)}}\right)^{14}\left(\frac{P_4^{(1^3)}}{P_3^{(1^3)}}\right)^{7} = \left(\frac{\alpha(\alpha^2-4)}{3(\alpha^2-1)}\right)^{14}\left(\frac{(\alpha-2)}{3}\right)^{7} \propto \alpha^{14}\,\mathcal{V}^6_{(2,(1^2))}$$

因此，臂猜想在此处仅以微弱差距未能延伸至头部。

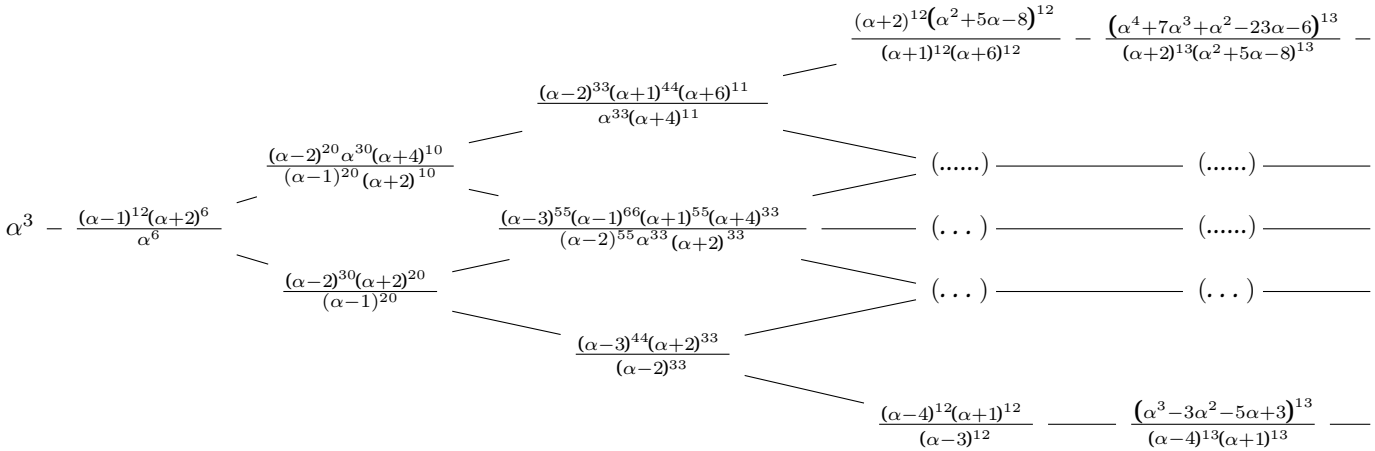


图 7：目前所有已通过直接计算确定的情形下，装饰的 Rollet 图 $\mathcal{R}_2^{\mathcal{V}}$ 的截面 $\mathcal{R}_2^{(2)}$ 。标记为 (. . .) 的条目目前尚未通过直接计算确定。

5.3.3 装饰的 Rollet 图，其中 $l = 2$

现在我们对 $l = 2$ 继续进行同样的过程。用整数分拆（而非杨图）记号表示的（未加装饰的）Rollet 图如下：

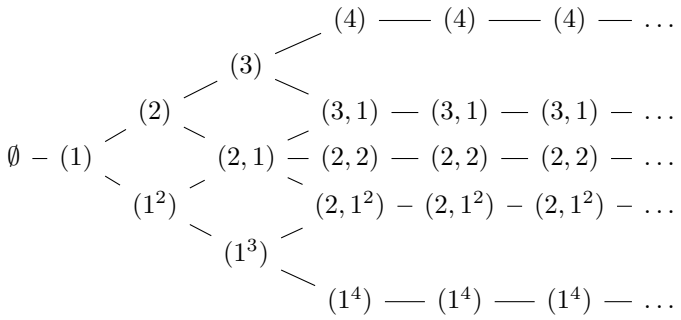


图 7 给出了目前所有已通过直接计算确定的情形下的截面 $\mathcal{R}_2^{(2)}$ 。

注意到

$$\mathcal{C}^7_{(3,(3))} = \left(\frac{P_5^{(31)}}{P_4^{(31)}}\right)^{33}\left(\frac{P_5^{(4)}}{P_4^{(4)}}\right)^{11} = \left(\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+4)}{4\alpha\,(\alpha^2+\alpha-4)}\right)^{33}\left(\frac{(\alpha+1)(\alpha+6)}{4(\alpha+4)}\right)^{11}$$
$$\propto \frac{\left(\alpha^2+\alpha-4\right)^{33}}{(\alpha-1)^{33}(\alpha+4)^{33}}\,\mathcal{V}^7_{(3,(3))}$$

$$\mathcal{C}^7_{(3,(2,1))} = \left(\frac{P_5^{(31)}}{P_3^{(31)}}\right)^{33}\left(\frac{P_5^{(4)}}{P_4^{(4)}}\right)^{11} = \left(\frac{(\alpha-2)(\alpha-1)(\alpha+1)(\alpha+4)}{4\alpha\left(\alpha^2+\alpha-4\right)}\right)^{33}$$
$$\times\left(\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)}{4(\alpha-2)(\alpha+1)}\right)^{33}\left(\frac{(\alpha-3)(\alpha+1)}{4(\alpha-2)}\right)^{22}$$
$$\propto \frac{(\alpha+1)^{33}\left(\alpha^2+\alpha-4\right)^{33}}{(\alpha-2)^{33}(\alpha+2)^{66}}\,\mathcal{V}^7_{(3,(2,1))}$$

$$\mathcal{C}^7_{(3,(1^3))} = \left(\frac{P_5^{(31)^T}}{P_4^{(31)^T}}\right)^{33}\left(\frac{P_5^{(4)^T}}{P_4^{(4)^T}}\right)^{11} = \left(\frac{(\alpha-3)(\alpha-1)(\alpha+2)}{4(\alpha-2)(\alpha+1)}\right)^{33}\left(\frac{\alpha-3}{4}\right)^{11}$$
$$\propto \frac{(\alpha+1)^{33}}{(\alpha-1)^{33}}\,\mathcal{V}^7_{(3,(1^3))}$$

这再次表明，臂猜想可以作适当修改，以推广到头部。

6 表示论

根据构造，如果某个标准模的格拉姆矩阵是奇异的——即秩为次极大秩——那么到相应余标准模的模映射也具有次极大秩，并且该标准模有一个子模，因此存在从某个其他标准模射入的态射。根据拟遗传性（或整体化），[12] 射入的可能映射受到限制。特别是在单杯情形中，可能性非常有限，我们可以确定映入的模。更一般地说，这种确定需要一些侦查工作。我们可以采用一般的重叠塔方案，也可以逐个考察示例。这两种方法都很有启发性，下面我们将探讨几种情形。

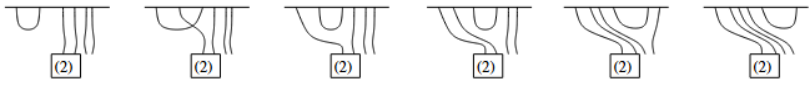
6.1 一般性

对于每个 l，原则上我们都可以应用重合塔方法。对于$l \geq 0$，重合塔方法需要先进行一项初始的“自举”计算，此处是计算映入“单杯”模的态射；根据整体化，这些态射必然来自无杯模。

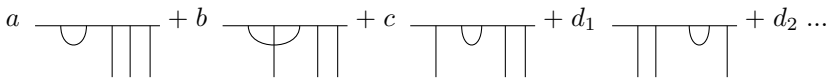
6.1.1 $l = 0$ 的自举

令 $l = 0$。为明确起见，暂且考虑 $\Delta^{n}_{(n-2,(2))}$，因此每个基图的前两条传播腿上都附有一个 (2) 投影算子。

(6.1) 示例。 $\Delta^{l=0}{}_{,n=6\ (4,(2))}$ 的显式基为：



(6.2)（暂且省略图中的投影算子。为简洁起见，也省略 $n = 5$ 的示例。）一个 1 维子模必须由以下形式的元素张成：



（这是一个一般元素，所属空间的基如（6.1）所示）。我们要寻找一维子模，使所有带有任意杯的代数定义基元素作用于其上时都为零。例如（将同一位置带有杯和盖的元素按自然顺序作用——注意，杯的位置并不影响系数的确定）：

作用）：

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & x & 1 & 1 & & & & & \\ 1 & 1 & x & 1 & & & & & \\ & 1 & 1 & x & 1 & & & & \\ & & & 1 & x & 1 & & & \\ & & & & 1 & x & 1 & & \\ & & & & & 1 & x & 1 & \\ & & & & & & 1 & x & 1 \\ & & & & & & & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0$$

（其他项均为 0；暂且将 x 记作 α 参数）。注意，采用这种选择时，该矩阵与格拉姆矩阵 [11]一致。显然，此处我们需要次极大秩，因此到目前为止，这与我们已有的切比雪夫问题一致（见 §3.1）。不过现在我们还要求第一个初等对换 σ_1 的作用如同 $+1$（稍后在 6.5 中考虑 -1）。

（**6.3**）旁注：注意，当 $x = 1$时，所有这些矩阵显然都具有次极大秩。事实上，秩为 6 的情形在 $x = 1$时还存在另一个（相当明显的）线性相关关系（比较第 $2+$ 行减第 6 行与第 $1+$ 行减第 5 行）。这是否存在某种规律？（仿射殿堂般效应会表现为某些特殊值重复出现，例如当 n 同余于 0 模 3 时的 $x = 1$。）是的。.....秩为 9 时，第 1 行减+ 行减5 + 行减8 = 行减2 + 行减6 + 行等于第 9 行。现在规律应该很清楚了。

(6.4) 要求 σ_1 像 $+1$ 那样作用于我们的子空间（即要求一个 $\Delta^n_{(n,(2))}$ 子模）便可设定 $b = c$。若 $a = 0$，则 $b + c = 0$，因此 $b = c = 0$，且不存在非零解，所以这里可以取 $a = 1$。于是 $x + 2b = 0$，从而 $b = c = -x/2$。因此 $d_1 = -(1 - (1 + x)x/2) = \frac{x^2+x-2}{2} = (x-1)(x+2)/2$；接着 $d_2 = -(xd_1 + 2b) = -x(d_1 - 1) = \frac{-x}{2}(x^2+x-4)/2$；然后 $d_3 = -(xd_2 + d_1) = \frac{x^4+x^3-5x^2-x+2}{2}$（参见 3.1），依此类推，直到 $d_j = -(xd_{j-1} + d_{j-2})$；最后是 $xd_j = -d_{j-1}$，也就是 $d_{j+1} = 0$成立时的 $d_{j+1} = -(xd_j + d_{j-1})$。最后这个条件给出了每个 n处存在映射时对应的 x 取值。

(6.5) 若 σ_1 的作用如同 -1，则 $a = 0$、$b = -c \neq 0$ 和 $d_i = 0$也如此。因此，$xb - b = b - xb = 0$ 和 $x = 1$。参见图5。

（**6.6**）为完整起见，我们可以考虑映射到 $\Delta^n_{(n-2,(1^2))}$。矩阵部分为

$$\begin{bmatrix} x & 1 & 1 & & & & & & \\ 1 & x & 1 & -1 & & & & & \\ 1 & 1 & x & 1 & & & & & \\ & -1 & 1 & x & 1 & & & & \\ & & & 1 & x & 1 & & & \\ & & & & 1 & x & 1 & & \\ & & & & & 1 & x & 1 & \\ & & & & & & 1 & x & 1 \\ & & & & & & & 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{bmatrix} = 0 \qquad (6.1.1)$$

对于从 (n,(2)) 出发的映射，我们要求 σ_1 作用为 $+1$。这里 $b=c$ 和 $d_i=0$。如果$a=0$，那么由（6.1.1）可得 $b+c=0$，因此 $b=c=0$，所以我们可以假设 $a=1$，从而 $x+2b=0$ 和 $b=-x/2$。（6.1.1）的第二行给出 $1-(x+1)x/2=d_1=0=-\frac{x^2+x-2}{2}=-\frac{(x-1)(x+2)}{2}$。其余部分自动成立。

要求 σ_1 的作用为 -1，可得 $a=0$ 和 $b=-c$。我们可以设 $b=1$。第二行给出 $x-1=d_1$。第三行自动成立。第四行给出$-1-1+x(x-1)=-d_2=x^2-x-2=(x-2)(x+1)$。随后，$d_i$s 满足切比雪夫递推，直至最后一步；若 x满足使最后一个 d_i 为 0 的条件，则可得到一个解。

6.1.2 一般 l 的自举

固定 l、$\lambda\vdash l+2$ 和 $n\geq l+4$。在本小节中，我们证明当 α_0是多项式 $P_n^{(\lambda)}$的根时，$J_{l,\ n}(\alpha_0)$ 标准模 $\Delta^n_{(n-2,\lambda)}$ 含有一个与 $\Delta^{n-2}{}_{(n-2,\ \lambda)}$同构的子模。证明如下。

引理 6.7. 这里取基环为 $\mathbb{C}[\alpha]$。固定 l，并令 $\lambda\vdash l+2$。对于任意 $n\geq l+4$，存在唯一一个（相差一个整体标量 $\in\mathbb{C}[\alpha]$）元素$\xi_\lambda^{(n)}\in\Delta^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$，其系数属于 $\mathbb{C}[\alpha]$，且满足以下条件：

1. $\mathsf{u}_{i,j}^*\xi_\lambda^{(n)}=0$ *for all* $i<j<n$ *with* $\mathsf{u}_{i,j}\in\mathsf{B}_{(l,n)}$.
2. $\mathsf{u}_{n-1,n}^*\xi_\lambda^{(n)}=D_n(\alpha)c_\lambda$ *for some* $D_n(\alpha)\in\mathbb{C}[\alpha]$.

证明。存在性和唯一性可通过求解一个（满秩）线性问题得到，该问题与引理 3.20 的证明类似。□

引理 6.8. 固定 l，并令 $\lambda\vdash l+2$。对于任意 $n\geq l+4$，令 $\xi_\lambda^{(n)}\in\Delta^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$ 如引理 *6.7* 所述（采用固定的归一化，即选定 $D_n(\alpha)$）。那么，当 α 为一般值时（即在 $\mathbb{C}[\alpha]$ 上进行运算），有 $c_\lambda\xi_\lambda^{(n)}=\xi_\lambda^{(n)}$，其中 $c_\lambda\in J_{l,n}$ 如 *2.2.5* 所述。

证明。由 3.23 的证明以及 c_λ的幂等性可知，$c_\lambda\xi_\lambda^{(n)}$ 也满足前一个引理中的条件 1 和 2（具有相同的因子$D_n(\alpha)$），因此由 ξ_λ的唯一性可得所需等式。

□

(6.9) 在本节余下部分中，固定 $\mathcal{S}_\lambda$的一组基 $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_{d_\lambda}\}$，它关于$\langle\ ,\ \rangle$是正交归一的，并且满足 $b_1=c_\lambda$，且对某个$x_k\in\mathbb{C}\Sigma_{l+2}$有 $b_k=x_kc_\lambda$。由引理 6.8 可知，$\xi_\lambda^{(n)}$ 中 $u_{n-1,n}b_k$ 的系数仅在 $k=1$时非零，因为

$$c_\lambda u_{n-1,n}b_k=u_{n-1,n}c_\lambda x_kc_\lambda=\langle b_1,b_k\rangle u_{n-1,n}c_\lambda,$$

并且由于 $c_\lambda u_{ij}$对于 $j<n$ 可以写成 $\sum_{i'<j'<n}u_{i'j'}\sigma_{i'j'}$对于 $\sigma_{i'j'}\in\mathbb{C}\Sigma_{l+2}$的线性组合，这是通过在 c_λ中的每个置换下将杯向上“拉”得到的。

(6.10) 到目前为止，元素 $\xi_\lambda^{(n)} \in \Delta^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$ 仅在相差一个多项式因子的意义下定义。我们来为 $\xi_\lambda^{(n)} \in \Delta^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$选定一种"归一化"方式。首先，我们假设 $\xi_\lambda^{(n)}$ 中所有系数没有公因多项式因子。因此，对于所有特化 $\alpha \in \mathbb{C}$，都有 $\xi_\lambda^{(n)} \neq 0$。这将 $\xi_\lambda^{(n)}$ （从而也将 $D_n(\alpha)$）确定到一个复标量的倍数。将 $\xi_\lambda^{(n)}$ 乘以一个复标量后，我们可以假设 $D_n(\alpha)$是首一的。下文中我们始终采用这种归一化方式来取$\xi_\lambda^{(n)}$ 。

引理 6.11. 固定 l，并令 $\lambda \vdash l+2$。对于任意 $n > l+4$，可以通过归纳得到（归一化的） $\xi_\lambda^{(n)}$：

$$\xi_\lambda^{(n)} = D_{n-1}(\alpha)\mathsf{u}_{n-1,n}c_\lambda - \xi_\lambda^{(n-1)} \otimes id_1. \tag{6.1.2}$$

证明。 按照 6.9，为 $\mathcal{S}_\lambda$固定一组基 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{d_\lambda}\}$。令 $\xi_\lambda^{(n-1)}$ 如 6.10 中所述，其中 $\mathsf{u}^*_{n-2,\ n-1}\xi_\lambda^{(n-1)} = D_{n-1}(\alpha)$。然后定义

$$\xi := D_{n-1}(\alpha)\mathsf{u}_{n-1,n}c_\lambda - \xi_\lambda^{(n-1)} \otimes id_1.$$

由于 $\xi_\lambda^{(n-1)} \otimes id_1$ 没有形如 $\mathsf{u}_{n-1,\ n}b_k$ 的分支，因此 ξ 中的系数没有非平凡公因子，因为 $\xi_\lambda^{(n-1)} \otimes id_1$中的系数没有。

现在注意，对于任意 $i < j < n-1$，对于 $u_{ij} \in \mathsf{B}^{(l,n)}$，有

$$\mathsf{u}^*_{ij}\xi = D_{n-1}(\alpha)\mathsf{u}^*_{ij}\mathsf{u}_{n-1,n}c_\lambda - (\mathsf{u}^*_{ij}\xi_\lambda^{(n-1)}) \otimes id_1 = 0.$$

利用引理 6.7 的性质 1。利用性质 2，我们有

$$\begin{aligned}\mathsf{u}^*_{n-2,n-1}\xi &= D_{n-1}(\alpha)\mathsf{u}^*_{n-2,n-1}\mathsf{u}_{n-1,n}c_\lambda - (\mathsf{u}^*_{n-2,n-1}\xi_\lambda^{(n-1)}) \otimes id_1 \\ &= D_{n-1}(\alpha)c_\lambda - D_{n-1}(\alpha)c_\lambda = 0.\end{aligned}$$

现在注意到

$$\mathsf{u}^*_{n-1,n}(\xi_\lambda^{(n-1)} \otimes id_1) = [\xi_\lambda^{(n-1)}]_{n-2,n-1,1}\mathsf{u}^*_{n-1,n}\mathsf{u}_{n-2,n-1}c_\lambda = [\xi_\lambda^{(n-1)}]_{n-2,n-1,1}c_\lambda,$$

由于 $\mathsf{u}^*_{n-1,n}\mathsf{u}_{i,j}$ 对 $j < n-1$ 有 $n-4$ 条传播线，并且 $\xi_\lambda^{(n-1)}$ 中形式为 $\mathsf{u}_{n-2,n-1}b_k$ 的唯一非零分支具有 $k = 1$。因此，我们计算得

$$\mathsf{u}^*_{n-2,n-1}\xi = (\alpha D_{n-1}(\alpha) - [\xi_\lambda^{(n-1)}]_{n-2,n-1,1})c_\lambda,$$

因此，ξ 满足引理 6.7 中的 1. 和 2.，其中 $D_n(\alpha) = (\alpha D_{n-1}(\alpha) - [\xi_\lambda^{(n-1)}]_{n-2,\ n-1,\ 1})$。因此，根据唯一性，$\xi = a\xi_\lambda^{(n)}$ 对于某个因子 $a \in \mathbb{C}$成立。现在我们将验证 $a = 1$，也就是说，$D_n(\alpha)$是首一的。

首先，我们处理情形 $n = l + 5$。对于由递推 (6.1.2) 定义的 $\xi_\lambda^{(l+5)}$，我们有 $D_{l+5}(\alpha) = \alpha D_{l+4}(\alpha) + [\xi_\lambda]_{l+3,\, l+4,\, 1}$，其中 $\xi_\lambda^{(l+4)} = \xi_\lambda$ 如引理 3.20 所述。在引理 3.24 的证明中，我们看到

$$\frac{D_{l+5}(\alpha)}{D_{l+4}(\alpha)} = \frac{\alpha D_{l+4}(\alpha) + [\xi_\lambda]_{l+3,l+4,1}}{D_{l+4}(\alpha)} = \frac{P_{l+5}^{(\lambda)}(\alpha)}{P_{l+4}^{(\lambda)}(\alpha)}.$$

由于 $P_n^{(\lambda)}(\alpha)$ 对于 $n \geq l+4$ 是首一的，因此若将 $D_{l+4}(\alpha)$ 取为首一，则 $D_{l+5}(\alpha)$ 也将是首一的。因此，按 (6.1.2) 定义的 $\xi_\lambda^{(l+5)}$ 按照 6.10 进行了规范化。

现在，对于 $n > l+5$，将 (6.1.2) 应用两次，我们得到

$$D_n(\alpha) = \alpha D_{n-1}(\alpha) + [\xi_\lambda^{(n-1)}]_{n-2,n-1,1} = \alpha D_{n-1}(\alpha) + D_{n-2}(\alpha),$$

这意味着 D_n 是首一的，因为 D_{l+4} 和 D_{l+5} 都是首一的，且此外满足 deg(D_{l+5}) =deg(D_{l+4}) + 1。 □

推论 6.11.1。 固定 l 并令 $\lambda \vdash l+2$。对于任意 $n > l+4$，(规范化后的) 元素 $\xi_\lambda^{(n)} \in \Delta^{(n)}{}_{(n-2,\lambda)}$ 满足 $u_{n-1,n}^* \xi_\lambda^{(n)} = D_n(\alpha) c_\lambda$，其中 $P_n^{(\lambda)}(\alpha)$ 整除 $D_n(\alpha)$。

证明。 由于对于 $n > l+5$， $D_n(\alpha)$ 遵循切比雪夫递推 (3.1.1)，因此结论现在由之前的证明得到，其中我们有

$$\frac{D_{l+5}(\alpha)}{D_{l+4}(\alpha)} = \frac{P_{l+5}^{(\lambda)}(\alpha)}{P_{l+4}^{(\lambda)}(\alpha)},$$

这意味着 $D_{l+4}(\alpha) = f(\alpha) P^{(\lambda)}{}_{l+4}(\alpha)$，并且 $D_{l+5}(\alpha) = f(\alpha) P^{(\lambda)}{}_{l+5}(\alpha)$，其中某个 $f(\alpha) \in \mathbb{C}[\alpha]$ 满足此式，因为级数 $P^{(\lambda)}{}_n$ 没有公共的非平凡因子。 □

定理 6.12。 固定 l，并令 $\lambda \vdash l+2$。令 $n \geq l+4$，并假设 $\alpha_0 \in \mathbb{C}$ 满足 $P_n^{(\lambda)}(\alpha_0) = 0$。那么当代数参数 $\alpha = \alpha_0$ 时，我们有 $J_{l,\, n} \xi_\lambda^{(n)}$ 是 $\Delta^{(n)}{}_{(n-2,\, \lambda)}$ 的一个子模，并且同构于 $\Delta^{(n)}{}_{(n,\, \lambda)}$。

证明。 首先，我们注意到 $\xi_\lambda^{(n)}$ 在 $\alpha = \alpha_0$ 处特化后非零，且满足 $c_\lambda \xi_\lambda^{(n)} = \xi_\lambda^{(n)}$，并且根据推论 6.11.1 有 $u_{n-1,\, n}^* \xi_\lambda^{(n)} = D(\alpha_0) c_\lambda = 0$。特别地，结合引理 6.7 的条件 1，我们得到 $J_l^{n-2}{}_{,\, n}\ \xi_\lambda^{(n)} = 0$（其中 $J_l^p{}_{,\, n}$ 如 2.9 所述）。由于 $J_{l,\, n} = \mathbb{C}\Sigma_{l+2} \oplus J_l^{n-2}{}_{,\, n}$，我们计算（作为 $\mathbb{C}$ 向量空间）：

$$J_{l,n} \xi_\lambda^{(n)} = \mathbb{C}\Sigma_{l+2} \xi_\lambda^{(n)} = \mathbb{C}\Sigma_{l+2} c_\lambda \xi_\lambda^{(n)},$$

由此可知， $b_i \xi_\lambda^{(n)} = x_i \xi_\lambda^{(n)}$ 张成 $J_{l,\, n} \xi_\lambda^{(n)}$，其中 $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_{d_\lambda}\}$ 根据 6.9 是 $\mathbb{C}\Sigma_{l+2} c_\lambda \simeq \mathcal{S}_\lambda$ 的一组基。为了证明它们线性无关，我们

作如下论证：假设 $\sum_k a_k b_k \xi_\lambda^{(n)} = 0$ ，其中系数为 $a_k \in \mathbb{C}$。两边乘以 $c_\lambda x_i^*$，于是得到

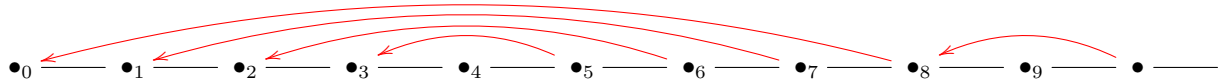
$$0 = \sum_k a_k c_\lambda x_i^* x_k c_\lambda \xi_\lambda^{(n)} = \sum_k a_k \langle b_k, b_i \rangle c_\lambda \xi_\lambda^{(n)} = a_i c_\lambda \xi_\lambda^{(n)} = a_i \, \xi_\lambda^{(n)},$$

这意味着 $a_i = 0$对所有 i都成立。因此可得， $xc_\lambda \mapsto xc_\lambda \xi_\lambda^{(n)}$ 对于$x \in J_{l,\ n}$是 $\Delta^{(n)}{}_{(n,\ \lambda)} \to \Delta^{(n)}{}_{(n-2,\ \lambda)}$ 的$J_{l,\ n}$ 模的一个单态。 □

6.2 $l = -1$情形

一如既往，首先要考虑的情形是 $l = -1$。见图 8。

包含所有 Δ 映射的 Rollet 图，对 α 作特定选择时（此处 α 是 $P_4^{(1)}$ 的一个根）：



请特别注意仿射区域几何，其中各块是仿射反射群作用的轨道；此外，反射超平面的间距由 α决定。探究这种几何在更高 l中的类似情形将非常有趣！

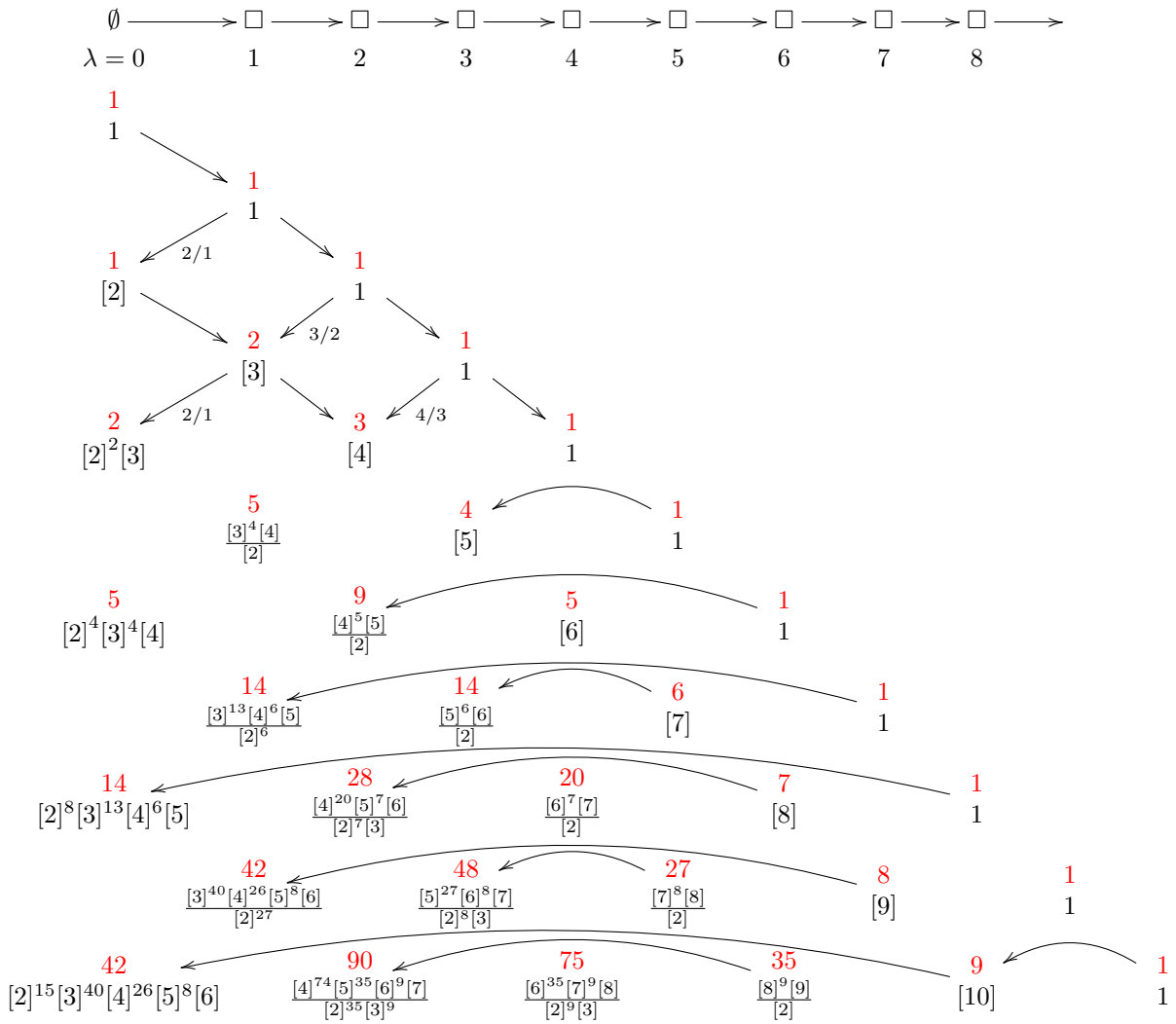
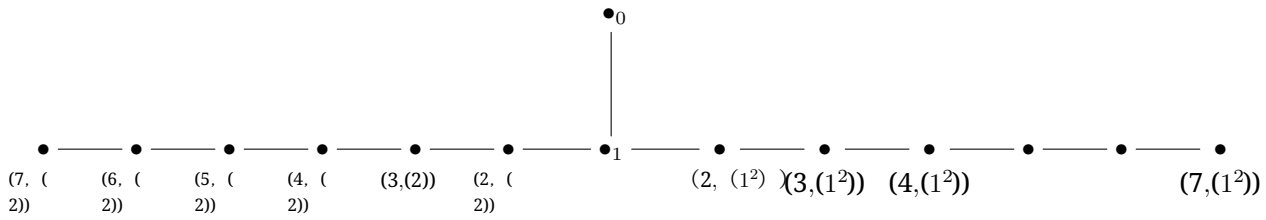


图 8：添加了许多标准 Gram 行列式的 $l = -1$ Rollet 图（ $\alpha = [2]$ 采用量子数记号$[n] := (q^n - q^{-n})/(q - q^{-1})$ $[5] = 0$表示）——曲线箭头表示情形 $[5] = 0$中的标准模态射。

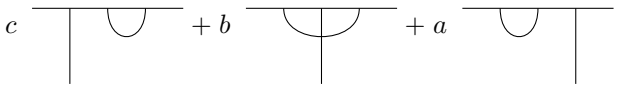
6.3 表示论—— $l = 0$ 情形

这里我们考察 α 取特殊值时标准模之间的映射。回想一下，对于 $l = -1$，我们在图 8 中给出了相应的数据。这里首先要做的或许是在页面平面上嵌入 $l = 0$ 处的 Rollet 图，以便尽可能清晰地呈现数据。一种可能的方式是：



6.3.1 子情形 $\alpha = 1$

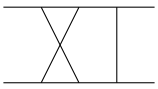
从图5（例如）可以看出，此处第一个奇异格拉姆矩阵对应于 $\Delta^3_{(3,(1))}$。其中唯一可能的映射来自一维模 $\Delta^3_{(3,(3))}$ 和/或$\Delta^3_{(3,(1^3))}$。因此，我们要寻找如下形式的子空间：



的作用



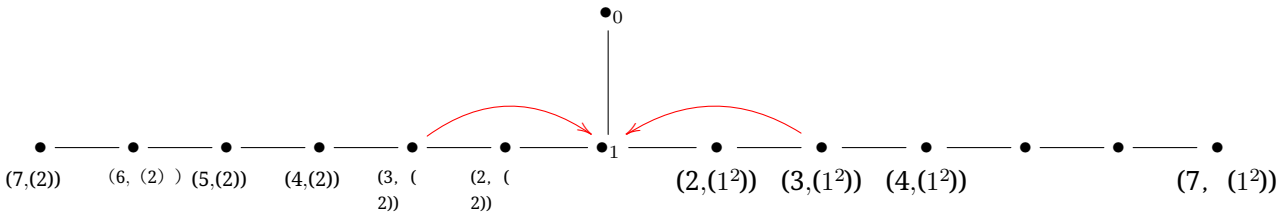
必须为 0，因此一般而言是 $\alpha a + b + c = 0$ 和 $a + b + \alpha c = 0$。第一个初等对换的作用



必须为 1 或 -1，从而在 $+$ 情形下得到 $b = c$ 和 $a + 2b = 0$；而在 - 情形下，当 $\alpha = 1$时得到 $a = 0$和 $b = -c$。因此解空间是一维的。（注意，这里没有第二个初等对换！如果有第二个初等对换，系统将发生根本性变化。）由此可见，两个一维 Δ-模都是子模。通过整体化，这意味着我们有

$$\Delta^n_{(3,(2))} \oplus \Delta^n_{(3,1^2)} \ \to \ \Delta^n_{(1,(1))}$$

对于所有奇数 n，两个加项的像均非零。我们将其画作



考察 $n=4$ 可知，根据弗罗贝尼乌斯互反律，令 $A=\Delta^{n-1}{}_{(3,\lambda)}(\lambda=(2),(1^2))$，并令 $B=\Delta^n_{(0,0)}$ 取 (6.3.3) 中的值，我们有

$$\Delta^n_{(4,(2))}\oplus\Delta^n_{(4,1^2)}\ \to\ \Delta^n_{(0,(0))}$$

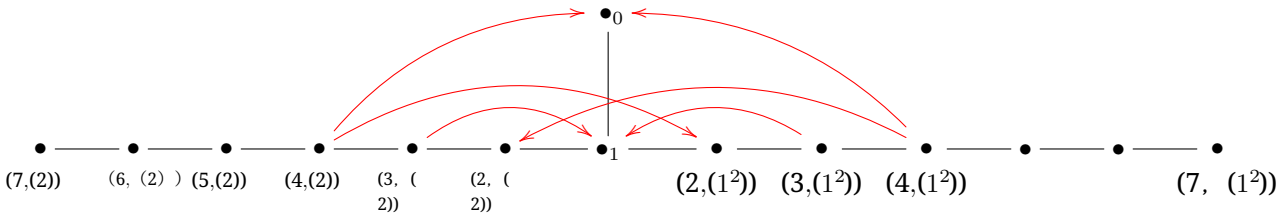
另一方面，对于 $A=\Delta^{n-1}{}_{(3,(2))}$ 和 $B=\Delta^n_{(2,(1^2))}$，我们有

$$\hom(\Delta^n_{(4,(2))}\oplus\Delta^n_{(2,(2))},\Delta^n_{(2,(1^2))})\cong\hom(\Delta^{n-1}_{(3,(2))},\Delta^{n-1}_{(3,(1^2))}+\Delta^{n-1}_{(1,(1))})$$

右侧的和不是直和，但两个因子的底中都有 $\Delta^{n-1}{}_{(3,(2))}$，所以右侧的维数至少为 1。因此左侧的维数也至少为 1；并且根据整体化，不存在从 $\Delta^n_{(2,(2))}$ 到 $\Delta^n_{(2,(1^2))}$的映射。由此可得：

$$\Delta^n_{(4,(2))}\to\Delta^n_{(2,(1^2))}$$

（值得考虑一下 A 和 B的其他取值！.....）类似地，.....由对称性可得。综上：



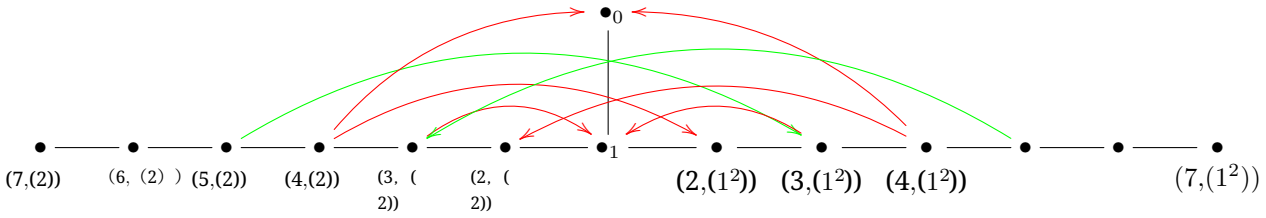
注意到，这与图5中的格拉姆矩阵结果一致。特别是，不存在从 $(4,(2))\to(2,(2))$（采用显然的简写形式）出发的态射；对称像版本同样如此。

继续讨论 $n=5$，我们取 $A=(4,(2))$ 和 $B=(3,(1^2))$，可得

$$\hom(\Delta^n_{(5,(2))}\oplus\Delta^n_{(3,(2))},\Delta^n_{(3,(1^2))})\cong\hom(\Delta^{n-1}_{(4,(2))},\Delta^{n-1}_{(2,(1^2))}+\Delta^{n-1}_{(4,(1^2))})$$

显然存在一个映射 $(4,(2))\to(2,(1^2))$，因此右侧的 dim-hom ≥ 1 非零，除非 $(4,(1^2))$ 在下方粘合——但这将意味着存在一个映射，而我们上面已经指出该映射并不存在。因此左侧的 dim-hom 非零。这迫使 $(5,(2))\to(3,(1^2))$；

及其对称像。综上：



这里有以下几种复合映射的可能性：

$$(5,(2)) \to (3,(1^2)) \to (1,(1))$$

以及对称像。回顾一下，在 $l=-1$ 情形中，所有复合映射均为零（见 [17, 第6]章）。然而，此处我们从格拉姆行列式推得 $(3,(1^2)) \hookrightarrow (1,(1))$，因此该复合映射非零。

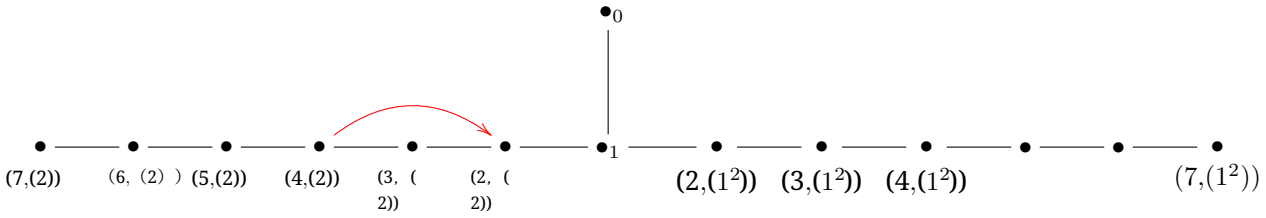
6.3.2 子情形 $(\alpha^2+\alpha-4)=0$

(6.13) 我们来看一下满足 $(\alpha^2+\alpha-4)=0$ 的 α。从图5（例如）可以看出，第一个奇异格拉姆矩阵对应于 $\Delta^4_{(2,(2))}$。通过整体化，中的唯一可能映射来自 $\Delta^4_{(4,(2))}$ 或来自$\Delta^4_{(4,(1^2))}$。容易验证（例如参见 §6.1.1），不存在 $\Delta^4_{(4,(1^2))}$ 子空间（除非 $\alpha=1$），因此此处的子空间为 $\Delta^4_{(4,(2))}$。

通过整体化，这意味着我们有模态射

$$\Delta^n_{(4,(2))} \to \Delta^n_{(2,(2))} \tag{6.3.1}$$

对所有偶数 $n \geq 4$ 均成立。因此：



下一个奇异性出现在 $\Delta^5_{(1,(1))}$。这里的映射来自 $\Delta^5_{(5,(2))}$ 或来自 $\Delta^5_{(5,(1^2))}$。根据弗罗贝尼乌斯互反律——详见下文的 (6.15)——$\lambda \in \{(2),(1^2)\}$ 将与上面的第一个映射相同。因此我们有

$$\Delta^n_{(5,\lambda)} \to \Delta^n_{(1,(1))} \tag{6.3.2}$$

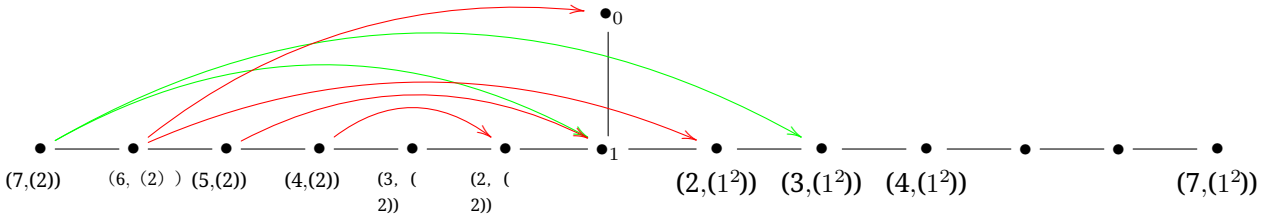
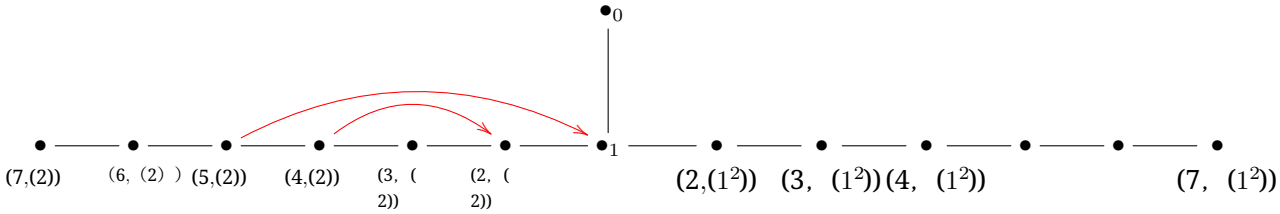


图9： $l=0$ 的标准模态射，对于 $(\alpha^2+\alpha-4)=0$。

对于所有奇数 $n\geq 5$，均有 $\lambda=(2)$。因此：



在 $n=6$ 处，我们已经有一个来自 (6.3.1) 的映射。注意，这解释了 $\Delta^6_{(2,(2))}$ 的 Gram 行列式中的 $(\alpha^2+\alpha-4)^6$，因为该映射来自一个 6 维单模。此外，这里还有两个奇异点，分别对应 $\Delta^6_{(0,(0))}$ 和 $\Delta^6_{(2,(1^2))}$。根据弗罗贝尼乌斯互反律，它们似乎都应来自$\Delta^6_{(6,\lambda=(2))}$。总之，我们在图 9 中以红色标出了新增内容。

在 $n=7$ 处，我们已经有一个来自 (6.3.2) 的映射。注意，这解释了 $\Delta^7_{(1,(1))}$ 的 Gram 行列式中的因子 $(\alpha^2+\alpha-4)^7$。但实际上，指数是 8。另一方面，我们可以考察弗罗贝尼乌斯互反律是否也能给出一个来自 $\Delta^7_{(7,\lambda)}$ 的映射。在这种情况下，我们会有两个底因子。另一个奇异情形是 $(3,(1^2))$，但对此，只需考虑将上文中的弗罗贝尼乌斯互反律应用于 $\Delta^6_{(6,\lambda)}\to\Delta^6_{(2,(1^2))}$。参见图 9 中红色和绿色的箭头。

(6.14)弗罗贝尼乌斯互反律。这里我们简要回顾并应用 [6] 中的重叠塔方法。回想一下，给定代数 $X\subset Y$ 的包含关系、一个 X-模 A 和一个 Y-模 B，弗罗贝尼乌斯互反律给出了同态空间之间的同构：

$$\hom_Y(Ind\ A,B)\cong\hom_X(A,Res\ B) \tag{6.3.3}$$

其中，$Ind-$ 和 $Res-$ 分别表示沿着 $X\subset Y$ 的诱导和限制。

(6.15) 例如，考虑 $J_{0,\ n-1}\subset J_{0,\ n}$，其中 $(\alpha^2+\alpha-4)=0$。根据上文的 (6.3.1)，我们得到映射 $\Delta^n_{(4,(2))}\to\Delta^n_{(2,(2))}$ (n 也是如此)。现在注意，当 $n=5$ 时，我们有

$$Res\ \Delta^n_{(1,(1))}=\Delta^{n-1}_{(2,(2))}\oplus\Delta^{n-1}_{(2,(1^2))}\oplus\Delta^{n-1}_{(0,(0))}$$

（这是对所有 n 奇数都成立的一般结论：右侧的因子是滤过因子，但它们属于不同的块），因此我们看到

$$\hom(\Delta^{n-1}_{(4,(2))}, Res\ \Delta^{n}_{(1,(1))}) \neq 0.$$

因此，根据互反性

$$\hom_Y(Ind\ \Delta^{n-1}_{(4,(2))}, \Delta^{n}_{(1,(1))}) \neq 0.$$

我们有

$$Ind\ \Delta^{n-1}_{(4,(2))} = \Delta^{n}_{(5,(2))} \oplus \Delta^{n}_{(3,(2))}$$

- 当 $n = 5$ 时，确实是直和。不存在映射 $\Delta^{n}_{(3,(2))} \to \Delta^{n}_{(1,(1))}$ - 否则根据局部化，它会在较低的 n 处有像。因此，我们必须有一个映射$\Delta^{n}_{(5,(2))} \to \Delta^{n}_{(1,(1))}$。

上述示例完全证实了我们此前根据论证中 $n = 5$ 的格拉姆行列式部分推导出的结论。现在让我们对 $n = 6$ 情形尝试同样的方法。考虑

$$Res(\Delta^{6}_{(0,(0))}) = \Delta^{5}_{(1,(1))} \qquad Res(\Delta^{6}_{(2,(1^2))}) = \Delta^{5}_{(1,(1))} \oplus \Delta^{5}_{(3,(1^2))}$$

因此，我们有

$$\hom(\Delta^{5}_{(5,(2))}, Res\Delta^{6}_{(0,(0))}) \neq 0$$

于是

$$\hom(Ind\Delta^{5}_{(5,(2))}, \Delta^{6}_{(0,(0))}) \neq 0$$

以及 $Ind\Delta^{5}_{(5,(2))} = \Delta^{6}_{(4,(2))} \oplus \Delta^{6}_{(6,(2))}$，我们本应在更低阶段看到映射 $\Delta^{6}_{(4,(2))} \to \Delta^{6}_{(0,(0))}$，因此必有 $\Delta^{6}_{(6,(2))} \to \Delta^{6}_{(0,(0))}$（同理，$\Delta^{6}_{(6,(2))} \to \Delta^{6}_{(2,(1^2))}$）。

附录

接下来这段摘自 [18], , 并针对我们的目的做了些微调整。需要牢记以下几个局部记号。

Temperley–Lieb 是我们的情形 $l=-1$ （其中环参数 α 记作 δ）。M_n（λ）是（整系数/图基下的）格拉姆矩阵，其中 λ 仅为传播线的数量 - $\lambda = p$，因此下文的 $\lambda = 0$ 是我们的（$\mathbf{0}$，$\emptyset$），而$\lambda = p > 0$ 是（p，（$\mathbf{1}$））。

这里的代数元素 U_i 是 U_i =$\mathbf{u}_{i,\ i+1}\mathbf{u}^{*}_{i,\ i+1}$。
$E_m^{(r)} = 1_r \otimes \mathbf{E}_{m-1}$ （对称化子的像，参见（2.16）中的 $\mathbf{E}_n$ ）。

行列式计算：一般结构定理方法

我们接下来用一般结构定理 [17, Th.1] 来计算 Temperley–Lieb 标准格拉姆行列式 det(M_n(λ))。（再次强调，在表示论中，无需计算除初等情形 $\lambda = n-2$ 之外的任何情形。我们继续讨论纯粹是作为练习，为后续推广做准备。）

该定理给出了在合适的域上、参数取一般值时 TL代数的一个基，其形式为多矩阵结构的一组完备标准正交集。在这种情况下，我们可以为每个胞模提取一个基，使得格拉姆矩阵因正交性而成为单位矩阵。与定义在“图”基上的格拉姆矩阵不同，这个矩阵没有任何内在用途：显然，因为它不包含任何信息；但隐含地说，因为我们无法像在“整”（多项式）环上工作时那样对参数进行特化。诀窍在于追踪从整基变换而来的元素所经历的重整化，从而重构整基上的行列式。

我们需要的基元素定义如下（直接摘自[17, §6.4]）。

首先，固定一个标准/胞模 Δ_n(λ)，并考察图基的游走枚举。这由整线正部分上长度为 n、从 1 出发并以 $\lambda+1$ 结束的游走 $s=(s_0,\ s_1,\ s_2,\ \ldots\ldots\ s_n)$ 构成。“最低”的游走可以描绘如下：

$e_m = 12121212123...m =$ 

例如，$m = \lambda + 1$。我们稍后会回顾图与游走之间的对应关系。

代数基元素对应于终点相同的两条游走组成的有序对，涵盖所有可能的终点。因此，终点遍历$\lambda \mapsto m = \lambda + 1$ 移位后的可能胞模指标 λ。回想一下，λs 是n, $n-2$, ……, $0/1$, 所以移位后得到 $n+1$, $n-1$, ……, $\mathbf{1}$ 或 ……, 2。

从游走对到代数元素的映射可以迭代地给出。首先，对于每个 λ，将最低的游走（对）映射为一个元素，例如当 $m = \lambda + 1$ 时：

$$(e_m, e_m) = (121212123...m, 121212123...m) = U_1 U_3 U_5 E_m^{(6)}$$

（参见 [17, §6.4] 的记号）（注意需要将归一化设为幂等元）。于是，若 $s_i = g - 1$ 是序列 s的极小值，且 s^i 表示将 s_i 替换为$g+1$后的 s：

$$(s^i, t) = \sqrt{k_g k_{g+1}} \left(1 - \frac{U_i}{k_g}\right)(s, t)$$

其中 $k_g = \frac{[g-1]}{[g]}$。右侧同理。

一般结构定理 [17, §6.4] 保证这些元素构成 TL代数的一组标准正交基。

整系数/图基可以从（e_m, e_m）开始（模去商并对 id 进行归一化——另见 [17]）。下一个图基元素对应于游走 $123212123...m$，为 U_2（e_m, e_m）；更一般地，（s^i, t）$_{diagram}$ $= U_i$（s, t）$_{diagram}$。因此可见，在此情形下，新的标准正交基元素（s^i, t）是通过加上前一个元素的一个标量倍数得到的（这对行列式无关紧要）；而将 U_i（s, t）重新缩放为

$$-\sqrt{\frac{[h-1]}{[h+1]}}\frac{[h]}{[h-1]} = -\sqrt{\frac{[h]^2}{[h+1][h-1]}}$$

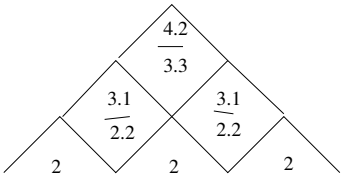
($h = g$)。这同时适用于左矢和右矢，并且二者都会对行列式进行重新缩放。对于一般的游走，从 $121212123...m$ 游走出发，每添加一个菱形，就会产生一个这样的因子。因此，总体上我们得到如下结果。

引理 A.1。 示意地说，

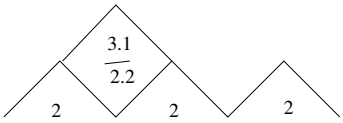
$$\det(M_n(\lambda)) = \prod_s \prod_d \frac{[h]^2}{[h+1][h-1]}$$

其中，乘积遍历游走的集合以及每个游走中的菱形。 □

示例：每个菱形对应的因子为（采用缩略记号）：



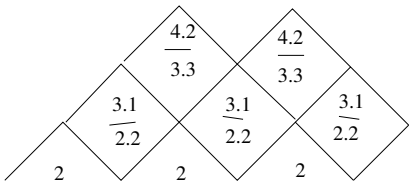
因此特别是



得到一个因子 $\frac{[3][2]}{1}$。综上所述，我们有

$$\det(M_6(\lambda=0)) = \frac{[2]^3}{1}\frac{[3][2]}{1}\frac{[3][2]}{1}\frac{[3]^2}{[2]}\frac{[4]}{1} = [2]^4[3]^4[4] = \delta^5(\delta^2-1)^4(\delta^2-2)$$

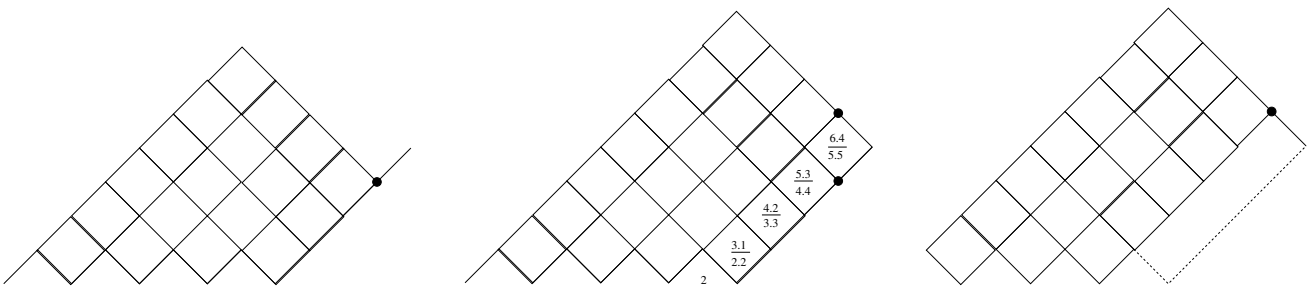
示例 II:



给出因子 $\frac{[4]^2}{[2][3]}$。总之，这个行列式的结果是

$$\det(M_7(\lambda=1)) = \frac{[2]^{3\times14}}{1}\left(\frac{[3]}{[2]^2}\right)^{9+10+9}\left(\frac{[4][2]}{[3]^2}\right)^{4+4}\left(\frac{[5][3]}{[4]^2}\right)^{1} = [2]^{-6}[3]^{13}[4]^6[5]$$

注意，行列式可以递归地计算。经过 $(\lambda-1, n-1)$ 的游走在最后一步不会再遇到菱形，因此贡献因子 $det(M_{n-1}(\lambda-1))$；而经过 $(\lambda+1, n-1)$ 的游走，都会遇到相同的一串菱形，与其对$det(M_{n-1}(\lambda+1))$的贡献相比。例如：



我们有

$$det(M_n(\lambda)) \;=\; det(M_{n-1}(\lambda-1)) \;.\; F_n(\lambda+1)^{dim(M_{n-1}(\lambda+1))}.det(M_{n-1}(\lambda+1)) \tag{A.0.1}$$

其中菱形串因子为

$$F_n(\lambda) \;=\; [2]\frac{[3].1}{[2].[2]}\frac{[4].[2]}{[3].[3]}\frac{[5].[3]}{[4].[4]}\cdots\frac{[\lambda+1].[\lambda-1]}{[\lambda].[\lambda]} \;=\; \frac{[\lambda+1]}{[\lambda]}$$

- 请注意，它实际上不依赖于 n。

示例:

$$det(M_5(1)) \;=\; det(M_4(0))\;.F_5(2)^{dim(M_4(2))}.\;det(M_4(2)) \;=\; [2]^2[3].\left(\frac{[3]}{[2]}\right)^3.[4] = \;\frac{[4][3]^4}{[2]}$$

现在，让我们整理结果中的 TL 部分，使纤维在其 sl_2 标签下垂直排列（因此也在投影后的 Bratelli 图中相应的标签下垂直排列）：

$\lambda=0$	1	2	3	4	5
1					
	1				
$[2]$		1			
	$[3]$		1		
$[2]^2[3]$		$[4]$		1	
	$[2]^{-1}[3]^4[4]$		$[5]$		1
$[2]^4[3]^4[4]$		$[2]^{-1}[4]^5[5]$		$[6]$	

为了方便起见，我们也添加了模维数（以红色标示）：图 10。而在图 11 中，我们用示意图标出了式 (A.0.1) 中的递归计算。

最简洁地说，这个方案可以约化为:

$$0 \underset{[2]/1}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 1 \underset{[3]/[2]}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 2 \underset{[4]/[3]}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 3 \underset{[5]/[4]}{\overset{1}{\rightleftarrows}} 4 \qquad \cdots$$

这意味着 $det(M_n(\lambda))$ 是与入射箭头对应的 $det(M_{n-1}(\mu))$ 的乘积（ λ, μ 标签位于顶点上）；再乘以入射箭头上的 因子，并将其提升至 $dim(M_{n-1}(\lambda+1))$ 次幂。

为了了解这些行列式如何与表示论相印证，以图 8 为例。这里我们关注满足 $[5]=0$ 的参数值。图中标出了第一个消失的行列式。这一消失表明，存在一个从相应的余标准模到标准模的非同构映射；因此，标准模具有底。在此情形下，底是一维的，很容易推断这对应于一个从平凡模映入的映射。——这正是弯曲箭头所表示的含义。

在下一层中，我们看到类似的消失现象；并由此推得一个类似的映射。

在下一层中，我们还有另一个例子。不过，我们也有第一个映射的整体化像——其中映入的模是平凡模的整体化像，因此并非平凡模。请注意，这会直接影响行列式消失的次数（回想一下，我们已将其与格拉姆矩阵的史密斯标准形联系起来）。

希望接下来的模式会很清楚。或许下一个有趣的观察出现在所示的最后一个秩上。这里有一个从平凡模出发的映射（当然，$[5]=0$ 蕴含 $[10]=0$）；并且由于整体化性质，我们已经有一个作用在映射上的映射。通过检查各个格拉姆矩阵的消失次数，我们可以推得复合映射在此处为零。

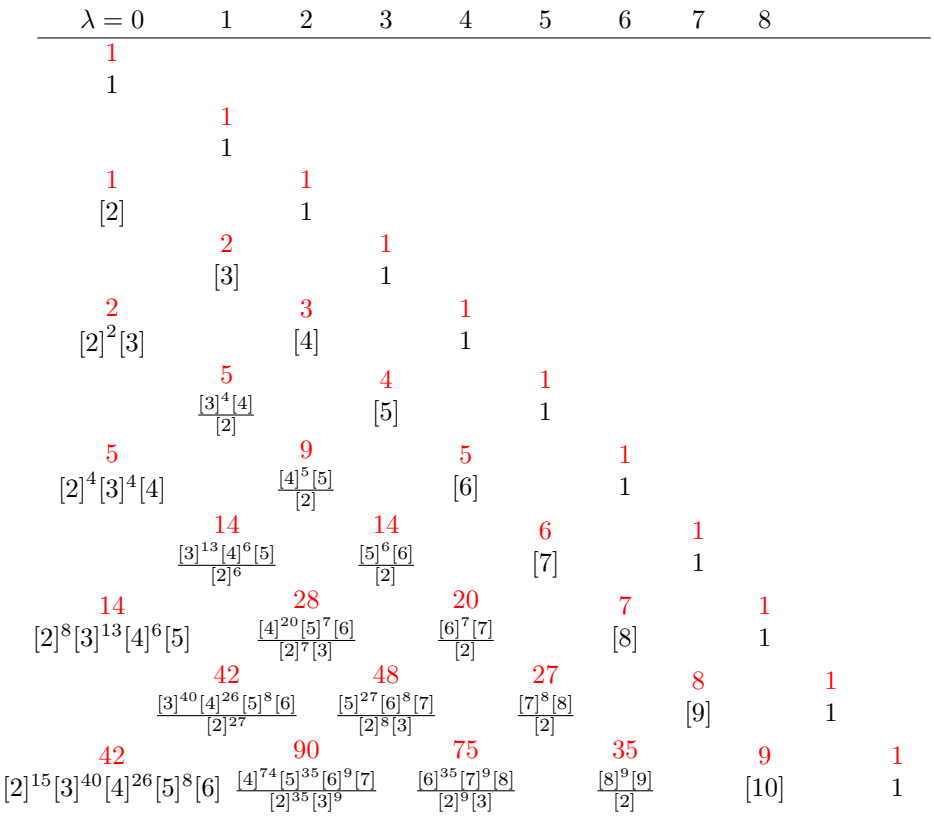


图 10：限制到 TL 权重后，再按 sl_2 标签整理的标准 Gram 行列式。

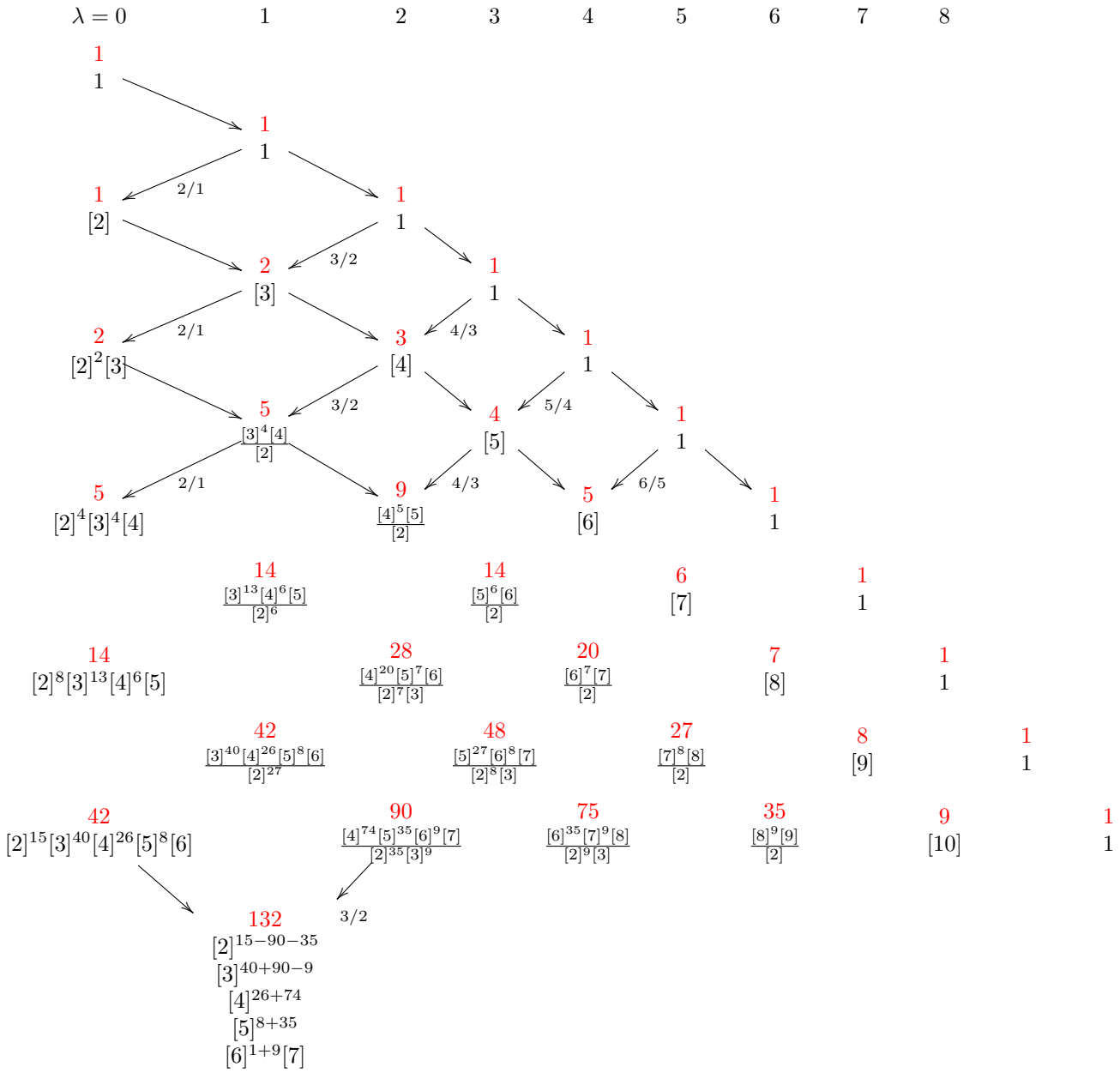


图11：如（A.0.1）所示的格拉姆行列式递归构造。权重 $([\lambda+1]/[\lambda])^{dim(M_{n-1}(\lambda+1))}$ 简单地画成 $\lambda+1/\lambda$。各种模式建立后，我们不再绘制边，底部所示的显式计算除外。

A.1 史密斯标准形呢?

相比于在所关注的基域上求行列式，更重要的是求格拉姆矩阵（在所关注的基域上求值）的秩，也就是 K say。这是因为秩决定了逆变形式的秩，进而决定了胞模在 K 上的简单顶的维数。可表示为乘以可逆矩阵的初等行列变换不会改变秩。因此，如果我们在主理想整环上进行研究（在系数环为域时，不定元-δ 计算正是如此），那么我们关注的是史密斯标准形（SNF）。

约化到所关注的基域后，SNF 将直接给出秩。（即使基环不是主理想整环，也可能存在一种能够直接揭示秩的形式。）（一般而言，SNF 所揭示的信息甚至可能多于秩。在所关注的 δ-值处为零的不变因子的消失阶，可能会揭示胞模的约当–赫尔德列中更深层因子模的细节。）

示例：考虑格拉姆矩阵

$$\begin{pmatrix} \delta & 1 & 0 \\ 1 & \delta & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \overset{R1:R1+R3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} \delta & 2 & \delta \\ 1 & \delta & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \overset{R1:R1-\delta R2}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 2-\delta^2 & 0 \\ 1 & \delta & 1 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \overset{C2:C2-\delta C1;\ldots}{\rightsquigarrow}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2-\delta^2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \overset{R1:R1+(\delta^2-2)R3}{\rightsquigarrow} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(2-\delta^2) \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \delta \end{pmatrix} \ldots$$

我们可以用多种方法计算史密斯标准形。

$$\begin{pmatrix} \delta(\delta^2-2) & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

方法一：初等行列变换。

方法二：计算子式，并求每个秩对应的所有子式的最大公因数。例如，在我们的示例中，1×1 阶子式的最大公因数显然为 1；2×2 阶子式的最大公因数也为 1。因此，最后一个不变因子便确定了。

参考文献

[1] N. Alraddadi 和 A. Parker。《KMY 代数的半单性》，2024。arXiv 2407.07028。[2] R. Baxter。《统计力学中的精确可解模型》。Academic Press，1981。[3] R. J. Baxter。论 Zamolodchikov 对四面体方程的解。*Commun. Math. Phys.*，88:185–205，1983。[4] R. Brauer。论与半单连续群相关的代数。*Annals of Mathematics*，38(4):857–872，1937。

[5] A. Brown。《统计物理学》。爱丁堡，1967年。[6] A. Cox、P. Martin、A. Parker 和 C. Xi。重拼塔的表示论：理论、讲义与示例，2004。arXiv 0411395。[7] M. De Visscher 和 P. Martin。复数域上 Brauer 代数的简单模。《美国数学学会会刊》，369(3):1579–1609，2016年。[8] E. Fradkin。《凝聚态物理学场论》。剑桥，2013年。[9] A. M. Gainutdinov、H. Saleur 和 I. Y. Tipunin。晶格 w-代数与对数共形场论。《物理学杂志*A*：数学与理论》，47(49):495401，2014年11月。[10] M. Guidry 和 Y. Sun。《现代物理学中的对称性、破缺对称性与拓扑学》。剑桥，2022年。[11] Z. Kadar 和 P. P. Martin。几何分割范畴：论短Brauer代数及其 blob子代数，2020。arXiv 2002.05478。[12] Z. Kadar、P. P. Martin 和 S. Yu。论 Brauer 范畴中 Temperley-Lieb范畴的几何定义扩张，2014。arXiv 1401.1774。[13] S. Karlin 和 W. Studden。《切比雪夫系统》。Wiley Interscience，1966。[14] Y. Kimura 和 S. Ramgoolam。规范-引力对偶中的膜、反膜与 Brauer 代数。《高能物理学杂志》，11:078，2007年。[15] Y. Kimura、S. Ramgoolam 和 D. Turton。复矩阵模型中的 Brauer 代数自由粒子。《高能物理学杂志》，05:052，2010年。[16] E. Lieb 和 D. Mattis。《一维数学物理学》。Academic Press。[17] P. Martin。《统计力学中的 Potts模型及相关问题》。World Scientific，1991年。[18]P. P. Martin。表示论讲义，2008年。https://pp marti.github.io/pdf/lecturesLeeds-ch10-p277-300.pdf。[19] H. N. V. Temperley 和 E. H. Lieb。‘渗流’问题与‘着色’问题之间的关系，以及与规则平面晶格相关的其他图论问题：关于‘渗流’问题的一些精确结果。《伦敦皇家学会会刊 *A*辑：数学与物理科学》，322(1549):251–280，1971年4月。

[20] G. Wannier。《统计物理学》。Wiley，1966。