arXiv:2512.24649v1 [math.MG] 31 Dec 2025

地毯的周期性 Beurling-Ahlfors 延拓与拟对称刚性*

Fan WEN

暨南大学数学系，中国广州
510632
wenfan@jnu.edu.cn

2026年1月1日

摘要

我们为拟圆或拟圆地毯上的周期性保向拟对称自同胚建立了周期性拟共形延拓定理。作为应用，我们证明，若 f 是复平面 $\mathbb{C}$ 中零测度拟圆地毯 S 上的周期性保向拟对称自同胚，且在 S 的外周圆上有一个不动点，那么 f 在 S 上是恒等映射。此外，我们证明，若 f 是矩形环域中零测度方形地毯 S 上的拟对称自同胚，并固定 S 的外周圆的四个顶点，那么 f 在 S 上是恒等映射。文中还讨论了关于 $\mathbb{C}^*$-方形地毯的类似刚性问题。

关键词 准圆地毯、拟对称映射、拟共形延拓、拟对称刚性

2020年数学主题分类30L10

1 引言

M. Bonk、B. Kleiner 和 S. Merenkov 建立了地毯的优美拟共形几何，证明地毯之间的拟对称映射，其表现如同复平面 $\mathbb{C}$ 中区域之间的共形映射；参见 [3, 4, 5, 6, 7]。本文探讨这一几何中的周期性拟共形延拓和刚性问题，并给出若干关键结果及一个开放问题。

我们先介绍后文将用到的记号和基本事实。设 $f\colon X \to Y$ 是度量空间 X 和 Y 之间的拓扑同胚。若 f 是

*受国家自然科学基金资助（编号：1250010257）。

拟对称的，则存在一个同胚 $\eta:\ [0,\infty) \to [0,\infty)$，使得

$$d_Y(f(x), f(a)) \le \eta(t) d_Y(f(x), f(b))$$

对于 X和 $t \ge 0$中所有满足 $d_X(x,a) \le t d_X(x,b)$ 的三元点组 x, a, b。在这种情况下，我们也称 f 为 η-拟对称。若存在常数 $H \ge 1$ 使得.....，则称 f 是弱拟对称的

$$d_Y(f(x), f(a)) \le H d_Y(f(x), f(b))$$

对于 X中所有满足 $d_X(x,a) \le d_X(x,b)$ 的三元点组 x, a, b；参见 Tukia-V¨ais¨al¨a[13] 或 Heinonen [9, 第 78]页。若.....，则称 f 是拟共形的

$$\sup_{x\in X} \limsup_{r\to 0} \frac{\sup_{a\in S(x,r)} d_Y(f(a), f(x))}{\inf_{b\in S(x,r)} d_Y(f(b), f(x))} < \infty,$$

其中 $S(x,r) = \{a \in X:\ d_X(x,a) = r\}$。

已知，每个 X 到 Y 的 η-拟对称同胚都可以延拓为它们的完备化之间的 η-拟对称同胚。

拟对称性蕴含弱拟对称性。在某些情况下，反过来也成立，但一般而言并非如此；参见 [9, 10.19] 和 [16, 定理 6.6]。特别地，从 $\mathbb{R}^n$ 的连通子集到 $\mathbb{R}^m$的每个弱拟对称嵌入都是拟对称的。

拟对称性蕴含拟共形性。逆命题在某些情况下成立，但一般并不成立；参见 [14] 和 [9, 11.19]特别地， $\mathbb{C}$中两个（闭）拟圆盘之间的每个拟共形同胚都是拟对称的。还需注意，区域 D 和 G 之间的同胚是拟共形的，当且仅当它在 B（x, $d(x, \partial D)/2$）中对所有 $x \in D$都是 η-拟对称的，其中 η与 x无关；参见 [9, 11.14]关于拟共形映射的性质，请参阅 V¨ais¨al¨a [15]。

对于 $\mathbb{C}$ 的子集 E，我们分别用 $\overline{E}$、∂E、int(E)和 diam(E)表示其闭包、边界、内部和直径。用 $d(E, F)$表示 E 和 F 这两个 $\mathbb{C}$子集之间的距离。 $\mathbb{C}$中的 Jordan 弧是指将单位区间拓扑嵌入到 $\mathbb{C}$ 中或其像。 $\mathbb{C}$中的 Jordan 闭曲线是指将单位圆拓扑嵌入到 $\mathbb{C}$中或其像。 $\mathbb{C}$中的若尔当区域是指 $\mathbb{C}$的一个单连通开子集，其边界是一条 Jordan 闭曲线。若尔当闭曲线 γ 位于 $\mathbb{C}$中，则称其为c-拟圆，其中 $c \ge 1$ 为某个常数，并且

$$\min\{\operatorname{diam}(\alpha), \operatorname{diam}(\beta)\} \le c|z - w|$$

对于 z, w 中的任意一对不同点，其中 α、β 是 γ 的两个端点分别为 z 和 w 的不同真子弧。根据 Ahlfors [1], , $\mathbb{C}$ 中的 Jordan 闭曲线 γ 是拟圆，当且仅当存在一个拟共形映射 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $f(\gamma)$ 是单位圆。我们将 $\mathbb{C}$ 中的 c-拟圆盘定义为边界为 c-拟圆的若尔当区域。因此， $\mathbb{C}$ 中的若尔当区域 D 是拟圆盘，当且仅当存在一个拟共形映射 $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得 $f(D)$ 是单位圆盘。

$\mathbb{C}$ 的一个子集称为地毯，如果它在拓扑上同胚于标准的 $1/3$-Sierpi´nski 地毯。根据 Whyburn [17], , $\mathbb{C}$ 的一个子集是地毯，当且仅当它是紧的、连通的、局部连通的、拓扑维数为 1 且没有局部割点。此外， $\mathbb{C}$ 中的每个地毯 S 都可以写成

$$S = D_0 \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} D_k, \tag{1}$$

其中， D_0 是一个闭若尔当区域， D_k、 $k \geq 1$是 $\mathbb{C}$中的若尔当区域，并满足以下条件:

1) 对每个 $k \geq 1$， $D_k \subset \text{int}(D_0)$； 2) 对每一对 $k, j \geq 1$， $d(D_k, D_j) > 0$； 3) 当 $k \to \infty$ 趋于 $\to 0$ 时，diam(D_k)； 4) int$(S) = \emptyset$。

地毯 S 中的 Jordan 闭曲线 γ 称为 S 的外围圆，如果$S \setminus \gamma$是连通的。因此，对于如式（1）所示的地毯 S，其外围圆为 ∂D_k、$k \geq 0$，其中 ∂D_0 称为外周圆。根据定义，若$h : S \to T$是复平面 $\mathbb{C}$中两个地毯 S 和 T之间的同胚，则 h 将 S 的外围圆映射到 T的外围圆。

对于复平面 $\mathbb{C}$中的地毯 S， $\mathbb{C} \setminus S$的有界连通分支在 $\mathbb{C}$中是单连通的；然而，无界连通分支不是。因此，若复平面 $\mathbb{C}$ 中两个地毯 S 和 T 之间的同胚h: $S \to T$ 具有同胚延拓H: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，则 h 必须保持外周圆。

准圆地毯是指这样一种地毯：其周边圆均为具有某个共同常数 $c \geq 1$ 的 c-拟圆。

根据 Beurling-Ahlfors 扩张定理 [2], , 单位圆上的每个拟对称自同胚都可拟共形延拓到 $\mathbb{C}$。因此，如果 γ_1 和 γ_2 是 $\mathbb{C}$ 中的拟圆，那么从 γ_1 到 γ_2 的每个拟对称同胚都可拟共形延拓到 $\mathbb{C}$。

我们建立了 Beurling-Ahlfors 扩张定理的一个周期版本；若无额外的引理，它并不能直接由 Beurling-Ahlfors 的论证推出。

定理 1.1. 设 γ 是复平面中的一个拟圆。那么，每个 k-周期的保向拟对称同胚 $f : \gamma \to \gamma$ 都有一个 k- 周期的拟共形延拓 F: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

这里， f 是保向的，意即任意三个按顺时针顺序排列的点，其像也按顺时针顺序排列。集合上的自映射 f 称为周期的，如果对于某个整数 $k \geq 1$，有 $f^k = id$；其中 f^k 表示 f 的第 k 次迭代，而 id 表示恒等映射。注意，定理 1.1 中的同胚构成一个不可数类。

设 f： $S \to T$ 是 $\mathbb{C}$中两个准圆地毯 S 和 T 之间的拟对称同胚。根据 Bonk [3, 命题 5.1]， f 具有一个拟共形延拓 F： $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$。此外， f 具有拟共形延拓 F: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，当且仅当它保持 S和 T的外周圆不变。我们建立了这一延拓结果的周期版本。

定理 1.2。 设 S 是 $\mathbb{C}$中零测度的准圆地毯。那么，每个保持 S 的外周圆不变的k-周期保向拟对称同胚 $f:\ S \to S$，都有一个 k-周期性拟共形延拓 $F:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

作为定理 1.2 的一个应用，我们得到以下刚性结果。

定理 1.3. 设 S 是复平面 $\mathbb{C}$ 中的一个零测度准圆地毯。如果 $f:\ S \to S$ 是一个周期保向拟对称同胚，且在 S 的外周圆上有一个不动点，那么 $f = id$ 在 S 上。

如果存在常数 $\delta > 0$ 使得地毯 S 的周边圆满足以下条件，则称它们一致相对分离:

$$\frac{d(C_1, C_2)}{\min\{\operatorname{diam}(C_1), \operatorname{diam}(C_2)\}} \geq \delta$$

对于 S 中满足 $C_1 \neq C_2$ 的所有外围圆对 C_1，C_2 。Bonk-Merenkov[6, 推论 4.5] 证明了：若 S 是复平面 $\curvearrowleft\mathbb{C}$ 中一个周边圆一致相对分离的零测度准圆地毯， C 是 S 的一个外围圆，且 p，q 是 C 中两个不同的点，那么所有固定 p 和 q 的 S 的保向拟对称自同胚所成的群是 $\{id\}$ 或一个无限循环群。相比之下，定理 1.3 表明，额外的周期性条件会带来更强的刚性。关于度量地毯和自相似准圆地毯拟对称刚性的一些近期研究，参见 [11, 12, 18]。

如果地毯 S 包含于矩形 R，且可表示为

$$S = R \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

其中 Q_k、 $k \geq 1$是边平行于坐标轴的开正方形。设S 和 T 分别是矩形 $[0, a] \times [0, 1]$和 $[0, b] \times [0, 1]$中的零测度方形地毯。Bonk 和 Merenkov [6, 定理 1.4] 证明了，若 $f:\ S \to T$是一个保向拟对称同胚，将 $[0, a] \times [0, 1]$ 的四个顶点映射到 $[0, b] \times [0, 1]$ 的四个顶点，并且固定原点，则 $a = b$、$S = T$以及 S上的 $f = id$ 。

我们称 $R \setminus K$ 为矩形环域，如果

$$R = [0, a] \times [0, 1] \ \text{ and } \ K = (s, s + w) \times (t, t + h) \ \text{ with } \ \overline{K} \subset \operatorname{int}(R).$$

如果地毯 S 包含于 $R \setminus K$，且可表示为

$$S = (R \setminus K) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k,$$

其中 Q_k、 $k \geq 1$ 是如上所述的开正方形。采用与[6, 定理 1.4], 相同的论证，可得以下引理。

引理 1.1. 设 S 是矩形环域 $R\setminus K$ 中一个零测度的方形地毯。若 $f\colon S\to S$ 是一个拟对称同胚，固定 R 的四个顶点，并满足 $f(\partial K)=\partial K$，则 $f=id$ 在 S 上。

无需假设 $f(\partial K)=\partial K$，我们也能得到相同的结果。

定理 1.4。设 S 是矩形环域 $R\setminus K$ 中一个零测度的方形地毯，且 $f\colon S\to S$ 是固定 R 四个顶点的拟对称同胚。那么 $f=id$ 在 S 上。

为证明定理 1.4，我们先证明存在一个整数 $n\geq 1$，使得$f^n(\partial K)=\partial K$。结合引理 1.1 可知，$f^n=id$ 在 S 上。这表明定理 1.4 中的每个同胚都必须是周期的，因此我们可以应用定理 1.3，得到 $f=id$ 在 S 上。

设 $\mathbb{C}^*=\mathbb{C}\setminus\{0\}$。将其线元和面积元定义为

$$ds=\frac{|dz|}{|z|}\quad\text{and}\quad d\sigma=\frac{dxdy}{|z|^2}.$$

由线元给出的度量称为$\mathbb{C}^*$的拟双曲度量；参见 [8]。我们称 K 为一个 $\mathbb{C}^*$-矩形，当且仅当

$$K=\{te^{i\theta}:a<t<b,\ \alpha<\theta<\beta\},$$

其中 $0<a<b<\infty$ 和 $0<\beta-\alpha<2\pi$。在这种情况下，我们分别称 $\log(b/a)$ 和 $\beta-\alpha$ 为其径向边长和圆周方向边长。此外，若 $\log(b/a)=\beta-\alpha$，则称 K 为 $\mathbb{C}^*$-正方形。有限 $\mathbb{C}^*$-圆柱指形如 $\{a\leq|z|\leq b\}$ 的集合。

设 $A:=\{1\leq|z|\leq r\}$ 是一个有限 $\mathbb{C}^*$-圆柱，其中 $r>1$。地毯

$$S:=A\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$$

若 $\mathbb{C}^*$ 中的地毯称为 A 中的 $\mathbb{C}^*$-方形地毯，且 Q_k, $k\geq 1$ 是 $\mathbb{C}^*$-正方形，则称其为 $\mathbb{C}^*$-方形地毯。在这种情况下，我们分别称 $|z|=1$ 和 $|z|=r$ 为 S 的内周圆和外周圆。

根据 Bonk 和 Merenkov 的 [6, 定理 1，5], 若 S 是一个位于 $\mathbb{C}^*$-圆柱 A 中的零测度 $\mathbb{C}^*$-方形地毯，且 f 是 S 上的保向拟对称自同胚，分别将内、外周圆映到自身，则 f 是恒等映射或有理旋转。

设 K 是一个 $\mathbb{C}^*$-矩形，且 $K\subset\overline{\text{int}}(A)$，其中 $A=\{1\leq|z|\leq r\}$。我们称一个地毯

$$S=(A\setminus K)\setminus\bigcup_{k=1}^{\infty}Q_k$$

是 $\mathbb{C}^*$中的 $A\setminus K$ 方形地毯，当 Q_k、 $k\geq 1$是 $\mathbb{C}^*$方形时。通过与 [6, 定理 1.5], 相同的论证，我们得到以下引理。

引理 1.2。设 S 是 $A \setminus K$ 中一个零测度的 $\mathbb{C}^*$ 方形地毯。设 f 是 S 上的保向拟对称自同胚，分别将 S 的 ∂K、内部和外周圆映到自身。则 $f = id$ 在 S 上。

无需假设 $f(\partial K) = \partial K$，即可得到以下结果。

定理 1.5。设 S 是 $A \setminus K$ 中一个零测度的 $\mathbb{C}^*$ 方形地毯。设 f 是 S 上的保向拟对称自同胚，分别将其内部和外周圆映到自身。则 f 是周期的。

开放问题 1。若定理 *1.5* 中的 $\mathbb{C}^*$ 矩形 K 不是 $\mathbb{C}^*$ 方形，我们猜想该定理的条件会迫使 f 在 S 上为恒等映射，但证明仍遥不可及。

本文结构如下。我们在第 2 节证明定理 1.1 和定理 1.2。在第 3 节，我们为若尔当闭区域上的周期保向自同胚建立一个拓扑刚性结果（引理 3.5）；该结果与定理 1.2 一起推出定理 1.3。最后，我们在第 4 节证明定理 1.4 和定理 1.5。

2 周期拟共形延拓

本节证明定理 1.1 和定理 1.2。

定理 1.1 的证明。设 γ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个拟圆，且 $f\colon \gamma \to \gamma$ 是一个 k-周期保向拟对称同胚。设 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 是一个拟共形同胚，使得 $g(\gamma)$ 是单位圆 S^1。那么 $gfg^{-1}\colon S^1 \to S^1$ 是一个 k-周期保向拟对称同胚。若 gfg^{-1} 有一个 k-周期性拟共形延拓 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，那么 $g^{-1}Fg$ 就是 f 的一个 k-周期性拟共形延拓。

因此，我们只需证明每个 k-周期保向拟对称同胚 $f : S^1 \to S^1$ 都有一个 k-周期性拟共形延拓 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。为验证这一点，我们采用如下策略：首先证明，对每个 $r \in (0,1)$，f 都有一个 k-周期拟对称延拓 $\tilde{f} : A_r \to A_r$，其中

$$A_r = \{r \le |z| \le 1\}.$$

接下来，我们通过反复应用施瓦茨反射原理，证明 f 有一个 k-周期的拟共形延拓 $F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

下文中，$A \asymp B$ 表示 $C^{-1}B \le A \le CB$，$A \preceq B$ 表示某个常数 $C \ge 1$ 下的 $A \le CB$。证明由以下三个引理完成。

引理 2.1. 设 γ_1、γ_2 是 $\mathbb{C}$、h 中的拟圆，$\gamma_1 \to \gamma_2$ 是一个同胚，且 a、b、c、$d \in \gamma_1$ 是按顺时针（或逆时针）顺序排列的四个互异点。假设 h 在四条真子弧 ab bc、cd 上的限制，

以及 da 在 γ_1 上的限制都是拟对称的，并且对每个 $\{a,b,c,d\}$ 中的点 v，都存在一个常数 $M \geq 1$，使得

$$|h(v)-h(s)| \leq M|h(v)-h(t)|$$

对于所有满足 $|v-s| \leq |v-t|$ 的 s、$t \in \gamma_1$。因此 h 是拟对称的。

证明。在 $\gamma_1=\gamma_2=S^1$ 的情况下，利用假设直接计算可知 h 是弱拟对称的，证明留给读者。由于每个 S^1 上的弱拟对称自同胚都是拟对称的，我们得出 h 是拟对称的。

在一般情形下，令 $\gamma_1:\ S^1 \to \gamma_1$ 和 $\gamma_2:\ S^1 \to \gamma_2$ 分别为 γ_1 和 γ_2 的拟对称参数化。容易验证，$\gamma_2^{-1}h\gamma_1:\ S^1 \to S^1$ 对点 $\gamma_1^{-1}(a)$、$\gamma_1^{-1}(b)$、$\gamma_1^{-1}(c)$ 和 $\gamma_1^{-1}(d)$ 满足定理的条件。因此，应用特殊情形的结论可知 $\gamma_2^{-1}h\gamma_1$ 是拟对称的。进而可得 h 是拟对称的。这里我们滥用记号，用同一符号表示拟圆及其参数表示。

□

以下引理是证明中的关键组成部分。

引理 2.2. 设 $A_r := \{r \leq |z| \leq 1\}$ 是一个闭环带，其中 $0<r<1$。那么，每个 k-周期保向拟对称同胚 $_\sim f:\ S^1 \to S^1$ 都有一个 k-周期性拟共形延拓 $f:\ A_r \to A_r$。

证明。不失一般性，假设 k 是 f 的最小周期，且 $k \geq 2$。

设 $u_j = f^j(u_0)$，并令 l_j 为连接 ru_j 和 u_j的直线段，其中 u_0是 S^1上的任意给定点，且 $j=0,\ 1,\cdots,k+1$。由于 f是保向的，我们看到 u_0，u_1，$\cdots$，u_{k-1}是 S^1上沿顺时针或逆时针方向排列的互异点，$u_k=u_0$、$l_k=l_0$、$u_{k+1}=u_1$，以及$l_{k+1}=l_1$。

对于每个 $j \leq k$，令 α_j 为 S^1 上从 u_j 到 u_{j+1} 且方向与上述相同的子弧。则 S^1中的 α_0、α_1、$\cdots$、α_{k-1}的内部两两不相交，且 $\alpha_k=\alpha_0$。令

$$C_j = l_j \cup \alpha_j \cup l_{j+1} \cup r\alpha_j,$$

其中 $r\alpha_j = \{rz:\ z \in \alpha_j\}$。则 C_j 是 A_r 中的拟圆，且 $C_k=C_0$。令 D_j 为 A_r 中以 C_j为边界的闭拟圆盘。则D_0、D_1、$\cdots$、D_{k-1}的内部两两不相交，$D_k=D_0$，并且

$$A_r = \bigcup_{j=0}^{k-1} D_j. \tag{2}$$

对每个 $j<k$，令 $p_j:\ l_j \to \alpha_j$ 为一个双 Lipschitz 映射，使得

$$p_j(u_j)=u_j \quad \text{and} \quad p_j(ru_j)=u_{j+1}.$$

令 $p_k = p_0$ 和 $p_{k+1} = p_1$。则 $p_{j+1}^{-1} f p_j : l_j \to l_{j+1}$ 是一个满足以下条件的拟对称同胚

$$p_{j+1}^{-1} f p_j(u_j) = u_{j+1} \text{ and } p_{j+1}^{-1} f p_j(ru_j) = ru_{j+1}.$$

对每个 $j < k$，令 $q_j : r\alpha_j \to \alpha_{j+1}$ 为一个双 Lipschitz 映射，使得

$$q_j(ru_j) = u_{j+1} \text{ and } q_j(ru_{j+1}) = u_{j+2}.$$

令 $q_k = q_0$。则 $q_{j+1}^{-1} f q_j : r\alpha_j \to r\alpha_{j+1}$ 是一个满足以下条件的拟对称同胚

$$q_{j+1}^{-1} f q_j(ru_j) = ru_{j+1} \text{ and } q_{j+1}^{-1} f q_j(ru_{j+1}) = ru_{j+2}.$$

对每个 $j < k$，令 $h_j : C_j \to C_{j+1}$ 定义为

$$h_j(z) = \begin{cases} p_{j+1}^{-1} f p_j(z), & \text{if } z \in l_j \\ f(z), & \text{if } z \in \alpha_j \\ p_{j+2}^{-1} f p_{j+1}(z), & \text{if } z \in l_{j+1} \\ q_{j+1}^{-1} f q_j(z), & \text{if } z \in r\alpha_j. \end{cases}$$

令 $h_k = h_0$。根据构造，h_j 是一个定义良好的保向同胚，它分别将点 ru_j、u_j、u_{j+1} 和 ru_{j+1} 映射到点 ru_{j+1}、u_{j+1}、u_{j+2} 和 ru_{j+2}。此外，h_j 在 l_j、α_j、l_{j+1} 和 $r\alpha_j$ 上的限制均为拟对称映射。此外，我们有

$$h_j|_{\alpha_j} = f|_{\alpha_j} \text{ and } h_j|_{l_{j+1}} = h_{j+1}|_{l_{j+1}}. \tag{3}$$

我们断言

$$h_{k-1} \cdots h_1 h_0 = id \text{ on } C_0. \tag{4}$$

事实上，若 $z \in \alpha_0$，则

$$h_{k-1} \cdots h_1 h_0(z) = f^k(z) = z.$$

如果 $z \in l_0$，则

$$h_{k-1} \cdots h_1 h_0(z) = (p_k^{-1} f p_{k-1}) \cdots (p_2^{-1} f p_1)(p_1^{-1} f p_0)(z) = p_0^{-1} f^k p_0(z) = z.$$

同样容易证明，$h_{k-1} \cdots h_1 h_0 = id$ 在 l_1 和 $r\alpha_0$ 上。

在此背景下，我们看到，对于给定的整数 $0 \le j < k$，要利用引理 2.1 证明 h_j 是拟对称的，只需证明，对于每个点 $v \in \{u_j, u_{j+1}, ru_{j+1}, ru_j\}$，存在一个常数 $M \ge 1$ 使得

$$|h_j(v) - h_j(s)| \le M |h_j(v) - h_j(t)| \tag{5}$$

对所有满足 $|v - s| \le |v - t|$ 的 $s, t \in C_j$。

我们首先考虑点 u_j。令 $s,t \in C_j$ 满足 $|u_j - s| \le |u_j - t|$。我们将证明

$$|h_j(u_j) - h_j(s)| \preceq |h_j(u_j) - h_j(t), \tag{6}$$

其中隐藏常数与 s,t无关。

若 $t \in l_{j+1} \cup r\alpha_j$，则有 $h_j(t) \in l_{j+2} \cup r\alpha_{j+1}$，因此

$$0 < d(u_{j+1}, l_{j+2} \cup r\alpha_{j+1}) \le |u_{j+1} - h_j(t)| = |h_j(u_j) - h_j(t)|.$$

由此，利用以下结果可得不等式 (6)：

$$\begin{aligned} |h_j(u_j) - h_j(s)| &\le \operatorname{diam}(C_{j+1}) \\ &\le \frac{\operatorname{diam}(C_{j+1})}{d(u_{j+1}, l_{j+2} \cup r\alpha_{j+1})} |h_j(u_j) - h_j(t)| \end{aligned}$$

下文假设 $t \in l_j \cup \alpha_j$。

若 $s,t \in l_j$ 或 $s,t \in \alpha_j$，则分别由$h_j|_{l_j}$ 或 $h_j|_{\alpha_j}$的拟对称性可得不等式 (6)。

若 $s \in l_j$ 且 $t \in \alpha_j$，则由 $p_j(u_j) = u_j$ 以及 p_j的 Lipschitz 性质可得

$$|u_j - p_j(s)| = |p_j(u_j) - p_j(s)| \preceq |u_j - s| \le |u_j - t|.$$

那么，根据 h_j的定义、 p_{j+1}的双 Lipschitz 性质、 f的拟对称性、 $f(u_j) = h_j(u_j)$ 以及 $f(t) = h_j(t)$，可得

$$\begin{aligned} |h_j(u_j) - h_j(a)| &= |p_{j+1}^{-1} f p_j(u_j) - p_{j+1}^{-1} f p_j(a)| \\ &\asymp |f(u_j) - f p_j(s)| \\ &\preceq |f(u_j) - f(t)| \\ &= |h_j(u_j) - h_j(t)|. \end{aligned}$$

若 $s \in \alpha_j$ 和 $t \in l_j$，则有 $h_j(s) = f(s)$，并且

$$|u_j - s| \le |u_j - t| \preceq |p_j(u_j) - p_j(t)| = |u_j - p_j(t)|.$$

Thus

$$\begin{aligned} |h_j(u_j) - h_j(s)| &= |f(u_j) - f(s)| \\ &\preceq |f(u_j) - f p_j(t)| \\ &= |f p_j(u_j) - f p_j(t)| \\ &\asymp |p_{j+1}^{-1} f p_j(u_j) - p_{j+1}^{-1} f p_j(t)| \\ &= |h_j(u_j) - h_j(t)|. \end{aligned}$$

若 $s \in l_{j+1} \cup r\alpha_j$，则根据假设，有

$$d(u_j, l_{j+1} \cup r\alpha_j) \le |u_j - s| \le |u_j - t|.$$

从 C_j 的构造可知，$l_j \cup \alpha_j$ 中恰有两个点 w_j 满足

$$|u_j - w_j| = d(u_j, l_{j+1} \cup r\alpha_j).$$

我们任意选取一个这样的 w_j。于是 $|u_j - w_j| \le |u_j - t|$。由于假设 $t \in l_j \cup \alpha_j$，根据前面的结论可得

$$|h_j(u_j) - h_j(w_j)| \preceq |h_j(u_j) - h_j(t)|.$$

因此

$$|h_j(u_j) - h_j(s)| \preceq \operatorname{diam}(C_{j+1}) \preceq \frac{\operatorname{diam}(C_{j+1})}{|h_j(u_j) - h_j(w_j)|} |h_j(u_j) - h_j(t)|.$$

我们已考虑所有情形，而不等式 (6) 在每种情形下都成立，且其隐藏常数与 s, t 无关。这就证明了不等式 (5) 对于$v = u_j$ 成立，且常数 $M \ge 1$ 与 s, t 无关。通过类似的论证，可以证明 $v = u_{j+1}, ru_{j+1}, ru_j$ 也有相同的结论。因此，根据引理 2.1，h_j 是拟对称的。

现在，由 Beurling-Ahlfors 定理可知，$h_j : C_j \to C_{j+1}$ 存在一个拟共形延拓 $H_j : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$，使得对每个整数 $0 \le j \le k-2$ 都有 $H_j(D_j) = D_{j+1}$。选定这些延拓后，我们定义

$$H_{k-1} = H_0^{-1} H_1^{-1} \cdots H_{k-2}^{-1}.$$

于是，根据 (4)，H_{k-1} 是 h_{k-1} 的拟共形延拓，并且我们有

$$H_{k-1} H_{k-2} \cdots H_1 H_0 = id \text{ on } D_0, \tag{7}$$

令 $f : A_r \to A_r$ 定义为

$$\widetilde{f}(z) = \begin{cases} H_0(z), & \text{if } z \in D_0 \\ H_1(z), & \text{if } z \in D_1 \\ \cdots & \\ H_{k-1}(z), & \text{if } z \in D_{k-1}. \end{cases}$$

利用 (2)、(3) 和 (7)，我们很容易验证 f 是 f 的良定义的 k-周期同胚延拓。此外，由于各个 H_j 都是拟共形的，我们可知 $\widetilde{f}$ 在 $\cup_{j=0}^{k-1} \operatorname{int}(D_j)$ 上是拟共形的。因此，根据拟共形可去性，$\widetilde{f}$ 在 $\operatorname{int}(A_r)$ 上是拟共形的，进而在 A_r 上是拟对称的。□

引理 2.3. 设 $r \in (0,1)$，$A_r = \{r \le |z| \le 1\}$ 和 $f : A_r \to A_r$ 是一个k周期的拟对称同胚，且 $f(S^1) = S^1$。那么 f 有一个k周期的拟共形延拓 $F : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。

证明。令 S_r 表示圆 $|z| = r$，并令

$$R_r(z) = \frac{r^2}{\overline{z}}$$

表示关于 S_r 的反射。于是我们有

$$R_r^2 = id,\ R_r(z) = z \text{ for } z \in S_r, \text{ and } R_r(S^1) = S_{r^2}.$$

令 $f_0 = f$。令 f_1： $A_{r^2} \to A_{r^2}$ 定义如下:

$$f_1(z) = \begin{cases} f_0(z), & \text{if } z \in A_r \\ \\ R_r f_0 R_r(z), & \text{if } z \in A_{r^2} \setminus A_r. \end{cases}$$

由于 $f_0(S^1) = S^1$，因此有 $f_0(S_r) = S_r$，且 $f_0 = R_r f_0 R_r$ 在 S_r上。因此，f_1 是从 f_0 到 A_{r^2}的同胚延拓。由于 f_0 是 k-周期的，利用 $R_r^2 = id$，很容易验证f_1 是 k-周期的。此外，由于 f_0 是拟对称的，存在常数 $K \geq 1$，使得 f_0 在 int(A_r) 上是 K-拟共形的。因此， f_1在 int(A_{r^2}) 上是 K-拟共形的。

Let

$$f_2(z) = \begin{cases} f_1(z), & \text{if } z \in A_{r^2} \\ \\ R_{r^2} f_0 R_{r^2}(z), & \text{if } z \in A_{r^4} \setminus A_{r^2}. \end{cases}$$

通过类似的论证， f_2 是从 f_1 到A_{r^4} 的 k-周期同胚延拓，并且在 int(A_{r^4}) 上是 K-拟共形的。

归纳可得一列同胚 f_m： $A_{r^{2^m}} \to A_{r^{2^m}}$，具有以下性质：对于每个整数 $m \geq 1$，f_m 都是从 f_{m-1} 到 $A_{r^{2^m}}$ 的 k-周期同胚延拓，并且在 int($A_{r^{2^m}}$) 上是 K-拟共形的。

注意， $\{A_{r^{2^m}}\}_{m=0}^{\infty}$ 是一个递增的环带序列，满足

$$\mathbb{D} = \{0\} \cup \bigcup_{m=0}^{\infty} A_{r^{2^m}},$$

其中， $\mathbb{D}$ 是闭单位圆盘。我们可以定义 f_∞： $\mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 如下:

$$f_\infty(z) = \begin{cases} f_m(z), & \text{if } z \in A_{r^{2^m}} \text{ for some } m \geq 0, \\ \\ 0, & \text{if } z = 0. \end{cases}$$

利用上述序列 $\{f_m\}_{m=1}^{\infty}$ 的性质，我们很容易验证，f_∞ 是一个定义良好的 k-周期同胚延拓，将 f_0 延拓到 $\mathbb{D}$，并且在 int($\mathbb{D}$) 上是 K-拟共形的。

最后，设 R 为关于单位圆 S^1 的反射，并令

$$F(z) = \begin{cases} f_\infty(z), & \text{if } z \in \mathbb{D} \\ \\ R f_\infty R(z), & \text{if } z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{D}. \end{cases}$$

那么， F 就是 f_0的一个 k-周期 K-拟共形延拓，正如所需。 □

注 2.1. 根据上述论证，每个 k周期保向拟对称同胚 $f : S^1 \to S^1$ 都有一个 k 周期性拟共形延拓 F: $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$，且满足 $F(0) = 0$。

定理 1.2 的证明。设 $S := D_0 \setminus \cup_{j=1}^{\infty} D_j$ 是 $\mathbb{C}$ 中的一个零测度准圆地毯，且 $f\colon S \to S$ 是一个 k周期保向拟对称同胚，并满足 $f(\partial D_0) = \partial D_0$。根据 Bonk [3, 命题 5.1], f 有一个拟共形延拓 $\widetilde{f}\colon D_0 \to D_0$。这样的延拓 $\widetilde{f}$ 不一定是 k周期的。我们将对其进行修改，从而构造出 f的一个k周期性拟共形延拓。

根据对 f 和 S的假设，对于每个整数 $j \geq 1$， k都有一个因子m_j，使得 ∂D_j, $f(\partial D_j)$ $\cdots$， $f^{m_j-1}(\partial D_j)$是 S 的两两不同的外围圆，并且 $f^{m_j}\colon \partial D_j \to \partial D_j$ 是一个 k/m_j-周期的保向拟对称同胚。由于 ∂D_j 是一个 c-拟圆，根据定理 1.1，f^{m_j} 有一个 k/m_j-周期性拟共形延拓 $g_j\colon D_j \to D_j$。此外，由于常数 c 与j 和 $1 \leq m_j \leq k$无关， g_j 的拟共形常数可以选取得与 j无关。我们称

$$\mathcal{O}_j := \{\partial D_j, f(\partial D_j), \cdots, f^{m_j-1}(\partial D_j)\}$$

∂D_j 在 f作用下的轨道。显然，两个轨道要么相等，要么不相交。因此，存在一个正整数子集 J，使得$\mathcal{O}_j$、 $j \in J$两两不相交，其中

$$\bigcup_{j\in J} \mathcal{O}_j = \{\partial D_j : j \geq 1\}.$$

由于 $f\colon D_0 \to D_0$ 是 $f\colon S \to S$的拟共形延拓，我们可知 D_j, $f(D_j)$ $\cdots$， $f^{m_j-1}(D_j)$ 是 $D_0 \setminus S$的连通分支，其闭包两两不相交， $f^{m_j}(D_j) = D_j$, 并且

$$\bigcup_{j\in J} \bigcup_{n=0}^{m_j-1} \widetilde{f}^{\,n}(D_j) = D_0 \setminus S.$$

对每个 $j \in J$，令

$$U_j = \bigcup_{n=0}^{m_j-1} \widetilde{f}^{\,n}(\overline{D}_j),\ V_j = \bigcup_{n=0}^{m_j-2} \widetilde{f}^{\,n}(\overline{D}_j),\ \text{and } W_j = \bigcup_{n=1}^{m_j-1} \widetilde{f}^{\,n}(\overline{D}_j).$$

我们有 $f(U_j) = U_j$且 $f(V_j) = W_j$。为将 $f|_{U_j}$改成一个 k-周期映射，我们定义一个新映射 $h_j : U_j \to U_j$，使得

$$h_j(z) = \begin{cases} \widetilde{f}(z), & \text{if } z \in V_j \\ g_j \widetilde{f}^{\,-m_j+1}(z), & \text{if } z \in \widetilde{f}^{\,m_j-1}(\overline{D}_j). \end{cases}$$

由于 D_j, $f(D_j)$、 $\cdots$ 和 $f^{m_j-1}(D_j)$ 两两不相交，且$g_j(D_j) = D_j$，我们可知 h_j 是良定义的同胚。根据定义，在 D_j 上有$h_j^{m_j} = g_j$。由于 g_j 是 k/m_j-周期的，因此 h_j 是 k-周期的。由于

$\sim f$ 和 g_j 是拟共形的，因此 h_j 在 int(U_j) 上是拟共形的。由于$\sim m_j \le k$，且 f 和 g_j 的拟共形常数与 j无关，因此 h_j 的拟共形常数与 j无关。最后，我们有

$$h_j = f \text{ on } \partial U_j,$$

$\sim$ $\sim$事实上，若 $z \in \partial V_j$，则有 $h_j(z) = f(z) = f(z)$；若 $z \in f^{m_j-1}(\partial D_j)$，则有$\widetilde{f}^{-m_j+1}(z) \in \partial D_j$，因此

$$h_j(z) = g_j \widetilde{f}^{-m_j+1}(z) = f^{m_j} f^{-m_j+1}(z) = f(z).$$

综上，$h_j : U_j \to U_j$ 是 $f|_{\partial U_j}$ 的 k-周期保向同胚延拓，并且在 int(U_j) 上是 K-拟共形的，其中常数 K 与 j无关。

令 $F : D_0 \to D_0$ 满足以下定义：

$$F = h_j \text{ on } U_j \text{ for every } j \in J \text{ and } F = f \text{ on } S.$$

那么，F 是 f 的良定义的 k-周期保向同胚延拓，并且在 $D_0 \setminus S$ 上拟共形。由于 S 是零测度集，我们看到 F 在 int(D_0) 上拟共形，因此 F 在 D_0 上拟对称。

现在令 $G : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ 为一个拟共形同胚，满足 $G(D_0) = \mathbb{D}$。那么 $GFG^{-1} : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ 是一个 k-周期保向拟对称同胚，根据施瓦茨反射原理，它可拟共形延拓至 $\mathbb{C}$，且该延拓具有 k 周期。因此 $F : D_0 \to D_0$ 也有这样的延拓。定理 1.2 的证明至此完成。□

3 定理 1.3 的证明

本节证明定理 1.3。我们先介绍关于 Jordan 弧和闭路上的周期拓扑自同胚的一些基本结果。

引理 3.1。设 $h : [s,t] \to [s,t]$ 是递增同胚。若 $[s,t]$ 的所有点都是 h的周期点，则 $h = id$。

证明。我们用反证法，假设 $h \neq id$。那么存在一点 $x \in [s,t]$，使得 $h(x) \neq x$。不失一般性，假设$h(x) < x$。于是，由于 h 是递增的，可得 $h^2(x) < h(x) < x$。归纳可得，对所有正整数 n，都有 $h^n(x) < x$，这与 $[s,t]$ 的所有点都是 h的周期点这一假设矛盾。因此 $h = id$。 □

引理 3.2。设 $\gamma : [0,1] \to \mathbb{C}$ 是一条 *Jordan* 弧，且设 $h : \gamma[0,1] \to \gamma[0,1]$ 是一个固定 $\gamma(0)$ 和 $\gamma(1)$ 的同胚。若 $\gamma[0,1]$ 的所有点都是 h 的周期点，则 $h = id$。

证明。根据假设，映射 $\gamma^{-1}h\gamma : [0,1] \to [0,1]$ 是一个递增同胚。由引理 3.1，$\gamma^{-1}h\gamma = id$ 在 $[0,1]$, 上，因此 $h = id$ 在 $\gamma[0,1]$上。 □

引理 3.3。 设 γ 是 $\mathbb{C}$中的一条 *Jordan* 闭曲线，且 h 是 γ 的一个保定向自同胚，并有一个不动点。若 γ 的所有点都是 h的周期点，则 $h = id$。

证明。 设 $z_0 \in \gamma$ 是 h的一个不动点。对于每个 $z \in \gamma \setminus \{z_0\}$，都有$h(z) \neq z_0$。记 $\gamma_{z_0 z}$ 为 γ 上从 z_0 到 z 的顺时针真子弧。根据假设，我们有 $h(\gamma_{z_0 z}) = \gamma_{z_0 h(z)}$，因此 $\gamma_{z_0 h(z)}$ 是 γ的真子弧。此外，$\gamma_{z_0 z} \subset \gamma_{z_0 h(z)}$ 或 $\gamma_{z_0 z} \supset \gamma_{z_0 h(z)}$成立。不妨设 $\gamma_{z_0 z} \subset \gamma_{z_0 h(z)}$。于是 $\gamma_{z_0 h^n(z)}$ 是 γ 的真子弧，并且

$$\gamma_{z_0 z} \subset \gamma_{z_0 h(z)} \subset \cdots \subset \gamma_{z_0 h^n(z)}$$

对所有整数 $n \geq 1$均成立。另一方面，由于 z 是 h的一个周期点，对于某个整数 $n \geq 1$，有 $\gamma_{z_0 z} = \gamma_{z_0 h^n(z)}$。由此可得 $\gamma_{z_0 z} = \gamma_{z_0 h(z)}$，因此 $h(z) = z$。于是 $h = id$。 □

以下结果可见于 Ker´etj´art´o [10]。

引理 3.4。 设 G_1、G_2 是 $\mathbb{C}$ 中的若尔当区域，且满足 $G_1 \cap G_2 \neq \emptyset$。那么，$G_1 \cap G_2$ 的每个连通分支（极大连通子集）都是若尔当区域。

下面的拓扑刚性结果将在定理 1.3 的证明中发挥重要作用。

引理 3.5。 设 G 是 $\mathbb{C}$中的若尔当闭区域。若 $f\colon\ G \to G$ 是一个周期保向同胚，且在 ∂G 中有一个不动点，那么 f 在 G上是恒等映射。

证明。 由假设， ∂G 是 $\mathbb{C}$ 中的一条 Jordan 闭曲线，且限制$h|_{\partial G}$ 是 ∂G 上的一个保向自同胚，并有一个不动点； ∂G 中的所有点都是 $h|_{\partial G}$的周期点。因此，根据引理 3.3， $h = id$ 在 ∂G 上。

取两个不同的点 u，v 以及一条端点为 u，v的真闭子弧 α，该子弧位于 ∂G中。要证明 $f = id$ 在 G上，只需验证对于每条端点为 u，v且位于 int(G) 中的开若尔当弧 γ，$h = id$ 在 γ 上成立。

设 γ 是这样一条弧。那么 $\alpha \cup \gamma$ 是一条 Jordan 闭曲线。记 G 中由 $\alpha \cup \gamma$ 围成的若尔当区域为 D。由于 $h = id$ 在 α 上，我们看到，对于每个整数 $m \geq 0$， $h^m(D)$ 都是由 $\alpha \cup h^m(\gamma)$ 围成的若尔当区域。令

$$A = D \cap h(D) \cap \cdots \cap h^{k-1}(D).$$

那么， A 有一个连通分支 B，其边界包含 α。由引理 3.4， B 是一个若尔当区域。令 $\beta = (\partial B) \setminus \alpha$。那么 β 是一条端点为 u， v 的 Jordan 弧，且

$$\beta \subset \gamma \cup h(\gamma) \cup \cdots \cup h^{k-1}(\gamma). \tag{8}$$

由于 h 是 k-周期的，根据 A 的定义可知 $h(A) = A$，这意味着 $h(B)$ 是 A 的一个连通分支，其边界包含 α。因此 $h(B) = B$,

$h(\partial B) = \partial B$，且 $h(\beta) = \beta$。现在，由引理 3.2 可知，在 β 上有 $h = id$，于是得到

$$\beta \cap h^m(\gamma) = h^{-m}(\beta \cap h^m(\gamma)) = \beta \cap \gamma \tag{9}$$

对每个整数 $m \geq 0$。

包含关系 (8) 和等式 (9) 验证了 $\beta = \beta \cap \gamma$，因此 $\beta \subset \gamma$。由于 γ 和 β 是 int(G) 中端点为 u 和 v的 Jordan 弧，包含关系$\beta \subset \gamma$ 实际上就是等式 $\beta = \gamma$。

由于 $\beta = \gamma$ 和 $h = id$ 在 β上，我们有 $h = id$ 在 γ上，正如所需。 □

定理 1.3 的证明。设 $S := D_0 \setminus \cup_{k=1}^{\infty} D_k$ 是 $\mathbb{C}$ 中一个零测度的准圆地毯，且 $f: S \to S$ 是一个保向周期拟对称同胚，它在 ∂D_0 中有一个不动点。根据定理 1.2，f 有一个周期性拟共形延拓 $F: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。因此，限制 $F|_{D_0}$ 是 D_0 的一个保向周期自同胚，且在 ∂D_0 上有一个不动点。根据引理 3.5，$F = id$ 在 D_0 上，因此 $f = id$ 在 S 上。□

4 方形地毯的刚性

本节证明定理 1.4 和定理 1.5。

定理 1.4 的证明。设

$$R = [0, a] \times [0, 1] \text{ and } K = (s, s + w) \times (t, t + h) \text{ with } \overline{K} \subset \text{int}(R),$$

其中 a, w, $h > 0$。设

$$S := (R \setminus K) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

是矩形环域 $R \setminus K$中的一个零测度方形地毯。设 $f: S \to S$是一个固定 R四个顶点的拟对称同胚。我们首先证明存在一个整数 $n \geq 1$ 使得

$$f^n(\partial K) = \partial K. \tag{10}$$

证明需要用到路径族模的概念。设 Γ 是 $\mathbb{C}$中的一族可求长路径。若博雷尔函数 $\rho: \mathbb{C} \to [0, \infty]$ 满足以下条件，则称其为 Γ 的可容许函数

$$\int_{\gamma} \rho \, ds \geq 1$$

对每个 $\gamma \in \Gamma$。Γ 的共形模 mod(Γ) 定义为

$$\text{mod}(\Gamma) = \inf_{\rho} \int \rho^2 \, dxdy,$$

其中，下确界取遍所有适用于 Γ 的可容许函数。若可容许函数 ρ 满足以下条件，则称其为 Γ 的极值函数:

$$\text{mod}(\Gamma) = \int \rho^2 \, dxdy.$$

现在列出关键引理。根据 Bonk [3, 命题 5.1], f 存在一个拟共形延拓 F : $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$。设给定这样一个延拓 F。对每个 $x \in [0,a]$，令 γ_x 为连接点 $(x, 0)$ 和 $(x, 1)$ 的竖直线段。令

$$A = \{x \in [0,a] : F \in \mathrm{AC}(\gamma_x), \mathcal{L}(S \cap \gamma_x) = 0\} \tag{11}$$

and

$$\Gamma_A := \{\gamma_x : x \in A\},$$

其中， $F \in$AC(γ_x)表示 F 在 γ_x 上绝对连续，而 $\mathcal{L}$ 表示一维勒贝格测度。

引理 4.1. $\mathcal{L}(A) = a$。

引理 4.2。 $\mathcal{L}(P(F(\gamma) \setminus S)) = 1$ 对每个 $\gamma \in \Gamma_A$均成立，其中 P表示到竖直坐标轴的正交投影。

引理 4.3。 设 $\Gamma_A := \{\gamma_x : x \in A\}$，其中 A 定义为（*11*）。则

$$\mathrm{mod}(\Gamma_A) = a.$$

此外，可容许函数 ρ 是 Γ_A 的极值函数，当且仅当对矩形 R中几乎处处的 z，都有 $\rho(z) = 1$。

引理 4.3 是众所周知的；引理 4.1 和引理 4.2 改编自 Bonk 和 Merenkov [6]；它们被应用于 [6, 定理 1.4]的证明中。

令$\mathbf{H} := \{K\} \cup \{Q_k : k \geq 1\}$ 为矩形 R内地毯 S 的所有孔洞的集合。则

$$\{F(Q) : Q \in \mathbf{H}\} = \mathbf{H}. \tag{12}$$

对于每个 $Q \in \mathbf{H}$，我们用 $l(Q)$表示它的一条竖直边的长度。于是有 $l(K) = h$。

由于 [6, 定理 1.4] 在 S 上对 K 为正方形的情形建立了 $f = id$，我们只需证明 $w \neq h$ 情形下的 (10)。

我们用反证法，假设对所有整数 $n \geq 1$, $f^n(\partial K) \neq \partial K$。此假设和 (16) 蕴含 $F^n(K)$、 $n \geq 1$是$\{Q_k : k \geq 1\}$ 中的不同元素，并且存在两个不同的正整数 p, q 使得

$$F(K) = Q_p \quad \text{and} \quad F(Q_q) = K.$$

于是，由于 S 是地毯，有 $l(Q_k) \to 0$，当 $k \to +\infty$时，因此

$$\inf_{n \geq 1} l(F^n(K)) = 0. \tag{13}$$

为了对（13）导出矛盾，我们将证明

$$\min\{w, h\} \leq \inf_{n \geq 1} l(F^n(K)). \tag{14}$$

有两种情形。

情形 1。 $w > h$。

我们首先证明 $h \le l(F(K))$。令 $\rho\colon \mathbb{C} \to [0,\infty]$ 定义为

$$\rho(z) = \begin{cases} l(Q_p)/h & \text{if } z \in K \\ h/l(Q_q) & \text{if } z \in Q_q \\ l(F(Q_k))/l(Q_k) & \text{if } z \in Q_k,\ k \ge 1,\ k \ne q \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们声称， ρ 对于引理 4.3 中的路径族 Γ_A 是可容许的。

事实上，对每个 $\gamma \in \Gamma_A$ ，都有 $\mathcal{L}(\gamma \cap S) = 0$。由此等式、(16) 和引理 4.2，可得

$$\begin{aligned} \int_\gamma \rho\ ds &= l(Q_p)\frac{\mathcal{L}(\gamma \cap K)}{h} + h\frac{\mathcal{L}(\gamma \cap Q_q)}{l(Q_q)} + \sum_{k\ge 1,\, k\ne q} l(F(Q_k))\frac{\mathcal{L}(\gamma \cap Q_k)}{l(Q_k)} \\ &= \sum_{Q\in \mathbf{H},\, Q\cap\gamma\ne\emptyset} l(F(Q)) \\ &= \sum_{Q\in \mathbf{H},\, F(\gamma)\cap Q\ne\emptyset} l(Q) \\ &\ge \mathcal{H}^1(P(F(\gamma)\setminus S)) = 1. \end{aligned}$$

这证明 ρ 对于 Γ_A是可容许的。

由引理 4.3，既然 $\mathrm{mod}(\Gamma_A) = a$ ，我们有

$$\begin{aligned} a \le \int_R \rho^2\ dxdy &= \frac{l(Q_p)^2}{h^2}wh + h^2 + \sum_{k\ge 1, k\ne q} l(F(Q_k))^2 \\ &= \frac{w}{h}l(Q_p)^2 + h^2 + a - l(Q_p)^2 - wh, \end{aligned}$$

这意味着

$$(\frac{w}{h} - 1)h^2 \le (\frac{w}{h} - 1)l(Q_p)^2.$$

由于假设了 $w > h$ ，我们得到

$$h \le l(Q_p) = l(F(K)).$$

现在我们证明 $h \le l(F(K))$。令 $n \ge 1$ 为一个整数。将上述论证中的 F 替换为 F^n ，我们得到

$$h \le l(F^n(K)).$$

情形 2. $w < h$。

在这种情形下，考虑矩形 R 中的水平线段族，并令

$$\Gamma := \{\gamma_y : y \in [0,1],\, F \in \mathrm{AC}(\gamma_y),\, \mathcal{L}(S \cap \gamma_y) = 0\}.$$

有 $\mathrm{mod}(\Gamma) = 1/a$。令 $\rho : \mathbb{C} \to [0,\infty]$ 定义如下:

$$\rho(z) = \begin{cases} l(Q_p)/w & \text{if } z \in K \\ w/l(Q_q) & \text{if } z \in Q_q \\ l(F(Q_k))/l(Q_k) & \text{if } z \in Q_k,\ k \geq 1,\ k \neq q \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

我们可以验证， ρ/a 是 Γ 的可容许函数。由于 $\mathrm{mod}(\Gamma) = 1/a$，我们有

$$\begin{aligned} a \leq \int_R \rho^2\, dxdy &= \frac{l(Q_p)^2}{w^2} wh + w^2 + \sum_{k\geq 1, k\neq q} l(F(Q_k))^2 \\ &= \frac{h}{w} l(Q_p)^2 + w^2 + a - l(Q_p)^2 - wh. \end{aligned}$$

现在，仿照刚才情形 1 的论证，我们得到

$$w \leq l(F^n(K))$$

对每个整数 $n \geq 1$ 都成立。这就证明了 (14)。

由于 (14) 与 (13) 矛盾，我们得出 (10) 成立。现在，由 (10) 和引理 1.1 可知，对某个整数 $n \geq 1$， $f^n = id$ 在 S 上。因而，定理 1.4 中的每个同胚 $f : S \to S$ 实际上都是一个周期的、保向的拟对称同胚，并且在 ∂R 中有一个不动点。由此，根据定理 1.3 可得， $f = id$ 在 S 上。□

定理 1.5 的证明与定理 1.4 的证明遵循相同的结构。我们将用到 $\mathbb{C}^*$ 中路径族模的定义。令

$$ds = \frac{|dz|}{|z|} \text{ and } d\sigma = \frac{dxdy}{|z|^2}$$

分别为 $\mathbb{C}^*$ 的线元和面积元。设 Γ 是 $\mathbb{C}^*$ 中的一族可求长路径。我们称博雷尔函数 $\rho : \mathbb{C}^* \to [0,\infty]$ 对 Γ 是可容许的，若

$$\int_\gamma \rho(z)\, \frac{|dz|}{|z|} \geq 1$$

对每个 $\gamma \in \Gamma$ 均成立。 Γ 的模定义为

$$\mathrm{mod}(\Gamma) = \inf_\rho \int \rho^2\, d\sigma, \tag{15}$$

其中，下确界取遍所有关于 Γ 的可容许函数。

定理 1.5 的证明。 设 $A := \{1 \le |z| \le r\}$ 是一个有限的 $\mathbb{C}^*$-圆柱，并且

$$K = \{te^{i\theta} : a < t < b,\ \alpha < \theta < \beta\}$$

是一个 $\mathbb{C}^*$-矩形，其 $1 < a < b < r$ 和 $0 < \beta - \alpha < 2\pi$。令

$$h = \log \frac{b}{a} \quad \text{and} \quad w = \beta - \alpha,$$

分别是 K的径向边长和圆周方向边长。令

$$S := (A \setminus K) \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k$$

是 $A\setminus K$中的一个零测度 $\mathbb{C}^*$-方形地毯。令 $f\colon S \to S$ 是一个保向拟对称同胚，它分别将 S 的内、外周边圆映射到自身。我们将证明，对于某个整数 $n \ge 1$，在 S 上有 $f^n = id$。

根据 Bonk [3, 命题 5.1]， f 有一个拟共形延拓$F\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$。令$\mathbf{H}:= \{K\} \cup \{Q_k\colon k \ge 1\}$ 为有限 $\mathbb{C}^*$-圆柱体 A中地毯S 的所有孔洞的集合。那么

$$\{F(Q) : Q \in \mathbf{H}\} = \mathbf{H}. \tag{16}$$

对于每个 $Q \in\mathbf{H}$，我们用 $l^*(Q)$ 表示它的一条径向边的 $\mathbb{C}^*$-长度。于是有 $l^*(K) = h$。对于每个 $\theta \in [0, 2\pi)$，令 γ_θ 为连接$e^{i\theta}$ 与 $re^{i\theta}$的径向线段。那么 γ_θ 的长度为 $\mathbb{C}^*$，即 $\log r$。令

$$\Gamma = \{\gamma_\theta : \theta \in [0, 2\pi),\ F \in \mathrm{AC}(\gamma_\theta),\ \mathcal{L}(S \cap \gamma_\theta) = 0\}.$$

根据定义（15），我们很容易得到

$$\mathrm{mod}(\Gamma) = \frac{2\pi}{\log r}. \tag{17}$$

我们断言存在一个整数 $n \ge 1$，使得

$$f^n(\partial K) = \partial K. \tag{18}$$

由于 [6, 定理 1.5] 在 K 是一个 $\mathbb{C}^*$-正方形的情形下验证了（18）。我们只需证明情形 $w \ne h$。我们用反证法，假设对所有整数 $n \ge 1$，都有 $f^n(\partial K) \ne \partial K$。那么 $F^n(K)$、$n \ge 1\}$ 是 $\{Q_k\colon k \ge 1\}$ 中不同的元素，并且存在两个不同的正整数 p, q，使得

$$F(K) = Q_p \quad \text{and} \quad F(Q_q) = K.$$

由于 S 是一个地毯，因此 $l^*(Q_k) \to 0$，因为 $k \to +\infty$。因此

$$\inf_{k \ge 1} l^*(F^k(K)) = 0. \tag{19}$$

接下来我们证明

$$\min\{w,h\} \le \inf_{k\ge 1} l^*(F^k(K)). \tag{20}$$

有两种情形。

情形 1. $w > h$。

我们首先证明 $h \le l^*(F(K))$。令 $\rho\colon \mathbb{C}^* \to [0,\infty]$ 定义为

$$\rho(z) = \begin{cases} l^*(Q_p)/h & \text{if } z \in K \\ h/l^*(Q_q) & \text{if } z \in Q_q \\ l^*(F(Q_k))/l^*(Q_k) & \text{if } z \in Q_k,\ k \ge 1,\ k \ne q \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

容易验证，$\rho/\log r$ 是路径族 Γ 的可容许函数。由 (17) 得

$$2\pi \log r \le \int_A \rho^2 \, d\sigma = \frac{l^*(Q_p)^2}{h^2} wh + h^2 + \sum_{k\ge 1, k\ne q} l^*(F(Q_k))^2,$$

这与 $\sigma(A) = 2\pi \log r$, $\sigma(Q_p) = l^*(Q_p)^2$, 以及 $\sigma(K) = wh$ 结合起来，推出

$$2\pi \log r \le \frac{w}{h} l^*(Q_p)^2 + h^2 + 2\pi \log r - l^*(Q_p)^2 - wh,$$

因此

$$(\frac{w}{h} - 1)h^2 \le (\frac{w}{h} - 1) l^*(Q_p)^2.$$

由于假设了 $w > h$，因此我们得到

$$h \le l^*(Q_p) = l^*(F(K)).$$

类似地，对于所有整数 $n \ge 1$，我们有 $h \le l^*(F^n(K))$。

情形 2. $w < h$。

令 ϑ_t 表示圆 $|z| = t$，并令

$$\Gamma = \{\vartheta_t : t \in [1,r],\, F \in \mathrm{AC}(\vartheta_t),\, \mathcal{L}(S \cap \vartheta_t) = 0\}.$$

有

$$\mathrm{mod}(\Gamma) = \frac{\log r}{2\pi}.$$

通过为 Γ 构造一个合适的可容许函数，并按照情形 1 中的论证，我们得到对于所有整数 $n \ge 1$，$w \le l^*(F^n(K))$。这就证明了 (20)。

显然，(20) 与 (19) 矛盾，因此 (18) 成立。现在，由 (18) 和引理 1.2 可知，对于某个整数 $n \ge 1$，$f^n = id$ 在 S 上成立。证明完毕。□

参考文献

[1] L. V. Ahlfors，拟共形反射，《数学学报》109(1963)，291-301。[2] A. Beurling 和 L. V. Ahlfors，拟共形映射下的边界对应，《数学学报》96(1956)，125-142。[3] M. Bonk，平面上的谢尔宾斯基地毯一致化，《数学发明》186(2011)，559-665。[4] M. Bonk，分形的拟共形几何，载于《国际数学家大会论文集》第 II 卷，欧洲数学会，苏¨黎世，2006，1349-1373。[5] M. Bonk、B. Kleiner 和 S. Merenkov，肖特基集的刚性，《美国数学杂志》131(2009)，409-443。[6] M. Bonk 和 S. Merenkov，正方形谢尔宾斯´基地毯的拟对称刚性，《数学年刊》177(2013)，591-643。[7] M. Bonk 和 S. Merenkov，正方形谢尔宾斯´基地毯与格`映射，《数学杂志》296(2020)，695-718。[8] F. W. Gehring 和 B. P. Palka，拟共形齐性区域，《分析与数学杂志》30(1976)，172-199。[9] J. Heinonen，《度量空间分析讲义》，Universitext丛书，施普林格出版社，纽约，2001。[10] B. Keretjarto，《拓扑学讲义》，1925。[11] F. Rao 和 F. Wen，拟对称刚性的自相似地毯，《遍历理论与动力系统》84(2024)，1-14。[12] Y. H. Sheng、C. Wei 和 F. Wen，关于地毯拟对称刚性的注记，《拓扑及其应用》353(2024)，108960。[13] P. Tukia 和 J. V¨ais¨al¨a，度量空间的拟对称嵌入，《芬兰科学院数学系列A辑I》5(1980)，97-114。[14] J. Tyson，度量测度空间中的拟共形性与拟对称性，《芬兰科学院A辑I数学》23(1998)，525-548。[15] J. V¨ais¨al¨a，n维拟共形映射讲义，施普林格出版社，纽约，1971。[16] J. V¨ais¨al¨a，自由拟世界。巴拿赫空间中的自由拟共形映射及相关映射。载于《拟共形几何与动力学》，巴拿赫中心出版物，第 48 卷，55-118，波兰科学院，华沙，1999。[17] G. T. Whyburn，谢尔宾斯基地毯的拓扑刻画，《基础数学》45(1958)，320-324。[18] J. S. Zeng 和 W. X. Su，谢尔宾斯基地毯的拟对称刚性´$F_{n,\ p}$，《遍历理论与动力系统》35(2015)，1658-1680。