arXiv:2512.24751v1 [math.OA] 31 Dec 2025

可 amenable 群的保态作用的非交换极大不等式

PANCHUGOPAL BIKRAM、HARIHARAN G、SUDIPTA KUNDU 和 DIPTESH SAHA

Abstract. 本文针对可 amenable、局部紧、第二可数群在带迹非交换L^1-空间上的保态作用，建立了极大不等式并推导出遍历定理。进一步地，结合 Neveu 分解，我们得到了可 amen 群作用的随机遍历定理。

1. Introduction

在本文中，我们研究保持给定态的可 amenable 群作用所对应的非交换极大遍历不等式和逐点遍历定理。经典测度论框架下遍历定理的研究始于 20 世纪 30 年代，源自 Birkhoff 和冯·诺依曼的开创性贡献。此后，这一理论得到了广泛发展。这些结果的非交换对应理论始于 Lance 的开创性工作（[Lan76]），他为赋有忠实正规态的冯·诺伊曼代数上单个保态自同构所对应的平均建立了逐点遍历定理。随后，相关推广由 K¨ummerer、Conze、Dang-Ngoc 等人提出（参见 [K78], [CDN78], 及其中的参考文献）。

随着时间推移，人们逐渐认识到，证明遍历定理的经典路径是先推导出适当的极大不等式，再辅以恰当的 Banach 原理。然而，在非交换框架下，极大不等式这一步尤为复杂，且在技术上颇具挑战。

在两篇奠基性论文中 [Yea77，Yea80], Yeadon 针对作用于半有限冯·诺伊曼代数预对偶上的正、次迹、次幺映射的作用，发展了极大遍历定理，并由此确立了相应的点态遍历定理。随后，Junge 和 Xu [JX07], 通过证明 L^p空间上的非交换 Dunford–Schwartz 极大不等式，运用复杂的插值方法，进一步推进了这一研究方向。

与这些进展同步，在经典测度空间上的群作用遍历定理方面也取得了重大进展（参见 [AAB+10，Cal53]）。尤其与本文讨论相关的是 Lindenstrauss 的工作 [Lin01], ，该工作为温和 Følner 序列建立了点态遍历定理，从而将 Birkhoff 的经典定理推广到了第二可数可 amenable 群的作用。

2020 *Mathematics Subject Classification.* 主要分类：46L53、46L55；次要分类：37A55、46L40。
Key words and phrases. 极大遍历定理，点态遍历定理，冯·诺伊曼代数。

Hong、Liao 和 Wang 在 [HLW21] 中推动了非交换理论的重大进展。在他们的工作中，作者为满足倍增条件的局部紧群度量测度空间的作用以及呈现多项式增长的紧生成群，建立了一系列非交换 L^p-空间上的极大不等式。随后，他们利用这些不等式推导出了相应的点态遍历定理。之后，[CW22] 将这些结果推广到一般可 amenable 群；最近，[CXZ25] 又将其推广到幺模可 amenable 群。

值得强调的是，上述两项结果都只涉及保持忠实正规半有限迹的作用。相比之下，Junge 和 Xu [JX07] 研究了与离散群 L^p-空间（$1 < p < \infty$）上的保态作用以及半群 $\mathbb{Z}$ 的保态作用相关的 Haagerup $\mathbb{R}_+$上的遍历平均极大不等式。此类保态作用的相应端点情形 $p = 1$一直悬而未决，直到 [BS23b] 和[BS23a]中的最新进展。

在 [BS23b], 中，作者针对局部紧且具有多项式增长的群在冯·诺伊曼代数上的作用，建立了非交换 L^1-空间中的极大不等式和点态遍历定理；这些作用在忠实正规态下保态。他们的方法主要依赖于 [HLW21，命题 4 中的一个不等式。8], 该不等式使得群上的相关遍历平均可以由一个相应马尔可夫算子的遍历平均所控制。

在 [BS23a], 中，作者采用类似的策略，推导出了针对 $\mathbb{Z}_+^d$ 和 $\mathbb{R}_+^d$作用的可比极大不等式。此外，在 [BS26], 中，作者利用 Calder´on 传递原理的适当类比，以及非交换鞅的极大不等式，证明了针对满足倍增条件的群度量测度空间作用的极大不等式。

本文借助 Cadilhac 和 Wang 在 [BS26], 中得到的极大不等式，为可 amenable 群的保态作用建立了类似的极大不等式；该不等式由 Cadilhac 和 Wang 在 [CW22], 中于迹态框架下推导得出。

设 G是一个可 amenable、局部紧、第二可数群，配备右不变 Haar 测度 μ以及一个可容许的 Følner 序列（F_n）。

设 $\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺依曼代数，配备忠实正规迹状态 τ，并设（$\mathcal{M}$，G，α，ρ）是一个核（参见定义3.10）。本文的主要结果之一给出了以下极大不等式和遍历定理。

定理 1.1。设 $\phi \in \mathcal{M}_*$，则考虑平均 $(A_k(\phi))_{k\in\mathbb{N}}$，其中

$$A_k(\phi)(x) := \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \phi(\alpha_{s^{-1}}(x))\, d\mu(s), \quad x \in \mathcal{M}.$$

则有以下结论：

(1) 此外，对所有 $j \in \mathbb{N}$，令 $\phi_j \in \mathcal{M}_{*s}$ 满足 $\|\phi_j\| \leq \frac{1}{4^{s_j}}$。固定 $\upsilon > 0$。那么对所有 $n \in \mathbb{N}$，存在一个由正实数 $^{j\in\mathbb{N}}$ 和投影 $\{p_{n,j}^{\upsilon} : j \in \mathbb{N}\}$ 组成的序列 $(\gamma_j(n))$，其中 $\mathcal{M}$，使得：

(a) $\lim_{j\to\infty}{}^{\gamma_j}(n) = 0$，对 $n \in \mathbb{N}$ 一致。
(b) $\rho(1 - p_{n,\ j}^{\upsilon}) \leq (1+\upsilon)\gamma_j(n) + \upsilon$。
(c) 对所有 $j \in \mathbb{N}$,

$$A_k(\phi_j)(x) \leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x), \quad \textit{for all } x \in p_{n,j}^{\upsilon}\mathcal{M}_+ p_{n,j}^{\upsilon} \textit{ and } k \in [n]. \tag{1.1}$$

其中，$[n] = \{1, 2..., n\}$。常数 c 仅依赖于群 G。

(2) 此外，我们假设 G 是幺模的。那么，对于任意 $\phi \in \mathcal{M}_*$，存在一个元素 $\bar{\phi} \in \mathcal{M}_*$，使得对每个 $\varepsilon > 0$，都可以找到一个投影 $e \in \mathcal{M}$，满足 $\tau(1-e) < \varepsilon$，并且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in e\mathcal{M}_+ e \\ x\neq 0}} \frac{\left|(A_n(\phi) - \bar{\phi})(x)\right|}{\tau(x)} = 0.$$

我们注意到，[BS26，推论 3.18], 中得到了一个类似的极大不等式，该结果是在群度量测度空间上的保态作用情形下证明的。在该设定中，作者推导出如下估计

$$|A_k(\phi_j)(x)| \leq C\delta \|\phi_j\| \|x\| + \frac{C}{2^j}\rho(x),$$

对所有 $x \in q^{\delta,\ n^{\upsilon},\ j}\mathcal{M}_+ q^{\delta,\ n^{\upsilon},\ j}$ 以及所有 $k \in [n]$。

相比之下，在当前的极大不等式中，具体而言，在等式（1.1）中，并未出现额外的误差项 $C\delta\|\phi_j\|\|x\|$ 。相反，我们得到了更精确的界

$$A_k(\phi_j)(x) \leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x), \qquad \text{for all } x \in q_{j,n}^{\upsilon}\mathcal{M}_+ q_{j,n}^{\upsilon} \text{ and } k \in [n],$$

其中，辅助序列（s_j）自然地出现在从迹过渡到态的过程中。

最后，我们概述本文的结构。在下一节中，我们回顾冯·诺伊曼代数理论及其相关线性泛函的基本概念。我们还将引入非交换 L^1-空间，讨论双边几乎一致（b.a.u.）拓扑，并在本节最后给出非交换动力系统及相应预对偶作用的定义。

第3 节致力于证明定理1.1的第（1）部分。在第4节中，我们沿可容许 Følner 序列建立球平均的点态遍历定理，从而证明定理1.1的第（2）部分。此外，我们还推导出适用于这一情形的相应 Banach 原理。

最后，在最后一节中，我们将第 4 节中得到的结果与 [BS23b] 中的 Neveu 分解定理相结合，从而在这一框架下得到一个随机遍历定理。

2. 预备知识

在本文中，设 $\mathcal{M}$ 表示作用于可分希尔伯特空间 $\mathcal{H}$ 上的冯·诺伊曼代数。从 $\mathcal{B}(\mathcal{H})$ 继承的算子范数记作 $\|\cdot\|_\infty$；若无歧义，则简称为 $\|\cdot\|$。$\mathcal{M}$ 的交换子记作 $\mathcal{M}'$。此外，我们用 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$ 表示包含于 $\mathcal{M}$ 中的投影的集合。

$\mathcal{M}$ 的预对偶记为 $\mathcal{M}_*$，它是巴拿赫对偶 $\mathcal{M}^*$ 中的闭线性子空间，恰由 $\mathcal{M}$ 上超弱连续的线性泛函组成。若泛函 $\phi \in \mathcal{M}^*$ 满足对每个 $x \in \mathcal{M}$ 都有 $\phi(x^*x) \geq 0$，则称其为正泛函；若对所有 $x \in \mathcal{M}$ 都有 $\phi(x) = \phi(x^*)$，则称其为自伴。我们分别用 $\mathcal{M}_{*+}$ 和 $\mathcal{M}_{*s}$ 表示 $\mathcal{M}_*$ 中正元素与自伴元素构成的锥。

2.1. 非交换 L^1-空间。设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是一个配备忠实、正规、半有限（f.n.s.）迹 τ 的冯·诺伊曼代数。一个（可能无界的）算子

$$X : \mathcal{D}(X) \subseteq \mathcal{H} \to \mathcal{H},$$

其定义稠密、闭，且隶属于 $\mathcal{M}$，即对每个酉算子$u' \in \mathcal{M}'$满足 $u'^* X u' = X$ ——记作 $X \,\eta\, \mathcal{M}$。若算子 X 是 τ-可测的，则对每个$\varepsilon > 0$，存在一个投影 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，使得 $\tau(1-e) < \varepsilon$ 且 $e\mathcal{H} \subseteq \mathcal{D}(X)$。所有隶属于 $\mathcal{M}$ 的 τ-可测算子组成的集合定义为

$$L^0(\mathcal{M}, \tau) := \{\, X \,\eta\, \mathcal{M} : X \text{ is } \tau\text{-measurable} \,\}.$$

空间 $L^0(\mathcal{M}, \tau)$ 在伴随运算、强和 $X + Y := X + Y$以及强积 $X \cdot Y := XY$下构成一个 *-代数，其中 X 表示 X的闭包。详细论述可参见 [SZ19、Hia21]。

$L^0(\mathcal{M}, \tau)$ 上存在几种自然的拓扑。首先值得关注的是测度拓扑，其邻域具有如下形式：

$$X + \mathcal{N}(\varepsilon, \delta), \qquad \varepsilon, \delta > 0,\ X \in L^0(\mathcal{M}, \tau),$$

其中

$$\mathcal{N}(\varepsilon, \delta) := \{\, X \in L^0(\mathcal{M}, \tau) : \exists\, e \in \mathcal{P}(\mathcal{M}) \text{ with } \tau(1-e) < \delta \text{ and } \|eXe\| < \varepsilon \,\}.$$

网 $\{X_i\}_{i \in I}$ 收敛到 X（在测度拓扑中），当且仅当对于每个 ε，$\delta > 0$，存在$i_0 \in I$，使得对于所有 $i \geq i_0$，都可以找到 $e_i \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，满足 $\tau(1-e_i) < \delta$ 并且

$$\| e_i(X_i - X)e_i \| < \varepsilon.$$

根据 [Nel74，定理 1]，空间 $L^0(\mathcal{M}, \tau)$ 在测度拓扑中是完备的。此外，该拓扑可度量化，并使 $\mathcal{M}$ 在 $L^0(\mathcal{M}, \tau)$ 中稠密。

我们关注的第二种拓扑是双侧几乎一致（b.a.u.）拓扑。

定义 2.1。 若网 $\{X_i\}_{i\in I} \subseteq L^0(\mathcal{M},\tau)$ 双侧几乎一致 （b.a.u.）收敛到 $X \in L^0(\mathcal{M},\tau)$，则对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在一个投影 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，使得 $\tau(1-e) < \varepsilon$ 并且

$$\lim_i \| e(X_i - X)e \| = 0.$$

Th以下基本事实归功于 [Lit24，定理 2。2],将在后文使用 y.

定理 2.2。 空间 $L^0(\mathcal{M},\tau)$ 关于双侧几乎一致拓扑是完备的。

我们记录一个简单但有用的观察。

命题 2.3。 设 $\{X_i\}_{i\in I}$和 $\{Y_i\}_{i\in I}$是 $L^0(\mathcal{M},\tau)$ 中的网，使得 $X_i \to X$和 $Y_i \to Y$依测度（分别为双侧几乎一致）收敛。则对每个标量 $c \in \mathbb{C}$，网 $cX_i + Y_i$依测度（分别为双侧几乎一致）收敛到 $cX + Y$。

在 $\mathcal{M}_+$ 上的迹 τ以标准方式扩张到 $L^0(\mathcal{M},\ \tau)_+$，定义为

$$\tau(X) := \int_0^\infty \lambda \, d\tau(e_\lambda),$$

其中， $X = \int_0^\infty \lambda \, de_\lambda$是 X的谱分解。相应的非交换 L^1空间定义为

$$L^1(\mathcal{M},\tau) := \{\, X \in L^0(\mathcal{M},\tau) : \tau(|X|) < \infty \,\},$$

其范数为 $\|X\|_1 \ := \ = \tau(|X|)$。以下性质见于 [Hia21第 4], 章，将在下文中反复用到。

定理 2.4。 (1) $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 在 $\|\cdot\|_1$下是一个巴拿赫空间。

(2) 若 $X \in L^1(\mathcal{M},\tau)$ 且 $y \in \mathcal{M}$，则 Xy和 yX均属于 $L^1(\mathcal{M},\tau)$，并且 $\tau(Xy) = \tau(yX)$。

(3) 典范识别

$$\phi \in \mathcal{M}_* \quad \longleftrightarrow \quad X \in L^1(\mathcal{M},\tau), \quad \phi(x) = \tau(Xx) \ \ (x \in \mathcal{M})$$

de确定义一个从 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 到 $\mathcal{M}_*$上的满射线性等距映射，它保持正性 .

2.2. **非交换动力系统**。 设 G 是一个局部紧、第二可数的 Hausdorff 群，并配备右不变 Haar 测度 μ。Følner序列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 G 的一个可测子集序列，满足

$$0 < \mu(F_n) < \infty \quad \text{for all } n \in \mathbb{N},$$

并且对每个 $g \in G$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu\big(F_n g \triangle F_n\big)}{\mu(F_n)} = 0,$$

其中 $\triangle$ 表示对称差。

在本文中，我们进一步假设 G 是一个可 amenable 群，在 G 中具有 Følner序列 (F_n)。此外，对于大多数结果，我们将假设 (F_n) 是一个可容许的 *Følner*

序列 (参见 [CW22]以了解精确定义)。

我们还指出，若 G是一个局部紧、第二可数的可 amenable 群，那么每个 Følner序列都包含一个可容许的 Følner 子序列；详情请参见 [CW22] 。

定义 2.5. 设 $(E, \|\cdot\|)$ 为实有序巴拿赫空间。则一个非交换动力系统是一个三元组 (E, G, γ)，其中 γ: $G \to \mathcal{B}(E)$ 是一个映射，满足对所有 $s, t \in G$，均有 $\gamma_s \circ \gamma_t = \gamma_{st}$，且满足以下条件:

(1) 对每个 $a \in E$，轨道映射 $s \mapsto \gamma_s(a)$ 在 G 上连续，其中 E 配备范数拓扑（在 $E = \mathcal{M}$ 的情况下则配备 w^*-拓扑）；(2) 算子一致有界，即 $\sup_{s\in G} \|\gamma_s\| < \infty$；(3) 保持正性：若 $a \geq 0$, 则对所有 $s \in G$, $\gamma_s(a) \geq 0$ 。

我们进一步假设，对于所有 $s \in G$，若 $E = \mathcal{M}$, γ_s 是 $\mathcal{M}$ 上的 *-自同构。
设 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实正规半有限迹 τ 的冯·诺伊曼代数，并考虑动力系统 $(L^1(\mathcal{M}, \tau)\ G, \gamma)$。由于 $\mathcal{M} = (L^1(\mathcal{M}, \tau))^*$, γ_s 的巴拿赫空间伴随算子记作 γ_s^*，其特征由下式刻画:

$$\tau(\gamma_s^*(x)\, Y) = \tau(x\, \gamma_s(Y)), \qquad x \in \mathcal{M},\ Y \in L^1(\mathcal{M}, \tau). \tag{2.1}$$

类似地，对于非交换动力系统 $(\mathcal{M}, G, \beta)$, β_s 的预对偶算子记作 $\widehat{\beta}_s$，定义如下:

$$\tau(\beta_s(x)\, Y) = \tau(x\, \widehat{\beta}_s(Y)), \qquad x \in \mathcal{M},\ Y \in L^1(\mathcal{M}, \tau). \tag{2.2}$$

特别地，对于每个 $s \in G$，有 $(\beta_s)^* = \beta_s$ 。
现在，设 T: $\mathcal{M} \to \mathcal{M}$ 是一个有界正规算子。其伴随算子 T^*: $\mathcal{M}^* \to \mathcal{M}^*$ 定义如下:

$$T^*(\phi)(x) = \phi(T(x)), \qquad x \in \mathcal{M},\ \phi \in \mathcal{M}^*.$$

若 $\phi \in \mathcal{M}_* \subseteq \mathcal{M}^*$，则 $T^*(\phi)$ 也属于 $\mathcal{M}_*$；因此，限制算子 $T^*|_{\mathcal{M}_*}$: $\mathcal{M}_* \to \mathcal{M}_*$ 充当与 T 相关联的预对偶变换。

为简化记号，我们不区分 T 及其预对偶 $T^*|_{\mathcal{M}_*}$。因此，当$\phi \in \mathcal{M}_*$ 且我们写作 $T(\phi)$ 时，应理解为 T 充当预对偶映射。在此约定下，

$$T(\phi)(x) = \phi(T(x)), \qquad x \in \mathcal{M},\ \phi \in \mathcal{M}_*. \tag{2.3}$$

3. 极大不等式

本节将建立一个关于冯·诺伊曼代数上可底群保态作用的极大不等式。

设 $\mathcal{M}$ 是一个带有有限正规半有限迹 τ 的冯·诺伊曼代数。接着，考虑冯·诺伊曼代数 $\mathcal{N} =: L^\infty(G, \mu) \otimes \mathcal{M}$，并考虑定义在 $\mathcal{N}$ 上的有限正规半有限迹 $\widetilde{\tau}$，其定义为

$$\widetilde{\tau} = \int_G (\cdot) d\mu \otimes \tau$$

注意到 $L^1(\mathcal{N}, \widetilde{\tau})$ 与 $L^1\left(G, L^1(\mathcal{M}, \tau)\right)$ 等同。此外，注意到 $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ 可通过以下映射与 $\mathcal{M}_*$ 等同：

$$L^1(\mathcal{M}, \tau) \ni A \to \tau_A \in \mathcal{M}_*,$$

其中，对于 $x \in \mathcal{M}$，$\tau_A(x) = \tau(Ax)$。这将建立 $L^1(\mathcal{M}, \tau)$ 与 $\mathcal{M}_*$ 之间的等距同构。因此，$L^1\left(G, L^1(\mathcal{M}, \tau)\right)$ 通过以下映射与 $L^1(G, \mathcal{M}_*)$ 等距同构

$$L^1\left(G, L^1(\mathcal{M}, \tau)\right) \ni f \mapsto \tau_f \in L^1(G; \mathcal{M}_*),$$

其中 $\tau_f(s) =: \tau_{f(s)}$。此外，由于 $\mathcal{N} = L^\infty(G, \mu) \otimes \mathcal{M} \cong L^\infty(G; \mathcal{M}) :=$ 是从 G 到 $\mathcal{M}$ 的弱可测本质有界函数空间，我们得到

$$\widetilde{\tau}_f(g) =: \widetilde{\tau}(fg) = \int_G \tau(f(s)g(s)) d\mu(s),$$

其中 $f \in L^1\left(G, L^1(\mathcal{M}, \tau)\right)$ 且 $g \in L^\infty(G; \mathcal{M})$。我们还注意到 $\widetilde{\tau}(g) = \int_G \tau(g(s)) d\mu(s)$，对于 $g \in L^\infty(G; \mathcal{M})$。设 (F_n) 是 G 中的一个 Følner序列，且 $f \in L^1(G) \otimes M_*$。于是考虑

$$\mathbb{A}_n(f)(s) = \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} f(st) d\mu(t).$$

引理 3.1。设 $f \in L^1(G, \mathcal{M}_*)_+$ 和 $h \in L^1(G; L^1(\mathcal{M}, \tau))_+$ 满足

$$f = \widetilde{\tau}_h,$$

于是可得

$$\mathbb{A}_n(f) = \widetilde{\tau}_{\mathbb{A}_n(h)}, \quad for\ all\ n \in \mathbb{N}.$$

证明。设 $g \in L^\infty(G; \mathcal{M})$ 和 $t \in G$，则注意到 $\rho_t(g) \in L^\infty(G, \mathcal{M})$，其中对所有 $s \in G$，$\rho_t(g)(s) = g(st^{-1})$。由于 $f = \widetilde{\tau}_h$，因此我们有

$$\int_G f(s)(\rho_t(g)(s)) d\mu = \int_G \tau(h(s)\rho_t(g)(s)) d\mu.$$

此外，由于 μ 是右不变 Haar 测度，我们有

$$\int_G f(st)(g(s)) d\mu(s) = \int_G \tau(h(st)(g(s)) d\mu(s)$$

因此，我们观察到

$$\begin{aligned}\int_G \mathbb{A}_n(f)(s)(g(s)) d\mu(s) &= \int_G \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} f(st)(g(s)) d\mu(t) d\mu(s) \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \int_G f(st)(g(s)) d\mu(s) d\mu(t)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \int_G \tau(h(st)(g(s)))d\mu(s)d\mu(t) \\
&= \int_G \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \tau(h(st)(g(s)))d\mu(t)d\mu(s) \\
&= \int_G \tau(\mathbb{A}_n(h)(s)g(s))d\mu(s).
\end{aligned}
$$

至此，证明完成。

□

那么，由算子 $\mathbb{A}_n$ 和权 τ的线性性可知，对所有 $\nu \in L^1(G, \mathcal{M}_*)$，存在 $B_\nu \in L^1\left(G;\ L^1(\mathcal{M}, \tau)\right)$，使得

$$\nu(\cdot) = \widetilde{\tau}(B_\nu(\cdot)),\ \text{i.e},\ \nu = \widetilde{\tau}_{B_\nu}.$$

我们还可以得到如下观察。

引理 3.2. 设 e 是 $\mathcal{N}$ 和 $\delta > 0$中的一个投影，则 $\|e(B_\nu)e\| \leq \delta$ 当且仅当

$$|(\nu)(exe)| \leq \delta\widetilde{\tau}(exe),\quad for\ all\ x \in \mathcal{N}_+.$$

证明。假设

$$|(\nu)(exe)| \leq \delta\widetilde{\tau}(exe),\quad \text{for all } x \in \mathcal{N}_+,$$

那么，对所有 $x \in \mathcal{N}_+$，可得

$$
\begin{aligned}
&|(\nu)(exe)| \leq \delta\widetilde{\tau}(exe) \\
\Leftrightarrow &|\widetilde{\tau}((B_\nu)(exe))| \leq \delta\widetilde{\tau}(exe) \\
\Leftrightarrow &|\widetilde{\tau}(e(B_\nu)ex)| \leq \delta\widetilde{\tau}(exe)
\end{aligned}
$$

这等价于 $\|e(B_\nu)e\| \leq \delta$。

□

我们回顾 [CW22] 中关于光滑参照的以下定理。

定理 3.3。 设 (F_n) 是 G 中的一个可容许 ***Følner*** 序列。设 $f \in L^1\left(G, L^1(\mathcal{M}, \tau)\right)$ 和 $\varepsilon > 0$，则存在一个投影 e^ε 属于 $\mathcal{N}$，使得

(1) $\tau(1 - e^\varepsilon) \leq \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}$且(2) $\|e^\varepsilon \mathbb{A}_k(f) e^\varepsilon\| \leq c\varepsilon$，对所有 $k \in \mathbb{N}$.

现在利用定理 3.2，我们立即从定理 3.3推出以下定理。此版本将用于我们的分析。

定理 3.4。 设 K 是 G 中的一个博雷尔集，且 $f \in L^1(G;\ \mathcal{M}_*)$ 满足 $supp(f) \subseteq K$。那么，对给定的$\varepsilon > 0$，存在一个投影，其 e_K^ε 属于 $\mathcal{N}$，且 $supp(e_K^\varepsilon) \in L^\infty(K, \mu) \otimes \mathcal{M}$ 满足以下条件

(1) $\widetilde{\tau}(1_K \otimes 1 - e_K^\varepsilon) \leq \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}$和

(2) $\|\mathbb{A}_k(f)(e_K^\varepsilon x e_K^\varepsilon)\| \leq c\varepsilon\widetilde{\tau}(e_K^\varepsilon x e_K^\varepsilon)$，对所有的 $x \in \mathcal{N}_+$和 $k \in \mathbb{N}$均成立。

证明。 注意到 $f \in L^1(G;\mathcal{M}_*)_+$，因此， $f\colon G \to \mathcal{M}_*$ 是一个可测函数，并且

$$\|f\|_1 = \int_G \|f(s)\|\, d\mu.$$

此外，注意到存在一个 $h \in L^1(G;\ L^1(\mathcal{M},\ \tau))_+$，使得

$$\int_G f(s)g(s)d\mu = \int_G \tau(h(s)g(s))d\mu,\ \text{for all } g \in L^\infty(G;\mathcal{M}),$$

即， $f = \widetilde{\tau}_h$。此外，由此可得 $\|f\|_1 = \int_G \tau(h(s))d\mu$.

由定理 3.3 可知，对于给定的 $h \in L^1(G;\ L^1(\mathcal{M},\ \tau))$ 和 $\varepsilon > 0$，存在一个投影e^ε 属于 $\mathcal{N} = L^\infty(G;\mathcal{M})$，使得

(1) $\widetilde{\tau}(1-e^\varepsilon) \le \frac{\|f\|_1}{\varepsilon}$且 (2) $\|e^\varepsilon \mathbb{A}_k(h)$
$e^\varepsilon\| \le c\varepsilon$，对所有 $k \in \mathbb{N}$.

因此，由于 $\mathbb{A}_k(f) = \widetilde{\tau}_{\mathbb{A}_k(h)}$ (定理 3.1)，所以由定理 3.2可得

$$\mathbb{A}_k(f)(e^\varepsilon x e^\varepsilon) \le c\varepsilon\widetilde{\tau}((e^\varepsilon x e^\varepsilon),\ \text{for all } x \in \mathcal{N}_+ \text{ and } k \in \mathbb{N}. \tag{3.1}$$

进一步，考虑

$$e_K^\varepsilon = (1_K \otimes 1)e^\varepsilon,$$

但 f 或者为记号方便，记作 $e_K^\varepsilon = 1_K e^\varepsilon$。由于 $\mathcal{N} = L^\infty(G,\ \mu) \otimes \mathcal{M}$，我们注意到 t

$$(1_K \otimes 1)e^\varepsilon = e^\varepsilon(1_K \otimes 1)e^\varepsilon.$$

因此可得 e_K^ε 是 $\mathcal{N}$中的一个投影。现在由于 $e_K^\varepsilon \le e^\varepsilon$，因此，定理的最后一部分由方程（3.1）得出。

□

对于 G 的一个可容许 Følner 序列（F_n），我们考虑以下平均:

$$A_n(\phi)(x) = \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \phi(\alpha_{s^{-1}}(x))d\mu(s), \quad \phi \in \mathcal{M}_*, \quad x \in \mathcal{M}, \quad n \in \mathbb{N},$$

注记 3.5。 对于每个 $n \in \mathbb{N}$，我们通过 $\mu_n(E) = \frac{\mu(E \cap F_n)}{\mu(F_n)}$ 在 G 上定义概率测度，其中 E 是 G的可测子集。然后注意到

$$A_n(\phi)(x) = \int_G \phi(\alpha_{s^{-1}}(x))d\mu_n(s), \quad \phi \in \mathcal{M}_*,\ x \in \mathcal{M},\ \text{and}$$
$$\mathbb{A}_n f(s) = \int_G f(st)d\mu_n(t), \quad f \in \mathcal{N}_*,\ s \in G.$$

此外，我们注意到 G 有一个紧集递增序列（K_n），满足对于所有 $n \in \mathbb{N}$，$\lim_{n\to\infty} \mu_n(K_n) = \mu_n(G)$。现在对于 $m \in \mathbb{N}$，我们考虑

$$A_{n,m}(\phi)(x) := \int_G \phi(\alpha_{s^{-1}}(x))\chi_{K_m}(s)d\mu_n(s), \quad \phi \in \mathcal{M}_*,\ x \in \mathcal{M},$$

并且我们注意到

$$A_{n,m}(\phi) \leq A_n(\phi), \text{ and } \lim_m A_{n,m}(\phi)(x) = A_n(\phi)(x) \text{ for all } \phi \in \mathcal{M}_{*+},\ x \in \mathcal{M}_+.$$

对于（$\mathbb{A}_n$），也可以得出类似的观察。因此，不失一般性，我们可以假设 μ_n的支撑是紧的。事实上，我们仅在定理 3.11 的证明中采用这一中间假设，以运用相应的传递原理。

考虑以下集合

$$K_n := \bigcup_{k=1}^{n} F_k \cup \{1^G\}, \tag{3.2}$$

其中 1^G 是 G 的单位元，并注意到 K_n 是 G的紧子集。

现在我们给出以下命题，它建立了作用 A_n 的平均与函数空间的平均之间的关系。对于右 Haar测度和左 Haar测度，此命题均可证明。由于证明已知且十分直接，我们省略证明。

命题 3.6。设 $F \subseteq G$ 为任意紧集，$\phi \in \mathcal{M}_*$ 和$f \in L^1(G, \mathcal{M}_*)$ 由 $f(t) = \chi_{FK_n}(t)\alpha_{t^{-1}}(\phi)$定义。则有

$$\alpha_{s^{-1}} A_k(\phi) = \mathbb{A}_k f(s) \quad \textit{for all } s \in F \textit{ and } k \in [n].$$

其中，$[n]$ 表示集合 $\{1, 2, ..., n\} \subset \mathbb{N}$。

注 3.7。设 $\mathcal{M}$ 是一个冯·诺伊曼代数，配备有限正规迹态 τ和有限正规态ρ。那么我们注意到，存在唯一的 $A \in L^1(M, \tau)_+$，使得 $\rho(\cdot) = \tau(A(\cdot))$。
我们回顾一下，$\mathcal{N} = L^\infty(G, \mu) \otimes \mathcal{M}$ 以及有限正规半有限迹 $\widetilde{\tau}$定义为 $\widetilde{\tau} = \int_G(\cdot) \otimes \tau$。此外，我们考虑 $\mathcal{N}_+$上的有限正规半有限权，定义为 $\widetilde{\rho} = \int_G(\cdot) \otimes \rho$。

现在假设 $X = 1 \otimes A$，并注意到对于所有 $x \in \mathcal{N}$，都有 $\widetilde{\rho}(x) = \widetilde{\tau}(Xx)$。
对于任意 $s > 0$，考虑投影 $q_s := \chi_{(1/s,s)}(A) \in \mathcal{M}$。注意到 $\tau(1 - q_s) \xrightarrow{s\to\infty} 0$。因此，对于每个 $\varepsilon > 0$，都存在 $s_\varepsilon > 0$ 使得 $\tau(1 - q_{s_\varepsilon}) < \varepsilon$。此外，可以推出 $Aq_{s_\varepsilon} \geq \frac{1}{s_\varepsilon} q_{s_\varepsilon}$。

Now 令 E 为 G 中的一个博雷尔集，满足 $\mu(E) < \infty$。然后考虑 $r_s = 1_E \otimes q_s$，于是我们有

$$\frac{\widetilde{\tau}(1_E \otimes 1 - r_s)}{\mu(E)} = \tau(1 - q_s) \xrightarrow{s\to\infty} 0.$$

此外，我们有 $\frac{\widetilde{\tau}(1_E \otimes 1 - r_{s_\varepsilon})}{\mu(E)} < \varepsilon$。由于 $X = 1 \otimes A$，我们还注意到 $Xr_{s_\varepsilon} \geq \frac{1}{s_\varepsilon} r_{s_\varepsilon}$。
因此，对于所有 $0 \neq x \in r_{s_\varepsilon} \mathcal{N}_+ r_{s_\varepsilon}$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\widetilde{\rho}(x)}{\widetilde{\tau}(x)} = \frac{\widetilde{\tau}(Xx)}{\widetilde{\tau}(x)} &= \frac{\widetilde{\tau}(X_{s_\varepsilon} x)}{\widetilde{\tau}(x)} \quad (\text{since } r_{s_\varepsilon} x = x) \\ &\geq \frac{1}{s_\varepsilon} \frac{\widetilde{\tau}(x)}{\widetilde{\tau}(x)} = \frac{1}{s_\varepsilon}. \end{aligned}$$

因此可得

$$\frac{\widetilde{\tau}(x)}{\widetilde{\rho}(x)} \leq s_\varepsilon, \text{ for all } x \in r_{s_\varepsilon}\mathcal{N}_+ r_{s_\varepsilon}$$

Now 对于 $j \in \mathbb{N}$，设 $\varepsilon = \frac{1}{4^j}$，并记 $s_{\frac{1}{4^j}} = s_j$，$r_j =: r_{s_j}$。对于所有 $j \in \mathbb{N}$，我们得到 th at

$$\frac{\tau(1_E \otimes 1 - r_j)}{\mu(E)} < \frac{1}{4^j} \text{ and } \frac{\widetilde{\tau}(x)}{\widetilde{\rho}(x)} \leq s_j, \text{ for all } x \in r_j\mathcal{N}_+ r_j. \tag{3.3}$$

注意到 $s_j \to \infty$，因为 $j \to \infty$。此外，注意到序列 (s_j) 仅取决于 $(\frac{1}{4^j})$ 以及相对于迹 τ 的 ρ 的拉东-尼科迪姆导数算子 A。

我们列出以下引理，并省略证明，因为证明是直接的。

引理 3。 **8.** 设 $f \in L^1(G, \mathcal{M}_*)_+$, e 是 $\mathcal{N} = L^\infty(G; \mathcal{M})$ 中的一个投影，且 $\delta > 0$，使得

$$f(exe) \leq \delta\widetilde{\rho}(exe), \text{ for all } x \in \mathcal{N}_+.$$

于是可得

$$f(s)(e(s)xe(s)) \leq \delta\rho(e(s)xe(s)), \quad \text{for all } x \in \mathcal{M}_+$$

且几乎处处成立（相对于 μ）。

设 $\mathcal{M}$ 是配备忠实正规半有限权 ρ 的冯·诺伊曼代数。我们用 $L^2(\mathcal{M}, \rho)$ 表示相应的 GNS 希尔伯特空间。代数 $\mathcal{M}$ 可具体表示为 $\mathcal{B}(L^2(\mathcal{M}, \rho))$ 的一个子代数。对于任意满足 $\rho(x^*x) < \infty$ 的 $x \in \mathcal{M}$，我们用 $\hat{x}$ 表示其在 $L^2(\mathcal{M}, \rho)$ 中对应的 GNS 向量。GNS 空间上的内积记为 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$，相应范数记为 $\|\cdot\|_\rho$。此外，若 ρ 是一个态，则与 ρ 对应的循环分离向量记为 Ω_ρ。

现在我们陈述关于光滑参照的以下引理，其证明可见于 [BS26]。

引理 3.9。 设 $\mathcal{M}_1$ 和 $\mathcal{M}_2$ 是两个冯·诺伊曼代数。设 φ 是 $\mathcal{M}_1$ 上的忠实正规半有限权，并设 ρ 和 τ 分别是 $\mathcal{M}_2$ 上的忠实正规态和有限正规迹态。假设

$$\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2 \subseteq \mathcal{B}\big(L^2(\mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2, \varphi \otimes \rho)\big).$$

此外，令 S 为任意集合，并设 $\{p_j(s) : j \in \mathbb{N}, s \in S\} \subseteq \mathcal{P}(\mathcal{M}_1)$ 和 $\{x_j(s) : j \in \mathbb{N}, s \in S\} \subseteq \mathcal{M}_1 \otimes \mathcal{M}_2$ 分别为投影族和算子族，使得

$$0 < \varphi(p_j(s)) < \infty \text{ and } 0 \leq x_j(s) \leq p_j(s) \otimes 1, \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}, \ s \in S.$$

定义

$$f_j(s) := \frac{p_j(s) \otimes 1 - x_j(s)}{\varphi(p_j(s))}, \quad \text{for } j \in \mathbb{N}, \ s \in S.$$

那么，以下陈述等价：

(1) $\lim_{j\to\infty}(\varphi \otimes \rho)(f_j(s)) = 0$，关于 $s \in S$ 一致，(2) $\lim_{j\to\infty}(\varphi \otimes \tau)(f_j(s)) = 0$，关于 $s \in S$ 一致。

设 ρ是 $\mathcal{M}$上的忠实正规态，设 τ 是 $\mathcal{M}$上的有限正规迹态。回顾 $L^\infty(G,\mu)\otimes\mathcal{M}$上的以下泛函：

$$\tilde{\rho}(\cdot)=\left(\int_G\otimes\rho\right)(\cdot),\quad\text{and}\quad\tilde{\tau}(\cdot)=\left(\int_G\otimes\tau\right)(\cdot).$$

W我们注意到， $\tilde{\rho}$是一个忠实正规半有限权，而 $\tilde{\tau}$是 $L^\infty(G,\ \mu)\otimes\mathcal{M}$上的忠实正规半有限迹权 .

定义 3.10。 设 G是可 amenable 群，且（$\mathcal{M}$， G， α）是一个非交换动力系统（参见定义 2.5），满足 $\rho\circ\alpha_s=\rho$对所有 $s\in G$均成立，其中 ρ是 $\mathcal{M}$上的忠实正规态。我们称四元组（$\mathcal{M}$， G， α，ρ）为一个核。

定理 3.11。 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺依曼代数，具有忠实正规迹态 τ，并设（$\mathcal{M}$、G、α、ρ）是一个核。对于所有 $j\in\mathbb{N}$，令 $\phi_j\in\mathcal{M}_{*+}$ 满足$\|\phi_j\|\leq\frac{1}{4^{s_j}}$。固定 $\upsilon>0$。那么对于所有$n\in\mathbb{N}$，存在一个由（γ_j（n））$_{j\in\mathbb{N}}$ 个正实数组成的序列以及投影 $\{p^{\upsilon}_{n,j}:\ \ j\in\mathbb{N}\}$ 属于 $\mathcal{M}$，使得：

(1) 极限$_{j\to\infty}{}^{\gamma_j}$（$n$）$=0$，关于 $n\in\mathbb{N}$一致。

(2) $\rho(1-p^{\upsilon}_{n,\ j})\leq(1+\upsilon)\gamma_j(n)+\upsilon$。

(3) 对于所有 $j\in\mathbb{N}$，

$$A_k(\phi_j)(x)\leq\frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x),\quad\textit{for all } x\in p^{\upsilon}_{j,n}\mathcal{M}_+p^{\upsilon}_{j,n}\ \textit{and}\ k\in[n].$$

常数 c 仅取决于群 G。

证明。 令 $n\in\mathbb{N}$， δ， $\upsilon>0$，并固定序列（ϕ_j）$_{j\in\mathbb{N}}\subset\mathcal{M}_{*+}$，其中 $\|\phi_j\|\leq\frac{1}{4^{j}}$对所有 $j\in\mathbb{N}$ 成立。考虑 K_n，如公式 3.2所示，即

$$K_n:=\bigcup_{k=1}^{n}F_k\cup\{1^G\},$$

是 G 的一个紧子集。于是，由于 G 的可和性，选取一个紧集 F，使得

$$\frac{\mu(FK_n)}{\mu(F)}<1+\upsilon.$$

注意到 $\mu(FK_n)<\infty$ 和 $F\subseteq FK_n$，因为 K_n 包含群 G的单位元。考虑紧集 $F\subseteq G$，并对所有 $j\in\mathbb{N}$ 定义，

$$f_j(t):=\chi_{FK_n}(t)\alpha_{t^{-1}}(\phi_j).$$

注意到 $f_j\in\mathcal{N}_{*+}$，并且 $\|f_j\|\leq\mu(KF)\|\phi_j\|$。此外，我们注意到

$$\alpha_{s^{-1}}A_n(\phi_j)=\mathbb{A}_nf_j(s)\quad\text{for all } s\in F.$$

对于$\varepsilon=\frac{1}{2^{s_j}}$以及 $f_j\in L^1(\mathcal{N},\ \tau)$，根据定理 3.4，存在投影 $e_{j,\ n}$属于 $\mathcal{N}$，使得 (1) $\tilde{\tau}(\chi_{FK_n}\otimes1-e_{j,\ n})\leq2^{s_j}\|f_j\|_1\leq{}^{\mu(FK_n)\ 2^{s_j}}$并且

(2) $\mathbb{A}_k(f_j)(e_{j,\ n}xe_{j,\ n})\leq\frac{c}{2^{s_j}}\tilde{\tau}(e_{j,\ n}xe_{j,\ n})$ $k\in[n]$， $x\in\mathcal{N}_+$ 且在 μ 中几乎处处成立。

现在假设 $q_{j,\ n}=e_{j,\ n}\wedge r_j$ 对于 $j\in\mathbb{N}$，其中 (r_j) 是如备注 3.7 中所述的投影序列。那么请注意

$$\begin{aligned}\widetilde{\tau}(\chi_{FK_n}\otimes 1-q_{j,n}) &\leq \widetilde{\tau}(\chi_{FK_n}\otimes 1-e_{j,n})+\widetilde{\tau}(\chi_{FK_n}\otimes 1-r_j)\\ &\leq \frac{\mu(FK_n)}{2^{s_j}}+\frac{\mu(FK_n)}{4^j}=\mu(FK_n)\left(\frac{1}{2^{s_j}}+\frac{1}{4^j}\right)\end{aligned}$$

设 $x\in q_{j,\ n}\mathcal{N}_+q_{j,\ n}$，$j\in\mathbb{N}$ 和 $k\in[n]$，则注意到

$$\begin{aligned}\mathbb{A}_k(f_j)(x)=\mathbb{A}_k(f_j)\left(q_{j,n}xq_{j,n}\right) &\leq \frac{c}{2^{s_j}}\tau(e_{j,n}xe_{j,n})\\ &\leq \frac{c}{2^{s_j}}\widetilde{\tau}(x)\\ &= \frac{c}{2^{s_j}}\widetilde{\rho}(x)\frac{\widetilde{\tau}(x)}{\widetilde{\rho}(x)}\\ &\leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\widetilde{\rho}(x)\ (\text{see Eq.3.3}),\end{aligned}$$

因此，由定理3.8进一步可得

$$\mathbb{A}_k(f_j)(s)(q_{j,n}(s)xq_{j,n}(s))\leq\frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(q_{j,n}(s)xq_{j,n}(s)),\quad\text{for all } x\in\mathcal{M}_+ \text{ and } k\in[n],$$

几乎处处 μ 属于 $s\in FK_n$。由于 $F\subseteq FK_n$，存在一个博雷尔集 F_μ，满足 $\mu(F\setminus F_\mu)=0$，且对所有 $s\in F_\mu$，有

$$\mathbb{A}_k(f_j)(s)(q_{j,n}(s)xq_{j,n}(s))\leq\frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(q_{j,n}(s)xq_{j,n}(s)),\quad\text{for all } x\in\mathcal{M}_+ \text{ and } k\in[n], \tag{3.4}$$

对所有 $n\in\mathbb{N}$，我们进一步观察到

$$\frac{\widetilde{\tau}(1-q_{j,n})}{\mu(FK_n)}\leq\left(\frac{1}{2^{s_j}}+\frac{1}{4^j}\right)\xrightarrow{j\to\infty}0.$$

因此，

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\widetilde{\tau}(1-q_{j,n})}{\mu(FK_n)}=0,\quad\text{uniformly in } n\in\mathbb{N}.$$

因此，由定理3.9，可得

$$\lim_{j\to\infty}\frac{\widetilde{\rho}(1-q_{j,n})}{\mu(FK_n)}=0,\quad\text{uniformly in } n\in\mathbb{N}.$$

假设

$$\gamma_j(n)=\frac{1}{\mu(FK_n)}\widetilde{\rho}\left(1-q_{j,n}\right),$$

并且有

$$\lim_{j\to\infty}\gamma_j(n)=0,$$

关于 $n\in\mathbb{N}$ 一致成立。

现在，我们找到一个 $t_\upsilon\in F$，使得

$$\begin{aligned}\rho\left(1-\alpha_{t_\upsilon^{-1}}\left(q_{j,n}\left(t_\upsilon\right)\right)\right)&=\rho\left(1-q_{j,n}\left(t_\upsilon\right)\right)\quad\text{since } \alpha_{t_\upsilon^{-1}}(1)=1 \text{ and } \rho\circ\alpha_t=\rho.\\ &\leq\inf_{s\in F_\mu}\rho\left(1-q_{j,n}\left(s\right)\right)+\upsilon.\end{aligned}$$

我们记作 $p_{j,n}^{\upsilon}=\alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}(q_{j,n}(t_{\upsilon}))$. 然后，我们注意到

$$\begin{aligned}\rho(1-p_{j,n}^{\upsilon}) &\leq \frac{1}{\mu(F_{\mu})}\int_{F_{\mu}}\rho\left(1-q_{j,n}(s)\right)d\mu(s)+\upsilon\\ &\leq \frac{\mu(FK_n)}{\mu(F)}\frac{1}{\mu(FK_n)}\tilde{\rho}\left(1-q_{j,n}\right)+\upsilon\\ &\leq (1+\upsilon)\gamma_j(n)+\upsilon.\end{aligned}$$

此外，对于所有 $x\in\mathcal{M}_+$ 和 $k\in[n]$，我们注意到

$$\begin{aligned}A_k(\phi_j)(p_{j,n}^{\upsilon}xp_{j,n}^{\upsilon}) &= A_k(\phi_j)\left(\alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\right)x\left(\alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\right)\\ &= \alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}A_k(\phi_j)\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\alpha_{t_{\upsilon}}(x)q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\\ &= \mathbb{A}_k(f_j)(t_{\upsilon})\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\alpha_{t_{\upsilon}}(x)q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\\ &\leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}(\rho\circ\alpha_{t_{\upsilon}})\left(\alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\ x\ \alpha_{t_{\upsilon}^{-1}}\left(q_{j,n}(t_{\upsilon})\right)\right)\\ &\leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho\left(p_{j,n}^{\upsilon}xp_{j,n}^{\upsilon}\right),(\text{ as }\rho\circ\alpha_{t_{\upsilon}}=\rho).\end{aligned}$$

□

推论 3.12. 设 $\mathcal{M}$ 是一个有限冯·诺伊曼代数，具有忠实正规迹态 τ，并且 $(\mathcal{M},G,\alpha,\rho)$ 是一个核。对于所有 $j\in\mathbb{N}$，令 $\phi_j\in\mathcal{M}_{*s}$ 满足 $\|\phi_j\|\leq\frac{1}{4^{s_j}}$。固定 $\upsilon>0$。那么，对于所有 $n\in\mathbb{N}$，存在一个正实数序列 $(\gamma_j(n))_{j\in\mathbb{N}}$ 和投影 $\{p_{n,j}^{\upsilon}:\ j\in\mathbb{N}\}$，属于 $\mathcal{M}$，使得：

(1) $\lim_{j\to\infty}\gamma_j(n)=0$，关于 $n\in\mathbb{N}$ 一致。(2) $\rho(1-p_{n,j}^{\upsilon})\leq(1+\upsilon)\gamma_j(n)+\upsilon$.
(3) 对于所有 $j\in\mathbb{N}$,

$$A_k(\phi_j)(x)\leq\frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x),\quad \textit{for all } x\in p_{n,j}^{\upsilon}\mathcal{M}_+p_{n,j}^{\upsilon}\ \textit{and}\ k\in[n]. \tag{3.5}$$

常数 c 仅取决于群 G。

证明。令 $\phi_j\in\mathcal{M}_{*s}$ 满足 $\|\phi_j\|\leq\frac{1}{4^j}$。注意，对于所有 $j\in\mathbb{N}$，存在 $(\phi_j)_1,(\phi_j)_2\in\mathcal{M}_{*+}$，使得 $\phi_j=(\phi_j)_1-(\phi_j)_2$，并且 $\|\phi_j\|=\|(\phi_j)_1\|+\|(\phi_j)_2\|$。

应用定理3.11 于 $\psi_j=(\phi_j)_1+(\phi_j)_2,$，我们得到一个序列 $(\gamma_j(n))_{j\in\mathbb{N}}$，其元素均为正实数，并且对于所有 $n\in\mathbb{N}$，存在投影 $\{p_{n,j}^{\upsilon}:\ j\in\mathbb{N}\}$ 属于 $\mathcal{M}$，满足：

(1) $\lim_{j\to\infty}\gamma_j(n)=0$ 在 $n\in\mathbb{N}$上一致。(2) 不等式

$$\rho(1-p_{n,j}^{\upsilon})\leq(1+\upsilon)\gamma_j(n)+\upsilon$$

成立。

(3) 对所有 $j\in\mathbb{N}$，我们有

$$A_k(\psi_j)(x)\leq\frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x)$$

对所有 $x \in p_{n,\ j}^{v}\mathcal{M}_{+}p_{n,\ j}^{v}$。

此外，对于所有 $x \in e^{i,\ \delta,\ n\ v,\ \varepsilon}\mathcal{M}_{+}e^{i,\ \delta,\ n\varepsilon^{v},}$，以及所有 $j \in \mathbb{N}$ 和 $k \in \mathbb{N}$，我们有：

$$\begin{aligned}|A_k(\phi_j)(x)| &= |A_k((\phi_j)_1)(x) - A_k((\phi_j)_2)(x)| \\ &\leq A_k(\psi_j)(x) \\ &\leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x),\end{aligned}$$

□

注释 3.13. (1) 推论 3.12 与 [BS26，推论 3.18], 中建立的极大不等式类似，该不等式是在群度量测度空间上的保态作用情形下证明的。特别地，[BS26，推论 3.18] 得出如下估计

$$|A_k(\phi_j)(x)| \leq C\delta \|\phi_j\| \|x\| + \frac{C}{2^j}\rho(x),$$

对于所有 $x \in q^{\delta,\ n\ v\ ,\ j}\mathcal{M}_{+}q^{\delta,\ n\ v\ ,\ j}$ 以及所有 $k \in [n]$，其中投影族（$q^{\delta,\ n\ v\ ,\ j}$）定义同 [BS26，推论 3。18]。

然而，在我们的情形中，极大不等式——具体而言，不等式 3.5——是由 [CW22] 的极大不等式推导而来。因此，不会出现形如$C\delta\|\phi_j\| \|x\|$ 的误差项（见不等式 3.5）。相反，我们得到

$$A_k(\phi_j)(x) \leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x), \quad \text{for all } x \in q_{j,n}^{v}\mathcal{M}_{+}q_{j,n}^{v} \text{ and } k \in [n],$$

其中 t 辅助序列 (s_j) 在从迹转向态时自然出现。

因此，要得到点态遍历定理，我们需要证明一个恰当的 Banach 原理，这将在下一节中确立。

(2) 我们注意到，类似于 [BS23b, 定理 4.13] 的极大不等式，可以针对在幺模可 amenable 群中选取的适当 Følner序列上的遍历平均建立。这是由最近在 [CXZ25, 定理 3.1] 中证明的遍历平均支配结果所推出的。

我们还指出，当 G 被假设为幺模时，定理 3.12 中陈述的极大不等式适用于与 Følner 序列相关的遍历平均；这些序列满足的结构性质不同于 [CXZ25, 定理 3.1] 中所考虑的性质。

4. 点态遍历定理

本节研究特定遍历平均的点态收敛。借助弱型极大不等式（参见 [CW22]），还需建立适当的 Banach 原理，并证明稠密子集中的元素点态收敛。

在本节中，我们假设 $\mathcal{M}$ 是一个带有忠实正规迹态 τ 的冯·诺伊曼代数，并且 G 是一个带有右 Haar 测度且具有右 Følner 序列 (F_n) 的可 amenable 群。此外，我们假设 $(\mathcal{M},\ G,\ \alpha)$ 是一个非交换动力系统，满足

存在 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规态 ρ，使得对所有 $s \in G$ 都有 $\rho \circ \alpha_s = \rho$，从而 $(\mathcal{M},\ G,\ \alpha,\ \rho)$ 是一个核。

在进一步讨论之前，我们先固定以下记号。设 $\{\gamma_s : s \in G\}$ 是作用于巴拿赫空间 E 上的一族（适当的）映射。对于相应的平均算子，略微滥用记号，我们写作：

- $A_n(\cdot) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \gamma_{s^{-1}}(\cdot)\, d\mu(s)$ and
- $B_n(\cdot) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \gamma_s(\cdot)\, d\mu(s)$.

严格来说，这些算子应记为 A_n^γ 和 B_n^γ，以强调它们依赖于族 $\{\gamma_s\}_{s\in G}$。不过，为了记号简洁起见，我们省略这一依赖关系，在全文中分别记作 A_n 和 B_n。

由于对所有 $s \in G$ 都有 $\rho \circ \alpha_s = \rho$，我们注意到，可以在 $G.N.S.$ 空间 $L^2(\mathcal{M}, \rho)$ 上定义一个酉算子 u_s，其定义为

$$u_s(x\Omega_\rho) = \alpha_s(x)\Omega_\rho,$$

满足对所有 $s, t \in G$ 都有 $u_s \circ u_t = u_{st}$，其中 $\Omega\rho$ 是 $L^2(\mathcal{M}, \rho)$ 中相应的循环分离向量。在本节中，我们分别用 $\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$ 和 $\|\cdot\|_\rho$ 表示上述 $G.N.S.$ 空间中的希尔伯特空间内积和范数。

现在，我们给出以下均值遍历定理。

定理4.1. 设 F_n 为*Følner*序列，采用本节引言中给出的所有记号。则，平均

$$B_n x := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} u_s(x)\, d\mu(s), \quad x \in L^2(\mathcal{M}, \rho),$$

在 $\|\cdot\|_\rho$中收敛。

证明。 由于$(L^2(\mathcal{M}, \rho)\ G, u)$构成一个非交换动力系统，我们注意到

$$L^2(\mathcal{M}, \rho) = F_2 \oplus F_2^\perp,$$

其中

$$F_2 = \{x \in L^2(\mathcal{M}, \rho) : u_s(x) = x \text{ for all } s \in G\},$$
$$F_2^\perp = \overline{\text{span}}\{y - u_s(y) : y \in L^2(\mathcal{M}, \rho),\ s \in G\}.$$

因此，只需检验 $A_n x$ 在 $x = y - u_s(y)$ 下的收敛性，其中 $y \in L^2(\mathcal{M},\ \rho)$ 且$s \in G$。此外，我们注意到

$$\begin{aligned} B_n x &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} u_t(y) d\mu(t) - \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} u_{ts}(y) d\mu(t) \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} u_t(y) d\mu(t) - \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n s} u_t(y) d\mu(t) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_G (\chi_{F_n} - \chi_{F_n s}) u_t(y) d\mu(t)$$

因此，我们得到

$$\begin{aligned} \|B_n(x)\| &\leq \frac{1}{\mu(F_n)} \int_G |\chi_{F_n} - \chi_{F_n s}| \, \|u_t(y)\| \, d\mu(t) \\ &\leq \frac{1}{\mu(F_n)} \int_G \chi_{F_n \Delta F_n s} \, \|y\| \, d\mu(t) \\ &= \|y\| \, \frac{\mu(F_n \Delta F_n s)}{\mu(F_n)} \end{aligned}$$

由于 (F_n) 是 Følner序列，当 $n \to \infty$ 时，右端收敛于 0。因此 $A_n(x)$ 收敛于 0。□

我们回顾 [BS23b] 中的以下引理。

引理 4.2 ([BS23b，引理 4.5])。 设 $(\mathcal{M}, G, \alpha)$ 是一个带有忠实正规态的非交换动力系统 ρ，如本节开头所述。那么，存在一个非交换动力系统 $(\mathcal{M}', G, \alpha')$，其中 $\mathcal{M}'$ 是 $\mathcal{M}$的交换子，使得

$$\left\langle \alpha'_s(y') x \Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho = \left\langle y' \alpha_{s^{-1}}(x) \Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho$$

对于所有 $x \in \mathcal{M}$、 $y' \in \mathcal{M}'$ 和 $s \in G$。

设 G 是一个可 amenable 群，具有 Følner序列 (F_n)，且 (M, G, α) 是动力系统。于是我们回顾以下平均；

$$A_n(\nu) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \alpha_{s^{-1}}(\nu) \, d\mu(s), \quad \nu \in \mathcal{M}_*,$$

我们还回顾同一篇论文中的以下范数收敛结果，其中增加了条件： ρ 在 G的作用下不变。

定理 4.3 ([BS23b，定理 4.6])。 对于所有 $\nu \in \mathcal{M}_*$，存在 $\bar{\nu} \in \mathcal{M}_*$ 使得

$$\bar{\nu} = \|\cdot\| \text{-} \lim_{n \to \infty} A_n(\nu).$$

此外，若群 G 是幺模的，且 *Følner*序列 $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ 选为对称的，那么ν 是 G-不变的。

–

证明。 令 $L^2(M, \rho)$表示由内积$\langle \cdot, \cdot \rangle_\rho$所诱导的范数下 M 的闭包。于是，我们可以在希尔伯特空间 $L^2(M, \rho)$上定义以下压缩算子：

$$u_g(x\Omega_\rho) = \alpha_g(x)\Omega_\rho, \qquad x \in M_s, \; g \in G.$$

现在，考虑

$$B_n := \frac{1}{m(F_n)} \int_{F_n} u_g \, d\mu(g).$$

然后由冯·诺依曼平均遍历定理可知，对于所有的 $\xi \in L^2(M, \rho)$， $T_n(\xi)$ 强收敛到 $P\xi$，其中 P 是 $L^2(M, \rho)$ 到子空间上的正交投影

$$\{\xi \in L^2(M, \rho) : u_g \xi = \xi \text{ for all } g \in G\}.$$

设 $x \in M$，则可知 $T_n(x\Omega)$ 在 $L^2(M,\ \rho)$ 中收敛。
令 $y_1, y_2 \in M'(\sigma)$，并定义 $\psi_{y_1,y_2}(x) = \langle xy_1\Omega\rho, y_2\Omega_\rho\rangle_\rho$，对所有 $x \in M$ 均成立。于是，根据注 4.3 前面的讨论，存在一个 $z \in M$，使得 $y_1^* y_2\Omega\rho = {}^z\Omega\rho$，其中 $z = J\sigma_{i/2}(y_2^* y_1)J$。因此，对于 $x \in M$，

$$\begin{aligned} A_n(\psi_{y_1,y_2})(x) &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \langle \alpha_{g^{-1}}(x) y_1\Omega_\rho, y_2\Omega_\rho\rangle_\rho \, d\mu(g) \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \langle \alpha_{g^{-1}}(x)\Omega_\rho, y_1^* y_2\Omega_\rho\rangle_\rho \, d\mu(g) \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \langle \alpha_{g^{-1}}(x)\Omega_\rho, z\Omega_\rho\rangle_\rho \, d\mu(g). \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \langle x\Omega_\rho,\ u^*_{g^{-1}}(z\Omega_\rho)\rangle_\rho \, d\mu(g) \\ &= \langle x\Omega_\rho,\ B_n(z\Omega_\rho)\rangle_\rho \, d\mu(g). \end{aligned}$$

因此，对于所有 $x \in M$，

$$A_n(\psi_{y_1,y_2})(x) \to \langle x\Omega_\rho, \eta\rangle_\rho, \quad \text{where } \eta = \lim_{n\to\infty} A_n(z\Omega_\rho).$$

考虑由下式定义的 $\psi_{y_1,y_2} \in M_*$

$$\overline{\psi}_{y_1,y_2}(x) = \langle x\Omega_\rho, \eta\rangle_\rho, \qquad x \in M.$$

那么，根据标准论证可得

$$\overline{\psi}_{y_1,y_2} \circ \alpha_g = \overline{\psi}_{y_1,y_2} \quad \text{for all } g \in G,$$

and

$$\|\overline{\psi}_{y_1,y_2}\| = \|\cdot\|_1 - \lim_{n\to\infty} B_n(\psi_{y_1,y_2}).$$

因此，结果成立，因为集合

$$\{\psi_{y_1,y_2} : y_1, y_2 \in M'(\sigma)\}$$

在 M_*中是全的。

□

注 4.4. 现在，如果 G 是幺模的，我们可以令 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 既对称，又同时是左 Følner 和右 Følner。在这种情况下，ν 是 G-不变的。事实上，对于 $\nu \in M_*$，回顾一下

$$A_n(\nu) = \frac{1}{\nu(F_n)} \int_{F_n} \nu \circ \alpha_{g^{-1}} \, d\mu(g), \text{ and } \overline{\nu} = \|\cdot\|_1 - \lim_{n\to\infty} A_n(\nu).$$

固定 $h \in G$，我们注意到 $\overline{\nu \circ \alpha_h} = \overline{\nu}_\circ$ 事实上，我们发现

$$\begin{aligned} A_n(\nu) \circ \alpha_h = \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \nu \circ \alpha_{g^{-1}} \circ \alpha_h \, d\mu(g) &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \nu \circ \alpha_{g^{-1}h} \, d\mu(g) \\ &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \nu \circ \alpha_{(h^{-1}g)^{-1}} \, d\mu(g) \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{h^{-1}F_n} \nu \circ \alpha_{g^{-1}} \, d\mu(g) \text{ [by unimodularity]}$$

因此，差值为

$$A_n(\nu) \circ \alpha_h - A_n(\nu) = \frac{1}{\mu(F_n)} \Big(\int_{h^{-1}F_n} - \int_{F_n} \Big) \nu \circ \alpha_{g^{-1}} \, d\mu(g).$$

取范数（ M_*上的对偶范数），并利用 $\|\nu \circ \alpha_{g^{-1}}\| \leq \|\nu\|$ ，我们得到估计

$$\|A_n(\nu) \circ \alpha_h - A_n(\nu)\| \leq \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n \Delta (h^{-1}F_n)} \|\nu \circ \alpha_{g^{-1}}\| \, d\mu(g) \leq \|\nu\| \frac{\mu\big(F_n \Delta (h^{-1}F_n)\big)}{\mu(F_n)}.$$

由于 $\{F_n\}$是 Følner序列，且 G 是幺模的（因此左 Haar测度与右 Haar 测度相同），比值

$$\frac{\mu\big(F_n \Delta (h^{-1}F_n)\big)}{\mu(F_n)} \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

因此 $\| A_n(\nu) \circ \alpha_h - A_n(\nu)\| \to 0$ 当 $n \to \infty$时。取定义 ν 的 $\| \cdot \|_1$–极限，得到

$$\overline{\nu} \circ \alpha_h = \overline{\nu}.$$

由于 $h \in G$ 是任意选取的， ν 是 G–不变的。

我们得到非交换动力系统的以下收敛结果。

引理 4.5. 设(E, G, γ) 是一个动力系统，其中$(E, \|\cdot\|)$ 是一个巴拿赫空间。那么，对于每个$k \in \mathbb{N}$ 和 $a \in E$，我们有

$$\lim_{n \to \infty} \|B_n(a - B_k(a))\| = 0,$$

其中

$$B_m(a) := \frac{1}{\mu(F_m)} \int_{F_m} \gamma_s(a) \, d\mu(s), \quad m \in \mathbb{N}.$$

证明。 对于所有 $n \in \mathbb{N}$，我们有

$$\begin{aligned}
B_n(a - B_k(a)) &= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \Big[\gamma_s(a) - \gamma_s(B_k(a)) \Big] d\mu(s) \\
&= \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \left[\gamma_s(a) - \gamma_s \left(\frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \gamma_t(a) d\mu(t) \right) \right] d\mu(s) \\
&= \frac{1}{\mu(F_n)} \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_n} \int_{F_k} \Big(\gamma_s(a) - \gamma_{st}(a) \Big) d\mu(t) d\mu(s) \\
&= \frac{1}{\mu(F_n)} \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \int_{F_n} \Big(\gamma_s(a) - \gamma_{st}(a) \Big) d\mu(s) d\mu(t) \quad \text{(by Fubini's theorem)} \\
&= \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \frac{1}{\mu(F_n)} \left(\int_{F_n} \gamma_s(a) d\mu(s) - \int_{F_n t} \gamma_s(a) d\mu(s) \right) d\mu(t) \\
&= \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \frac{1}{\mu(F_n)} \left(\int_G (\chi_{F_n} - \chi_{F_n t})(s) \gamma_s(a) d\mu(s) \right) d\mu(t).
\end{aligned}$$

我们注意到 $|\chi_{F_n} - \chi_{F_n t}| = \chi_{F_n \Delta F_n t}$。由于 $\sup_{g\in G} \|\gamma_s\|$ 有限，我们得到

$$\begin{aligned}\|B_n(a - B_k(a))\| &\leq \frac{1}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \Big(\frac{1}{\mu(F_n)} \int_G |(\chi_{F_n} - \chi_{F_n t})(s)| \, \|\gamma_s(a)\| \, d\mu(s) \Big) d\mu(t) \\ &\leq \frac{\|a\| \sup_{g\in G} \|\gamma_g\|}{\mu(F_k)} \int_{F_k} \frac{\mu(F_n \Delta F_n t)}{\mu(F_n)} d\mu(t)\end{aligned}$$

由于函数 $g_n(t) = {}^{\mu(F_n \Delta F_n t)}\!/_{\mu(F_n)}$ 在 F_k 上有界，且对每个 $k \in \mathbb{N}$，$\mu(F_k) < \infty$，并且逐点收敛到 0（根据可和性的定义），由控制收敛定理可得，对任意 $k \in \mathbb{N}$ 和 $a \in E$,

$$\lim_{n\to\infty} \|B_n(a - B_k(a))\| = 0.$$

□

给定一个核（$\mathcal{M}$, G, α, ρ），由定理 4.3可知，$\|\cdot\|_1 - \lim_{n\to\infty} B_n(\nu)$ 对所有 $\nu \in \mathcal{M}_*$均存在，且该极限记为 $\bar{\nu}$。

我们回顾 [BS23b], 中的另一条结果。该结果确定了 $\mathcal{M}_*$ 的一个稠密子集，使得对于该集合中的元素，遍历平均以一种类似于双侧几乎一致收敛的方式收敛。由于我们使用了注释 4.4，该结果要求群 G 是幺模的。

命题 4.6 ([BS23b],引理 4.9)。考虑以下集合：

$$\mathcal{W}_1 := \{\nu - A_k(\nu) + \bar{\nu} : \quad k \in \mathbb{N}, \ \nu \in \mathcal{M}_{*+} \ \textit{with} \ \nu \leq \lambda\rho \ \textit{for some} \ \lambda > 0\}.$$

(i) 定义 $\mathcal{W} = \mathcal{W}_1 - \mathcal{W}_1$。那么，$\mathcal{W}$ 在 $\mathcal{M}_{*s}$ 中稠密。

(ii) 对于所有 $\nu \in \mathcal{W}$，我们有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{M}_+, x\neq 0} \frac{|(A_n(\nu) - \bar{\nu})(x)|}{\rho(x)} = 0. \tag{4.1}$$

证明。*(i)*：证明可由与以下证明类似的论证得出：[BS23b，引理 4.9，第 (i) 部分]。令 $\mu \in M_{*+}$ 且 $\varepsilon > 0$。由 [Hia21], 中的引理 3.19，我们可找到一个 $\nu \in M_{*+}$ 满足 $\nu \leq \lambda\rho$，其中某个 $\lambda > 0$使得 $\|\mu - \nu\| < \varepsilon/2$。此外，由 4.3 可知 $A_n(\nu)$ 收敛，并记$\bar{\nu} =$ 极限$_{n\to\infty} A_n(\nu)$。因此存在一个 $n_0 \in \mathbb{N}$ 使得

$$\|\bar{\nu} - A_{n_0}(\nu)\| \leq \varepsilon/2.$$

因此，由三角不等式可得

$$\|\mu - (\nu - A_{n_0}(\nu) - \bar{\nu})\| \leq \|\mu - \nu\| + \|A_{n_0}(\nu) - \bar{\nu}\| < \varepsilon.$$

现在，对于 $\mu \in M_{*s}$，我们写作 $\mu = \mu_+ - \mu_-$，其中 μ_+，μ_- 是正规正线性泛函。因此可知，$\mathcal{W}$ 在 M_{*s} 中稠密。

(ii)：取定 $k \in \mathbb{N}$ 并考虑 $\nu_k :=$ $\nu - A_k(\nu) + \bar{\nu}$。只需证明式4.1 对 ν_k.

现在，由于

$$A_n(\nu_k) - \bar{\nu} = A_n(\nu - A_k(\nu))$$

对所有 $n \in \mathbb{N}$，由引理 4.5 可知 $\nu_k = \bar{\nu}$。 —

由于 $\nu \le \lambda\rho$，由 [BS23b，引理 4。4], 存在唯一的 $y_1' \in \mathcal{M}_+'$ 使得 $y_1' \le \lambda$ 满足 t

$$\nu(x) = \left\langle y_1' x\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho \quad \text{for all } x \in \mathcal{M}.$$

对于 $y' \in \mathcal{M}'$，记作

$$B_n(y') := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \alpha_s'(y') d\mu(s).$$

由引理 4.2，可得

$$\left\langle B_n(y')x\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho = \left\langle y' A_n(x)\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho, \quad \text{for all } x \in \mathcal{M}, y' \in \mathcal{M}',$$

here

$$A_n(x) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \alpha_{s^{-1}}(x) d\mu(s).$$

对于所有的 $n \in \mathbb{N}$ 和 $x \in \mathcal{M}_+$，可得

$$\begin{aligned}
|(A_n(\nu_k) - \bar{\nu})(x)| &= |(\nu_k - \bar{\nu})(A_n(x))| \\
&= |(\nu - A_k(\nu))(A_n(x))| \quad (\text{since } \nu_k := \nu - A_k(\nu) + \bar{\nu}) \\
&= |\nu(A_n(x)) - \nu(A_k(A_n(x)))| \quad (\text{as } B_k(\nu)(\cdot) = \nu(B_k(\cdot))) \\
&= \left| \left\langle y_1' A_n(x)\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho - \left\langle y_1' A_k(A_n(x))\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho \right| \\
&\quad (\text{since } \nu(\cdot) = \left\langle y_1'(\cdot)\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho) \\
&= \left| \left\langle (y_1' - B_k(y_1'))A_n(x)\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho \right| \\
&= \left| \left\langle B_n(y_1' - B_k(y_1'))x\Omega_\rho, \Omega_\rho \right\rangle_\rho \right|, \ (\text{by Lemma 4.2}) \\
&\le \left\| B_n(y_1' - B_k(y_1')) \right\|_\rho \rho(x).
\end{aligned}$$

此外，由于引理 4.5 保证 $\lim_{n\to\infty} \|B_n(y_1' - B_k(y_1'))\|_\rho = 0$，我们得出

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{M}_+, x\neq 0} \frac{|(A_n(\nu_k) - \bar{\nu}_k)(x)|}{\rho(x)} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in\mathcal{M}_+, x\neq 0} \frac{|(A_n(\nu_k) - \bar{\nu})(x)|}{\rho(x)} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

证明至此完成。 □

注 4.7。 (1) 根据命题 4.6，我们首先注意到，对每个 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 和$\nu \in \mathcal{W}$，都有

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in p\mathcal{M}_+ p \\ x\neq 0}} \frac{|(A_n(\nu) - \bar{\nu})(x)|}{\rho(x)} = 0.$$

(2) 设 $\mathcal{M}$ 是一个配备忠实正规迹态 τ 的冯·诺伊曼代数，并设 $\nu \in \mathcal{W}$。由于 $\rho \in \mathcal{M}_{*+}$，存在唯一的元素 $X \in L^1(\mathcal{M}, \tau)_+$，使得

$$\rho(x) = \tau(Xx), \qquad \text{for all } x \in \mathcal{M}.$$

对每个 $s>0$，定义投影 $q_s := \chi_{(1/s,s)}(X) \in \mathcal{M}$。注意到

$$\tau(1-q_s) \xrightarrow[s\to\infty]{} 0.$$

因此，对于任意 $\varepsilon>0$，存在 $s_0>0$，使得 $\tau(1-q_{s_0})<\varepsilon$。此外，我们有算子不等式 $Xq_{s_0} \le s_0 q_{s_0}$。因此，对于每个非零元素 $x \in q_{s_0}\mathcal{M}_+ q_{s_0}$，

$$\begin{aligned}\frac{\rho(x)}{\tau(x)} &= \frac{\tau(Xx)}{\tau(x)} = \frac{\tau(Xq_{s_0}x)}{\tau(x)}\\ &\le \frac{\tau(s_0 x)}{\tau(x)} = s_0.\end{aligned}$$

因此，由命题4.6 可得

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in p\mathcal{M}_+ p\\ x\neq 0}} \frac{|(A_n(\nu)-\bar{\nu})(x)|}{\tau(x)} &\le s_0 \lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in p\mathcal{M}_+ p\\ x\neq 0}} \frac{|(A_n(\nu)-\bar{\nu})(x)|}{\rho(x)}\\ &= 0.\end{aligned}$$

在本节余下部分中，我们假设冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}$ 配备了忠实正规迹态 τ。

下一个结果确立了一个适当的 Banach 原理，它在推导遍历收敛结果时发挥着核心作用。为此，我们首先引入预对偶 $\mathcal{M}_*$中序列的双边几乎一致（b.a.u.）收敛这一概念。

定义 4.8. 设 $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 是 $\mathcal{M}_*$ 中的一个序列，且 $\nu \in \mathcal{M}_*$。若对于每个 $\varepsilon>0$，都存在一个投影 $p \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，满足 $\tau(1-p)<\varepsilon$，使得 ν_n 在双边几乎一致（b.a.u.）拓扑下收敛到 ν，则称

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in p\mathcal{M}_+ p\\ x\neq 0}} \frac{|(\nu_n-\nu)(x)|}{\tau(x)} = 0.$$

注 4.9. 令 $(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{M}_*$ 和 $\nu \in \mathcal{M}_*$。由命题 2.4，存在一个序列 $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$以及一个元素 $X \in L^1(\mathcal{M},\tau)$，使得 $\nu_n(x) = \tau(X_n x)$ 且 $\nu(x) = \tau(Xx)$ 对所有 $x \in \mathcal{M}$ 均成立。

我们声称，(ν_n) 在几乎处处一致拓扑下收敛到 ν，其含义如定义 4.8所述，当且仅当相应的序列 (X_n) 收敛到 X，即在 $L^1(\mathcal{M},\tau)$ 中双侧几乎一致收敛，如定义 2.1所述。事实上，首先假设 $\nu_n \to \nu$ 在双侧几乎一致意义下收敛。那么，对于每个 $\varepsilon>0$，存在一个投影 $e \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$，满足 $\tau(1-e)<\varepsilon$，使得对于每个 $\delta>0$，都可以找到 $n_0 \in \mathbb{N}$，使其对所有 $n \ge n_0$ 均满足：

$$|(\nu_n-\nu)(exe)| \le \delta\,\tau(exe), \qquad \forall x \in \mathcal{M}_+ \setminus \{0\}.$$

利用迹表示，这个不等式等价于

$$|\tau((X_n-X)(exe))| \le \delta\,\tau(exe), \qquad \forall x \in \mathcal{M}_+ \setminus \{0\},$$

根据 τ 的保真性，这又等价于

$$\|e(X_n - X)e\| \leq \delta.$$

因此， $X_n \to X$ 在几乎处处一致意义下。反向蕴含可通过逆转上述论证得到。

下面的命题表明，预对偶 $\mathcal{M}_*$ 关于几乎处处一致拓扑是完备的。

命题 4.10. 在 $\mathcal{M}_*$ 中的每个几乎处处一致柯西序列$(\nu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ 都收敛于几乎处处一致拓扑下的某个 $\nu \in \mathcal{M}_*$。

证明。 该断言可由定理 2.2 与备注 4.9直接推出。 □

现在证明 Banach 原理。

定理 4.11 (Banach 原理)。 设 G 是局部紧第二可数可和群，具有可容许 ***Følner*** 序列 $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$，且设 $\mathcal{M}$ 是有限冯·诺依曼代数，配备忠实正规迹态 τ 和忠实正规态 ρ。

设 $(\mathcal{M}, G, \alpha)$ 是非交换动力系统，使得对所有 $g \in G$，$\rho \circ \alpha_g = \rho$ 成立，即$(\mathcal{M}, G, \alpha, \rho)$ 构成一个核。那么，以下集合

$$\mathcal{C} = \{\phi \in \mathcal{M}_{*s} \mid A_n(\phi) \ converges \ in \ b.a.u.\}$$

在 $\mathcal{M}_{*s}$ 中是闭集。

证明。 设 (ϕ_n) 是 $\mathcal{C}$ 中的一个序列，在范数下收敛于 $\phi \in \mathcal{M}_{*s}$，即

$$\lim_{n\to\infty} \|\phi_n - \phi\| = 0.$$

那么，我们需要证明 $\phi \in \mathcal{C}$。

首先注意到，由于 $\rho \in \mathcal{M}_{*+}$，存在唯一的 $X \in L^1(\mathcal{M}, \tau)_+$，使得对所有 $x \in \mathcal{M}$， $\rho(x) = \tau(Xx)$。接着，对任意 $s > 0$，考虑投影 $q_s := 1_{(1/s,s)}(X) \in \mathcal{M}$。注意到 $(1 - q_s) \xrightarrow{s\to\infty} 0$ 在强算子拓扑（强算子拓扑）下收敛。

令 $\theta > 0$ 任意。因此，存在一个 $s_0 > 0$，使得 $\tau(1 - q_{s_0}) < \frac{\theta}{2}$。此外，这意味着 $Xq_{s_0} \leq s_0 q_{s_0}$。因此，对于所有 $0 \neq x \in q_{s_0}\mathcal{M}_+ q_{s_0}$，我们有

$$\begin{aligned} \frac{\rho(x)}{\tau(x)} = \frac{\tau(Xx)}{\tau(x)} &= \frac{\tau(Xq_{s_0}x)}{\tau(x)} \quad (\text{since } q_{s_0}x = x) \\ &\leq \frac{\tau(s_0 x)}{\tau(x)} = s_0. \end{aligned} \tag{4.2}$$

由于 $\lim_{n\to\infty} \|\phi - \phi_n\| = 0$，必要时取一个子序列后，我们可以假设

$$\|\phi - \phi_j\| < \frac{1}{4^{s_j}} \text{ for all } j \in \mathbb{N}.$$

此外，注意到对所有 $j \in \mathbb{N}$， $\phi - \phi_j \in \mathcal{M}_{*s}$。现在，利用推论 3.12，对于 $n = N, \upsilon = \frac{1}{2^i}, 1, -$ 我们可得到正实数 $(\gamma_j(N))_{N\in\mathbb{N}}$ 以及投影 $q^i_{N,j} := q^{2^i}_{N,j}$，它们属于 $\mathcal{M}$，且满足 $j, N \in \mathbb{N}$：

(1) $\lim_{j\to\infty}{}^{\gamma_j}(N) = 0$，且对 $N \in \mathbb{N}$ 一致收敛，

(2) $\rho(1 - q^i_{N,\ j}) \leq (1 + \frac{1}{2^i})\gamma_j(N) + \frac{1}{2^i}$，并且

(3) 对所有 $j \in \mathbb{N}$，

$$A_n(\phi - \phi_j)(x) \leq \frac{cs_j}{2^{s_j}}\rho(x) \text{ for all } x \in q^i_{N,j}\mathcal{M}_+q^i_{N,j} \text{ and } n \in [N].$$

现在记 $q_{N,j} = q^j_{N,j}$

我们有，

$$\rho(1 - q_{N,j}) \leq (1 + \frac{1}{2^j})\gamma_j(N) + \frac{1}{2^j}$$

对所有 $N \in \mathbb{N}$。现在，立即可得

$$\lim_{j\to\infty} \rho(1 - q_{N,j}) = 0, \text{ uniformly in } N \in \mathbb{N}.$$

我们使用引理 3.9。令 $\mathcal{M}_1 = L^\infty(G)$ 和 $\mathcal{M}_2 = \mathcal{M}$，取 S 为自然数集合 $\mathbb{N}$，令 $x_j(n) = q_{j,n}$ 以及 $p_j(n) = \chi_{F_n} \forall n \in \mathbb{N}$。注意，$f_j(N) = {}^{p_j(N)\otimes 1 - q_{j,\mu}\ F_N}{}^{N}() \forall N \in \mathbb{N}$。我们有，

$$\begin{aligned}
&\lim_{j\to\infty} \frac{(\varphi \otimes \rho)(\chi_{F_N} \otimes (1 - q_{N,j}))}{\varphi(\chi_{F_N})} = 0 \\
\implies &\lim_{j\to\infty} \frac{(\varphi \otimes \tau)(\chi_{F_N} \otimes (1 - q_{N,j}))}{\varphi(\chi_{F_N})} = 0 \text{ by Lemma 3.10} \\
\implies &\lim_{j\to\infty} \frac{\varphi(\chi_{F_N})\tau(1 - q_{N,j}))}{\varphi(\chi_{F_N})} = 0 \\
\implies &\lim_{j\to\infty} \tau(1 - q_{N,j}) = 0, \text{ uniformly in N} \in \mathbb{N}.
\end{aligned}$$

因此，存在一个子序列 $(j_l)_{l\in\mathbb{N}}$，使得

$$\tau(1 - q_{N,j_l}) < \frac{\theta}{2^{l+2}}, \quad \text{for all } N \in \mathbb{N}.$$

由于对所有 $j \in \mathbb{N}$ 均有 $\phi_j \in \mathcal{C}$，存在一个投影序列 (f_j)，它属于 $\mathcal{P}(\mathcal{M})$，以及一个严格递增序列 $(N_j) \subseteq \mathbb{N}$，使得

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \tau(1 - f_j) < \frac{\theta}{2^{j+2}}, \quad \text{for all } j \in \mathbb{N}, \\
&(2) \quad \sup_{x\in f_jM_+f_j, x\neq 0} \frac{\left|\left(A_n(\phi_j) - A_m(\phi_j)\right)(x)\right|}{\tau(x)} < \frac{1}{2^j}, \quad \text{for all } n, m \geq N_j.
\end{aligned}$$

现在，对于所有的 $l \in \mathbb{N}$，我们定义 $q_l := q_{N_{j_{l+1}},\ j_l}$。然后，我们注意到

$$\begin{aligned}
&(1) \quad \tau(1 - q_l) \leq \frac{\theta}{2^{l+2}}, \\
&(2) \quad A_n(\phi - \phi_{j_l})(q_lxq_l) \leq \frac{cs_{j_l}}{2^{s_{j_l}}}\rho(q_lxq_l), \quad \text{for all } n \in [N_{j_{l+1}}].
\end{aligned}$$

此外，对于子序列 (j_l)，我们有

$$\tau(1-f_{j_l}) \leq \frac{\theta}{2^{j_l+2}}.$$

最后，考虑投影

$$e = \left(\bigwedge_{l\in\mathbb{N}} q_l\right) \bigwedge \left(\bigwedge_{l\in\mathbb{N}} f_{j_l}\right) \bigwedge q_{s_0}.$$

那么，我们有 $\tau(1-e) < \theta$ 并且，对于所有 $0 \neq x \in e\mathcal{M}_+e$，假设 $N_{j_l} \leq n$， $m \leq N_{j_{l+1}}$，可得

$$\begin{aligned}
&\frac{\left|\left(A_n(\phi) - A_m(\phi)\right)(x)\right|}{\tau(x)} \\
=&\frac{\left|\left(A_n(\phi) - A_n(\phi_{j_l}) + A_n(\phi_{j_l}) - A_m(\phi_{j_l}) + A_m(\phi_{j_l}) - A_m(\phi)\right)(x)\right|}{\tau(x)} \\
\leq&\frac{\left|\left(A_n(\phi) - A_n(\phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\tau(x)} + \frac{\left|\left(A_n(\phi_{j_l}) - A_m(\phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\tau(x)} + \frac{\left|\left(A_m(\phi_{j_l}) - A_m(\phi)\right)(x)\right|}{\tau(x)} \\
\leq&\frac{\left|\left(A_n(\phi - \phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\tau(x)} + \frac{\left|\left(A_n(\phi_{j_l}) - A_m(\phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\tau(x)} + \frac{\left|\left(A_m(\phi_{j_l} - \phi)\right)(x)\right|}{\tau(x)} \\
\leq&\left(\frac{\left|\left(A_n(\phi - \phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\rho(x)} + \frac{\left|\left(A_m(\phi_{j_l} - \phi)\right)(x)\right|}{\rho(x)}\right)\frac{\rho(x)}{\tau(x)} + \frac{\left|\left(A_n(\phi_{j_l}) - A_m(\phi_{j_l})\right)(x)\right|}{\tau(x)} \\
\leq&\left(\frac{2cs_{j_l}}{2^{s_{j_l}}}\right)s_0 + \frac{1}{2^{s_{j_l}}} = \frac{(2cs_{j_l}s_0+1)}{2^{s_{j_l}}}, \quad \text{(by Eq. 4.2)}.
\end{aligned}$$

由于 $j_l \to \infty$ 当 m， $n \to \infty$，可得

$$\lim_{m,n\to\infty} \sup_{x\in eM_+e, x\neq 0} \frac{\left|\left(A_n(\phi) - A_m(\phi)\right)(x)\right|}{\tau(x)} = 0.$$

因此，$(A_n(\phi))_{n\in\mathbb{N}}$ 在双侧几乎一致意义下是柯西列。因此，由命题4.10，可得 $(A_n(\phi))_{n\in\mathbb{N}}$ 在双侧几乎一致意义下收敛，这意味着集合 $\mathcal{C}$ 在 $\mathcal{M}_{*s}$中是闭的。□

以下结果要求 G 是幺模的，这是由于我们使用了命题 4.6(ii)。最后，我们以以下遍历定理作结。

定理 4.12。 设$(\mathcal{M}, G, \alpha, \rho)$ 是一个核，且 τ是 $\mathcal{M}$上的忠实正规迹态。对于任意的 $\phi \in \mathcal{M}_*$，存在一个元素 $\phi \in \mathcal{M}_*$，使得对于每个 $\varepsilon > 0$，都能找到一个投影$e \in \mathcal{M}$ 满足 $\tau(1-e) < \varepsilon$ 并且

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\substack{x\in e\mathcal{M}_+e \\ x\neq 0}} \frac{\left|(A_n(\phi) - \bar{\phi})(x)\right|}{\tau(x)} = 0.$$

证明。 该断言可由命题 4.6 和定理 4.11，结合注记 4.7，立即得出。 □

设（$\mathcal{M}$， G， α， ρ）为一个核，并令 τ为 $\mathcal{M}$上的忠实正规迹态。接下来，我们在非交换 L^1-空间 L^1（$\mathcal{M}$， τ）的框架下重新表述定理4.12。对于给定元素

$X \in L^1(\mathcal{M},\ \tau)$，回顾方程2.2中与之相关的遍历平均

$$A_n(X) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \hat{\alpha}_{s^{-1}}(X)\, d\mu(s).$$

定理 4.13。设 $(\mathcal{M}, G, \alpha, \rho)$ 是一个核，并设 $X \in L^1(\mathcal{M}, \tau)$。那么存在 $\bar{X} \in L^1(\mathcal{M}, \tau)^-$，使得序列 $(A_n(X))$ 双侧几乎一致收敛到 X。

证明。结论可直接由定理4.12 结合注 4 .9. □

注 4.14。鉴于定理 4.13，我们注意到，可以针对沿着与支配结果 [BS23b，定理 4.17], 所考虑的幺模可 amenable 群作用相关联的 Følner 序列取的遍历平均，得到一个类似于 [CXZ25，定理 3.1] 的非交换逐点遍历定理。

5. 随机遍历定理

本节汇集目前为止得到的结果，以推导随机遍历定理。全文中，我们假设 $\mathcal{M} \subseteq \mathcal{B}(\mathcal{H})$ 是赋有忠实正规迹态 τ 的冯·诺伊曼代数，并且在相应的非交换空间 $L^1(\mathcal{M},\ \tau)$ 中进行讨论。此外，我们假设 G 是一个幺模可 amenable 群，且存在一个对称可容 Følner 序列 (F_n)。

我们考虑一个非交换动力系统 $(\mathcal{M},\ G,\ \alpha)$。与之前一样，对于每个 $X \in L^1(\mathcal{M},\ \tau)$，我们定义相应的遍历平均如下：

$$A_n(X) := \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \alpha_s^*(\nu)\, d\mu(s) = \frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \hat{\alpha}_{s^{-1}}(X)\, d\mu(s).$$

基于前面的结果，我们现在为平均$A_n(\cdot)$ 建立随机遍历定理。为此，我们先回顾 [BS23b] 中的以下分解定理。

定理 5.1 (Neveu 分解)。设$(\mathcal{M}, G, \alpha)$ 是一个非交换动力系统，并设 τ 是 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规迹态。那么存在投影 $e_1, e_2 \in \mathcal{P}(\mathcal{M})$ 满足$e_1 + e_2 = 1$ 和 $e_1 e_2 = 0$，并具有以下性质：

(i) 存在一个 G-不变正规态 ρ，定义在 $\mathcal{M}$ 上，其支撑投影为 $s(\rho) = e_1$.
(ii) 存在一个元素 $x_0 \in \mathcal{M}$，其支撑为 $s(x_0) = e_2$，使得

$$\frac{1}{\mu(F_n)} \int_{F_n} \alpha_s(x_0)\, d\mu(s) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad in\ \|\cdot\|.$$

此外，投影 $s(\rho)$ 和 $s(x_0)$ 是唯一确定的。

接下来，我们记录这一分解的若干基本推论，参见 [BS23b]。

(1) 对任意 $g \in G$ 和 $i = 1,\ 2$，投影 e_i 是 α-不变的，也就是说，$\alpha_g(e_i) = e_i$。(2) α 在约化冯·诺伊曼代数 $\mathcal{M}_{e_i} := e_i \mathcal{M} e_i$ 上的限制诱导出一个自同构作用。因此，对于每个 $i = 1,\ 2$，三元组 $(\mathcal{M}_{e_i},\ G,\ \alpha)$ 构成一个非交换动力系统。

(3) 对于 $i=1$，2 以及所有 $g\in G$，诱导的预对偶作用 $\hat{\alpha}_g$ 在 $L^1(\mathcal{M},\ \tau)$ 上满足

$$\hat{\alpha}_g(e_iXe_i)=e_i\hat{\alpha}_g(X)e_i,\qquad \forall X\in L^1(\mathcal{M},\tau).$$

因此，遍历平均满足

$$e_iA_n(X)e_i=A_n(e_iXe_i),\qquad \forall X\in L^1(\mathcal{M},\tau),\ n\in\mathbb{N},\ i=1,2.$$

对于 $i=1$，2，我们定义归一化迹 $\tau_{e_i}:=\tau(e_i)^{-1}\tau|_{e_i\mathcal{M}e_i}$。现在可以陈述主要的收敛结果。

定理 5.2。 设 $(\mathcal{M},G,\alpha)$ 是一个非交换动力系统，且 τ 是 $\mathcal{M}$ 上的忠实正规迹态。设 $e_1,e_2\in\mathcal{M}$ 是由 *Neveu* 分解得到的投影。则以下断言成立：

(i) 对于每个 $B\in L^1(\mathcal{M}_{e_1},\tau_{e_1})$，存在 $\bar{B}\in L^1(\mathcal{M}_{e_1},\tau_{e_1})$，使得 $A_n(B)$ 双侧几乎一致收敛至 B。此外，$A_n(B)$ 依测度收敛至 B。(ii) 对于每个 $B\in L^1(\mathcal{M}_{e_2},\tau_{e_2})$，序列 $A_n(B)$ 依测度收敛至0。

此外，对于任意 $X\in L^1(\mathcal{M}、\ \tau)$，存在元素 $Z\in L^1(\mathcal{M}、\ \tau)$，使得 $A_n(X)$ 依测度收敛于 Z，并满足

$$e_1Ze_1=Z,\qquad e_2Ze_2=0.$$

证明。 由 Neveu 分解（定理5.1）以及定理 4.13的双侧几乎一致收敛结果，论证可逐字照搬 [BS23b，第 5]节。□

致谢</style】： P. Bikram 感谢 ANRF/ARGM/2025/001021/MTR 项目以及印度政府的支持。

References

[AAB+10] Claire Anantharaman、Jean-Philippe Anker、Martine Babillot、Aline Bonami、Bruno Demange、Sandrine Grellier、Fran¸cois Havard、Philippe Jaming、Emmanuel Lesigne、Patrick Maheux、Jean-Pierre Otal、Barbara Schapira 和 Jean-Pierre Schreiber, *Théorèmes ergodiques pour les actions de groupes*, 《L' Enseignement Math´ematique [》专著，L'Enseignement Math´ematique], 第 41 卷，L'Enseignement Math´ematique，日内瓦，2010 年，附有 Amos Nevo 撰写的英文前言。MR 2643350[BS23a] Panchugopal Bikram 和 Diptesh Saha, *On the non-commutative ergodic theorem for semigroup and freegroup actions*, arXiv:2307.00542（2023）。[BS23b] ,

On the non-commutative neveu decomposition and ergodic theorems for amenable group action, 《Journal of Functional Analysis》**284**（2023），第 1 期，109706。[BS26] Panchugopal Bikram 和 Diptesh Saha,

Maximal inequalities associated to doubling condition for statepreserving actions, 《J. Funct. Anal.》**290**（2026），第 2 期，论文编号 111201，共 39 页。MR 4964146[Cal53] Alberto P Calderon, *A general ergodic theorem*, 《Annals of Mathematics》（1953），182–191。[CDN78] J.-P. Conze 和 N. Dang-Ngoc,

Ergodic theorems for noncommutative dynamical systems, 《Inventiones Math- ematicae》**46**（1978），第 1 期，1–15。MR 500185[CW22] L´eonard Cadilhac 和 Simeng Wang,

Noncommutative maximal ergodic inequalities for amenable groups, arXiv 预印本 arXiv:2206.12228（2022）。[CXZ25] Ujan Chakraborty、Runlian Xia 和 Joachim Zacharias, *Ergodic average dominance for unimodular amenable groups*, arXiv 预印本 arXiv:2512.12894（2025）。

[Hia21] Fumio Hiai, *Lectures on selected topics in von neumann algebras*, EMS Press Berlin, 2021 年。[HLW21] Guixiang Hong、Ben Liao 和 Simeng Wang, *Noncommutative maximal ergodic inequalities associated with doubling conditions*, 《杜克数学杂志》170（2021），第 2 期，205–246。MR 4202493[JX07] Marius Junge 和 Quanhua Xu, *Noncommutative maximal ergodic theorems*, 《Journal of the American Math- ematical Society》20（2007），第 2 期，385–439。MR 2276775[K̈78] Burkhard K¨ummerer, *A non-commutative individual ergodic theorem*, 《Inventiones Mathematicae》46（1978），第 2 期，139–145。MR 482260[Lan76] E. Christopher Lance, *Ergodic theorems for convex sets and operator algebras*, 《Inventiones Mathematicae》37（1976），第 3 期，201–214。MR 428060[Lin01] Elon Lindenstrauss, *Pointwise theorems for amenable groups*, 《Inventiones Mathematicae》146（2001），第 2 期，259–295。MR 1865397[Lit24] Semyon Litvinov, *Notes on noncommutative ergodic theorems*, 《美国数学会会刊》（2024）。[Nel74] Edward Nelson, *Notes on non-commutative integration*, 《Journal of Functional Analysis》15（1974），第 2 期，103–116。[SZ19] Serban Str˘atil˘a 和 Laszlo Zsido, *Lectures on von neumann algebras*, 剑桥大学出版社，2019 年。[Yea77] F. J. Yeadon, *Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. I*, 《伦敦数学会杂志》。第二辑 16（1977），第 2 期，326–332。MR 487482[Yea80] , *Ergodic theorems for semifinite von Neumann algebras. II*, 《剑桥哲学学会数学汇刊》88（1980），第 1 期，135–147。MR 569639

School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar ,
An OCC of Homi Bhabha National Institute, Jatni- 752050, India*Email address*: bikram@niser.ac.in
School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar

,
An OCC of Homi Bhabha National Institute, Jatni- 752050, India*Email address*: hariharan.g@niser.ac.in
School of Mathematical Sciences, National Institute of Science Education and Research, Bhubaneswar

,
An OCC of Homi Bhabha National Institute, Jatni- 752050, India*Email address*:
sudipta.kundu@niser.ac.inInstitute of Mathematics of the Polish Academy of Sciences,
ul. Sniadeckich 8, 00–656 Warszawa,Poland*Email address*: dptshs@gmail.com