arXiv:2512.24616v1 [math.SP] 31 Dec 2025

# 酉几乎 Mathieu 算子的算术谱转变

FAN YANG

ABSTRACT. 我们研究酉几乎 Mathieu 算子（UAMO）。它是一维准周期酉算子，源于均匀磁场中的二维离散时间量子游走 $\mathbb{Z}^2$ 。在正李雅普诺夫指数区间 $0 \leq \lambda_1 < \lambda_2 \leq 1$内，我们建立了由频率指数 $\beta(\omega)$支配的算术局域化结论。更准确地说，对于每个满足 $\beta(\omega) < L$的无理 $\omega$ ，其中 $L > 0$ 表示 Lyapunov 指数，以及每个非共振相位 $\theta$，我们证明了安德森局域化，即纯点谱以及呈指数衰减的特征函数。这将我们此前关于丢番图频率的算术局域化结果（对于该类频率， $\beta(\omega) = 0$）推广到了频率中的尖锐阈值。

## 1. 引言

离散时间量子游走由 Aharonov–Davidovich–Zagury [1] 提出，作为经典随机游走的量子类比。在经典游走的扩散行为中，量子游走通常表现出弹道扩散，这一特性支撑了多种量子算法应用（搜索、元素 distinctness、验证等）；例如参见[3, 47]。除量子信息之外，量子游走还为研究工程晶格中的波传播、干涉和局域化现象提供了一个实验上易于实现的平台。随机和无序量子游走（以及更一般的随机酉模型）中的局域化已得到广泛研究；例如参见 [2, 29, 30, 40, 41]，以及树上的随机量子游走的谱转变分析，见 [28]。关于通过传递矩阵界获得量子游走的动力学和扩散估计，另请参见 [12]。

这一领域一项重要的数学进展，是发现某些量子行走与 CMV 矩阵之间的联系 [8], ；CMV 矩阵是单位圆上的正交多项式理论（OPUC）中出现的一类酉算子 [50–52]。这一桥梁为研究者提供了强大的谱理论工具，并推动了准周期和随机酉模型的谱与动力学问题研究。关于 CMV 矩阵谱理论的背景知识，包括 Weyl–Titchmarsh 理论以及通过一致双曲性对动力学特征的刻画，参见 [11, 15]。对于小的准周期 Verblunsky系数， [43]证明了谱纯绝对连续。

### 1.1. 酉几乎 Mathieu 算子。

我们研究一种准周期量子游走算子，该算子在 [9] 中被引入，作为 [13], 中模型的推广，其灵感源于均匀磁场中 $\mathbb{Z}^2$ 上的二维量子游走（参见 [9] 的第 3 节）。外电场中的量子游走也已有研究；例如，参见 [10, 57]。设 $\mathcal{H} = \ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2$，其标准基为 $\varepsilon_n^s = \varepsilon_n \otimes e_s$, $s \in \{+, -\}$。固定耦合参数 $\lambda_1, \lambda_2 \in [0, 1]$

电子邮箱：yangf@lsu.edu。

并记 $\lambda_j' = \sqrt{1-\lambda_j^2}$, $j = 1, 2$。对于频率 $\omega \in \mathbb{T}$ 和相位 $\theta \in \mathbb{T}$，定义

$$W_{\lambda_1,\lambda_2,\omega,\theta} := S_{\lambda_1} Q_{\lambda_2,\omega,\theta}, \tag{1.1}$$

其中，移位算子 $S_{\lambda_1}$ 的作用为

$$S_{\lambda_1}\varepsilon_n^{\pm} = \lambda_1 \varepsilon_{n\pm1}^{\pm} \pm \lambda_1' \varepsilon_n^{\mp},$$

拟周期硬币算子 $Q_{\lambda_2,\,\omega,\,\theta}$ 按坐标作用如下

$$Q_{\lambda_2,\omega,\theta,n} = \begin{pmatrix} \lambda_2\cos(2\pi(\theta+n\omega)) + i\lambda_2' & -\lambda_2\sin(2\pi(\theta+n\omega)) \\ \lambda_2\sin(2\pi(\theta+n\omega)) & \lambda_2\cos(2\pi(\theta+n\omega)) - i\lambda_2' \end{pmatrix}.$$

沿用 [9], 的说法，我们将 (1.1) 称为酉几乎 *Mathieu* 算子 (UAMO)，这反映了它与自伴几乎 Mathieu 算子的密切类比，以及酉情形中存在尖锐谱跃迁。

将 $W_{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\omega,\,\theta}$ 置于（扩展）CMV 矩阵的框架中会更为方便。在如下对应关系下

$$\varepsilon_n^{+} \mapsto \varepsilon_{2n}, \qquad \varepsilon_n^{-} \mapsto \varepsilon_{2n+1},$$

可以将 $W_{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\omega,\,\theta}$ 视为由 $2\times 2$ 块 $\Theta(\alpha_n)$ 构成的扩展 CMV 算子，这些块与系数 $\alpha_n$ 相关，系数定义见（2.1）；参见第 2.2 节。特别地，$W_{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\omega,\,\theta}$ 是酉的，且 $\sigma(W_{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\omega,\,\theta}) \subset \partial\mathbb{D}$。

的一个关键结构特征是$W_{\lambda_1,\,\lambda_2,\,\omega,\,\theta}$ 其相关余循环的 Lyapunov 指数在谱上可以显式计算（定理2.1）；这是 Avila 全局理论在 [4]UAMO 背景下单频解析余循环中的直接应用，具体实现见 [9]。特别地，超临界（即 Lyapunov 指数为正）区域恰好是 $0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le 1$。

**1.2. 测度论局域化与算术局域化。**在 Lyapunov 指数为正的区域内，Cedzich–Fillman–Ong [9] 为酉几乎 Mathieu 算子建立了详细的谱图景，并对几乎处处的（$\omega$，$\theta$）（参数意义下的测度论结论）证明了安德森局域化；他们将适用于解析拟周期 Schr¨odinger 算子的 Bourgain–Goldstein 大偏差与半代数集方案 [7] 调整到了 CMV 背景中。尽管这种方法具有稳健性，但它无法为给定的无理频率导出局域化。

在 [56], 中，我们通过调整 Jitomirskaya 针对几乎 Mathieu 算子的算术局域化策略 [31], ，证明了对所有丢番图 $\omega$ 频率，以及对由显式非共振条件 $\theta$ 描述的一个满测度相位集合，都有安德森局域化。本文旨在将这一结果推广到频率变量上的尖锐算术阈值。

更广泛地说，近年来，人们对准周期算子的尖锐算术局域化和谱跃迁现象进行了深入研究；例如，[6, 33, 37]讨论了几乎 Mathieu 情形下的尖锐转变结果，[23, 32, 36] 分析了马里兰模型中的相关尖锐问题，其他晶格模型也有相关研究 [20, 27, 53, 55]。

Bourgain– Goldstein–Schlag [16–19]的一系列工作大幅推动了大偏差框架的发展。近期，Han–Schlag 引入了新思路，借助这些解析工具，为一些一般的解析势 [24–26], 建立了算术局域化结论 [22]，其中包括刘维尔区域内的尖锐结果。这些进展表明，相关的大偏差与共振消除技术在酉情形中也应当有效，并可能带来 UAMO 之外更多的局域化与谱结果。

1.3. **算术 输入与主要结果**。在全文中，我们都处于超临界区域 $e$

$$0 \le \lambda_1 < \lambda_2 \le 1. \tag{1.2}$$

在此区域内，谱上的 Szeg˝o Lyapunov 指数为正且有明确表达式（见第 2.3节）：对所有 $(\lambda_2, \omega, \theta)$，

$$L(\omega, S(\cdot, z)) = \frac{L}{2}, \tag{1.3}$$

其中我们令

$$L = L(\lambda_1, \lambda_2) := \ln \frac{\lambda_2(1+\lambda_1')}{\lambda_1(1+\lambda_2')} > 0.$$

设 $\omega \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$，并将 $p_n/q_n$ 记为其连分数渐近分数，见第 2.4节。定义频率指数

$$\beta(\omega) := \limsup_{n\to\infty} \frac{\ln q_{n+1}}{q_n} \in [0, \infty].$$

该量衡量对 $\omega$ 进行有理逼近的指数精度；特别地，对于每个丢番图 $\omega$，都有 $\beta(\omega) = 0$。

与自伴偶势情形类似（参见 Jitomirskaya–Simon [35]），不应期待安德森局域化对所有相位都成立。因此，我们将讨论范围限制在由以下非共振条件确定的一个满测度相位集上。对于 $\theta \in \mathbb{T}$，令$\|\theta\| = \operatorname{dist}(\theta, \mathbb{Z})$，并设

$$\tilde{\gamma}(\omega, \theta) := \limsup_{n\to\infty} -\frac{\ln \|2\theta - \frac{1}{2} + n\omega\|}{|n|}.$$

我们称 $\theta$ 为非共振（对于 $\omega$），如果 $\tilde{\gamma}(\omega, \theta) = 0$。

我们的主要定理确立了预期算术转变中的局域化一侧：当 Lyapunov 指数支配频率指数时，局域化成立。

**定理 1.1**（算术安德森局域化）。假设 （1.2）。令 $\omega \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ 满足$\beta$（$\omega$） $< L$，且令 $\theta \in \mathbb{T}$ 为非共振，即 $\tilde{\gamma}$（$\omega$，$\theta$） $= 0$。那么西几乎 ***Mathieu*** 算子 $W_{\lambda_1, \lambda_2, \omega, \theta}$ 具有安德森局域化；也就是说，它具有纯点谱，且特征函数呈指数衰减。

**注 1.2**。

(1) 由于 $\beta(\omega) = 0$ 对每个丢番图 $\omega$，定理 *1.1* 恢复并推广了 [56]。(2) 条件 $\beta(\omega) < L$ 是尖锐频率转变中局域化一侧自然的算术阈值，这与自伴几乎 ***Mathieu*** 算子的算术转变类似（例如，参见 [6, 33]）。

**1.4. 策略与组织**。我们的方法遵循算术局域化方案：沿着连分数尺度 $q_n$，逐尺度控制格林函数，并通过李雅普诺夫增长与小除数之间的竞争来消除共振。在自伴几乎 Mathieu 情形中，Jitomirskaya–Liu 将这一方案发展为精确的算术局域化证明；见 [33]。在 CMV/酉情形中，有限体积限制具有块结构，相关行列式还满足额外的代数约束；我们利用 [56] 中确立的次数约化来处理这些约束。与 [56]，中研究的丢番图频率情形相比，主要困难出现在强刘维尔

尺度上。关键在于，共振分析取决于对周围非共振区域中特征函数衰减的精确理解。

本文组织如下。第2节汇集 CMV/Szegő背景和算术预备知识。第3节回顾 [56]中的关键行列式结构引理。第4节概述多尺度分析以及弱/强刘维尔二分性。第5节和第6节分别讨论强刘维尔尺度下非共振区域和共振区域中的特征函数衰减。第7节概述弱刘维尔尺度论证。

## 2. Preliminaries

**2.1. 有限体积限制。** 令 $\mathbb{D}$ 为 $\mathbb{C}$ 中的单位圆盘，令 $\partial\mathbb{D}$ 为单位圆。对于 $\ell^2(\mathbb{Z})$ 上的有界算子（矩阵） $A$ 以及整数 $a \le b$，记

$$A|_{[a,b]} := \chi_{[a,b]}\, A\, \chi_{[a,b]}$$

为其在区间 $[a,b]$ 上的限制。对于扩展 CMV 算子，有 $(\mathcal{L}\mathcal{M})|_{[a,b]} = \mathcal{L}|_{[a,b]}\, \mathcal{M}|_{[a,b]}$；参见 [42]。

**2.2. 扩展 CMV 背景。** 对于 $\alpha \in \mathbb{D}$ 令 $\rho = \sqrt{1-|\alpha|^2}$，并定义 CMV 块

$$\Theta(\alpha) := \begin{pmatrix} \overline{\alpha} & \rho \\ \rho & -\alpha \end{pmatrix}.$$

给定一个序列 $\{\alpha_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \subset \mathbb{D}$，定义作用于 $\mathrm{span}\{\varepsilon_n, \varepsilon_{n+1}\}$ 上的 $\Theta_n := \Theta(\alpha_n)$。扩展 CMV 算子为 $W = \mathcal{L}\mathcal{M}$，其中 $\mathcal{L}$ 是 $\Theta_{2n}$ 的直和，而 $\mathcal{M}$ 是 $\Theta_{2n+1}$ 的直和。背景知识参见 [8, 50, 51]，UAMO 的特例参见 [9, 56]。

2.3. **Szegő 余循环与 Lyapunov 指数。** 我们将 $\ell^2(\mathbb{Z}) \otimes \mathbb{C}^2 \to \ell^2(\mathbb{Z})$ 通过以下方式

$$\varepsilon_n^+ \mapsto \varepsilon_{2n}, \qquad \varepsilon_n^- \mapsto \varepsilon_{2n+1}.$$

对于 $n \in \mathbb{Z}$，令

$$\begin{cases} \alpha_{2n} := \lambda_1', & \rho_{2n} := \lambda_1, \\ \alpha_{2n+1} := \lambda_2 \sin(2\pi(\theta + n\omega)), & \rho_{2n+1} := \lambda_2 \cos(2\pi(\theta + n\omega)) + i\lambda_2'. \end{cases} \tag{2.1}$$

对于序列 $\{\alpha_n\} \subset \mathbb{D}$，定义 Szegő 转移矩阵如下：

$$S_{n,z} := \frac{1}{|\rho_n|} \begin{pmatrix} z & -\overline{\alpha}_n \\ -\alpha_n z & 1 \end{pmatrix}.$$

Szegő 余循环的 Lyapunov 指数为

$$L(\omega, S(\cdot, z)) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_{\mathbb{T}} \ln \|S_n(\theta, z)\|\, d\theta,$$

其中 $S_n(\theta, z) := S_{n-1,\, z}(\theta + (n-1)\omega) \cdots S_{0,\, z}(\theta)$。由次可加性可知，此极限存在。

**定理 2.1** ( [9] 的推论 2.8，以及 [56]的 (3.25)。 对于 $z \in \sigma(W_{\lambda_1,\lambda_2,\omega,\theta})$，我们有

$$L(\omega, S(\cdot, z)) = \max\left(0, \frac{1}{2} \ln \frac{\lambda_2(1+\lambda_1')}{\lambda_1(1+\lambda_2')}\right).$$

特别地，在情形（1.2）下，我们有（1.3）。
下列积分计算于 [9]:

$$\int_{\mathbb{T}} \ln|\rho_{2n}\rho_{2n+1}|\,d\theta = \int_{\mathbb{T}} \ln|\lambda_1(\lambda_2\cos(2\pi\theta)+i\lambda_2')|\,d\theta = \ln\frac{\lambda_1(1+\lambda_2')}{2}. \tag{2.2}$$

Let

$$L_+ := \ln\frac{\lambda_2(1+\lambda_1')}{2}, \qquad L_- := \ln\frac{\lambda_1(1+\lambda_2')}{2}, \qquad L := L_+ - L_-.$$

**引理 2.2**。 (例如 [14, 34]) 设$(\omega, H)$ 为一个连续余循环。那么对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $|k|$足够大时，

$$\|H_k(\theta)\| \le e^{|k|(L(\omega,H)+\varepsilon)} \qquad \textit{for all } \theta \in \mathbb{T},$$

其中 $H_k(\theta) := H(\theta+(k-1)\omega)\cdots H(\theta)$。

**推论 2.3**。 若 $g$ 连续且 $\ln|g| \in L^1(\mathbb{T})$，则对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $b-a$ 足够大时，

$$\left|\prod_{j=a}^{b} g(\theta+j\omega)\right| \le e^{(b-a+1)\left(\int_{\mathbb{T}}\ln|g|\,d\theta+\varepsilon\right)}. \tag{2.3}$$

作为推论 2.3的直接应用，我们有

$$\left|\prod_{j=a}^{b}\rho_j\right| \le e^{-\frac{|b-a|}{2}(L_-+\varepsilon)}. \tag{2.4}$$

**2.4. 连分数与算术指数**。 设 $\omega \in \mathbb{T}\setminus\mathbb{Q}$。则 $\omega$ 有唯一的连分数展开

$$\omega = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cdots}}}, \qquad a_n \in \mathbb{N}.$$

Let

$$\frac{p_n}{q_n} = \cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{\cdots+\cfrac{1}{a_n}}}}$$

是 ω的连分数渐近分数。我们回顾一下，

$$\|k\omega\|_{\mathbb{T}} \ge \|q_{n-1}\omega\|_{\mathbb{T}} \quad \text{for any } 0 \ne |k| < q_n,$$

and

$$\frac{1}{2q_{n+1}} \le \|q_n\omega\|_{\mathbb{T}} \le \frac{1}{q_{n+1}}.$$

**2.5. 泊松公式与 Szeg˝o 关系。** 令 $P_{[a,b],z} := \det(z - W|_{[a,b]})$ 为 Dirichlet 行列式，并令 $\Psi$ 为 $W_{\lambda_1,\lambda_2,\omega,\theta}\Psi = z\Psi$ 的广义解。下文的泊松公式将在本文中反复使用：

$$|\Psi_y| \le C_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\prod_{j=a}^{y-1}|\rho_j|\right)\frac{|P_{[y+1,b],z}|}{|P_{[a,b],z}|}\max(|\Psi_{a-1}|,|\Psi_a|) + C_{\lambda_1,\lambda_2}\left(\prod_{j=y}^{b-1}|\rho_j|\right)\frac{|P_{[a,y-1],z}|}{|P_{[a,b],z}|}\max(|\Psi_b|,|\Psi_{b+1}|). \tag{2.5}$$

我们还使用多项式的标准反向（“星号”）运算：对于 $p(z) = \sum_{j=0}^{d} p_j z^j$，

$$p^*(z) := z^d\,\overline{p(1/\bar z)}.$$

（这里的 $p^*$ 表示反向多项式，而非矩阵伴随。）此外，我们使用以下 $P_{[a,b],z}$ 与 Szeg˝o 余循环之间的联系（见 [54]）：

$$S_{b,z}\cdots S_{a,z} = \frac{1}{\prod_{j=a}^{b}|\rho_j|}\begin{pmatrix} zP_{[a+1,b],z} & \dfrac{zP_{[a+1,b],z} - P_{[a,b],z}}{\alpha_{a-1}} \\ z\left(\dfrac{zP_{[a+1,b],z} - P_{[a,b],z}}{\alpha_{a-1}}\right)^* & (P_{[a+1,b],z})^* \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

## 3. Preliminary lemmas

**引理 3.1**（拉格朗日插值）。设 $g_n(\xi)$ 是一个关于 $\xi$ 的次数至多为 $n$ 的多项式。对于任意 $\theta_1$、$\theta_2$、……、$\theta_{n+1} \in \mathbb{T}$，有

$$g_n(\xi) = \sum_{j=1}^{n+1} g_n(\sin(2\pi\theta_j))\prod_{\substack{\ell=1\\ \ell\neq j}}^{n+1}\frac{\xi - \sin(2\pi\theta_\ell)}{\sin(2\pi\theta_j) - \sin(2\pi\theta_\ell)}.$$

下面这个引理出自 [5]，它为我们分析中出现的余弦乘积提供了一个有用的估计。

**引理 3.2。** 设 $\omega \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$、$\theta \in \mathbb{R}$ 和 $0 \le j_0 \le q_n - 1$ 满足

$$|\cos\pi(\theta + j_0\omega)| = \inf_{0\le j\le q_n-1}|\cos\pi(\theta + j\omega)|.$$

那么，对于某个绝对常数 $C$，

$$-C\ln q_n \le \sum_{j=0,\, j\neq j_0}^{q_n-1}\ln|\cos\pi(\theta + j\omega)| + (q_n - 1)\ln 2 \le C\ln q_n.$$

**引理 3.3。** [56, 引理 4。1] 存在一个关于 $\xi$ 的多项式 $g_n(\xi)$，其次数至多为 $n$，使得

$$P_{[1,2n],z}(\theta) = g_n\big(\sin\big(2\pi(\theta + \tfrac{n-1}{2}\omega)\big)\big).$$

这意味着，在 $\theta$ 的均匀分布的取值处，$P_{[1,2n],z}$ 不可能始终很小。

**引理 3.4。** [56, 引理 4。2] 对于任意 $\varepsilon > 0$，当 $n > N(\varepsilon)$ 足够大时，

$$\frac{1}{2n}\int_{\mathbb{T}}\ln|P_{[1,2n],z}(\theta)|\,d\theta \ge \frac{1}{2}\ln\left(\frac{\lambda_2(1+\lambda_1')}{2}\right) - \varepsilon \ge \frac{L_+}{2} - \varepsilon.$$

## 4. An outline of the proof

根据 Shnol 定理（例如参见 [21, 48, 49]），要证明安德森局域化，只需证明每个满足多项式界 $|\Psi_y| \le C(1+|y|)$（对某个 $C>0$）且经 $\|(\Psi_0,\Psi_{-1})\|=1$ 归一化的广义特征函数 $\Psi$，若其满足方程 $W_{\lambda_1,\lambda_2,\omega,\theta}\Psi = z\Psi$，则会指数衰减。

固定 $0<\varepsilon_0 \ll \frac{1}{100}(L-\beta(\omega))$。选取 $\varepsilon>0$ 使得

$$(4\beta(\omega)+250)\varepsilon < \varepsilon_0.$$

我们证明 $\Psi_y$ 在尺度 $n$上指数衰减，即对于 $q_n^{1-\varepsilon} < |y| < 4q_{n+1}^{1-\varepsilon}$，对所有足够大的$n$都成立。不失一般性，我们始终假设 $y>0$。

我们将尺度分为两种情形。

强刘维尔尺度：$q_{n+1} > e^{\varepsilon q_n}$。在这种尺度上证明指数衰减是主要挑战。我们将区间 $[q_n^{1-\varepsilon}, 4q_{n+1}^{1-\varepsilon}]$ 分为共振区域（靠近 $2q_n$ 倍数的点）和非共振区域（位于两个连续此类倍数之间的点）。非共振分析和共振分析分别在第 5节和第6节中介绍。

弱李乌维尔尺度：$q_{n+1} \le e^{\varepsilon q_n}$。在此类尺度下证明指数衰减的方法与 [56]中的丢番图频率分析类似。我们在第7节简要讨论这种情形，并且只关注相较于丢番图情形所增加的技术难点。

## 5. Eigenfunction in the non-resonant regimes in the strong Liouville case

我们考虑 $q_n^{1-\varepsilon} < y < 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$，其中 $y$ 充分大（因而 $n$ 也很大）。如果在尺度 $q_n$ 下 $\mathrm{dist}(y, 2\mathbb{Z}q_n) \le q_n^{1-\varepsilon}$，则称 $y$ 共振；否则称 $y$ 非共振。

对于 $t\in\mathbb{Z}$，将共振区间记为

$$R_{2t} := \left[2tq_n - q_n^{1-\varepsilon},\ 2tq_n + q_n^{1-\varepsilon}\right].$$

令 $r_{2t} := \max_{y\in R_{2t}} |\Psi_y|$。定义非共振区间

$$\mathcal{N}_{2(t-1),2t} := \left[(2t-2)q_n + q_n^{1-\varepsilon},\ 2tq_n - q_n^{1-\varepsilon}\right].$$

本节的目标是证明以下结论：

**定理 5.1**。对于任意 $y\in\mathcal{N}_{2(t-1),2t}$,

$$|\Psi_y| \le e^{-\left(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0\right)\left(\mathrm{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon}\right)} \max(r_{2(t-1)}, r_{2t}).$$

在整个证明过程中，以下对 $m$ 和 $s$ 的选择至关重要。对于 $y\in\mathcal{N}_{2(t-1),2t}$, 令$m$ 为满足 $\mathrm{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n) \ge 8q_m$的较大整数，然后选择 $s$ 为满足 $8sq_m \le \mathrm{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n) < 8(s+1)q_m$的最大整数。由于这样的选择，显然有

$$\max(q_n^{1-\varepsilon}, 8sq_m) \le \mathrm{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n) < \min(8(s+1)q_m, 8q_{m+1}) \le \min(16sq_m, 8q_{m+1}). \tag{5.1}$$

令 $h = 8sq_m - 2$ 并设

$$\begin{cases} I_0 := [-7sq_m, -5sq_m+1]\cap(2\mathbb{Z}+1), \\ I_y := [y-7sq_m+2, y-sq_m+1]\cap(2\mathbb{Z}+1). \end{cases} \tag{5.2}$$

注意，$I_0\cap I_y=\emptyset$ 且 $|I_0|+|I_y| = 4sq_m$。

作为本节的概述，我们首先将在引理 5.2 中证明，至少存在一个 $x_1\in I_0\cup I_y$ 使得 $|P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)|$ 具有预期下界。随后，我们将通过反证法证明，这样的 $x_1$ 不可能属于 $I_0$，因为这将导致指数衰减

属于 $|\Psi_0|$ 和 $|\Psi_{-1}|$。因此，这样的 $x_1$ 必须属于 $I_y$，参见引理 5.11。我们将把 $x_1 \in I_y$ 的存在代入泊松公式，从而得到 $|\Psi_y|$的指数衰减，这将导出定理 5.1的证明。

**引理 5.2.** 当 $y$ 足够大时，

$$\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)| \geq e^{\frac{h}{2}(L_+-2\varepsilon_0)}.$$

引理 5.2 的证明。 反证法，假设

$$\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)| < e^{\frac{h}{2}(L_+-2\varepsilon_0)}. \tag{5.3}$$

记 $\theta_\ell := \theta + \frac{\ell-1}{2}\omega + \frac{h/2-1}{2}\omega - \frac{1}{4}$，我们有 $\sin(2\pi(\theta + \frac{\ell-1}{2}\omega + \frac{h/2-1}{2}\omega)) = \cos(2\pi\theta_\ell$。注意，由引理 3.3以及拉格朗日插值可得

$$\begin{aligned} g_{h/2}(\xi) &= \sum_{x_1\in I_0\cup I_y} g_{h/2}(\cos(2\pi\theta_{x_1}))\cdot \prod_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \frac{\xi-\cos(2\pi\theta_\ell)}{\cos(2\pi\theta_{x_1})-\cos(2\pi\theta_\ell)} \\ &= \sum_{x_1\in I_0\cup I_y} P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)\cdot \prod_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \frac{\xi-\cos(2\pi\theta_\ell)}{\cos(2\pi\theta_{x_1})-\cos(2\pi\theta_\ell)}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

令 $\xi = \cos(2\pi\theta)$，并记

$$U(\xi, x_1, h, I_0\cup I_y) := \prod_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \frac{\cos(2\pi\tilde{\theta})-\cos(2\pi\theta_\ell)}{\cos(2\pi\theta_{x_1})-\cos(2\pi\theta_\ell)}.$$

因此，由 (5.3) 和 (5.4)，

$$\begin{aligned} \sup_{\theta\in\mathbb{T}} |P_{[1,h]}(\tilde{\theta})| &= \sup_{\xi\in[-1,1]} |g_{h/2}(\xi)| \\ &\leq (h/2+1)\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)|\cdot \sup_{\xi\in[-1,1]}\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |U(\xi,x_1,h,I_0\cup I_y)| \\ &\leq (h/2+1)e^{\frac{h}{2}(L_+-2\varepsilon_0)}\cdot \sup_{\xi\in[-1,1]}\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |U(\xi,x_1,h,I_0\cup I_y)|. \end{aligned} \tag{5.5}$$

将此与下面的引理5.3结合，可得

$$\sup_{\theta\in\mathbb{T}} |P_{[1,h]}(\tilde{\theta})| \leq e^{\frac{h}{2}(L_+-\varepsilon_0)},$$

这与引理3.4矛盾。 □

因此，为了证明引理5.2，只需证明以下引理。

**引理 5.3.** 我们有

$$\sup_{\tilde{\theta}\in\mathbb{T}}\max_{x_1\in I_0\cup I_y} |U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), x_1, h, I_0\cup I_y)| \leq e^{\frac{\varepsilon_0 h}{2}}.$$

引理 5.3 的证明。 不失一般性，我们假设 $y$ 为偶数，且 $7sq_m$ 为偶数。其他情形只是这一情形的简单变体。我们有

$$\begin{aligned}
&\ln|U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), x_1, h, I_0 \cup I_y)| \\
=&\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \ln|\cos(2\pi\tilde{\theta}) - \cos(2\pi\theta_\ell)| - \sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \ln|(\cos(2\pi\theta_{x_1}) - \cos(2\pi\theta_\ell)|, \\
=:&\sum_1 - \sum_2, \qquad (5.6)
\end{aligned}$$

根据引理 3.2,

$$\begin{aligned}
\sum_1 =& \sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \ln|2\sin(\pi(\tilde{\theta}-\theta_\ell)\sin(\pi(\tilde{\theta}+\theta_\ell))| \\
=&(4sq_m - 1)\ln 2 + \sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \ln|\sin(\pi(\tilde{\theta}-\theta_\ell))| + \sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}} \ln|\sin(\pi(\tilde{\theta}+\theta_\ell))| \\
\leq& Cs\ln q_m - 4sq_m\ln 2 \\
\leq& 4sq_m(-\ln 2+\varepsilon), \qquad (5.7)
\end{aligned}$$

其中在最后一行中我们使用了

$$\frac{\ln q_m}{q_m} < \frac{\varepsilon}{4C},$$

当 $n$ 足够大时成立。注意，当 $n$足够大时， $m$ 也很大，因为$q_{m+1} > \mathrm{dist}(y, 2q_n\mathbb{Z})/8 > q_n^{1-\varepsilon}/8$ 由（5.1）得到。稍后我们将多次使用这一事实，而不再明确说明。

将（5.7）与下面的引理 5.4 结合，我们将得到

$$\begin{aligned}
\sum_1 - \sum_2 &\leq 4sq_m(-\ln 2+\varepsilon) - 4sq_m\ln 2 - \sum_{2,1} - \sum_{2,2} \\
&\leq -8sq_m\ln 2 + 4\varepsilon sq_m - (-8sq_m\ln 2 - (16\beta+35)\varepsilon sq_m) \\
&\leq (16\beta+40)\varepsilon sq_m < \frac{\varepsilon_0 h}{2}.
\end{aligned}$$

这就证明了引理 5.3。 □

接下来，我们将证明 $\sum_2$的下界。

## 5.1. $\sum_2$**的估计。**

**引理 5.4。** 我们有

$$\sum_2 \geq -8sq_m\ln 2 - (16\beta+35)\varepsilon sq_m.$$

引理的证明5.4：显然，

$$\begin{aligned}\sum_{2} =&(4sq_m-1)\ln 2+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}}\ln|\sin(\pi\frac{x_1-\ell}{2}\omega)|\\ &+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}}\ln|\sin(\pi(2\theta-\frac{1}{2}+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega))|\\ =:&(4sq_m-1)\ln 2+\sum_{2,1}+\sum_{2,2}. \end{aligned}\tag{5.8}$$

我们进一步将 $I_0, I_y$ 分为 $I_y =: \cup_{j=1}^{3s} T_j$ 和 $I_0 =: \cup_{j=3s+1}^{4s} T_j$，其中

$$T_j=\begin{cases}[y-7sq_m+2(j-1)q_m, y-7sq_m+2jq_m-1]\cap(2\mathbb{Z}+1), \text{ for } 1\le j\le 3s\\ [-7sq_m+2(j-3s-1)q_m, -7sq_m+2(j-3s)q_m-1]\cap(2\mathbb{Z}+1), \text{ for } 3s+1\le j\le 4s.\end{cases}\tag{5.9}$$

对于 $w=1,...,4$，令

$$T^{(w)}:=\cup_{j=(w-1)s}^{ws-1}T_j.\tag{5.10}$$

显然， $\sum_2$ 的下界,1 和 $\sum_{2,2}$的下界即可推出，我们将在下文第5.1.1节和5.1.2 节分别讨论这两个下界。

5.1.1. $\sum_{2,1}$的估计。

**引理 5.5.** 我们有

$$\sum_{2,1}\ge -4sq_m\ln 2-(8\beta+17)\varepsilon sq_m.$$

引理 5.5 的证明。 不失一般性，我们假设 $x_1\in T_{j_0}$ 对于某个 $j_0\le 3s$。注意，这意味着 $x_1\in I_y$。由引理 3.2，

$$\begin{aligned}\sum_{2,1} =&\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}}\ln|\sin(\pi\frac{x_1-\ell}{2}\omega)|\\ \ge&-4sq_m\ln 2-Cs\ln q_m+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{4s}\min_{\ell\in T_j}\ln\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|,\end{aligned}\tag{5.11}$$

上文中我们用了， $|\sin\pi\theta|\ge 2\|\theta\|$。$\sum_{2,1}$的估计可归结为以下估计。

**引理 5.6。**

$$\sum_{\substack{j=1\\ j\neq j_0}}^{4s}\min_{\ell\in T_j}\ln\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|\ge -(8\beta+16)\varepsilon sq_m.$$

显然， 结合引理5.6与（5.11）即可得到引理 5.5所述结论 . □

接下来，我们证明引理 5.6。

引理 5.6 的证明。为了估计（$4s-1$）个最小值 $\sum_{j=1}^{4s}$ 之和，我们首先$j\neq j_0$在引理 $4s-1$ 中控制（5.7 ）个最小值的最小值。令

$$\min_{\substack{r=1\\ r\neq j_0}}^{4s}\min_{\ell\in T_r}\ln\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|=:\ln\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|.$$

**引理 5.7**。 这些$(4s-1)$ 最小值中的最小值满足以下下界:

$$\ln\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|\geq-\varepsilon sq_m.$$

ˆ引理 5.7 的证明。 根据 $\ell$ 的位置，我们分两种情形讨论 .

情形 1。 $\hat{\ell}\in I_y$。 在此情形下，由（5.1），可得

$$0<\frac{|x_1-\hat{\ell}|}{2}\leq 3sq_m<\frac{3}{8}\mathrm{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)\leq\frac{3}{8}q_n.$$

因此

$$\ln\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|\geq\ln\|q_{n-1}\omega\|\geq-\ln(2q_n). \tag{5.12}$$

再次，由（5.1），可得

$$q_n^{1-\varepsilon}\leq 16sq_m.$$

将此代入（5.12），可得

$$\ln\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|\geq-\varepsilon sq_m.$$

ˆ情形 2。 $\ell\in I_{0}$。

˜设 $\ell+2tq_n=:\ \tilde{\ell}$。

注意 $\ell\geq 2tq_n-7sq_m$，而 $x_1\leq y-sq_m\leq 2tq_m-9sq_m<\tilde{\ell}$。特别是，˜ $x_1\neq\tilde{\ell}$。

由于 $x_1<\tilde{\ell}$。这意味着 $2(t-1)q_n$ 和 $2tq_n$之间，因此有 $0<|(x_1-$

$$\|\frac{x_1-\tilde{\ell}}{2}\omega\|\geq\|q_{n-1}\omega\|\geq\frac{1}{2q_n}.$$

另请注意，由于 $tq_n<10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$ 和 $q_{n+1}\geq e^{\varepsilon q_n}$，我们有

$$\|tq_n\omega\|=t\|q_n\omega\|\leq\frac{t}{q_{n+1}}\leq 10q_{n+1}^{-\varepsilon}\leq 10e^{-\varepsilon^2 q_n}\ll\frac{1}{2q_n}.$$

因此

$$\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|\geq\|\frac{x_1-\tilde{\ell}}{2}\omega\|-\|tq_n\omega\|\geq\frac{1}{3q_n}.$$

所以

$$\ln\|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|\geq\ln\frac{1}{3q_n}\geq-\varepsilon sq_m,$$

其中，在最后一个估计中我们使用了与情形 1 相同的论证。引理 5.7 的证明至此完成。□

接下来，我们继续如下证明引理 5.6。对每个 $w=1$，……，4，我们定义

$$S_w := \sum_{\substack{j=(w-1)s+1 \\ j\neq j_0}}^{ws} \min_{\ell\in T_j} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|.$$

显然，

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_j} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| = \sum_{w=1}^{4} S_w. \tag{5.13}$$

在每个求和中， $S_w$这些 $\ell$均选自同一个 $T^{(w)}$，见（5.10），因此对于任意两个不同的 $\ell$, $\ell'\in T^{(w)}$，有 $|\ell-\ell'|\leq 2sq_m < 2q_{m+1}$，见（5.1）。因此

$$\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega - \frac{x_1-\ell'}{2}\omega\| \geq \|q_m\omega\|. \tag{5.14}$$

这样，我们可以估计

$$\begin{aligned} S_w \geq & 2\min_{\substack{j=1 \\ j\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_j} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| + 2\sum_{j=1}^{s} \ln(j\|q_m\omega\|) \\ \geq & -2\varepsilon sq_m + 2s\ln\frac{s}{q_{m+1}}, \end{aligned} \tag{5.15}$$

这里我们对最小值中的最小值使用了引理5.7 。现在我们继续给$s\ln(s/q_{m+1})$ 求下界，如下所示。注意到 $8q_m \leq \operatorname{dist}(y,\ 2\mathbb{Z}q_n) \leq q_n$，因此 $q_{m+1}\leq q_n$。另请回顾$16sq_m \geq q_n^{1-\varepsilon}$，见（5.1）。因此

$$\begin{aligned} s\ln\frac{s}{q_{m+1}} \geq s\ln\frac{q_n^{1-\varepsilon}}{16q_mq_{m+1}} \geq & s\ln\frac{1}{16q_mq_{m+1}^{\varepsilon}} \\ \geq & -s\ln(16q_m) - \varepsilon sq_m\frac{\ln q_{m+1}}{q_m} \\ \geq & -(\beta+1)\varepsilon sq_m, \end{aligned}$$

这里我们用到了（$\ln q_{m+1}$）$/q_m < \beta+\varepsilon$。将其代入（5.15），得到

$$S_w \geq -(2\beta+4)\varepsilon sq_m. \tag{5.16}$$

这完成了 引理5.6 的证明，这由（5.13）得出，因此也完成了对 $\sum_{2,\ 1}$的分析。 □

接下来，我们转而估计 $\sum_{2,2}$。

5.1.2. $\sum_{2,\ 2}$的估计。

**引理 5.8**。

$$\sum_{2,2} \geq -4sq_m\ln 2 - (8\beta+17)\varepsilon sq_m.$$

引理 5.8 的证明。与（5.11）类似，我们有

$$\sum_{2,2}=\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq x_1}}\ln|\sin(\pi(2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega))|$$

$$\geq -4sq_m\ln 2-\varepsilon sq_m+\sum_{j=1}^{4s}\min_{\ell\in T_j}\ln\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\| \tag{5.17}$$

我们再次先估计 $4s$ 最小值中的最小值。

**引理 5.9**。

$$\min_{j=1}^{4s}\min_{\ell\in T_j}\ln\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\|\geq -21\varepsilon^3 sq_m.$$

引理 5.9的证明。 我们分为三种不同情形，并将使用 $\tilde{\gamma}(\omega,\ \theta)=0$，因此对于任意充分大的 $n$，

$$\|2\theta-1/2+n\omega\|\geq e^{-\varepsilon^3|n|}. \tag{5.18}$$

在证明中，我们根据 $x_1$ 和 $\ell$ 的位置分为三种情形。情形 1。两者均为 $x_1,\ \ell\in I_y$。

不失一般性，我们假设 $y\geq 2(t-1)q_n+q_n$。我们有

$$\max(2tq_n-x_1,2tq_n-\ell)\leq 7sq_m+(2tq_n-y)\leq 23sq_m,$$

以及

$$\min(2tq_n-x_1,2tq_n-\ell)\geq sq_m+(2tq_n-y)\geq 9sq_m,$$

wher我们使用了（5.1）来界定（$2tq_n-y$）=距离（$y,\ 2q_n\mathbb{Z}$）$\in[8sq_m,16sq_m]$。因此 e

$$\frac{(x_1-2tq_n)+(\ell-2tq_n)}{2}+4sq_m-3\in[-20sq_m,-5sq_m]. \tag{5.19}$$

因此，当 $n$ 很大时（从而 $sq_m$ 也很大），由（5.18）可得，

$$\|2\theta-1/2+(\frac{(x_1-2tq_n)+(\ell-2tq_n)}{2}+4sq_m-3)\omega\|\geq e^{-20\varepsilon^3 sq_m}\geq e^{-3\varepsilon^3 q_n}, \tag{5.20}$$

其中在最后一个估计中使用了 $8sq_m\leq$ 距离$(y,\ 2q_n\mathbb{Z})\leq q_n$。

注意到 $q_{n+1}\geq e^{\varepsilon q_n}$ 和 $tq_n\leq 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$，因此

$$\|2tq_n\omega\|\leq\frac{2t}{q_{n+1}}\leq 20q_{n+1}^{-\varepsilon}\leq 20e^{-\varepsilon^2 q_n}\ll e^{-3\varepsilon^3 q_n}. \tag{5.21}$$

将 (5.20) 与 (5.21) 结合，得到

$$\begin{aligned}&\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\|\\ \geq&\|2\theta-1/2+(\frac{(x_1-2tq_n)+(\ell-2tq_n)}{2}+4sq_m-3)\omega\|-\|2tq_n\omega\|\\ \geq&e^{-21\varepsilon^3 sq_m}.\end{aligned} \tag{5.22}$$

情形 2。 $x_1 \in I_y$, $\ell \in I_0$ 或 $x_1 \in I_0$, $\ell \in I_y$。证明与上文情形 1 的证明类似。不失一般性，我们假设 $y \geq 2(t-1)q_n + q_n$ 且 $x_1 \in I_y$, $\ell \in I_0$。类似于 (5.19)，我们有

$$\frac{(x_1 - 2tq_n) + \ell}{2} + 4sq_m - 3 \in [-11sq_m, -3sq_m].$$

因此，类似于（5.20），我们有

$$\|2\theta - 1/2 + (\frac{(x_1 - 2tq_n) + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| \geq e^{-11\varepsilon^3 sq_m} \geq e^{-2\varepsilon^3 q_n}.$$

类似于（5.21），我们有

$$\|tq_n\omega\| \leq 10e^{-\varepsilon^2 q_n} \ll e^{-2\varepsilon^3 q_n}.$$

因此，类似于（5.22），我们有

$$\|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| \geq e^{-12\varepsilon^3 sq_m}.$$

情形 3。两者均为 $x_1$, $\ell \in I_0$。我们有

$$\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3 \in [-3sq_m, -sq_m].$$

Thus

$$\|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| \geq e^{-3\varepsilon^3 sq_m}.$$

结合这三种情形，我们证明了引理 5.9 中所述的结果。 □

所有 $4s$ 最小值之和可以用与引理 5.6 中类似的方法进行估计。

**引理 5.10**。

$$\sum_{j=1}^{4s} \min_{\ell \in T_j} \ln \|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| \geq -(8\beta + 16)\varepsilon sq_m.$$

引理 *5.10* 的证明。 对于每个 $w = 1, ..., 4$，我们定义

$$\tilde{S}_w := \sum_{j=(w-1)s}^{ws-1} \min_{\ell \in T_j} \ln \|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\|.$$

在每个 $\tilde{S}_w$ 中， $\ell$ 都来自 $T_{(w)}$。因此，对于两个不同的 $\ell$, $\ell' \in T^{(w)}$，我们有，$|\ell - \ell'| < 2sq_m < 2q_{m+1}$，因此与 (5.14) 类似，我们有

$$\begin{aligned} &\| \left(2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\right) - \left(2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell'}{2} + 4sq_m - 3)\omega\right) \| \\ =&\|\frac{\ell - \ell'}{2}\omega\| \geq \|q_m\omega\|. \end{aligned}$$

这意味着，与 (5.16) 类似，有

$$\begin{aligned} \tilde{S}_w \geq& 2 \min_{j=1}^{4s} \min_{\ell \in T_j} \ln \|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1 + \ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| - (2\beta + 2)\varepsilon sq_m \\ \geq& -(2\beta + 4)\varepsilon sq_m. \end{aligned}$$

这就证明了引理 5.10 所述的结论。 □

结合引理 5.10 与（5.17），可得

$$\sum_{2,2} \geq -4sq_m \ln 2 - (8\beta + 17)\varepsilon sq_m.$$

这证明了引理 5.8 并完成了对 $\sum_{2,\ 2}$ 的估计，因此也完成了引理5.4 的证明。□

接下来, 我们继续应用引理 5.2来证明特征函数的衰减 n.

5.2. **特征函数的衰减**。 引理 5.2给出了分母在 $I_y$上的以下下界。

**引理 5.11**。 当 $n$ 足够大时,

$$\max_{x_1 \in I_y} |P_{[x_1, x_1+h-1]}(\theta)| \geq e^{\frac{h}{2}(L_+ - 2\varepsilon_0)}. \tag{5.23}$$

引理的证明 *5.11*。 只需证明

$$\max_{x_1 \in I_0} |P_{[x_1, x_1+h-1]}(\theta)| < e^{\frac{h}{2}(L_+ - 2\varepsilon_0)}.$$

反证法，假设存在 $x_1 \in I_0$使得 $|P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)| \geq e^{\frac{h}{2}(L_+-2\varepsilon_0)}$。 令 $x_2 = x_1 + h - 1$。 根据 $I_0$ 的定义，我们有

$$sq_m \leq \min(|x_1|, |x_2|) \leq \max(|x_1|, |x_2|) \leq 7sq_m.$$

结合定理 2.1、引理 2.2以及（2.4）和（2.6），可得

$$\begin{aligned} \prod_{j=1}^{x_2} |\rho_j| \cdot |P_{[x_1,-1],z}(\theta)| \leq & \prod_{j=1}^{x_2} |\rho_j| \prod_{j=x_1-1}^{-1} |\rho_j| \cdot \|S_{-1,z} \cdots S_{x_1-1,z}\| \\ \leq & e^{\frac{h}{2}(L_- + \varepsilon_0)} e^{\frac{|x_1|}{2}(L + \varepsilon_0)} = e^{\frac{|x_1|}{2}(L_+ + \varepsilon_0)} e^{\frac{|x_2|}{2}(L_- + \varepsilon_0)}, \end{aligned} \tag{5.24}$$

类似地

$$\prod_{j=x_1}^{-1} |\rho_j| \cdot |P_{[1,x_2],z}(\theta)| \leq e^{\frac{|x_2|}{2}(L_+ + \varepsilon_0)} e^{\frac{|x_1|}{2}(L_- + \varepsilon_0)}. \tag{5.25}$$

最后，结合（5.23）、（5.24）、（5.25）以及泊松公式（2.5），

$$\begin{aligned} |\Psi_0| \leq & \max(e^{-(\frac{L}{2} - 12\varepsilon_0)|x_1|} \max(|\Psi_{x_1-1}|, |\Psi_{x_1}|), e^{-(\frac{L}{2} - 12\varepsilon_0)|x_2|} | \max(|\Psi_{x_2}|, |\Psi_{x_2+1}|)) \\ \leq & Csq_m e^{-(\frac{L}{2} - 12\varepsilon_0)sq_m} \to 0, \end{aligned} \tag{5.26}$$

如 $n \to \infty$。同样的论证显然可推出 $|\Psi_{-1}| \to 0$，这与$\|(\Psi_0,\ \Psi_{-1})\| = 1$。引理的证明到此结束 5.11。□

现在我们将证明特征函数从非共振区间到共振区间的指数衰减。

由引理 5.11，对于 $y$满足 $2(t-1)q_n + q_n^{1-\varepsilon} < y < 2tq_n$且 $q_n^{1-\varepsilon} < y < 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$，存在 $x_1 \in I_y$使得 $|P_{[x_1,x_1+h-1]}(\theta)| \geq e^{\frac{h}{2}(L_+-2\varepsilon_0)}$成立。 令 $x_2 = x_1 + h - 1$。类似于 (5.26)，有

$$|\Psi_y| \leq \max(e^{-(\frac{L}{2} - 12\varepsilon_0)|y - x_1|} \max(|\Psi_{x_1-1}|, |\Psi_{x_1}|), e^{-(\frac{L}{2} - 12\varepsilon_0)|y - x_2|} | \max(|\Psi_{x_2}|, |\Psi_{x_2+1}|)). \tag{5.27}$$

此外，由于 $\min(|y-x_1|,\ |y-x_2|) \geq sq_m \geq \operatorname{dist}(y,\ 2\mathbb{Z}q_n)/8$，我们有

$$|\Psi_y| \leq e^{-\frac{1}{8}(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)\cdot \operatorname{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)} \max(|\Psi_{x_1-1}|, |\Psi_{x_1}|, |\Psi_{x_2}|, |\Psi_{x_2+1}|). \tag{5.28}$$

将不等式（5.27）改写如下，记 $y=y_0$,

$$|\Psi_y| \leq \max_{y_1\in\{x_1-1,x_1,x_2,x_2+1\}} e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)|y_0-y_1|}|\Psi_{y_1}|. \tag{5.29}$$

从一个$y=y_0\in \mathcal{N}_{2(t-1)\text{开始},\ 2t}$我们迭代（5.29）直到达到 $y_k$，此时以下两者之一成立

情形 1。$|y_k-2tq_n|\leq q_n^{1-\varepsilon}$，或情形 2。$|t_k-2(t-1)$

$q_n|\leq q_n^{1-\varepsilon}$，或情形 3。 $k=8q_n^{\varepsilon}$

因此，通过对（5.29）进行迭代，我们得到

$$|\Psi_y| \leq \max_{(y_1,y_2,\dots,y_k)\in\mathcal{G}} e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)\sum_{j=1}^{k}|y_{j-1}-y_j|}|\Psi_{y_k}|,$$

其中 $\mathcal{G}=\{(y_1,\ y_2,\ \dots\dots\ y_k)\colon\ y_k\text{满足上述三种情形之一}\}$ .

若 $y_k$ 满足情形 1，根据三角不等式可得

$$\sum_{j=1}^{k}|y_{j-1}-y_j| \geq |y_0-y_k| \geq \operatorname{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon}.$$

并且我们对 $|\Psi_{y_k}|\leq r_{2t}$ 进行估计。

若 $y_k$ 满足情形 2，同理可得

$$\sum_{j=1}^{k}|y_{j-1}-y_j| \geq \operatorname{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon}.$$

并且我们对 $|\Psi_{y_k}|\leq r_{2(t-1)}$ 进行估计。

若 $y_k$ 满足情形 3，则由于迭代并未因情形 1 或情形 2 而停止，对于每个 $1\leq j\leq k$ 都有 $\operatorname{dist}(y_j,\ 2\mathbb{Z}q_n)\geq q_n^{1-\varepsilon}$，因此由 (5.28),

$$\begin{aligned}|\Psi_y| \leq & e^{-\frac{kq_n^{1-\varepsilon}}{8}(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)} \max_{y'\in[2(t-1)q_n+q_n^{1-\varepsilon},2tq_n-q_n^{1-\varepsilon}]}|\Psi_{y'}| \\ \leq & e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)q_n}|\Psi_{y_{\max}}|,\end{aligned}$$

其中 $y_{\max}$ 满足 $\Psi_{y_{\max}}:=\max_{y'\in\mathcal{N}_{2(t-1),\ 2t}}|\Psi_{y'}|$ 并且我们用到了 $k\geq 8q_n^{\varepsilon}$。结合这三种情形，对于任意的 $y\in\mathcal{N}_{2(t-1),\ 2t}$,

$$|\Psi_y| \leq \max\left(e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(\operatorname{dist}(y,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon})}\max(r_{2t},r_{2(t-1)}),\ e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)q_n}|\Psi_{y_{\max}}|\right) \tag{5.30}$$

特别地，这对 $y=y_{\max}$也成立，因此得到

$$|\Psi_{y_{\max}}| \leq e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(\operatorname{dist}(y_{\max},2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon})}\max(r_{2t},r_{2(t-1)}) \leq \max(r_{2t},r_{2(t-1)}).$$

将此代入（5.30），即可得到定理 5.1所述的结论。 □

## 6. Eigenfunction in the resonant regimes in the strong Liouville scale

**定理 6.1.** 对于任意满足 $0 \neq |t| < 2q_n^{-1}q_{n+1}^{1-\varepsilon}$ 的 $t \in \mathbb{Z}$，我们有

$$r_{2t} \leq e^{-(L-\beta(\omega)-26\varepsilon_0)\,tq_n}.$$

本节全文致力于证明这个定理。
令 $h = 4q_n - 2$，并设

$$\begin{cases} I_0 := [-3q_n, -q_n - 1] \cap (2\mathbb{Z}+1), \\ I_y := [y - 3q_n, y - q_n - 1] \cap (2\mathbb{Z}+1). \end{cases}$$

注意到 $|I_0| = |I_y| = q_n$。因此 $|I_0 \cup I_y| = 2q_n = h/2 + 1$。
我们将证明的第一个引理如下：

**引理 6.2。** 存在 $j \in I_0 \cup I_y$ 使得

$$|P_{[j,j+h-1]}(\theta)| \geq e^{2q_n(L_+ - \frac{\beta}{2} - 2\varepsilon_0)}. \tag{6.1}$$

引理 *6.2* 的证明。设 $\theta_\ell := \theta + \frac{\ell-1}{2}\omega + \frac{h/2-1}{2}\omega - \frac{1}{4}$。反证法，假设

$$\max_{j \in I_0 \cup I_y} |P_{[j,j+h-1]}(\theta)| < e^{2q_n(L_+ - \frac{\beta}{2} - 2\varepsilon_0)}.$$

那么，类似于（5.5），

$$\sup_{\xi \in [-1,1]} |g_{2q_n-1}(\xi)| \leq 2q_n e^{2q_n(L_+ - \frac{\beta}{2} - 2\varepsilon_0)} \cdot \sup_{\xi \in [-1,1]} \max_{j \in I_0 \cup I_y} |U(\xi, j, 4q_n - 2, I_0 \cup I_y)|.$$

将此与以下引理 6.3结合起来，我们便得到与引理 3.4矛盾的结论。

**引理 6.3。** 当 $n$ 足够大时，

$$\sup_{\tilde{\theta} \in \mathbb{T}} \max_{j \in I_0 \cup I_y} |U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), j, 4q_n - 2, I_0 \cup I_y)| \leq e^{(\frac{\beta}{2} + \varepsilon_0)2q_n}.$$

因此，引理6.2 的证明已完成，尚待证明引理6.3。 □

### 6.1. 引理的证明 mma 6.3。

不失一般性，我们假设 $y$ 为偶数，且 $sq_m$ 为偶数。

$$\begin{aligned} &\ln |U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), j, 4q_n - 2, I_0 \cup I_y)| \\ =& \ln \prod_{\substack{\ell \in I_0 \cup I_y \\ \ell \neq j}} \left| \frac{\cos 2\pi\tilde{\theta} - \cos 2\pi\theta_\ell}{\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_\ell} \right| \\ =& \sum_{\substack{\ell \in I_0 \cup I_y \\ \ell \neq j}} \ln |\cos 2\pi\tilde{\theta} - \cos 2\pi\theta_\ell| - \sum_{\substack{\ell \in I_0 \cup I_y \\ \ell \neq j}} \ln |\cos 2\pi\theta_j - \cos 2\pi\theta_\ell| \\ =:& \sum_1 - \sum_2, \end{aligned} \tag{6.2}$$

˜其中 $\theta\in\mathbb{T}$ 为任意取定，且 $j\in I_0\cup I_{y\circ}$ 根据引理 3.2，

$$\begin{aligned}\sum_1 =&(2q_n-1)\ln 2\\ &+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}}\ln|\sin(\pi(\tilde\theta-\theta_\ell))|+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}}\ln|\sin(\pi(\tilde\theta+\theta_\ell))|\\ \le&2q_n\ln 2+4(C\ln q_n-(q_n-1)\ln 2)\\ \le&2q_n(-\ln 2+\varepsilon).\end{aligned}\tag{6.3}$$

主要困难在于获得 $\sum_2$的精确下界。

$$\begin{aligned}\sum_2 =&(2q_n-1)\ln 2+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}}\ln|\sin(\pi\frac{j-\ell}{2}\omega)|\\ &+\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}}\ln|\sin(\pi(2\theta-\frac12+(\frac{j+\ell}{2}+2q_n-3)\omega))|\\ =:&(2q_n-1)\ln 2+\sum_{2,1}+\sum_{2,2}.\end{aligned}\tag{6.4}$$

关于 $\sum_{2,\ 1}$. 我们首先证明关于 $\sum_{2,\ 1}$ 的估计

6.1.1. .

**引理 6.4.**

$$\sum_{2,1}\ge(-2\ln 2-\beta-\varepsilon)q_n.$$

引理 *6.4* 的证明。 不失一般性，我们假设 $j\in I_{y\circ}$ 由引理 3.2可得

$$\begin{aligned}\sum_{2,1}=&\sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}}\ln|\sin(\pi(\frac{j-\ell}{2}\omega)|\\ \ge&2(-q_n\ln 2-C\ln q_n)+\min_{\ell\in I_0}\ln\|\frac{j-\ell}{2}\omega\|.\end{aligned}\tag{6.5}$$

由于 $j\in I_y$ 且 $|y-2tq_n|<q_n^{1-\varepsilon}$，我们有

$$j-2tq_n\in[y-2tq_n-3q_n-1,y-2tq_n-q_n-1]\subset[-(3+\varepsilon)q_n-1,(\varepsilon-1)q_n-1].$$

因此，存在唯一的 $t'\in\{t-1,t,t+1\}$ 使得 $j-2t'q_n\in I_{0\circ}$ 利用$t'q_n<20q_{n+1}^{1-\varepsilon}$ 和 $q_{n+1}\ge e^{\varepsilon q_n}$，我们估计得

$$\|\frac{j-(j-2t'q_n)}{2}\omega\|=\|t'q_n\omega\|\le\frac{t'}{q_{n+1}}<20q_{n+1}^{-\varepsilon}\le 20e^{-\varepsilon^2q_n}.\tag{6.6}$$

此外，若 $\ell\in I_0\setminus\{j-2t'q_n\}$，则有 $0<|\ell-(j-2t'q_n)|<2q_n$，因此

$$\|\frac{\ell-(j-2t'q_n)}{2}\omega\|\ge\|q_{n-1}\omega\|\ge\frac{1}{2q_n}\gg 20e^{-\varepsilon^2q_n}.\tag{6.7}$$

结合（6.6）与（6.7），对任意 $\ell \in I_0 \setminus \{j-2t'q_n\}$ 都有

$$\|\frac{j-\ell}{2}\omega\| \geq \|\frac{\ell-(j-2t'q_n)}{2}\omega\| - \|t'q_n\omega\| \geq \frac{1}{3q_n} \gg \|\frac{j-(j-2t'q_n)}{2}\omega\|.$$

因此

$$\min_{\ell\in I_0} \ln\|\frac{j-\ell}{2}\omega\| = \ln\|\frac{j-(j-2t'q_n)}{2}\omega\| = \ln\|t'q_n\omega\| \geq \ln\frac{t'}{2q_{n+1}} \geq -(\beta+\varepsilon)q_n,$$

其中我们使用了 $(\ln q_{n+1})/q_n < \beta+\varepsilon/2$。将其代入（6.5）即可得到引理6.4所述的结论。□

**6.1.2.** 的估计$\sum_{2,2}$。下一个引理涉及 $\sum_{2,2}$。

**引理 6.5**。

$$\sum_{2,2} \geq (-2\ln 2 - 2\varepsilon^3)q_n.$$

引理*6.5*的证明。由引理3.2,

$$\begin{aligned}\sum_{2,2} &= \sum_{\substack{\ell\in I_0\cup I_y\\ \ell\neq j}} \ln|\sin(\pi(2\theta-\frac{1}{2}+(\frac{j+\ell}{2}+q_n-3)\omega))|\\ &\geq 2(-q_n\ln 2-\varepsilon)+2\min_{\{\ell,j\}\subset I_0\cup I_y}\ln\|2\theta-\frac{1}{2}+(\frac{j+\ell}{2}+2q_n-3)\omega\|.\end{aligned}$$

与引理 5.9的证明类似，我们根据 $\ell$ 和 $j$的位置分为三种情形。

情形 1. $\ell$,$j \in I_y$ 均成立。再次利用 $tq_n < 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$ 和 $q_{n+1} \geq e^{\varepsilon q_n}$，可得

$$\|2(t+1)q_n\omega\| \leq \frac{2(t+1)}{q_{n+1}} < 30e^{-\varepsilon^2 q_n}. \tag{6.8}$$

此外，由于

$$\frac{(j-2(t+1)q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3 \in [-4q_n,-q_n], \tag{6.9}$$

由 $\tilde{\gamma}(\omega,\theta) = 0$，可得

$$\|2\theta-\tfrac{1}{2}+(\frac{(j-2(t+1)q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3)\omega\| \geq e^{-\varepsilon^3 q_n} \gg 30e^{-\varepsilon^2 q_n}. \tag{6.10}$$

将 (6.8) 与 (6.10) 结合起来，得到

$$\begin{aligned}&\|2\theta-1/2+(\frac{j+\ell}{2}+2q_n-3)\omega\|\\ \geq&\|2\theta-1/2+(\frac{(j-2(t+1)q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3)\omega\|-\|2(t+1)q_n\omega\|\\ \geq&\frac{1}{2}e^{-\varepsilon^3 q_n}.\end{aligned}$$

情形 2。 $\ell \in I_y$， $j \in I_0$ 或 $\ell \in I_0$， $j \in I_y$。不失一般性，我们假设 $\ell \in I_y$ 且$j \in I_0$。类似于（6.8），

$$\|(t+2)q_n\omega\| \leq \frac{t+2}{q_{n+1}} \leq 20e^{-\varepsilon^2 q_n}. \tag{6.11}$$

类似于（6.9），

$$\frac{(j-2q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3\in[-4q_n,-q_n],$$

因此

$$\|2\theta-1/2+\frac{(j-2q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3)\omega\|\geq e^{-\varepsilon^3 q_n}\gg 20e^{-\varepsilon^2 q_n}. \tag{6.12}$$

将（6.11）与（6.12）结合起来，我们得到

$$\begin{aligned}&\|2\theta-1/2+\frac{j+\ell}{2}+2q_n-3)\omega\|\\ \geq&\|2\theta-1/2+\frac{(j-2q_n)+(\ell-2(t+1)q_n)}{2}+2q_n-3)\omega\|-\|(t+2)q_n\omega\|\\ \geq&\frac{1}{2}e^{-\varepsilon^3 q_n}.\end{aligned}$$

情形 3。两者均 $\ell$，$j\in I_0$。分析与前两种情形非常相似，我们只指出，与（6.12）类似，我们估计

$$\|2\theta-1/2+\frac{(j-2q_n)+(\ell-2q_n)}{2}+2q_n-3)\omega\|\geq e^{-\varepsilon^3 q_n}$$

细节留给感兴趣的读者。

最后，结合这三种情形，我们证明了引理 6.5。 □

结合引理 6.4、6.5与（6.4），可得

$$\sum_2\geq(-2\ln 2-\beta-2\varepsilon)q_n. \tag{6.13}$$

最后结合（6.13）与（6.2）和（6.3），可得

$$\sum_1-\sum_2\leq(\frac{\beta}{2}+2\varepsilon)2q_n.$$

引理 6.3的证明至此完成。 □

6.2. **特征函数的衰减**。引理6.2 推出以下结论。

**引理 6.6**。存在 $j\in I_y$ 使得 （6.1）成立。

引理 *6.6*的证明。只需证明对于任意 $j\in I_0$，$|P_{[j,j+h-1]}(\theta)|<e^{2q_n(L_+-\frac{\beta}{2}-2\varepsilon_0)}$。反证法。假设对于某个 $j\in I_0$，$|P_{[j,j+h-1]}(\theta)|\geq e^{2q_n(L_+-\frac{\beta}{2}-2\varepsilon_0)}$。令$x_2=j+4q_n-2$。注意，由 $I_0$的构造，$I_y$以及（5.1），可得

$$\min(|j|,|x_2|)\geq q_n-2$$

结合定理 2.1、引理 2.2 以及（2.2）、（2.3）和（2.6），可得当 $n$ 充分大时，分子的上界为

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{x_2}|\rho_j|\cdot|P_{[x_1,-1],z}(\theta)|\leq&\prod_{j=1}^{x_2}|\rho_j|\prod_{j=x_1-1}^{-1}|\rho_j|\cdot\|S_{-1,z}\cdots S_{x_1-1,z}\|\\ \leq&e^{\frac{h}{2}(L_-+\varepsilon_0)}e^{\frac{-x_1}{2}(L+\varepsilon_0)},\end{aligned}$$

类似地

$$\prod_{j=x_1}^{-1}|\rho_j|\cdot|P_{[1,x_2],z}(\theta)|\le e^{\frac{h}{2}(L_-+\varepsilon_0)}e^{\frac{x_2}{2}(L+\varepsilon_0)}.$$

将它们与（2.5）结合，我们得到

$$|\Psi_0|\le\max\Big(e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)|j|+\beta q_n}\max(|\Psi_j|,|\Psi_{j-1}|),\\ e^{-(-\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)|x_2|+\beta q_n}\max(|\Psi_{x_2}|,|\Psi_{x_2+1}|)\Big). \tag{6.14}$$

我们将下面的讨论分为三种情形。

情形 1. $j\in[-2q_n-q_n^{1-\varepsilon},-2q_n+q_n^{1-\varepsilon}]$。在这种情形下，$x_2\in[2q_n-q_n^{1-\varepsilon},2q_n+q_n^{1-\varepsilon}]$。于是我们可以直接估计得到 $\max(|\Psi_j|,\ |\Psi_{j-1}|)\le r_{-2}$ 且 $\max(|\Psi_{x_2}|,\ |\Psi_{x_2+1}|)\le r_2$。然后

$$\begin{aligned}|\Psi_0|\le&e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(2q_n-q_n^{1-\varepsilon})+\beta q_n}\max(r_{-2},r_2)\\ \le&e^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)q_n}\to 0,\end{aligned}$$

因为 $n\to\infty$。

情形 2，$j\in[-3q_n,-2q_n-q_n^{1-\varepsilon})$。在这种情形下，我们应用定理 5.1 来处理 $|\Psi_j|$ 和 $|\Psi_{j-1}|$，并得到

$$\max(|\Psi_j|,|\Psi_{j-1}|)\le e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(\mathrm{dist}(j,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon})}\max(r_{-4},r_{-2}).$$

类似地

$$\max(|\Psi_{x_2}|,|\Psi_{x_2+1}|)\le e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(\mathrm{dist}(x_2,2\mathbb{Z}q_n)-q_n^{1-\varepsilon})}\max(j_0,r_2).$$

注意到 $x_2\in[q_n,2q_n-q_n^{1-\varepsilon}]$。将其代入（6.14），得到

$$\begin{aligned}|\Psi_0|\le&\max(e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(4q_n-q_n^{1-\varepsilon})+\beta q_n}r_{-4},e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(2q_n-q_n^{1-\varepsilon})+\beta q_n}r_{-2},\\ &e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(2q_n-q_n^{1-\varepsilon})+\beta q_n}j_0,e^{-(\frac{L}{2}-12\varepsilon_0)(2q_n-q_n^{1-\varepsilon})+\beta q_n}r_2)\\ \le&\max(e^{-(2L-\beta-50\varepsilon_0)q_n}r_{-4},e^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)q_n}\max(r_{-2},j_0,r_2)\\ \le&e^{-(L-\beta-26\varepsilon_0)q_n}\to 0.\end{aligned}$$

情形 3. $j\in(-2q_n+q_n^{1-\varepsilon},\ -q_n-1]$

与情形 2 类似，也可以得到

$$\begin{aligned}|\Psi_0|\le&\max(e^{-(2L-\beta-50\varepsilon_0)q_n}r_{-4},e^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)q_n}\max(r_{-2},j_0,r_2)\\ \le&e^{-(L-\beta-26\varepsilon_0)q_n}\to 0.\end{aligned}$$

将 $\Psi_{-1}$ 代替 $\Psi_0$，三种情形下完全相同的估计仍然成立。因此得到$\|(\Psi_0,\ \Psi_{-1})\|\to 0$，这与 $\|(\Psi_0,\ \Psi_{-1})\|=1$矛盾。引理6.6的证明至此完成。□

现在我们可以完成在这一强刘维尔尺度下安德森局域化的整个证明了。引理 6.6 的证明中相同的论证表明，对任意 $0\neq t\in\mathbb{Z}$使得 $2|t|q_n<10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$，

$$r_{2t}\le\max(e^{-(L-\frac{\beta}{2}-25\varepsilon_0)2q_n}\max(r_{2(t-2)},r_{2(t+2)}),\\ e^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)q_n}\max(r_{2(t-1)},r_{2t},r_{2(t+1)}). \tag{6.15}$$

显然，右侧的 $r_{2t}$ 项可以略去。现在，若我们从 $t$ 使得$0 \neq |t| < 2q_n^{-1}q_{n+1}^{1-\varepsilon}$出发，就可以迭代（6.15），直到 $t-2$、$t+2$、$t-1$、$t+1$ 中的某一项变为零，或者其中某一项超过 $5q_n^{-1}q_{n+1}^{1-\varepsilon} =: t_n$。因此

$$\begin{aligned} r_{2t} &\leq \max(e^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)tq_n} j_0, Ce^{-(L-\beta-25\varepsilon_0)(t_n-t)q_n} q_{n+1}^{1-\varepsilon}) \\ &\leq \max(e^{-(L-\beta-26\varepsilon_0)tq_n}, e^{-(L-\beta-26\varepsilon_0)3q_{n+1}^{1-\varepsilon}}) = e^{-(L-\beta-26\varepsilon_0)tq_n}. \end{aligned}$$

This 完成定理6.1的证明，从而完成局域化的整个证明 . □

## 7. Eigenfunction in a weak Liouville scale

对于 $q_n^{1-\varepsilon} \leq y \leq 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$ 和 $q_{n+1} \leq e^{\varepsilon q_n}$，我们不需要划分为共振/非共振区域。关键输入是对 $U$的一个上界，见下方引理7.1 。这里我们仅对论证的这一部分作概述，更详细的内容留给感兴趣的读者。令 $m$ 为满足下式的最大整数： $y \geq 8q_m$ ，并取满足 $s$ 的最大整数$8sq_m \leq y < 8(s+1)sq_m$。本节中将始终使用以下不等式：

$$\max(8sq_m, q_n^{1-\varepsilon}) \leq y < \min(16sq_m, 8q_{m+1}). \tag{7.1}$$

令 $h = 8sq_m - 2$ 并设 $I_0$， $I_y$ 如（5.2）所示。

显然，关键在于证明以下关于 $U$ 的上界。在本节剩余部分，我们仅概述该引理的证明，并将对 $\Psi_y$ 的研究留给感兴趣的读者。

**引理 7.1.** 我们有

$$\sup_{\tilde{\theta}\in\mathbb{T}} \max_{x_1\in I_0\cup I_y} |U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), x_1, h, I_0 \cup I_y)| \leq e^{\frac{\varepsilon_0 h}{2}}.$$

引理的证明 7.1。 不失一般性，我们假设 $y$ 为偶数，且 $7sq_m$ 为偶数。对每个 $\ell \in I_0 \cup I_y$，令 $\theta_\ell = \theta + \frac{\ell}{2}\omega + (2sq_m - \frac{3}{2})\omega - \frac{1}{4}$。- - -
与（5.6）中一样，我们将其分解为

$$\ln |U(\cos(2\pi\tilde{\theta}), x_1, h, I_0 \cup I_y)| =: \sum_1 - \sum_2.$$

与（5.7）类似，我们有

$$\sum_1 \leq 4sq_m(-\ln 2 + \varepsilon). \tag{7.2}$$

与（5.8）中一样，我们将其分解为

$$\sum_2 =: (4sq_m - 1)\ln 2 + \sum_{2,1} + \sum_{2,2}. \tag{7.3}$$

我们进一步将 $I_0$， $I_y$ 分解为 $T_j$ 和 $T^{(w)}$，它们的定义与（5.9）、（5.10）中相同。

### 7.1. 估计$\sum_{2,\ 1}$.

**引理 7.2**。

$$\sum_{2,1} \geq -4sq_m \ln 2 - (8\beta + 600)\varepsilon sq_m.$$

引理7.2的证明。不失一般性，我们假设 $x_1 \in T_{j_0}$ 对于某个 $j_0 \le 3s$。注意$x_1 \in I_y$。由引理3.2可得，类似于（5.11），有

$$\sum_{2,1} \ge -4sq_m \ln 2 - \varepsilon sq_m + \sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| \tag{7.4}$$

Let

$$\min_{\substack{r=1 \\ r\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| =: \ln \|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\|$$

是（$4s-1$）个最小值中的最小值。

**引理 7.3**。 （$4s-1$）个最小值中的最小值满足以下下界：

$$\ln \|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\| \ge -64\varepsilon sq_m.$$

引理 7.3的证明。 根据 $y$ 的大小，我们分为两种情形。情形 1：若 $q_n^{1-\varepsilon} \le y \le q_n/2$。我们有

$$0 < |\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}| < y < \frac{q_n}{2}.$$

因此

$$\ln \|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\omega\| \ge \ln \|q_{n-1}\omega\| \ge \ln \frac{1}{2q_n} \ge -\varepsilon sq_m,$$

其中在最后一个估计中我们使用了 $16sq_m > q_n^{1-\varepsilon}$。

情形 2。若 $q_n/2 \le y \le 10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$。我们有

$$0 < |\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}| < q_{n+1},$$

因此

$$\ln \|\frac{x_1-\hat{\ell}}{2}\| \ge \ln \|q_n\omega\| \ge \ln \frac{1}{2q_{n+1}} \ge -2\varepsilon q_n \ge -64\varepsilon sq_m.$$

这里我们用到了 $q_{n+1} \le e^{\varepsilon q_n}$ 以及 $q_n/2 \le y \le 16sq_m$，参见（7.1）。引理7.3的证明至此完成。□

Ne与引理 5.6类似，我们估计如下的最小值之和 s.

**引理 7.4**。

$$\sum_{\substack{r=1 \\ r\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| \ge -(8\beta+550)\varepsilon sq_m.$$

证明。 对于每个 $w = 1$，...，4，我们定义

$$S_w := \sum_{\substack{r=(w-1)s+1 \\ r\neq j_0}}^{ws} \min_{\ell\in T_r} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|.$$

显然，

$$\sum_{\substack{r=1\\ r\neq j_0}}^{4s}\min_{\ell\in T_r}\ln\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|=\sum_{w=1}^{4}S_w.$$

在每个求和中 $S_w$，其中的 $\ell$均选自同一个 $T^{(w)}$，见（5.10），因此对于任意两个不同的 $\ell$，$\ell'\in T^{(w)}$，$|\ell-\ell'|<2sq_m<2q_{m+1}$。于是

$$\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega-\frac{x_1-\ell'}{2}\omega\|\geq\|q_m\omega\|. \tag{7.5}$$

这样，我们可以估计

$$\begin{aligned}S_w\geq&2\min_{\substack{r=1\\ r\neq j_0}}^{4s}\min_{\ell\in T_r}\ln\|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\|+2\sum_{j=1}^{s}\ln(j\|q_m\omega\|)\\ \geq&-128\varepsilon sq_m+2s\ln\frac{s}{q_{m+1}},\end{aligned}$$

其中我们使用了引理 7.3来处理最小项的最小值。接下来我们继续给出 $s\ln(s/q_{m+1})$ 的下界，分为两种情形。

情形 1。如果 $q_n^{1-\varepsilon}\leq y\leq q_n/2$。在此情形下，我们有 $8q_m\leq y<q_n/2$，从而得到 $q_{m+1}\leq q_n$。我们还有 $16sq_m>y\geq q_n^{1-\varepsilon}\geq q_{m+1}^{1-\varepsilon}$，这意味着

$$s\ln\frac{s}{q_{m+1}}\geq s\ln\frac{q_{m+1}^{1-\varepsilon}}{16q_mq_{m+1}}\geq-(\beta+2)\varepsilon sq_m,$$

其中在最后一个估计中我们使用了 $(\ln q_{m+1})/q_m\leq\beta+\varepsilon$。因此每个

$$S_w\geq-(2\beta+132)\varepsilon sq_m. \tag{7.6}$$

情形 2. 若 $q_n/2<y<10q_{n+1}^{1-\varepsilon}$。在这种情形下，我们有 $8q_m<y<q_{n+1}$。进一步分为：

情形 2.1. 若 $m=n$。回忆起 $q_{n+1}\leq e^{\varepsilon q_n}$，我们可以估计

$$s\ln\frac{s}{q_{m+1}}\geq s\ln\frac{s}{q_{n+1}}\geq-\varepsilon sq_n=-\varepsilon sq_m.$$

因此

$$S_w\geq-130\varepsilon sq_m. \tag{7.7}$$

情形 2.2. 若 $m<n$。在这种情形下，$q_{m+1}\leq q_n$，因此我们可以估计

$$\ln\frac{s}{q_{m+1}}\geq\ln\frac{s}{q_n}>\ln\frac{1}{32q_m}>-\varepsilon q_m.$$

其中我们用到了 $16sq_m\geq y\geq q_n/2$。因此我们再次得到

$$S_w\geq-130\varepsilon sq_m. \tag{7.8}$$

结合（7.6）、（7.7）和（7.8），我们证明了引理 7.4。 □

将引理 7.4 代入（7.4），可得

$$\begin{aligned}\sum_{2,1} &\geq -4sq_m \ln 2 - \varepsilon sq_m + \sum_{\substack{r=1\\ r\neq j_0}}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|\frac{x_1-\ell}{2}\omega\| \\ &\geq -4sq_m \ln 2 - (8\beta+600)\varepsilon sq_m.\end{aligned}$$

引理的证明至此完成7.2。 □

接下来，我们转而估计 $\sum_{2,2}$。

7.2. $\sum_{2,2}$**的估计**。

**引理 7.5**。

$$\sum_{2,2} \geq -4sq_m \ln 2 - (8\beta+200)\varepsilon sq_m.$$

引理 *7.5* 的证明。与（7.4）类似，我们有

$$\sum_{2,2} \geq -4sq_m \ln 2 - \varepsilon sq_m + \sum_{r=1}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega)\| \tag{7.9}$$

我们再次先估计 $4s$ 最小项的最小值。

**引理 7.6**。

$$\min_{r=1}^{4s} \min_{\ell\in T_r} \ln \|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega)\| \geq -20\varepsilon sq_m.$$

引理 *7.6*的证明。 根据 $x_1$和 $\ell$的位置，我们分为三种不同的情形。

情形 1。 $x_1,\ \ell \in I_y$ 均成立。

$$\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3 \in [y-3sq_m, y+3sq_m] \subset [5sq_m, 19sq_m],$$

这里我们用到了 $8sq_m \leq y < 16sq_m$。

情形 2。 $x_1 \in I_y$、 $\ell \in I_0$ 或 $x_1 \in I_0$、 $\ell \in I_y$。

$$\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3 \in [\frac{y}{2} - 3sq_m, \frac{y}{2} + sq_m] \subset [sq_m, 9sq_m].$$

情形 3。 $x_1,\ \ell \in I_0$。

$$\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3 \in [-3sq_m, -sq_m].$$

因此，在这三种情形中，我们都有

$$\|2\theta - 1/2 + (\frac{x_1+\ell}{2} + 4sq_m - 3)\omega\| \geq e^{-20\varepsilon sq_m},$$

如所声称，从而完成了引理 7.6 的证明。 □

其余最小值也可以用与引理 7.4.

**引理 7.7**。

$$\sum_{r=1}^{4s}\min_{\ell\in T_r}\ln\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\|\geq-(8\beta+180)\varepsilon sq_m.$$

引理的证明 7.7。对于每个 $w=1,...,\mathbf{4}$，定义

$$\tilde{S}_w:=\sum_{r=(w-1)s}^{ws-1}\min_{\ell\in T_r}\ln\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\|.$$

在每个 $\tilde{S}_w$中，$\ell$ 都来自同一个 $T_{(w)}$。因此，对于两个不同的 $\ell$，$\ell'\in T^{(w)}$，我们有 $|\ell-\ell'|<2sq_m<2q_{m+1}$，于是类似于 (7.5)，可得

$$\begin{aligned}&\|\left(2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\right)-\left(2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell'}{2}+4sq_m-3)\omega\right)\|\\=&\|\frac{\ell-\ell'}{2}\omega\|\geq\|q_m\omega\|.\end{aligned}$$

这意味着，类似于 (7.6)、(7.7) 和 (7.8)，有

$$\tilde{S}_w\geq 2\min_{r=1}^{4s}\min_{\ell\in T_r}\ln\|2\theta-1/2+(\frac{x_1+\ell}{2}+4sq_m-3)\omega\|-(2\beta+4)\varepsilon sq_m>-(2\beta+45)\varepsilon sq_m.$$

这就证明了引理 7.7 中所述的结果。□

结合引理 7.7 与 (7.9)，可得

$$\sum_{2,2}\geq-4sq_m\ln 2-(8\beta+200)\varepsilon sq_m.$$

这就证明了引理7.5。□

结合式（7.2）、（7.3）以及引理7.2和7.5，我们得到

$$\begin{aligned}\sum_1-\sum_2&\leq 4sq_m(-\ln 2+\varepsilon)-4sq_m\ln 2-\sum_{2,1}-\sum_{2,2}\\&\leq(16\beta+1000)\varepsilon sq_m\leq\frac{\varepsilon_0 h}{2}.\end{aligned}$$

这就证明了引理7.1。□

## References

[1] Y. Aharonov、L. Davidovich 和 N. Zagury（1993）。量子随机游走。《物理评论*A*》**48**(2)，1687–1690。[2] A. Ahlbrecht、V. B. Scholz 和 A. H. Werner（2011）。一维晶格上的无序量子游走。《数学物理杂志》**52**(10)，102201。[3] A. Ambainis（2007）。用于元素 distinctness 的量子游走算法。《*SIAM*计算杂志》**37**(1)，210–239。[4] A. Avila（2015）。单频薛定谔算子的整体理论。《数学学报》**215**(1)，1–54。[5] A. Avila 和 S. Jitomirskaya（2009）。十大马提尼问题。《数学年刊》（第*2*辑）**170**(1)，303–342。[6] A. Avila、J. You 和 Q. Zhou（2017）。几乎 Mathieu 算子的尖锐相变。《杜克数学杂志》**166**(14)，2697–2718。[7] J. Bourgain 和 M. Goldstein（2000）。关于拟周期势下的非微扰局域化。《数学年刊》（第*2*辑）**152**(3)，835–879。

[8] M. J. Cantero、L. Moral、F. A. Grünbaum 和 L. Velázquez（2010）。矩阵值 Szegő 多项式与量子随机游走。《纯粹与应用数学通讯》63(4)，464–507。[9] C. Cedzich、J. Fillman 和 D. C. Ong（2023）。关于酉几乎 Mathieu 算子的一切。《数学物理通讯》403(2)，745–794。[10] C. Cedzich、T. Rybar、A. H. Werner、A. Alberti、M. Genske 和 R. F. Werner（2013）。电场中的量子游走传播。《物理评论快报》111(16)，160601。[11] D. Damanik、J. Fillman、M. Lukic 和 W. Yessen（2016）。一致双曲性与 CMV 矩阵谱的刻画。《离散与连续动力系统：S辑》9(4)，1009–1023。[12] D. Damanik、J. Fillman 和 D. C. Ong（2016）。通过传递矩阵的幂律界估计整数格上量子游走的扩散。《纯粹与应用数学杂志》（第9辑）105(3)，293–341。[13] J. Fillman、D. C. Ong 和 Z. Zhang（2017）。酉临界几乎 Mathieu 算子的谱特征。《数学物理通讯》351(2)，525–561。[14] A. Furman（1997年）。关于唯一遍历系统的乘法遍历定理。《亨利·庞加莱研究所概率与统计年刊》33(6)，797–815。[15] F. Gesztesy 和 M. Zinchenko（2006）。与单位圆上正交多项式相关的 CMV 算子的 Weyl–Titchmarsh 理论。《逼近理论杂志》139(1–2)，172–213。[16] M. Goldstein 和 W. Schlag（2001）。拟周期薛定谔方程积分态密度的 Hölder 连续性及次调和函数的平移平均。《数学年刊》（第2辑）154(1)，155–203。[17] M. Goldstein 和 W. Schlag（2008）。积分态密度的精细性质及狄利克雷特征值的定量分离性质。《几何与泛函分析》18(3)，755–869。[18] M. Goldstein 和 W. Schlag（2011）。拟周期薛定谔方程的共振及谱隙形成。《数学年刊》（第2辑）173(1)，337–475。[19]M. Goldstein、W. Schlag 和 M. Voda（2019）。强耦合下多频拟周期薛定谔算子的谱。《数学发明》217(2)，603–701。[20] R. Han（2018）。非自对偶扩展Harper模型的干十马提尼问题。《美国数学会汇刊》370(1)，197–217。[21] R. Han（2019）。Shnol 定理与长程算子的谱。《美国数学会会刊》147(7)，2887–2897。[22]R. Han（2024年）。Liouville频率下首个超临界层上的尖锐局域化。arXiv:2405.07810。[23] R. Han、S. Jitomirskaya 和 F. Yang（2022年）。所有参数下马里兰模型局域化的反共振与尖锐分析。arXiv:2205.04021。[24]R. Han 和 W. Schlag（2022年）。通过行列式零点研究 Avila加速及其在薛定谔余循环中的应用。《纯粹与应用数学通讯》（即将出版）。[25] R. Han 和 W. Schlag（2023年）。拟周期Jacobi分块矩阵的非微扰局域化。arXiv:2309.03423。[26] R. Han 和 W. Schlag（2023年）。条带上的非微扰局域化与 Avila几乎可约猜想。arXiv:2306.15122。[27] R. Han、F. Yang 和 S. Zhang（2020年）。 $\beta$-几乎周期奇异 Jacobi 算子与扩展Harper模型的谱维数。《分析数学杂志》142(2)，605–666。[28] E. Hamza 和 A. Joye（2014年）。树上的随机量子游走的谱转变。《数学物理通讯》326(2)，415–439。[29] E. Hamza、A. Joye 和 G. Stolz（2006年）。随机酉算子的局域化。《数学物理快报》75(3)，255–272。[30] E. Hamza、A. Joye 和 G. Stolz（2009年）。酉Anderson模型的动力学局域化。《数学物理分析与几何》12(4)，381–444。[31] S. Y. Jitomirskaya（1999年）。几乎 Mathieu 算子的金属-绝缘体转变。《数学年刊》（第2辑）150(3)，1159–1175。[32] S. Jitomirskaya 和 W. Liu（2017年）。马里兰模型的算术谱转变。《纯粹与应用数学通讯》70(6)，1025–1051。[33] S. Jitomirskaya 和 W. Liu（2018年）。拟周期特征函数的普适层级结构。《数学年刊》（第2辑）187(3)，721–776。

[34] S. Jitomirskaya 和 R. Mavi（2017）。粗糙势下准周期 Schr¨odinger 算子的动力学界。《国际数学研究通知》（2017），第 1 期，96–120 页。[35] S. Jitomirskaya 和 B. Simon（1994）。具有奇异连续谱的算子：III. 几乎周期 Schr¨odinger 算子。《数学物理通讯》165(1)，201–205 页。[36] S. Jitomirskaya 和 F. Yang（2021）。马里兰模型的纯点谱：一种构造性证明。《遍历理论与动力系统》41(1)，283–294 页。[37] S. Jitomirskaya 和 F. Yang。相位中的相变：界面。预印本（草稿），可向作者索取。[38] A. Joye（2005）。随机酉算子的分数矩估计。《数学物理快报》72(1)，51–64 页。[39] A. Joye（2011）。随机含时量子游走。《数学物理通讯》307(1)，65–100 页。[40] A. Joye（2012）。 $d$维随机量子游走的动力学局域化。《量子信息处理》11(5)，1251–1269 页。[41] A. Joye 和 M. Merkli（2010）。随机环境中量子游走的动力学局域化。《统计物理学杂志》140(6)，1025–1053 页。[42] H. Kr¨uger（2013）。由斜移定义 Verblunsky 系数的单位圆上的正交多项式。《国际数学研究通知》2013(18)，4135–4169 页。[43] L. Li、D. Damanik 和 Q. Zhou（2022）。小准周期 Verblunsky 系数 CMV 矩阵的绝对连续谱。《美国数学会汇刊》375(9)，6093–6125 页。[44] S. Longhi（2019）。非厄米光子量子游走中的非布洛赫 $\mathcal{PT}$ 对称性破缺。《光学快报》44(23)，5804–5807 页。[45] S. Longhi（2022）。离散时间光子量子游走中的隐形非厄米势。《光学快报》47(16)，4091–4094 页。[46] S. Longhi（2024）。准晶中的退相干诱导迁移率边。《物理评论快报》132，236301。[47] R. Portugal（2013）。《量子游走与搜索算法》。施普林格，纽约。[48] E. E. Shnol（1957）。关于 Schr¨odinger 方程特征函数的行为。《数学文集》（新系列）42(84)(3)，273–286 页。（俄文）[49] B. Simon（1981）。Schr¨odinger 算子的谱与连续谱本征函数。《泛函分析杂志》42(3)，347–355 页。[50] B. Simon（2005）。《单位圆上的正交多项式》。第 1 部分：经典理论。美国数学会专题讲座出版物，第 54 卷，第 1 部分。美国数学会。[51] B. Simon（2005）。《单位圆上的正交多项式》。第 2 部分：谱理论。美国数学会专题讲座出版物，第 54 卷，第 2 部分。美国数学会。[52] B. Simon（2007）。CMV矩阵：五年之后。《计算与应用数学杂志》208(1)，120–154 页。[53] M. G. Solis、D. Spedale 和 F. Yang（2024）。Lieb晶格上磁拉普拉斯算子的谱。arXiv:2401.11405。[54] F. Wang（2018）。一个与 CMV 矩阵和 Szeg˝o 余循环相关的公式。《数学分析及其应用杂志》464(1)，304–316 页。[55] F. Yang（2018）。正李雅普诺夫指数区间内扩展Harper模型的谱跃迁线。《泛函分析杂志》275(3)，712–734 页。[56] F. Yang（2024）。酉几乎 Mathieu 算子的安德森局域化。《非线性》37(8)，085010。[57] F. Yang（2025）。电量子游走及相关斜移CMV矩阵的区间谱。《数学物理快报》115(3)，49。

Department of Mathematics, Louisiana State University, Baton Rouge, LA 70803