arXiv:2512.24709v1 [cond-mat.str-el] 31 Dec 2025

二维晶体陈绝缘体的脆弱拓扑相与拓扑序

HishamSati* 和 Urs Schreiber†*Center for Quantum and Topological Systems, Division of Science, New York University, Abu Dhabi, UAE*（日期：2026年1月1日）

我们运用等变同伦论的方法——这些方法此前在凝聚态物理中可能尚未得到应有的关注——首先对二维晶体陈绝缘体材料的脆弱／不稳定拓扑相进行分类，其次探究其分数量子对应物可能具有的拓扑序。我们指出，这些相由晶体动量的布里渊环面在壁纸点群作用下的 *equivariant 2-Cohomotopy* 给出；尽管晶体陈绝缘体受到广泛关注，这一点似乎此前尚未有人考察。接着，我们提出，任何拓扑序都必须反映在这些能带拓扑的协变化空间上有能隙量子基态的 *adiabatic monodromy* 中，并计算了该群为非阿贝尔群的若干实例，表明任何潜在的 *FQAH anyons* 都必须局限在动量空间中。最后，我们展望了这项研究对寻找拓扑量子计算硬件的意义。数学细节详见补充材料 [1]。

关键词：脆弱拓扑相、晶体拓扑绝缘体、拓扑序、分数量子反常霍尔效应、等变同伦论、上同伦、绝热单值化、动量空间中的任意子、缺陷任意子、旁统计

目录

I. 议程 1
A. 脆弱晶体陈相 1
B. 分数陈绝缘体的拓扑序 2
C. 微分同胚下的协变化 3

II. 引言与概念 4
A. 对称性与等变性 4
B. 拓扑序与单值化 5
C. 微分同胚下的协变性 8

第三部分：方法与结果 9
A. 概述 9
B. 拓扑相 9
1. 无对称性 9
2. p3对称性 10
C. 拓扑序 10
1. 无对称性 11
2. p3 对称性 11

第四部分：结论与展望 12

数据可用性声明 13

致谢 13

参考文献 13

I. 议程

由于我们提出了新颖的视角，在讨论更多细节之前，先在此简要概述§II。

* hsati@nyu.edu
† us13@nyu.edu

A. 脆弱晶体陈相

晶体陈绝缘体（CI，参见 [2][3, §8-9]）是人们广泛研究的拓扑量子材料典型范例 [4, 5]，，然而，最基本的晶体二维双带系统中的脆弱拓扑相（采用 [6–9] 的术语）似乎尚未得到真正的分类。这类系统中，著名的 *Haldane* 模型 [3, §8.3] 便是一个典型例子：

首先，暂不考虑晶体对称性，众所周知（参见[3, (8.3-4)] 和§II下文），此类拓扑相由映射的同伦类标记

$$\widehat{T}^2 \xrightarrow{H/|H|} S^2 \tag{1}$$

从晶体动量的布里渊环面 $\widehat{T}^2$ （参见 [10,§2.1]）到归一化相对布洛赫哈密顿量的二维球面 S^2 2×2 H。

我们强调（ [11, 12], 综述见 [13]），这些类构成了布里渊环面的二阶上同伦 [14, §VII][15,例 2.7]，这是一种不稳定的或非阿贝尔[15, §2]上同调精化，针对的是更为流行但也更粗略的（稳定）K理论分类（相关内容参见[16][17, §2]）。

然而，只有在这种简单情形（1）下，二阶上同伦才与通常的整系数上同调以及K理论相一致；它们在此都表明，该拓扑相由（绕数（1）或等价地由同名的（第一且唯一的）陈数 $C \in \mathbb{Z}$标记，该陈数对应于晶体的价带线丛（15）。然而，当纳入更多细节时，这种上同调分类之间的一致性便不复存在：

也就是说，显而易见——尽管很少有人提及；我们在 [11] 中指出了这一点，并将在§II 下文再次解释——晶体 G对称性保护 [3, (9.1)] 会约束归一化的布洛赫哈密顿量（1）为映射等变的（参见 [18, §1.2]），且相对于适当的

G作用于两侧：

$$\widehat{T}^2 \xrightarrow{H/|H|} S^2\,, \tag{2}$$

由此，拓扑相如今是 等变同伦类 （参见 [19, 第 5]页），构成等变二阶上同伦 [20, 例 4.5。8][21, §6][22, (3)][23]，即布里渊环面的等变二阶上同伦。

尽管这看似显而易见，这些脆弱晶体拓扑相似乎此前既未被计算，也未曾被考虑。从数学上讲，它们是 π_0 G-等变映射空间 $\mathrm{Map}(-,-)$ 的连通分量，其中映射具有 $(-)^G$ ：

$$\left\{\begin{array}{c}\textbf{Fragile topological phases}\\ \text{of } G\text{-symmetry protected}\\ \text{2D 2-band Chern insulators}\end{array}\right\} = \pi_0\,\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G. \tag{3}$$

我们在此对 G 遍历二维晶体群的点群时进行计算。结果似乎出乎此前的预料：对于同构空间群和旋转能带对称性，我们发现 [1, §IV.B] 拓扑相（3）通常由以下数对 (C,c) 标记，其构成为：(i) 一个陈数 C，可被点群的阶数 o 整除；(ii) 有限集 c 中的一个元素 $[n]$，该有限集描述了布里渊环面的高对称点映射到 S^2中的不动极点的方式（在微分同胚下不变）（参见图 5）：

$$(C,c) \in o\mathbb{N} \times [n]\,. \tag{4}$$

陈数被某个阶数 o整除这一点或许早已有人预料到，但第二个因子$[n]$ 意味着，实际存在的不同相可能比此前认识到的更多。

B. 分数量子陈绝缘体的拓扑序

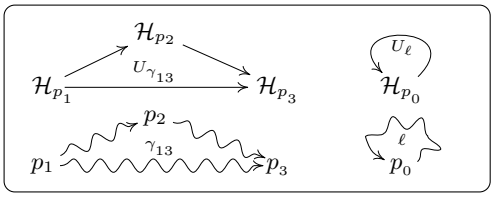
但我们的研究更进一步：近来，展现分数量子反常霍尔效应（FQAH，理论预测及发展见 [24–27]）的分数陈绝缘体（FCI）已在实验室中被观测到 [28–32]。最近，研究者一直在努力理解其预期的任意子拓扑序 [33, 34]（前者是从晶体对称性保护的角度出发，参见 [35]）——但根本问题仍然是：

> 展现分数量子反常霍尔效应的晶体二维分数量子反常霍尔绝缘体中的任意子拓扑量子态，其性质和现象学特征是什么？它们如何显现，又如何分类？

为了理解拓扑量子理论在这方面的预言——并由此指导实验人员如何尝试探测分数量子反常霍尔任意子——我们强调，通常而言，量子绝热定理 [36]（众所周知，该定理可以解释普通分数量子霍尔系统 [37] 及其他系统 [38]中任意子的存在）意味着（参见 [39, §2-3][40, §3]），拓扑基态构成局部系统 或 平坦丛，其纤维为定义在系统 的经典参数空间 P 上的希尔伯特空间；等价地，它们是 P（参见图1）连通分支基本群的线性表示。

如果涉及的不可约表示是高维的，我们就称该系统具有拓扑序[41] 。这与实验人员是否实际执行系统的绝热输运无关；但这意味着，如果执行绝热输运，那么给定的酉算符将作用于拓扑基态上，从而实现一个拓扑量子门。

图 1. 对经典参数 p 沿参数空间中的路径 γ 进行绝热调控时，有能隙量子系统 $\mathcal{H}$ 的基态会经历酉变换 $U_{\gamma\circ}$ 对于拓扑态，这些变换 U_γ 仅取决于 γ 的同伦类（相对于端点），因此希尔伯特空间 $\mathcal{H}_p$ 构成参数空间上的一个 *local system* 或 *flat bundle*，等价地，也构成任意基点 p_0 处闭合路径（环）ℓ 的基本群的线性表示：



对于位置空间中的一般任意子模型，这些参数 p 通常涉及平面上任意子位置的构型，其基本群为辫群 Br_n，使得系统的基态构成辫群表示，反映其任意子拓扑序（参见 [39,§3]）。

但对于此处关注的晶体绝缘体，可用参数仅有 p那些决定晶体结构的参数（例如紧束缚模型中的键合）——而这等价于单电子布洛赫哈密顿量（2）所编码的内容：实际的分数量子反常霍尔基态是由这类电子组成的多体强相互作用基态，它们会以复杂的方式依赖于单电子布洛赫哈密顿量；这种依赖关系（如同大多数强耦合量子系统的情形）在很大程度上尚未得到理解，但此处只需知道它确实连续依赖于该哈密顿量。由于根据上述现象（图 1），这种依赖意味着，对于给定的拓扑相（参数空间的连通分支），拓扑量子态构成布洛赫哈密顿量空间（2）中环的同伦类群的（酉、有限维、不可约）线性表示，

$$\widehat{T}^2 \xrightarrow{H/|H|} S^2\,, \tag{5}$$

因此，空间的基本群 π_1 [1, (A13)]

在给定基点处的布洛赫哈密顿量（因此也就是价带拓扑）$(C,\ c)$（4）：

$$\underbrace{\mathcal{H}\ \in\ \pi_1\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G_{(C,c)}\text{-Rep}}_{\substack{\textbf{Topological order:}\\ \text{monodromy of ground}\\ \text{state Hilbert space}}}\,. \tag{6}$$

表达式（6）的重要性可由这一非凡事实（归功于[11, 12, 42], 下文第§IIIC 1中的综述）得到凸显：当所有对称性都被破缺时（$G\ =\ 1$），它恰好给出了环面上分数量子霍尔效应系统所预期的任意子态！——但在这里，环面是晶体动量的布里渊环面。换言之，基本的（上）同伦理论清楚地预言，在不存在任何对称性的情况下，分数陈绝缘体的任意子态并不局域于位置空间，而是局域于倒动量空间。

这促使我们在此系统地分析具有非平凡晶体对称性G时的情形。奇妙的是，我们发现，对于所有非平凡的G，上述动量空间中的孤子型任意子都会消失；但对于某些 G，会出现服从旁统计的、对应于缺陷任意子的量子态，这些缺陷任意子与晶体的高对称点相关联。

要理解这一点，我们需要进一步厘清一个可能尚未得到充分关注的微妙问题：

$$\underbrace{\left\{\begin{array}{c}\textbf{Fragile topological phases}\\ \text{discernible by the system's}\\ \text{topological ground states}\end{array}\right\}}_{}\ =\ \underbrace{\pi_0\Big(\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,\,S^2\big)^G /\!\!/\ \mathrm{Diff}^+\big(\widehat{T}^2\big)^G\Big)}_{\substack{\text{components of covariantized band topology}}}\ \simeq\ \underbrace{\Big(\pi_0\,\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,S^2\big)^G\Big)}_{\substack{\text{band topology components}}}\ /\ \underbrace{\mathrm{Mod}^G}_{\substack{\text{modular}\\ \text{transformations}}}\,. \tag{8}$$

我们将看到，这不会影响陈数C 但通常会缩小离散相的集合 c（4）中。

更进一步，对于拓扑序（6），因此在

$$\underbrace{\mathcal{H}\ \in\ \pi_1\Big(\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,S^2\big)^G /\!\!/ \mathrm{Diff}^+\big(\widehat{T}^2\big)^G\Big)\text{-Rep}}_{\substack{\textbf{Topological order}\\ \text{reflecting covariance}\\ \text{of top. Hilbert space}\\ \text{monodromy of covariantized band topology}}}\ \longrightarrow\ \underbrace{\Big(\pi_1\,\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,\,S^2\big)^G\Big)}_{\substack{\text{band topology monodromy}}}\ \widehat{\times}\ \underbrace{\mathrm{Mod}^G}_{\substack{\text{equivariant}\\ \text{mapping classes}}}\text{-Rep}\,. \tag{9}$$

在§III C2中讨论的一个关键例子里，对于晶体对称性 p3，$\mathbb{Z}_{/3}$-模群最终成为对称群 $\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}_{/3}}\ \simeq\ \mathrm{Sym}_3$，它由晶格平移以及能够相互置换晶体动量的三个高对称点的旋转生成。结合（9），这意味着此情形下的拓扑量子态构成一个置换表示，因此是辫群 Br_3 的一个“非常稳定”的表示（通过满射 $\mathrm{Br}_3\ \twoheadrightarrow\ \mathrm{Sym}_3$进行因子化），因而其表现如同动量空间高对称点处局域化的“缺陷副任意子”的量子态。

表达式（3）和（6）应该没有争议——而（8）和（9）至少应该是合理的——

C. 微分同胚下的协变化

根据（3），脆弱拓扑相应当可以通过经典方式观测到；但另一个问题是，系统的拓扑基态希尔伯特空间（6）是否能够区分所有这些相：

也就是说，如果拓扑基态遵循拓扑量子场论（TQFT）的规则，因此具有“广义协变性” [43] ——这通常也在预料之中，参见 [44] ——那么，任何一对仅在定义域上相差一个微分同胚的能带拓扑 $\widehat{T}^2$，对于该基态拓扑量子场论而言，在物理上都等价。

在数学上，这种广义协变性意味着（参见[45]）要将能带拓扑空间除以（定向）等变微分同胚群$\mathrm{Diff}^+(\text{-})^G$ [46], 取其叠商或同伦商“(-) /\!/ (-)” [1, (A33)] 。

因此，对于拓扑相，也就是在连通分支上，这仅意味着通过环面的等变映射类群（相关内容参见 [47]）取通常的商(-)/(-)，从而将原本可能存在的相识别为同一相，

$$\mathrm{Mod}^G\ :=\ \pi_0\Big(\mathrm{Diff}^+\big(\widehat{T}^2\big)^G\Big)\,, \tag{7}$$

（简称：等变模群）在于：

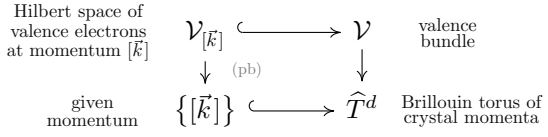
基本群，这种协变化意味着（参见 [12,命题 2。24]）能带拓扑（5）的单值化由等变模群（扩张 $(\text{-})\widehat{\times}(\text{-})$，即7）：

并且无疑是（分数）陈绝缘体量子拓扑的基础——然而，似乎此前从未有人计算过它们，甚至从未考虑过它们。同时，计算它们所需的等变（上）同伦方法，虽然在纯数学文献中十分常见，却恰好不属于凝聚态物质学界所熟悉的拓扑工具箱——因此，我们旨在着手弥补这一空白。我们的补充材料 [1] 提供了计算的详细信息，其附录 [1, §A] 汇编了相关的同伦理论背景。

II. 引言与概念

我们现在更详细地说明§I的安排。

被称为陈绝缘体（CI，[2][3, §8-9]）的晶体量子材料以呈现“拓扑相”而闻名（参见 [48, §II]）：这是因为这些晶体中价电子的布洛赫量子态 [49, §XIII.16] 张成了一个非平凡的复向量丛 $\mathcal{V}$——当电子动量在晶体动量的布里渊环面 $\widehat{T}^d$ 上变化时（参见 [10, §2.1]）：



(10)

这里我们关注一种典型情形：有效二维陈绝缘体，其布洛赫哈密顿量为二能带形式（例如开创性的*Haldane* 模型，参见 [3, §8.3]）。因此，布洛赫哈密顿量（参见 [49, §XIII.16][3,§5.1.3]）可用泡利矩阵 $\{\sigma_i\}_{i=1}^3$展开为：

$$\begin{aligned} \widehat{T}^2 &\xrightarrow{H_{\mathrm{Blch}}} \mathrm{Mat}_{2\times 2}(\mathbb{C}) \\ [\vec{k}] &\longmapsto H_{\mathrm{Blch}}([\vec{k}]) \\ &\equiv h_0([\vec{k}]) + \underbrace{\textstyle\sum_{i=1}^3 h_i([\vec{k}])\,\sigma_i}_{\vec{H}([\vec{k}])} \end{aligned} \tag{11}$$

（其中系数函数 h为实数），并且是有能隙的，即其两个能量本征值永不相等：

$$\big|H([\vec{k}]\,)\big| := \sqrt{\textstyle\sum_{i=1}^3 \big(h_i([\vec{k}]\,)\big)^2} \;>\; 0\,, \tag{12}$$

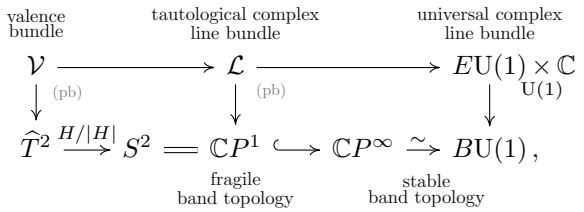
因此，相对布洛赫哈密顿量的归一化 H 在（11）中构成一个连续映射

$$H/|H| := \vec{h}/|H| \tag{13}$$

从 $\widehat{T}^2$ 到一个二维球面 S^2：

$$\begin{aligned} \widehat{T}^2 &\xrightarrow{H/|H|} S^2 \subset \mathbb{R}^3 \\ [\vec{k}] &\longmapsto \vec{d}([\vec{k}]\,)\,. \end{aligned} \tag{14}$$

低能本征态的价带丛 $\mathcal{V}$ (10)因此是沿着该分类映射（拉回 (pb) [1, (A1)]得到的平凡／泛线丛的14)：



(15)

因此，它等价于由$[H/|H|]$ [1, A9] 的 d 同伦类分类——在此情形下，该同伦类就是*Hopf*度（或绕数），与（第一且唯一的）价带丛陈数相一致：

$$C := \big[H/|H|\big] \;\in\; \underbrace{\pi_0\,\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,\, S^2\big)}_{\pi^2(\widehat{T}^2)} \;\simeq\; \mathbb{Z}\,. \tag{16}$$

如大括号下方所示，值得在此强调的是，(16)是环面的二阶上同伦 [12, §3], 其中n上同伦 $\pi^n(-)$ [14, §VII][50, 第 31] 页所述的“非常规”（或“广义”）且“非阿贝尔”（或“不稳定”）上同调理论 [15, §2] 由 n球面表示：

$$\pi^n(\text{-}) := \pi_0\,\mathrm{Map}(\text{-}, S^n)\,. \tag{17}$$

这类似于普通整数上同调由*Eilenberg-MacLane*空间 $B^n\mathbb{Z} \equiv K(\mathbb{Z},\ n)$[15,例 2.1]分类的方式

$$H^n(-;\mathbb{Z}) \simeq \pi_0\,\mathrm{Map}\big(-, B^n\mathbb{Z}\big) \tag{18}$$

以及 K上同调如何由 Fredholm 算子的空间 Fred 分类（参见 [51, 52]）：

$$K^n(-) \simeq \pi_0\,\mathrm{Map}\big(-, \Sigma^n\mathrm{Fred}\big)\,. \tag{19}$$

在这里，对于普通二维环面上的拓扑相，借助$n = 2$，所有这些上同调理论都一致。但我们将看到，随着考虑更多结构，这种一致性会被打破，而用二阶上同伦对脆弱能带拓扑的忠实描述则脱颖而出。

也就是说，在上述标准图景（参见 [3]）的基础上，我们现在再补充三项基本观测——遵循 [11] ——这些观测此前似乎未受到关注：

§IIA：晶体 G-对称性保护意味着分类映射（14）受到G-等变约束，因此脆弱能带拓扑的空间就是等变映射空间 $\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,\ S^2\big)^G$，

§IIB：拓扑序意味着有能隙基态在此能带拓扑空间中按单值化变换，因而构成其基本群的线性表示 π_1，

§IIC：拓扑量子唯象学还意味着，这些拓扑量子态必须在（等变）微分同胚下满足广义协变；因此，从系统自身的基态拓扑量子场论来看，能带拓扑的协变化空间实际上是同伦商空间 $\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2,\ S^2\big)^G /\!\!/ \mathrm{Diff}^+\big(\widehat{T}^2\big)^G$。

我们依次展开说明这三点：

A. 对称性与等变性

如今，在拓扑相理论中，-晶体对称性表示（参见 [53][48,§5.2]）：

(i) A symmetry group G acting on the crystal lattice

因此，在布里渊环面 $\widehat{T}^d$ 上也有对偶的表述

$$\begin{array}{ccc} G \times \widehat{T}^d & \longrightarrow & \widehat{T}^d \\ \big(g, [\vec{k}]\big) & \longmapsto & g \cdot [\vec{k}]\,; \end{array} \tag{20}$$

(ii)一族相容的酉算子（例如作用于 n 条带上）

$$\begin{array}{ccc} G \times \widehat{T}^d & \xrightarrow{U} & \mathrm{U}(n) \\ \big(g, [\vec{k}]\big) & \longmapsto & U_g\big([\vec{k}]\big) \end{array} \tag{21}$$

(iii) 使得布洛赫哈密顿量满足这一条件

$$\begin{aligned} &\overbrace{H_{\mathrm{Bloch}}\big(g \cdot [\vec{k}]\big)}^{\substack{\text{crystalline symmetry} \\ \text{transform}}} \\ &= \underbrace{U_g([\vec{k}]) \circ H_{\mathrm{Bloch}}([\vec{k}]) \circ U_g([\vec{k}])^{-1}}_{\text{band symmetry transform}} . \end{aligned} \tag{22}$$

对所有 $g \in G$ 和 $[\vec{k}] \in \widehat{T}^d$.

我们现在强调，这一条件（22）使布洛赫哈密顿量成为一个 轨形 映射（参见 [21]），而在酉算子（21）实际上与 $[\vec{k}]$ 无关这一常见特殊情况下，

$$H_{\mathrm{Bloch}}\big(g \cdot [\vec{k}]\big) = U_g \circ H_{\mathrm{Bloch}}\big([\vec{k}]\big) \circ U_g^{-1}\,, \tag{23}$$

等价地说，布洛赫哈密顿量是一个 G- 等变映射 [1,(A39)],

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft^{G} & & \circlearrowleft^{G} \\ \widehat{T}^d & \longrightarrow & \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C}) \\ [\vec{k}] & \longmapsto & H_{\mathrm{Bloch}}\big([\vec{k}]\big)\,, \end{array} \tag{24}$$

相对于右侧 G 的共轭作用，该作用通过以下同态给出

$$G \xrightarrow{U} \mathrm{U}(n) \longrightarrow\!\!\!\!\!\rightarrow \mathrm{PU}(n) \circlearrowleft \mathrm{Mat}_{n\times n}(\mathbb{C})\,. \tag{25}$$

具体而言，对于当前的 $n = 2$带布洛赫哈密顿量（11），晶体 G对称性（24）意味着分类映射（14）是 G等变的

$$\begin{array}{ccc} \circlearrowleft^{G} & & \circlearrowleft^{G} \\ \widehat{T}^2 & \xrightarrow{H/|H|} & S^2 \end{array} \tag{26}$$

相对于右侧的旋转作用

$$G \xrightarrow{U} \mathrm{U}(2) \longrightarrow \mathrm{PU}(2) \simeq \mathrm{SO}(3) \circlearrowleft S^2\,. \tag{27}$$

现在， G对称性保护拓扑相 [54]意味着，不仅布洛赫哈密顿量本身，其所有可用的形变也都满足条件（23），因此可用能带拓扑的空间现在是所有映射 [1,（A41）]中 G- 等变映射（ 26 ）所构成的子空间：

$$\underbrace{\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G}_{\substack{G\text{-symmetric} \\ \text{fragile band topologies}}} \subset \underbrace{\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)}_{\substack{\text{fragile} \\ \text{band topologies}}}. \tag{28}$$

对 G-对称性保护拓扑相的这一等价重新表述值得注意，因为已有一套成熟而精 sophisticated 的数学工具，用于分析诸如（28）这样的等变映射空间中的不变量内容：这就是等变同伦论（参见 [55][1,§A 2]）。

具体而言，式（28）右侧的连通分支给出布里渊环面（16）的二阶上同伦，而式（28）左侧的连通分支构成等变二阶上同伦 [20, 例 4.5。8][21,§6][22, (3)][23] 布里渊环面（3）的:

$$\pi_G^2\big(\widehat{T}^2\big) \equiv \pi_0\,\mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G\,, \tag{29}$$

因此，预测是：这一等变二阶上同伦将分类受 G-对称性保护的二维二带陈绝缘体的脆弱能带拓扑。

这是我们将在§IIIB中报告的第一组量。

B. 拓扑序与单值化

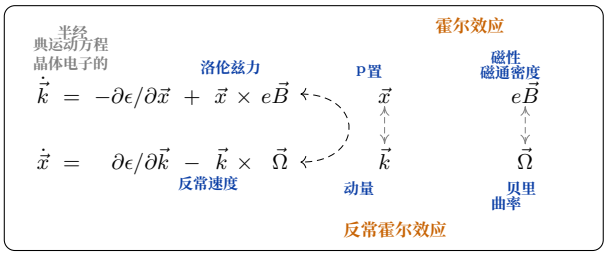
a. **分数量子反常霍尔系统**。人们曾预测，某些陈绝缘体在其“平带”价带处于分数填充时——分数陈绝缘体 (FCI)——[56], 并且最近已通过实验观测到 [28–31],，它们会呈现一种内禀形式的效应；对于处于强横向磁场中的二维电子气，这种效应就是分数量子霍尔效应 (FQH，参见 [57])，因此这里称其为分数量子反常霍尔效应 (FQAH)。

这里使用“反常”一词，是一种历史性的说法，表达了人们对这样一个现象的惊讶：对于普通量子霍尔效应至关重要的磁场，在反常版本中却不起作用。相反，价带在晶体动量布里渊环面上的贝里曲率 发挥了磁通量的作用（参见 [11, 图 3]）。

因此，分数量子反常霍尔系统并非如术语所暗示的那样，是分数量子霍尔现象学中的一种怪异异常，而是分数量子霍尔系统的系统性对偶（这里的对偶性指高能物理中熟知的对偶性）：这种对偶性将通常的位置空间与动量空间互换，并将磁通量与贝里曲率互换（这一观察可追溯至 [58][59][60, §III.B], 中的综述 [61][62, (69)][63, §III.A][64][65,(12-13)]），见图2。

然而，众所周知，普通分数量子霍尔系统会呈现任意子拓扑序——自 [66], recent pointers in[67] 以来，阿贝尔任意子已在实验上得到观测——因此，这强烈暗示它们的“反常”近亲也应以某种相应的对偶方式呈现这种拓扑序。若确实如此，其技术影响可能十分重大，因为分数量子反常霍尔系统的实现条件比普通分数量子霍尔系统实用得多（无需强磁场和低温：由此也带来了实现“高温拓扑序”的前景 [68]）。因此，理解分数量子反常霍尔系统中的任意子拓扑序，或许能为.....铺平道路

图 2. 分数量子霍尔效应与其反常版本——分数量子反常霍尔效应——之间存在对偶性：普通的二维材料位置空间与“倒易”晶体动量空间相互转换，而外加磁通密度则与布洛赫能带在该动量空间上的贝里曲率相互转换。



迈向实用的拓扑量子硬件，以实现人们期待已久的稳健量子计算机。

然而，迄今尚无理论预测（事实上，似乎也未曾考虑过）任意子拓扑序如何能在分数量子反常霍尔系统中实际显现，因此也没有为实验提供检测方法的指引。

b. **一般拓扑序**。为了解决这一悬而未决的问题，我们现在退一步，重新审视这个一般性问题：

> 一般而言，拓扑量子序如何显现？

也就是说，如今广受欢迎的观点认为，拓扑序 [41] 以及拓扑量子过程（例如：拓扑量子门）体现为点粒子（任意子）世界线的编织过程作用于（简并的量子基态），这只是一般概念中的一个例子：由量子绝热定理 [36],支配的拓扑量子过程一般只需满足以下三个拓扑序条件（参见 [39,§2-3]）：

定义 B.1（一般拓扑序）。量子系统若满足以下三个条件，即表现出（恰当的）**拓扑序**：

1. **（整体变换）**有能隙量子基态的希尔伯特空间 $\mathcal{H}_p$ 依赖于在某个参数空间 P 中变化的经典外部参数 p。

   根据量子绝热定理 [36]，，这意味着沿着 P 中的连续参数路径 $p \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} p'$绝热调控参数（即相对于量子系统的弛豫时间而言足够缓慢），会诱导量子系统的（渐近）幺正变换 U_γ：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p & \xrightarrow{U_\gamma} & \mathcal{H}_{p'} \\ p & \overset{\gamma}{\rightsquigarrow} & p' . \end{array} \tag{30}$$

2. **（同伦）**这种对参数路径的依赖具有“拓扑性”（这是物理学术语，在数学中实际上称为：同伦的），也就是说，对参数路径进行连续变形 σ： $\gamma \Rightarrow \gamma'$（同伦，保持端点固定）不会影响所诱导的幺正变换：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p & \xrightarrow{U_\gamma = U_{\gamma'}} & \mathcal{H}_{p'} \\ p & \overset{\gamma}{\underset{\gamma'}{\Downarrow}} & p' . \end{array} \tag{31}$$

3. **（单值化）** P 的基本群 π_1（任意连通分支的基本群）是非平凡的（更准确地说，是非阿贝尔的），因为某些具有相同端点的参数路径对无法通过连续变形（#）彼此变为对方，

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p & \overset{U_\gamma}{\underset{U_{\gamma'}}{\rightrightarrows}} & \mathcal{H}_{p'} \\ p & \overset{\gamma}{\underset{\gamma'}{\#}} & p' , \end{array} \tag{32}$$

以及基本群所诱导的酉表示

$$\begin{array}{ccc} \pi_1(P, p_0) & \longrightarrow & \mathrm{U}\big(\mathcal{H}_{p_0}\big) \\ p_0 & \longmapsto & \mathcal{H}_{p_0} \\ \gamma \circlearrowright & & U_\gamma \circlearrowright \end{array} \tag{33}$$

是非平凡的（准确地说：包含维数为 > 1的不可约表示）。

物理上：

- 第1个条件指出，调节参数会诱导量子基态的变换，其形式如同全纯量子门，
- 第2个条件指出，这一操作是“拓扑的”（更确切地说，是同伦的），因为它不受参数路径局部形变（噪声！）的影响，
- 并且第3个条件确保存在非平凡的此类拓扑过程，能够对量子系统产生非平凡的变换。

我们注意到，无需实验人员实际执行这些拓扑过程，系统的基态也能体现它们；但执行这些过程就相当于对系统施加拓扑量子门。

用数学术语来说：

- 第1个条件使得（参见 [69]）希尔伯特空间$\mathcal{H}$ 构成一个带联络的丛，其定义在 P之上，其平行输运对应于酉算子 $\gamma \mapsto U_\gamma$,
- 第2个条件表明该联络是平坦的，这使得希尔伯特空间丛成为一个局部系统(参见 [39, 文献 2。22][40, §3]),

- 第3个条件表明该局部系统是非平凡的（更准确地说：是非阿贝尔的）。

接下来，我们考察这一一般概念在分数量子霍尔系统中的典型例子，然后讨论它在分数量子反常霍尔系统中的新颖特例。

例 B.2 （传统任意子编织）。对于曲面 Σ^2 上普通的分数量子霍尔系统 [57]，参数空间是准空穴/涡旋位置 $S \subset \Sigma^2$ 的构形空间，即所谓的曲面点的构形空间（参见 [39,文献 2.18][70]）：

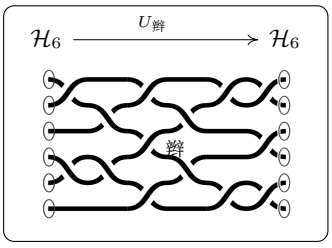
$$P \equiv \mathrm{Conf}(\Sigma^2) := \big\{ S \subset \Sigma^2 \,\big|\, S \in \mathrm{FinSet} \big\} . \tag{34}$$

该参数空间的基本群（34），在 n 个涡旋的连通分支中，是曲面的辫群（[71],参见 [12,§2.2]）

$$\pi_1\big(\mathrm{Conf}(\Sigma^2), n\big) \simeq \mathrm{Br}_n(\Sigma^2) , \tag{35}$$

其线性表示是辫表示，体现了任意子涡旋的“辫群统计”，参见图 3。

图 3. 量子绝热定理意味着，若有能隙量子基态“拓扑地”（同伦地）依赖于曲面中的点构形，那么当这些构形沿参数空间中的回路变化时，基态将在幺正变换 *braid representations* 下变换，形成由世界线构成的 *braids* 。



将绝热量子定理应用于这种情形，以此从理论上识别分数量子霍尔任意子的做法可追溯至 [37, 72]，此后（分数量子霍尔）任意子便一直以这种方式被概念化，尤其是在拓扑量子计算文献中（参见 [38, 73–75]）。

顺便一提，参数空间（34）上希尔伯特空间的平坦丛，众所周知（但并非仅限于此）会以 *Knizhnik-Zamolodchikov*联络 [76] 的形式出现在共形块丛上，由此得到的辫群表示通常（不太贴切地）称为单值化表示。

然而，与阅读相关文献时可能形成的印象相反，辫群表示并非任意子拓扑序在物理系统中显现的唯一方式：

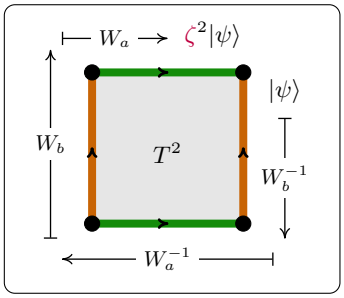
例 B.3 （环面上的拓扑序）。以下示例的现象学再现了关于拓扑序的传统观点，这些观点通常以任意子来诠释——但其中并不涉及上述类型的任意子位置参数（34）。我们认为我们现在将这种方式作为定义B.1的另一个特例来获得，这说明了该定义的重要性。

具体而言，人们通常预期（参见 [77, (4.21)][78, (5.28)]），平坦环面上分数量子霍尔系统的拓扑量子可观测量代数 $\Sigma^2 \equiv T^2$由一对酉算子 W_a生成，W_b 并满足对易关系（参见图4）

$$W_a\, W_b \;=\; \zeta^2\, W_b W_a \,, \tag{36}$$

其中，$\zeta \in \mathbb{C}^\times$ 是与分数量子霍尔任意子编织相位相对应的单位根。

图 4. 根据*braiding phase* ζ *anyon* ，环面上任意子量子可观测量代数中的非平凡群交换子。



这一拓扑可观测量代数（36）通常是通过诉诸一种有效的阿贝尔陈-西蒙斯场论（[79], 参见 [12, §A。1]）来论证的；人们认为，该场论描述了分数量子霍尔系统的大尺度（“红外”）动力学。

（对这一预期进行实验验证一直难以实现：虽然将二维电子气约束在环面上或许勉强可行，但随后让其受到处处横向的磁场穿透，似乎几乎不可能。这使得随着我们转向分数量子反常霍尔系统，环面拓扑不仅在实验上变得可行，而且成为默认选择——如今是在一个动量空间 环面上——而我们在环面上推导分数量子霍尔拓扑序的方法也能无缝地延伸到分数量子反常霍尔情形，这就更加令人惊叹。）

因此，我们要问：

> 问：关系式(36)是否代表某个与分数量子霍尔系统相关的参数空间 P 的基本群?

值得注意的是，答案是 [12]:

> 答：是的，它是环面上上同伦量子化磁通量子的参数空间的基本群。

也就是说，按照历久弥新的狄拉克磁通量子化条件 [50]，的预言，穿过曲面 Σ^2 的普通拓扑磁通的参数空间是映射空间

$$P \;\equiv\; \mathrm{Map}\big(\Sigma^2, B\mathrm{U}(1)\big) . \tag{37}$$

到分类空间

$$\mathbb{C}P^\infty \sim B\mathrm{U}(1) \tag{38}$$

对于 U(1)麦克斯韦规范场。不过，其阿贝尔基本群为 [12, 例 2。8]

$$\pi_1 \mathrm{Map}\big(T^2, B\mathrm{U}(1)\big) \simeq \mathbb{Z}^2 \tag{39}$$

其表示由麦克斯韦威尔逊环可观测量的代数给出 W_a, W_b，并满足未变形交换关系

$$W_a W_b = W_b W_a \,. \tag{40}$$

另一方面，(37) 当然只描述自由磁场，并忽略了它与我们在此关注的二维电子气之间的相互作用。相反，在分数填充率背景下形成分数量子霍尔系统的额外磁通量子，与强耦合电子系统中的涡旋相关，因此具有奇异性质 [80, pp 883]。为体现这一点，我们可以探讨其构型拓扑中经典分类空间 (38) 的变形。由于 $\mathbb{C}P^\infty \equiv \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{C}P^n$，一种值得考虑的变形选择是该序列的第一阶段（三骨架），即二维球面：

$$\mathbb{C}P^1 \simeq S^2 \,. \tag{41}$$

这使得一个奇异的拓扑磁通参数空间成为 Σ^2 的上同伦余循环空间：

$$P \equiv \mathrm{Map}\big(\Sigma^2, S^2\big) \,. \tag{42}$$

值得注意的是，在绕数／陈数为 C 的连通分支中，这个空间的基本群 [11][12, §3][42, §3], 后文 [81–83], （更多细节见 §III C1）是非阿贝尔的整数海森堡群，其层级为 =2 （定义 C.1）：

$$\pi_1\Big(\mathrm{Map}\big(\Sigma^2, S^2\big), C\Big) \simeq H_3(\mathbb{Z}, 2C) \,, \tag{43}$$

其表示恰好具有如下形式（36）！

这表明，在一个除此之外都很熟悉的情形中，任意子拓扑序确实可以源自参数空间中的绝热单值变换（此处为（42）），而非图 3 中通常出现的点的构型空间。

因此，我们现在可以理解如何识别分数量子反常霍尔系统中潜在的任意子拓扑序。第一步是确定这些系统的经典外部参数空间 P：

例 B.4 （分数量子反常霍尔系统的情形）。 定义分数陈绝缘体晶体的参数就是其晶体性质：若用紧束缚模型描述，则包括跃迁键；一般而言，还包括晶格背景下单电子所感受到的势，这些信息编码在其位置空间哈密顿量中。然而，经过傅里叶变换后，恰恰是这些数据被编码在布洛赫哈密顿量（11）中，进而由（等变）分类映射（26）编码。由此可知，晶体分数量子反常霍尔系统的外部参数空间正是等变映射空间（28）：

$$P \equiv \mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G. \tag{44}$$

这里需要指出，分数量子反常霍尔系统与所有拓扑有序系统一样，都涉及强相互作用电子，其联合希尔伯特空间 $\mathcal{H}_{H/|H|}$ 中的有能隙基态源自晶体结构，并以复杂且尚未充分理解的方式依赖于晶体结构，因而也依赖于给定的单电子布洛赫哈密顿量 H（正如大多数强相互作用场论也尚未得到充分理解一样）。但对我们的分析而言，重要的只有这一点：它确实依赖于 $H/|H| \in$映射$\big(\widehat{T}^2,\ S^2\big)^G$：根据量子绝热定理（图1），这意味着如果分数量子反常霍尔系统具有拓扑序，那么其有能隙基态希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 确实在与给定拓扑相对应的连通分支中表示映射$\big(\widehat{T}^2$的 $S^2\big)^G$基本群（29）。

由此我们得出结论：对于任意给定的电荷扇区，二维二能带 G-晶体分数陈绝缘体中可能出现的拓扑序

$$C_G \in \pi_0 \mathrm{Map}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G,$$

应由表示来刻画

$$\mathcal{H} \in \mathrm{Rep}\Big(\pi_1 \mathrm{Map}_{C_G}\big(\widehat{T}^2, S^2\big)^G\Big) \,. \tag{45}$$

值得注意的是，此处出现的脆弱能带拓扑的系数空间 S^2 与例 41中为分数量子霍尔系统假定的分类空间（B.3）相一致。这意味着，当所有晶体对称性都被破坏时（$G = 1$），我们预测二维二能带分数陈绝缘体的潜在拓扑序仅具有传统形式（36），即环面上的拓扑序，只不过这里的环面是晶体动量的布里渊环面（见定理 [11, 1]）！

显而易见的问题是，在存在非平庸晶体对称性的情况下，这些任意子态在动量空间中会发生什么；对此，只需计算连通分支（29）及其基本群（45）即可作答。

这是我们将在§IIIC中报告的第二组结果。

C. 微分同胚下的协变性

因此，我们还需要恰当地理解潜在具有拓扑序的量子系统所对应的参数空间 P （定义 B.1）。我们已经讨论了上文中的关键示例，但还有一个细节需要处理：

对于定义在某个区域上的参数，若它们是拓扑场 Σ^d，即映射到某个系数空间 $\mathcal{A}$ 的（等变）映射（如例B.3 和B.3）

$$P \equiv \mathrm{Map}\big(\Sigma^d, \mathcal{A}\big)^G, \tag{46}$$

由此可以推知，参数对 p, p': $\Sigma^d \to \mathcal{A}$若仅相差一个（等变）微分同胚 $\phi : \Sigma^d \xrightarrow{\sim} \Sigma^d$的作用，

$$p' = p \circ \phi \,, \tag{47}$$

依赖于它们的拓扑基态会将它们视为等价。事实上，如果拓扑基态空间 $\mathcal{H}$ 表现得如同拓扑量子场论（TQFT [43, 84]的态空间，那么这必然如此；人们有充分理由普遍预期情况确实如此，参见 [44]。

在这种情况下，与（30）中的情形类似，由通过微分同胚 ϕ 相关联的参数对所对应的希尔伯特空间并非严格相等，而是通过相应的酉变换 U_ϕ酉等价：

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{H}_p & \xrightarrow{U_\phi} & \mathcal{H}_{p'} \\ p & \xmapsto{(-)\circ\phi} & p' \,. \end{array} \tag{48}$$

因此，对于一般协变的拓扑量子态，正确的参数空间必须包含微分同胚路径。实现这一点的标准数学构造是映射空间关于（等变）微分同胚群的同伦商(-) //(-)[1, (A33)]（也称为博雷尔构造）：

$$P \equiv \mathrm{Map}\big(\Sigma^d, \mathcal{A}\big)^G /\!\!/ \mathrm{Diff}\big(\Sigma^d\big)^G. \tag{49}$$

例 C.1。为了观察这种效应如何发挥作用，值得考虑这样一个极端情形：参数空间本身的单值化是平凡的，例如能带拓扑的分类空间是可缩的， $\mathcal{A} \simeq *$，因此（49）中的微分同胚协变性主导了系统的拓扑行为：在这种情况下，协变化参数空间的基本群就是等变模群（7）：

$$\begin{aligned} \pi_1\Big(\mathrm{Maps}\big(T^2, *\big)^G /\!\!/ \mathrm{Diff}\big(T^2\big)^G\Big) &\simeq \pi_1\Big(\mathrm{Diff}(T^2)^G\Big) \\ &\simeq \pi_0\Big(\mathrm{Diff}\big(T^2\big)^G\Big) \\ &\equiv \mathrm{Mod}^G, \end{aligned}$$

因此，可能的任意子拓扑序归入模表示。

在一般情况下，等变模群（[12, 命题 2.24]）是协变化单值化的一个半直因子：

$$\begin{aligned} &\pi_1\Big(\mathrm{Maps}\big(T^2, \mathcal{A}\big)^G /\!\!/ \mathrm{Diff}\big(T^2\big)^G\Big) \\ &\simeq \pi_1\Big(\mathrm{Maps}\big(T^2, \mathcal{A}\big)^G\Big) \rtimes \mathrm{Mod}^G. \end{aligned} \tag{50}$$

总之，上述分析为§IB中提出的问题提供了实质性的数学解答，该问题涉及晶体二维分数陈绝缘体中可能存在的任意子拓扑量子态的本质：

> 晶体双能带分数陈绝缘体的拓扑序归入协变化能带单值化（50），即 $\mathcal{A} = S^2$ 二阶上同伦的分类空间。

现在我们继续推导这一结果。

III. 方法与结果

结合§II中的讨论，我们已将物理问题归结为一个纯粹的代数拓扑问题：计算协变化的等变能带拓扑空间（49）的同伦，从而计算：

§IIIB： 其连通分支 π_0 (8)（等变二阶上同伦）对应可能的拓扑相，
§IIIC： 其基本群 π_1 (9)，用于确定可能的拓扑序。

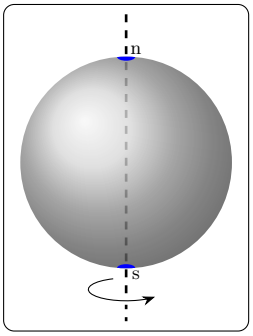
这里我们着重介绍这些计算中有趣且具有启发性的实例，更全面的论述则见 [1]。

A. 一般性论述

我们处理等变（晶体）方面的关键方法，是针对每种给定的点群对称性，确定布里渊环面上的最小 等变 *CW* 复形结构 （参见 [1, §II]；示例见图 6 和 7），然后遍历其骨架，计算等变映射空间的同伦（参见 [1, §IV.B]）。尽管这是等变同伦论中一种标准的方法，但此前似乎尚未将其应用于拓扑材料；无论采用这种方法还是其他方法，二维环面的等变二阶上同伦似乎也尚未得到计算。

相比之下，对于陪域二维球面上的 G-作用（参见 [1, §III]），事实证明，关键仅在于它固定所有点（平凡群作用的情形“0”）、两个点（循环群作用的情形“I”），还是不固定任何点（二面体群作用的情形“II”）。
这里我们关注情形（0 和）I，参见图 5。

图 5. 非平凡循环群 $\mathbb{Z}_n$、 $n \geq 1$ 在二维球面上的作用是绕一条固定轴旋转，因此恰好固定一对对跖点，记为“n”和“s”。



B. 拓扑相

这里我们讨论晶体陈绝缘体中脆弱拓扑相的实例，即连通的

分量（8）。

1. No Symmetry

为求完整，我们重申，在晶体对称性平凡的情况下，二阶上同伦中的脆弱拓扑相与普通整数二阶上同调中的稳定陈相一致。理解这一点的一种方法是注意到，相应分类空间的包含映射

$$S^2 \simeq \mathbb{C}P^1 \xhookrightarrow{i} \mathbb{C}P^\infty \simeq B^2\mathbb{Z}$$

是到第二波斯特尼科夫层的投影，因此会在从任意二维流形出发的映射同伦类上诱导一个同构（参见 [15,命题 1.20]）：

$$\begin{array}{ccc} \pi^2(T^2) & \xrightarrow{\sim} & H^2(T^2;\mathbb{Z}) \\ \| & & \| \\ \pi_0, \mathrm{Map}(T^2, \mathbb{C}P^1) & \xrightarrow{i_*} & \pi_0, \mathrm{Map}(T^2, \mathbb{C}P^\infty)\,. \end{array}$$

此外，在左侧，霍普夫度同构

$$\pi^2(T^2) \simeq \mathbb{Z}$$

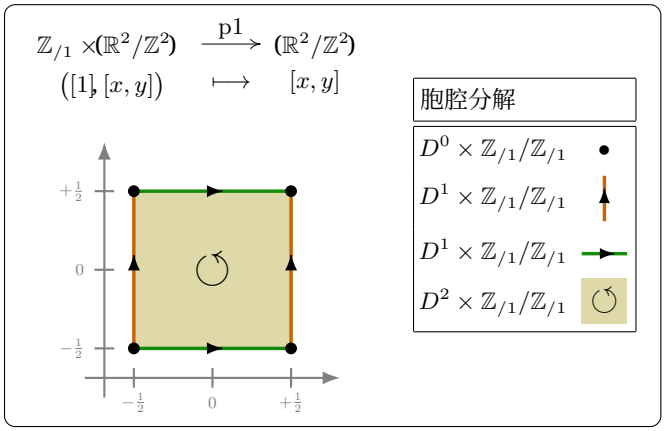
将映射 $T^2 \to S^2$ 映射为其 绕数，该绕数可以理解为环面的二维胞腔（见图6）绕二维球面的次数。

由于这个绕数显然在通过微分同胚进行前复合时保持不变，因此可以得出，在没有晶体对称性的情况下，协变化的脆弱分类（8）仍由通常的整数（陈数）表征：

$$\pi_0\Big(\mathrm{Map}(T^2, S^2) /\!\!/ \mathrm{Diff}(T^2)\Big) \simeq \mathbb{Z}\,. \tag{51}$$

但当系统受到晶体对称性的保护时，这种默认情况就会改变。接下来我们将讨论这种情况。

图6. 无对称性环面上的最小胞腔结构，对应于平凡的二维空间群 p1。

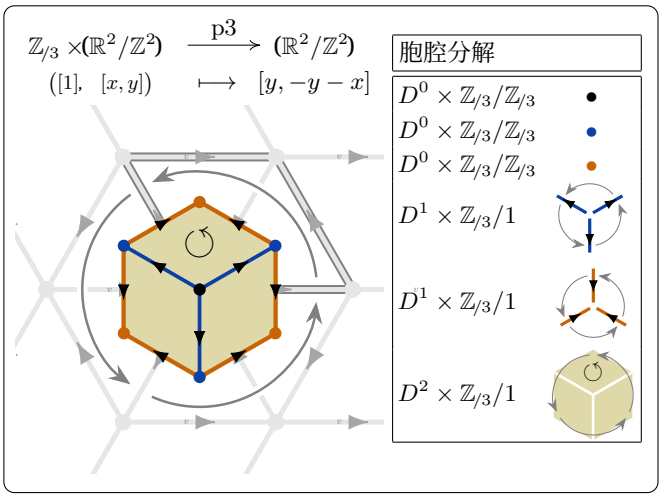


2. p3 Symmetry

考虑二维晶体对称性 p3（图7），其中对偶晶格 $\mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{R}^2$ 由一对夹角为 $2\pi/3$的单位向量张成，点对称群 $\mathbb{Z}_{/3}$ 是按$2\pi/3$的整数倍进行旋转。因此，群元素 $[1] \in \mathbb{Z}_{/3}$ 的作用是将两个基向量中的一个映射到另一个，并将后一个基向量映射为二者之和的负值，由此可得它在该基底下的矩阵表示如下：

$$L_{[1]} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}. \tag{52}$$

图 7. 关于对应空间群 p3 的 $\mathbb{Z}_{/3}$ 作用的环面上的最小等变胞腔结构。



（52）在环面 $\widehat{T^2} = \mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$上的诱导作用恰好有三个不动点 $[p]$，其坐标代表元为

$$p_0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},\ p_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} \end{pmatrix},\ p_2 := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{pmatrix}. \tag{53}$$

此外，布洛赫哈密顿量在 p3 晶体上的典型对称变换（22）涉及布洛赫球的 $\mathbb{Z}_{/3}$旋转，该旋转恰好有两个不动点（参见图 5）。

现在，一个 G-等变映射必须将 G-不动点（“高对称点”）映射到 G-不动点。因此，等变映射空间立即被分成$2^3 = 8$ 个扇区，分别对应于将 3 个高对称点映射到球面上 2 个固定极点的 8 种方式。此外，$\mathbb{Z}_{/3}$-等变微分同胚会将 T^2 中的全部 3 个高对称点相互置换（依据 [1, 命题 B.1]），从而将拓扑上可区分的扇区数减少为

$$\left(\!\!\binom{2}{3}\!\!\right) := \binom{3+2-1}{3} = 4\,.$$

在这些扇区中的每一个里，从图中三个二维胞腔之一到7至 S^2 的映射，其绕数属于 $\mathbb{Z}$ （根据

[1, §IV B 6]），因此总绕数属于3ℤ。因此，协变化的脆弱 p3 晶体相的类别（8）为

$$\pi_0\Big(\mathrm{Map}(T^2,S^2)^{\mathbb{Z}/3}/\!/\,\mathrm{Diff}(T^2)^{\mathbb{Z}/3}\Big)\;\simeq\;3\mathbb{Z}\times[4]\,. \tag{54}$$

换言之，脆弱的 p3 晶体相由以下各项组成的配对分类：

(i) a Chern class constrained to be divisible by 3,

(ii) 一个含 4 个元素的集合中的元素。

特别是，这预示着陈类本身不再是 p3 晶体拓扑相的唯一分类指标。

C. 拓扑序

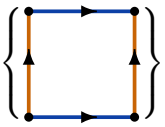
我们在此讨论二维晶体陈绝缘体中可能存在的拓扑序实例，即其脆弱能带拓扑的基本群（9）。

1. *No symmetry*

我们概述例 [85, §3][42, §3.2] 的证明（沿用 B.3），由此确立了当所有对称性均被破缺时，环面上 2-上同伦荷所对应的任意子拓扑序。

首先，回顾一下，平坦环面具有图中所示的标准胞腔分解。6。其一骨架是两个圆的楔和

$$\mathrm{sk}_1(T^2)\;\simeq\;S^1\vee S^1\;=\;$$



(55)

而二维胞腔粘附是这个推出

$$\begin{array}{ccc} S^1 & \xrightarrow{\ \circlearrowleft\ } & \mathrm{sk}_1(T^2) \\ \downarrow & & \lrcorner\ \downarrow \\ D^2 & \longrightarrow & T^2\,, \end{array} \tag{56}$$

其中，上方的映射将二维胞腔的边界映至图中所示的位置。6。

现在，式（55）中的两个一维胞腔各自通过以下映射，为带基点映射空间的基本群贡献一个整数群的副本：

$$\pi_1\mathrm{Map}^*(S^1,S^2)\;\simeq\;\pi_0\mathrm{Map}^*(\Sigma S^1,S^2)\;\simeq\;\pi_2(S^2)\;\simeq\;\mathbb{Z}$$

二维胞腔（56）也通过霍普夫纤维化作出同样的贡献，它生成 $\pi_3(S^2)$：

$$\pi_1\mathrm{Map}^*(S^2,S^2)\;\simeq\;\pi_0\mathrm{Map}^*(\Sigma S^2,S^2)\;\simeq\;\pi_3(S^2)\;\simeq\;\mathbb{Z}\,.$$

通过稳定分裂 [86, 4I.1], 这些贡献以乘法方式结合到带基点映射空间的底层集合（任意连通分支）中，从而得到：

$$\pi_1\mathrm{Map}^*\big(T^2,S^2\big)\;\simeq_{\mathrm{Set}}\;\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}\,.$$

将这里的生成元标记为

$$\left.\begin{aligned} W_a\;&:=\;\big((1,0),0\big)\\ W_b\;&:=\;\big((0,1),0\big)\\ \zeta\;&:=\;\big((0,0),1\big)\end{aligned}\right\}\;\in\;\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}\,, \tag{57}$$

于是，经典同伦理论将群交换子（参见图4）识别为

$$[W_a,W_b]\;\equiv\;W_aW_bW_a^{-1}W_b^{-1}\;\;\in\;\;\pi_1,\mathrm{Map}^*\big(T^2,S^2\big)$$

这就是上述同伦群的所谓 怀特海德乘积（参见 [87, p. 476]），结果表明，它将一对生成元映射为霍普夫纤维化的类的两倍（参见 [87, p. 495]）：

$$\begin{array}{ccc} \pi_2(S^2)\times\pi_2(S^2) & \xrightarrow{\ [-,-]_{\mathrm{Wh}}\ } & \pi_3(S^2) \\ (1,1) & \longmapsto & 2\,. \end{array} \tag{58}$$

因此，我们得到特征性的任意子关系（36）

$$[W_a,W_b]\;=\;\zeta^2\;\;\in\;\;\pi_1\,\mathrm{Map}^*(T^2,S^2)\,,$$

右侧关键的 2 的幂反映了上述怀特海德乘积（58）。

此外，仅凭次数论证便可看出，在这些生成元之间，群交换子只有这一个非平凡项（57），

$$[W_{a/b},\zeta]\;=\;\mathrm{e}\;\;\in\;\;\pi_1\,\mathrm{Map}^*(T^2,S^2)\,,$$

这意味着任意子编织相位生成元 ζ 在（57）中确实是中心的。

总之，这表明，带基点映射空间的基本群是“普朗克常数”为 $h\;=\;0$ 的 $=2$ 级整数海森堡群：

定义 C.1。对于 $h\in\mathbb{Z}$，$=2$ 级整数海森堡群 $\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/h}$ 的底层集合为 $\mathbb{Z}^2\times\mathbb{Z}_{/h}$，其群运算为

$$\begin{array}{c}(\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/h})\\ \times(\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/h})\end{array}\longrightarrow\;\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/h}$$

$$\begin{pmatrix}(a,b,[n]),\\(a',b',[n'])\end{pmatrix}\;\longmapsto\;\begin{pmatrix}a+a',\\b+b',\end{pmatrix},\begin{bmatrix}n+n'+\\ab'-a'b\end{bmatrix}\Big)\,. \tag{59}$$

最后，只需将这一结果从带基点映射空间转换到无基点映射空间即可。利用 Whitehead 的另一个经典结果 [88, (3.4)*]，怀特海德乘积（58）再次以不同形式出现，并表明在具有陈类 C 的无基点映射空间的连通分支中，编织相位扩张群被商化为 $\mathbb{Z}_{/2C}$，因此最终结果为：

$$\pi_1\Big(\mathrm{Map}\big(T^2,S^2\big),C\Big)\;\simeq\;\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/2C}\,, \tag{60}$$

如所声称。

最后，从这一推导可以清楚看出，普通模群的作用

$$\mathrm{Mod}\;:=\;\pi_0\big(\mathrm{Diff}(T^2)\big)\;\simeq\;\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$$

在这个基本映射空间群上，作用由 $\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})$ 在 $\mathbb{Z}^2$因子上的定义作用给出（见（60）。

此外，仔细分析 [12, §3。4] 表明，在由此得到的有限维不可约表示中，协变化的能带单值化群（（9）

$$\begin{aligned}&\pi_1\Big(\mathrm{Map}\big(T^2,S^2\big)\,/\!/\,\mathrm{Diff}(T^2),C\Big)\\&\simeq\ \big(\mathbb{Z}^2\times_2\mathbb{Z}_{/2C}\big)\rtimes\mathrm{SL}(2,\mathbb{Z})\,,\end{aligned}\tag{61}$$

任意子编织相位可观测量 ζ (57) 会受到限制，必须为单位根，这一点可见于分数量子霍尔系统。

2. *p3 Symmetry*

事实证明（见 [1]），§IIIC 1 中的上同伦任意子拓扑序一旦系统满足任何非平凡的晶体对称性，便会消失。不过，对于某些晶体 G对称性，还会出现另一种任意子拓扑序，其中任意子与高对称点（ G作用的不动点）相关联：

这实际上是我们关于协变化拓扑序的观察（9）与 [1, 命题 B 1], 的结果直接结合得出的结论；该结果已在§III B2中使用：p3-等变模群（7）包含高对称点集合（T^2）$^{\mathbb{Z}/3}\simeq$ [3] (53)上的置换群 Sym(3)（另见图7），并将其作为子群：

$$\begin{array}{ccc}&&\mathrm{Mod}^{\mathbb{Z}/3}\\&\nearrow&\downarrow\\\mathrm{Sym}(3)&\xrightarrow{\sim}&\mathrm{Aut}\big((T^2)^{\mathbb{Z}/3}\big)\,.\end{array}\tag{62}$$

也就是说，根据（9），这意味着 Sym(3) 也是协变化能带单值化群的一个子群，而有能隙基态必须是该群的线性表示。

事实上，我们还可以进一步指出：对于以下形式的脆弱 p3 晶体拓扑相（54）

$$(0,\mathrm{cnst}_{\mathrm{n/s}})\ \in\ 3\mathbb{Z}\times[4]$$

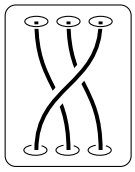
（其中三个高对称点共同映射到系数 2-球面上的同一个固定极点，参见图 5），能带单值化群包含框架对称群 $\mathbb{Z}^3\rtimes$Sym(3) 中总框架数为 3 的倍数的子群。这是 [12, 例 359] 的结果：“框架”见证了一种“拓扑自旋”可观测量，它现在与每个高对称点相关联；众所周知，分数量子霍尔效应任意子也具有这种可观测量（参见 [12, (2)]）。而 Sym(3) 本身则是三个高对称点彼此绕行这一假想运动所对应的辫群的一个商群。

根据（9），这意味着此类系统的有能隙基态在三条任意子股线上按辫群 Br(3) Sym(3)的“旁统计”形式 Sym(3) 变换！（参见 [12,注 3。60]）

这一点值得注意：

命题 C.2 ([12,命题 3。61])。 **Sym(3)** 的酉不可约表示2 由一对量子门生成

图 8. p3 晶体二维双能带系统的脆弱能带拓扑协变化空间中的单值化，反映了实现三个高对称点置换的微分同胚等变性。其中，循环置换表现为（拓扑保护的） *quantum rotation gates* 2 （参见命题 C.）。



（参见 [89, §1。3]）称为 Pauli Z门 Z，以及旋转门 R_y（$8\pi/3$），后者对应于缺陷任意子的循环置换（参见图 8）。

因此，若能在实验上操控这种可存在于 p3- 晶体分数量子反常霍尔系统中的拓扑序，便可为此类量子门实现拓扑保护（参见 [39,§3]）。

IV. 结论与展望

首先，我们对脆弱拓扑相的分类以及晶体双能带系统中的拓扑序进行了全面的理论重新评估，并着重指出了此前可能未受充分重视的以下事实：

(i) 脆弱拓扑相由布里渊环面的等变二阶上同伦分类，即由能带拓扑的协变化空间的连通分支分类；
(ii)可能的拓扑序则反映在该能带拓扑协变化空间的基本单值化群的线性表示中。

这两方面此前都尚未得到真正的分析。随后，我们采用了等变同伦论中的工具——这些工具此前可能未在固体物理学文献中得到应有的重视——来系统地计算这些效应。

最后，我们重点介绍了在特殊晶体对称性选择下，这些计算所得的值得注意的结果：

(i) 等变拓扑相通常由以下一对数据标记：(a) 一个可被点群阶数整除的陈数；(b) 一个有限集中的元素，该有限集描述了高对称点映射到系数 2-球面中不动点的各种方式。

(ii)当所有对称性都被破坏时，脆弱能带拓扑空间中的绝热单值化恰好反映了阿贝尔

环面上的分数量子霍尔任意子——此处：局域化的位置不是位置空间，而是晶体动量的布里渊环面。

(iii) 在晶体对称性的存在下，这些“孤子型”任意子态会消失，但与高对称点相关的“缺陷型”任意子态则会出现；例如，在 p3 空间群的情形下，它们表现出非阿贝尔旁统计。这些态可用于设计量子门的拓扑保护，例如实际应用中至关重要的旋转门。

所有这些理论结果似乎都是新的。因此，它们或许有助于指导在量子材料中寻找任意子拓扑序的实验，例如尤其是在分数量子反常霍尔系统中，正如近期在 [11]中所强调的。

数据可用性声明

本研究纯属理论研究，因此未创建或分析任何新数据。

致谢

我们感谢*QMATH16*（慕尼黑，2025年9月）的组织者；本文报告的研究结果首次在此次会议上发表。

本研究得到了 *Tamkeen UAE* 通过纽约大学阿布扎比分校研究院CG008项目的支持。

[1] 补充文件，《二维环面的等变二阶上同伦》（2025），准备中。[2] Y. Ando 和 L. Fu，《拓扑晶体绝缘体与拓扑超导体：从概念到材料》，《凝聚态物理年度评论》6，361（2015），arXiv:1501.00531。[3] A. S. Sergeev，《拓扑绝缘体与向量丛的几何》，SciPost 物理讲义 10.21468/scipostphyslectnotes.67（2023），arXiv:2011.05004 [cond-mat.mes-hall]。[4] S. Gupta 和 A. Saxena 编，*The Role of Topology in Materials* 2018（施普林格国际出版，）。[5] K. L. Wang、Y. Wu、C. Eckberg、G. Yin 和 Q. Pan，拓扑量子材料，《MRS通报》45，373（2020）。[6]H. C. Po、H. Watanabe 和 A. Vishwanath，《脆弱拓扑与 Wannier 障碍》，《物理评论快报》121，126402（2018），arXiv:1709.06551 [cond- mat.str-el]。[7] H. C. Po、L. Zou、T. Senthil 和 A. Vishwanath，魔角双层石墨烯的忠实紧束缚模型与脆弱拓扑，《物理评论B辑》99，195455（2019）。[8] A. Bouhon、T. Bzdu˘sek 和 R.-J. Slager，超越对称性指标研究脆弱拓扑的几何方法，《物理评论B》**102**, 115135 2020 2005 02044（），[ ] arXiv: 。cond-mat.str-el。[9] P. W. Brouwer 和 V. Dwivedi，能带结构的同伦分类：稳定、脆弱、精细及稳定表示保护的拓扑，《物理评论B辑》108，155137 2023 2306 13713（），arXiv: 。v2 [cond-mat.mes-hall]。[10] G. C. Thiang，拓扑半金属，载于 *Encyclope dia of Mathematical Physics* 2025 66 77,（爱思唯尔，），第–页 arXiv:2407.12692 [math-ph]。[11] H. Sati 和 U. Schreiber，《辨识分数量子反常霍尔系统中的任意子拓扑序》，《应用物理快报》（2025），即将发表，arXiv:2507.00138 [cond-mat.str-el]。[12] H. Sati 和 U. Schreiber，《通过奇异磁通量子的代数拓扑研究分数量子霍尔任意子》（2025），arXiv:2505.22144 [cond-mat.mes-hall]。[13] H. Sati 和 U. Schreiber，《上同伦中通过磁通量子化构造任意子的非拉格朗日方法》，期刊《物理学：会议系列》3152, 012024（2025），第二十九届可积系统与量子对称国际会议，arXiv:2509.02577 [math-ph]。[14] S.-T. Hu，*Homotopy Theory*，《纯粹与应用数学》第8卷（学术出版社，纽约和伦敦，1959）。[15] D. Fiorenza、H. Sati 和 U. Schreiber，*The Character Map in Non-abelian Cohomology: Twisted, Differential*，（世界科学出版社，2023）arXiv:2009.11909 [math.AT]。[16] L. Stehouwer、J. de Boer、J. Kruthoff 和 H. Posthuma，通过 K理论对晶体拓扑绝缘体进行分类，《理论与数学物理进展》25, 723（2021），arXiv:1811.02592 [hep-th]。[17] H. Sati 和 U. Schreiber，扭曲等变微分（TED） K理论中的任意子拓扑序，《数学物理评论》35, 2350001（2022），arXiv:2206.13563 [hep-th]。[18] G. E. Bredon，*Introduction to Compact Transformation Groups* 46，《纯粹与应用数学》，第[19] 卷（学术出版社，1972）。*Transformation Groups* T. tom Dieck，[20]（德格鲁伊特出版社，1987）。*Equivariant Principal ∞-Bundles*（剑桥大学出版社，2025），即将出版，arXiv:2112.13654 [math.AT]。[21] H. Sati 和 U. Schreiber，*Geometric Orbifold Cohomology* 2026,（CRC出版社，即将出版）。[22] H. Sati 和 U. Schreiber，等变上同伦蕴含定向平面膜蝌蚪消除，《几何与物理杂志》156, 103775（2020），arXiv:1909.12277 [hep-th]。[23] S. Burton、H. Sati 和 U. Schreiber，分数D膜荷提升至等变上同伦论，《几何与物理杂志》**161**, 104034 2021 1812 09679 [ ]（），arXiv: . math.RT .[24] T. Neupert、L. Santos、C. Chamon 和 C. Mudry，零磁场下的分数量子霍尔态，《物理评论快报》106, 236804（2011），arXiv:1012.4723 [cond-mat.mes-hall]。[25] S. A. Parameswaran、R. Roy 和 S. L. Sondhi，拓扑平带中的分数量子霍尔物理，

《物理学报告》14, 816（2013），拓扑绝缘体 / 拓扑绝缘体, arXiv:1302.6606 [cond-mat.str-el]。[26] R. Roy，分数量子拓扑绝缘体的能带几何，《物理评论B》90, 165139（2014），arXiv:1208.2055 [cond-mat.str-el]。[27] N. Regnault 和 B. A. Bernevig，分数陈绝缘体，《物理评论X》 **1**, 021014 2011 1105 4867（），[ ] arXiv: . cond-mat.str-el .[28] J. Cai、E. Anderson、C. Wang、X. Zhang、X. Liu、W. Holtzmann、Y. Zhang、F. Fan、T. Taniguchi、K. Watanabe、Y. Ran、T. Cao、L. Fu、D. Xiao、W. Yao 和 X. Xu，扭转 $MoTe_2$, 中的分数量子反常霍尔态特征，《自然》622, 63（2023）。[29] Y. Zeng、Z. Xia、K. Kang、J. Zhu、P. Kn¨uppel、C. Vaswani、K. Watanabe、T. Taniguchi、K. F. Mak 和 J. Shan，莫尔 MoTe´中分数陈绝缘体的热力学证据$_2$, ，《自然》622, 69（2023）。[30] H. Park、J. Cai、E. Anderson、Y. Zhang、J. Zhu、X. Liu、C. Wang、W. Holtzmann、C. Hu、Z. Liu、T. Taniguchi、K. Watanabe、J.-H. Chu、T. Cao、L. Fu、W. Yao、C.-Z. Chang、D. Cobden、D. Xiao 和 X. Xu，分数量子化反常霍尔效应的观测，《自然》622, 74（2023），arXiv:2308.02657 [cond-mat.mes-hall]。[31] Z. Lu、T. Han、Y. Yao、A. P. Reddy、J. Yang、J. Seo、K. Watanabe、T. Taniguchi、L. Fu 和 L. Ju，多层石墨烯中的分数量子反常霍尔效应，《自然》626, 759（2024）。[32] H. Zhang、J. Lu、K. Liu、Y. Wang、F. Wang、S. Wu、W. Chen、X. Cai、K. Watanabe、T. Taniguchi、J. Avila、P. Dudin、M. D. Watson、A. Louat、T. Sato、P. Yu、W. Duan、Z. Song、G. Chen 和 S. Zhou，菱方石墨烯中莫尔增强的平带，《自然·材料》10.1038/s41563-025-02416-2（2025），arXiv:2504.06251 [cond-mat.mes-hall]。[33] R. Kobayashi、Y. Zhang、N. Manjunath 和 M. Barkeshli，分数陈绝缘体的晶体不变量，《物理评论B》10.1103/8bpm-qbzp（2025），arXiv:2405.17431 [cond-mat.str-el]。[34] Z. D. Shi 和 T. Senthil，无序分数量子反常霍尔绝缘体中的任意子离域化转变，《美国国家科学院院刊》 **122**, 2520608122 2025 2506 02128 e（），[ ] arXiv: . cond-mat.str-el .[35] Y.-M. Lu 和 Y. Ran，对称性保护的分数陈绝缘体和分数量子拓扑绝缘体，《物理评论B》85, 165134（2012），arXiv:1109.0226。[36] nLab，量子绝热定理（2026）。[37] D. Arovas、J. R. Schrieffer 和 F. Wilczek，分数统计与量子霍尔效应，《物理评论快报》53, 722（1984）。[38] M. Cheng、V. Galitski 和 S. Das Sarma，拓扑超导体中非阿贝尔任意子编织的非绝热效应，《物理评论B》84, 104529（2011），arXiv:1106.2549 [cond-mat.supr-con]。[39] D. J. Myers、H. Sati 和 U. Schreiber，同伦类型论中的拓扑量子门，《数学物理通讯》 **405**, 1 2024 2303 02382 [ ]（），arXiv: . hep-th .[40] H. Sati 和 U. Schreiber，截面的纠缠：纠缠且参数化量子信息的推出（2023），arXiv:2309.07245 [quant-ph]。[41] nLab，拓扑序（2026）。[42] S. Kallel、H. Sati 和 U. Schreiber，通过高阶上同伦构造高维环面任意子（2026）

ration.[43] E. Witten，拓扑量子场论，《数学物理通讯》117，353（1988）。[44] S. H. Simon，*Topological Quantum*（牛津大学出版社，牛津，2023）。[45] F. Dul，从栈的视角看广义协变性，《数学物理快报》113，10.1007/s11005-023-01653-3（2023），arXiv:2112.15473 [math-ph]。[46] nLab，微分同胚群（2026）。[47] S. Cai 和 H. Li，等变映射类群与轨道辫群，《中国数学年刊》B辑，43，485（2022），arXiv:2011.05247 [math.GT]。[48] T. D. Stanescu，*Introduction to Topological Quantum Matter & Quantum Computation* 2020（CRC出版社，）。[49] M. Reed 和 B. Simon，*IV: Analysis of Operators*，《现代数学物理方法》第4卷（学术出版社，纽约，1978年）。[50] H. Sati 和 U. Schreiber，磁通量子化，载于 *Encyclopedia of Mathematical Physics* 4 2025，第卷（爱思唯尔，）第281–324页，arXiv:2312.12517 [hep-th]。[51] M. Atiyah，代数拓扑与希尔伯特空间中的算子，载于 *Lectures in Modern Analysis and Applications I* 103，《数学讲义》，第卷（施普林格，1969年），第101–121页。[52] H. Sati 和 U. Schreiber，《测量拓扑相与膜电荷的 Orbi-K理论定向》（2025），作为专著《几何轨形上同调》的第一、二部分出版，CRC出版社（2026年，即将出版），arXiv:2511.12720 [hep-th]。[53] T. Neupert 和 F. Schindler，拓扑晶体绝缘体讲义，载于 *Topological Matter*，《施普林格固态科学丛书》，第190卷（施普林格，2018年），arXiv:1810.03484 [cond-mat.mes-hall]。[54] nLab，对称性保护拓扑相（2026）。[55] nLab，等变同伦论（2025）。[56] T. Neupert、L. Santos、C. Chamon 和 C. Mudry，零磁场下的分数量子霍尔态，《物理评论快报》 **106**, 236804 2011 1012 4723（），[ ] arXiv: 。cond-mat.str-el 。[57] nLab，量子霍尔效应（2026）。[58] M.-C. Chang 和 Q. Niu，贝里相位、超轨道与霍夫施塔特谱，《物理评论快报》75，1348 1995（），arXiv:cond-mat/9505021 [cond-mat]。[59] M.-C. Chang 和 Q. Niu，贝里相位、超轨道与霍夫施塔特谱：磁性布洛赫能带中的半经典动力学，《物理评论B》53，7010（1996）。[60] G. Sundaram 和 Q. Niu，缓慢微扰晶体中的波包动力学：梯度修正与贝里相位效应，《物理评论B》59，14915（1999），arXiv:cond-mat/9908003 [cond-mat]。[61] D. Xiao、J. Shi 和 Q. Niu，固体中电子态密度的贝里相位修正，《物理评论快报》95，137204（2005），arXiv:cond-mat/0502340 [cond-mat.mes-hall]。[62] N. A. Sinitsyn，反常霍尔效应的半经典理论，《物理学杂志：凝聚态》20，023201 2007 0712（），arXiv: 。0183 [cond-mat.mes-hall]。[63] D. Xiao、M.-C. Chang 和 Q. Niu，贝里相位效应对电子性质的影响，《现代物理学评论》82，1959 2010 0907（），arXiv: 。2021 [cond-mat.mes-hall]。[64] Y. D. Chong，贝里相位与布洛赫波包的反常速度，《物理评论B》81，052303（2010）。

[65]M. A. Stephanov 和 Y. Yin，手征动理学理论，《物理评论快报》109，162001（2012），arXiv:1207.0747 [hep-ph]。[66] J. Nakamura、S. Liang、G. C. Gardner 和 M. J. Manfra，任意子编织统计的直接观测，《自然·物理》16，931（2020），arXiv:2006.14115 [cond-mat.mes-hall]。[67] A. Veillon、C. Piquard、P. Glidic、Y. Sato、A. Aas- sime、A. Cavanna、Y. Jin、U. Gennser、A. Anthore 和 F. Pierre，分数量子霍尔任意子标度维数的观测，《自然》632，517（2024），arXiv:2401.18044 [cond-mat.mes-hall]。[68] S. A. Parameswaran、R. Roy 和 S. L. Sondhi，拓扑平带中的分数量子霍尔物理，《物理学报告》14，816（2013），arXiv:1302.6606 [cond-mat.str-el]。[69] U. Schreiber 和 K. Waldorf，平行移动与函子，《同伦及相关结构杂志》4，187（2009），arXiv:0705.0452 [math.DG]。[70] S. Kallel，点的构型空间：使用指南，载于 *Encyclopedia of Mathematical Physics*（爱思唯尔，2025年），第98–135页，arXiv:2407.11092 [math-ph]。[71] nLab，辫群（2026）。[72] W. P. Su，量子霍尔效应中分数电荷激发的统计性质，《物理评论B辑》34，1031（1986）。[73] M. H. Freedman、A. Y. Kitaev、M. J. Larsen 和 Z. Wang，拓扑量子计算，《美国数学会通报》40，31（2003），arXiv:quant-ph/0101025 [quant-ph]。[74] C. Nayak、S. H. Simon、A. Stern、M. Freedman 和 S. Das Sarma，非阿贝尔任意子与拓扑量子计算，《现代物理学评论》80，1083 2008 0707（），arXiv: 。1889 [cond-mat.str-el]。[75] C. Cesare、A. J. Landahl、D. Bacon、S. T. Flammia 和 A. Neels，绝热拓扑量子计算，《物理评论A辑》**92**, 012336 2015 1406 2690 （），[ ] arXiv: 。quant-ph 。[76] nLab，《克尼日尼克-扎莫洛德奇科夫方程》（2026年）。[77] E. Fradkin, *Field Theories of Condensed Matter Physics*（剑桥大学出版社，2013年）。[78] D. Tong, *Lectures on the Quantum Hall Effect*（2016年），www.damtp.cam.ac.uk/user/tong/qhe.html。[79] 阿贝尔陈-西蒙斯理论（2026年）。[80] H. L. Stormer，《分数量子霍尔效应》诺贝尔讲座，《现代物理评论》71，875（1999年）。[81] V. L. Hansen，关于从闭曲面到二维球面的映射空间，《斯堪的纳维亚数学》35，149（1974年）。[82] L. L. Larmore 和 E. Thomas，关于截面空间的基本群，《斯堪的纳维亚数学》47，232（1980年）。[83] S. Kallel，《构形空间与射影空间中曲线的拓扑》，载于 *Topology*、 *Geometry*、 *andAlgebra: Interactions and New Directions*，《当代数学》第279卷，M. Ando、G. Carlsson、R. L. Cohen、D. M. Davis、J. R. Harper 和 W. S. Wilson 编（美国数学会，2001年），第151–175页，arXiv:math-ph/0003010 [math.ph]。[84] nLab，拓扑量子场论（2025年）。[85] H. Sati 和 U. Schreiber，高阶规范场的完备拓扑量子化（ 2025 2512 12431 ），[ ] arXiv: . hep-th .[86] A. Hatcher， *Algebraic Topology*（剑桥大学出版社，2002年）。[87] G. W. Whitehead, *Elements of Homotopy Theory*，《研究生数学丛书》第61卷（施普林格，纽约，1978年）。[88] G. W. Whitehead，《同伦群中的乘积》，《数学年刊》47，460（1946年）。[89] M. A. Nielsen 和 I. L. Chuang， *Quantum Computation and Quantum Information*（剑桥大学出版社，剑桥，2010年）。